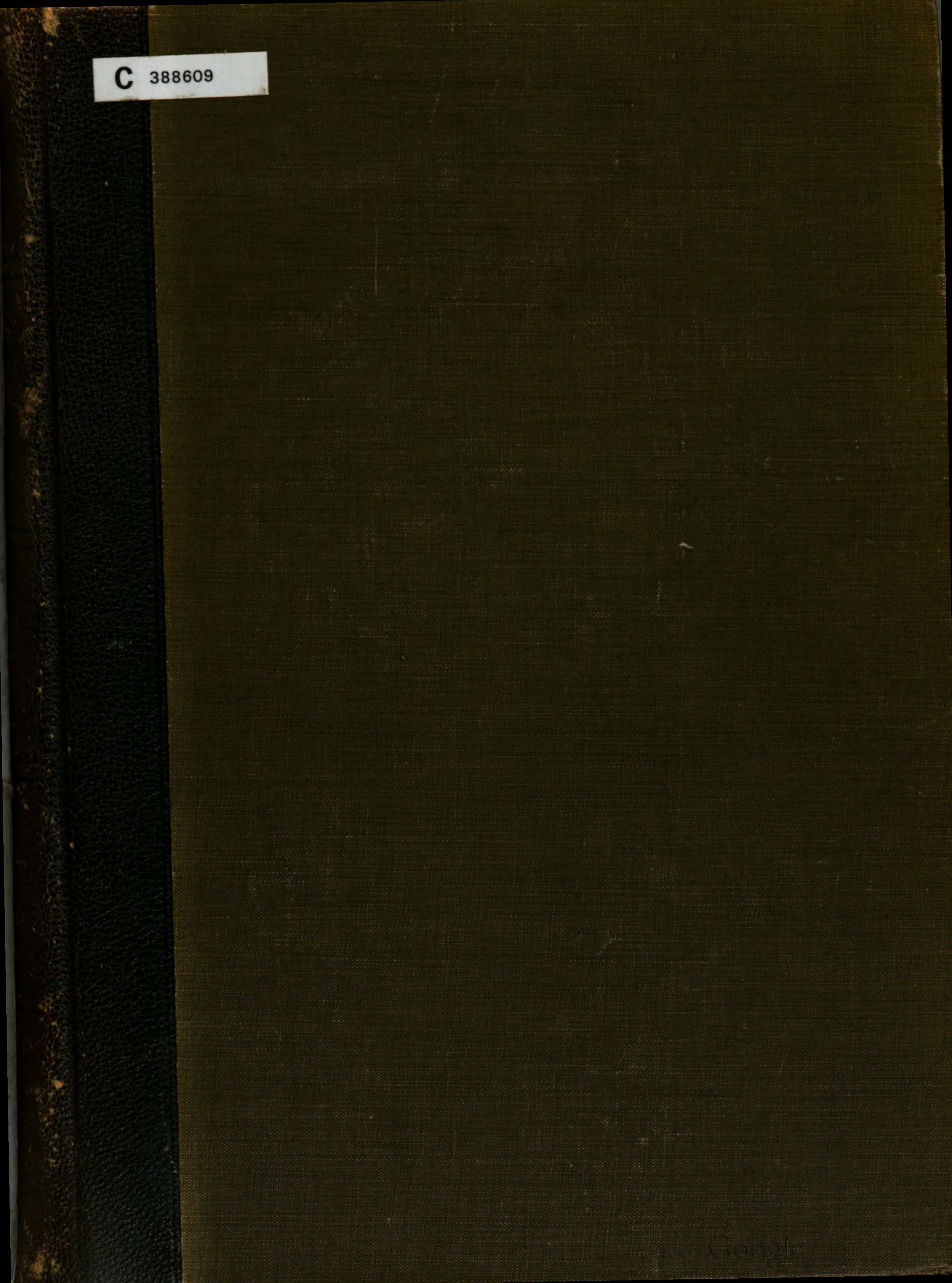

C 388609


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



Physikalische Zeitschrift

Herausgegeben von

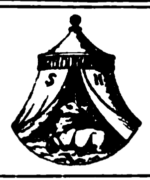
Professor Dr. P. DEBYE
in Göttingen

ZWANZIGSTER JAHRGANG
1919
Mit fünfzehn Tafeln

Leipzig
Verlag von S. Hirzel
1919

Physikalische Zeitschrift

Herausgeber:
H. Th. Simon und P. Debye
in Göttingen



Schriftleitung:
H. Th. Simon in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 40 Mark, im Ausland 45 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 60 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon, Göttingen, Nikolausberger Weg 20, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstraße 2.

No. 1. 1. Januar 1919. No. 533. 20. Jahrgang.

Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechungen.)

Autoren- und Sachregister.

Abkürzungen: (B.) = Besprechung, (R.) = Referat, (T.) = Tagesereignisse, (Z.B.) = Zusammenfassende Bearbeitung.





I.

J.

K.

Q.

R.

S.



Namensverzeichnis der „Personalien".



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 1. | 1. Januar 1919. Redaktionsschluß für No. 2 am 2. Januar 1919. | 20. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Erklärung des Hittorfschen Kathodendunkelraumes einer Glimmentladung.

Von Ragnar Holm und Thea Krüger.

Mit Tafel I.

Wir haben die folgenden Versuche angestellt, um diejenige Theorie des Hittorfschen Dunkelraumes und des Saumes einer Glimmentladung, welche der eine von uns früher veröffentlicht hat[1]), experimentell zu prüfen.

§ 1. Beobachtung am Hittorfschen (oder ersten) Dunkelraum einer Glimmentladung.

Zunächst haben wir, wie schon früher der eine von uns[2]), Spektralaufnahmen vom Lichte des ersten Dunkelraumes und der Umgebung des Glimmlichtsaumes gemacht. Von diesen Teilen der Entladungsbahn wurde durch ein photographisches Objektiv ein Bild auf den Spalt eines Spektrographen[3]) so geworfen, daß die Achse des Spektrographen in der Ebene der Kathodenoberfläche lag, und die Richtung des Spaltes senkrecht zu dieser war. Die Entfernung Objektiv-Glimmsaum war so gewählt, daß der Öffnungswinkel des in das Objektiv hineintretenden Lichtbündels sehr klein wurde (1°—1,5°). Dies sollte bewirken, daß trotz der Tiefe des Gegenstandes (Rohrdurchmesser = 2 cm) ein scharfes Bild des Glimmsaumes entstand. Als Füllgas diente teils H_2 teils N_2. Das Resultat der Aufnahmen zeigt die Tabelle I.

1) R. Holm, diese Zeitschr. 16, 20—30, 1915, sowie § 9 der vorangehenden Abhandlung (diese Zeitschr. 19, 555, 1918).
2) R. Holm, diese Zeitschr. 16, 22, 1915; vgl. auch Göttinger Abh. Math.-Phys. Klasse. N. F. Band IV, Nr. 2, 1908, Anfang § 46.
3) Der betreffende Spektrograph wurde uns freundlichst von Herrn Prof. E. Gehrcke aus der Instrumentensammlung der Phys.-Techn. Reichsanstalt zur Verfügung gestellt.

Tabelle I.

	In nächster Nähe der *Al*-Kathode. (Erste Kathodenschicht.)	Im Dunkelraum	Im Glimmlichtsaum und dem anschließenden neg. Glimmlicht.
In H_2			
Linienspektrum	stark	stark, mit einem schwachen Stärkeminimum	stark, im Glimmlicht abnehmend
Viellinienspektrum	deutlich	sehr schwach	vom Saum an plötzlich stark
Kontinuierl. Spektrum	unsicher	nichts	schwach
Al-Linien	3944 u. 3962 Å deutlich	nichts	nichts
Hg-Linien	nichts	nichts	4359 deutlich, ein Stück hinter dem Saum anfangend
In N_2			
Negatives Bandenspektrum	sehr stark	etwas geschwächt, innerhalb des Dunkelraumes wieder zunehmend	sehr stark
Positives Bandenspektrum	stark	nichts	stark
Al-Linien	3944 u. 3962 Å deutlich	nichts	nichts
Sonstige fremde Linien	einige deutlich	nichts	nichts

§ 2. Beobachtungen an künstlichen Dunkelräumen.

Weitere Beobachtungen machten wir mit dem in Fig. 1 schematisch gezeichneten Rohr. K bedeutet eine Wehneltkathode. Das Potential ihrer einen Klemme sei mit Null be-

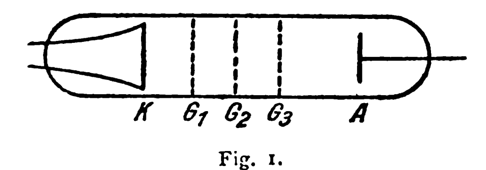


Fig. 1.

zeichnet. Das der andern hatte während des Heizens etwas weniger als zwei Volt. G_1, G_2, G_3 sind drei Netze aus 0,1 mm dicken *Pt*-Drähten mit 1 mm Maschenweite und einem Abstand von 8 mm untereinander. Der Abstand G_1—K war 5 mm. Der Rohrdurchmesser betrug 50 mm. Die Spektralaufnahmen wurden mit dem vorher erwähnten Spektrographen gemacht unter ganz ähnlichen Aufnahmebedingungen. Das Netz G_1 wurde dauernd auf etwas weniger als 10 Volt gehalten, Die Anode A war mit G_3 verbunden, so daß das Feld zwischen G_3 und A nur äußerst schwach sein konnte.

Die Potentiale der Netze G_2 und G_3 wurden variiert. Dabei entstanden verschiedene Entladungsphänomene. Zwei für uns besonders wichtige sind in Fig. 2 schematisiert gezeigt. *a*, *b* und *c* bedeuten drei Lichtsorten, über

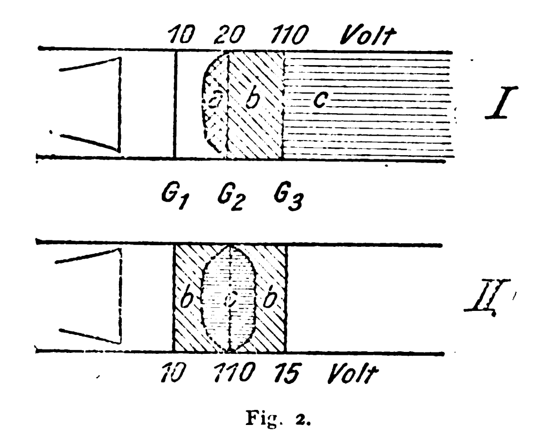


Fig. 2.

deren Farben und spektralen Verschiedenheiten weiter unten die Rede sein soll.

Bei der besonderen Bestimmung der Geschwindigkeitspotentiale, welche die Elektronen besitzen müssen, um Licht von der Sorte *a* zu erregen, wurde das zwischen G_2 und G_3 entstehende Licht beobachtet, während G_2 und G_3 miteinander leitend verbunden waren und die in der Tabelle II angegebene Spannung bekamen. Die angegebenen Spannungen sind also nicht gegen die hier kleinen Differenzen zwischen Netzspannung und Spannung zwischen den Maschen und nicht gegen den Spannungsabfall in der Kathode korrigiert.

Die Form Fig. 2 I zeigt sich, wenn G_2 eine Spannung von etwa 20 Volt, G_3 von mindestens etwa 80 Volt in H_2 bekommt, während in N_2 die Spannung von G_2 dieselbe bleibt und G_3 mindestens etwa 60 Volt bekommt. Zwischen G_1 und G_2 von einer Stelle mit vermutlich 15 bis 18 Volt ab bis zum Netz G_2 tritt ein kräftiges Leuchten *a* auf, zwischen G_2 und G_3 sieht man einen schwach mit violett-blauem *b*-Licht leuchtenden, künstlichen Dunkelraum. Die Spannung, die an G_3 angelegt werden muß, damit ein solcher Dunkelraum deutlich entsteht, ist sehr unscharf definiert, was zum Teil auf störenden Raumladungen beruht. Hinter G_3 ist wieder ein kräftig leuchtendes Gebiet, *c*-Licht. Dieses wird von schnellen und langsamen Elektronen erregt.

Die Form Fig. 2 II zeigt sich, wenn G_1 und G_3 beide kleine, G_2 eine größere Spannung hat. Die *b*- und *c*-Lichtsorten treten annähernd so, wie die Abbildung zeigt, auf. Der für die Erscheinungen I und II geeignete Gasdruck war etwa 0,05 mm *Hg*. Die Stromstärken betrugen 0,5 bis $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ Amp.

Die Zusammensetzung der Lichtsorten *a*, *b*, *c* war folgende:

Tabelle II.

in H_2:

a-Licht: Von etwa 13 bis 14 Volt ab bläulich; nach nicht ganz sicheren Beobachtungen hauptsächlich kontinuierliches Spektrum. Von 18 Volt ab rötlich, Viellinien- und kontinuierliches Spektrum.
von 27—28 Volt ab kommt H_γ hinzu,
von 30—31 Volt ab kommt H_β hinzu;

b-Licht: Von einem Gradienten 100 Volt/cm ab wird das Viellinienspektrum sehr geschwächt. Dabei ist das Linienspektrum kräftig, während das kontinuierliche Spektrum fehlt.

c-Licht: Linien- und Viellinienspektrum kräftig: vielleicht auch schwaches kontinuierliches Spektrum;

in N_2:

a-Licht: Von etwa 12,8 bis 14 Volt ab bis 18 Volt hinauf gelb. Es besteht dabei hauptsächlich aus den ersten Deslandresschen Bandengruppen 6600—6250 Å, 6100—5700 Å, 5500—5320 A; von 18 Volt ab wird es rötlich und das ganze positive Bandenspektrum erscheint. Von 25 bis 25,5 Volt ab kommen dann noch die negativen Banden dazu.

b-Licht: Von einem Gradienten 80 Volt/cm ab tritt nur das negative Bandenspektrum auf.

c-Licht: Negative und positive Banden.

Die Spektraltafel (I) zeigt zehn unserer Aufnahmen, die obere Reihe mit H_2, die untere mit N_2-Füllung. Nr. 1, 2, 6 und 7 sind Aufnahmen vom ersten Dunkelraum und negativen Glimmlicht einer Glimmentladung, die anderen mit Ausnahme von 5 und 10 sind Aufnahmen mit künstlichen Dunkelräumen, und zwar sind Nr. 3, 4 und 8 Aufnahmen von Entladungserscheinungen der Art I, während Nr. 9 eine solche der Art II ist. Bei Nr. 4 war die H_2-Füllung mit etwas N_2 gemischt, bei 8 und 9 der N_2 mit wenig H_2 verunreinigt. Die Aufnahmen 5 und 10 zeigen die Spektren der positiven Schichten zum Vergleich mit den übrigen. Das von Stark[1]) beschriebene und gedeutete kontinuierliche Spektrum ist in Aufnahme 5 kräftig vertreten. Die Spektren Nr. 1, 2, 6 und 7 sind links von der Kathode, Nr. 5 und 10 links von der Anode begrenzt. An den übrigen Spektren zeigen sich die Netze als Querschatten. Die Aufnahmen haben alle dieselbe Skala mit Ausnahme von Nr. 5, deren Skala ein wenig kleiner als die der übrigen ist. Ein Versuch mit Querfeldern zu arbeiten, mußte infolge äußerer Umstände aufgegeben werden. Ein Erfolg wäre auch zweifelhaft, weil, wie Prof. Seeliger bemerkt hat, die Verschiebung des Ionisationsgebiets bei Querfeldern zu unübersichtlichen Feldformen führt.

§ 3. Deutung der Beobachtungen.

Nach der erwähnten Holmschen Theorie ist das von einem Ionisationsgebiet ausgesandte Licht nicht nur durch die Anzahl der Stöße und die Geschwindigkeit der stoßenden Elektronen bzw. Ionen bestimmt, sondern es ist auch von der Feldstärke abhängig. Wenn an einer Stelle das Feld so kräftig ist, daß es das Kleben und die davon abhängige Wiedervereinigung getrennter Elektronen und Ionen verhindert, so fällt dort das mit der Wiedervereinigung verbundene Licht fort, es entsteht ein „Dunkelraum".

Die Frage nach den Trägern der Spektren ist noch nicht geklärt. Die vielseitig begründeten Ansichten J. Starks stehen im Gegensatz zu den Annahmen, die auf dem Bohr-Debye-Sommerfeldschen Atommodell fußen. Zu diesen Streitfragen soll hier keine Stellung genommen werden, und es wird nicht versucht, die von uns gemachten Annahmen bestimmten Atommodellen anzupassen. Die beobachteten Spektren sollen von der Holmschen Wiedervereinigungstheorie ausgehend erklärt werden, frei von hierfür überflüssigen Zutaten. Es wird hier angenommen:

Durch langsame Elektronen (Geschwindigkeit unter 18 Volt) erzeugte Ionen entsenden bei Wiedervereinigung zum neutralen Molekül in H_2 ein bläuliches Licht, von vermutlich kontinuierlichem Spektrum, in N_2 die rotgelben Banden zwischen 6600 und 5320 Å.

Durch etwas schnellere Elektronen (Geschwindigkeit 18 bis etwa 30 Volt) erzeugte Ionen entsenden bei Wiedervereinigung in H_2 das Viellinienspektrum, in N_2 die bekannten grünen bis ultravioletten, sog. positiven Banden.

Die genannten Spektren können auch ohne vorangehende vollständige Dissoziation bei der Wiederherstellung des neutralen Moleküls nach teilweiser Lockerung des Gebildes emittiert werden. Eine solche Lockerung kann vermutlich durch Elektronenstoß und besonders auch durch Kanalstrahlenstoß zustande gebracht werden.

Die Wiedervereinigung freier Elektronen und Ionen geschieht in zwei Stufen und kann durch starke Felder verhindert werden. Der Gradient muß dann größer als etwa 50 bis 100 Volt/cm sein. (Vgl. die vorangehende Arbeit — diese Zeitschr. **19**, 555, 1918 — § 3 und 9.)

Das Balmersche Spektrum des Wasserstoffs (bzw. das negative Bandenspektrum des Stickstoffs) wird von Elektronen mit mehr als 28 bis 30 (bzw. 25) Volt Geschwindigkeitspotential und besonders durch schnellere Kanalstrahlen erzeugt[1]). Es entsteht nicht bei der Wiedervereinigung freier Ionen.

Durch diese Annahmen erklären sich unsere Beobachtungen (Spektrogramm 1, 2, 6, 7) am Dunkelraum und am Saume einer Glimmentladung, so wie es in § 9 der hier vorangehenden Abhandlung auseinandergesetzt ist. Die zum großen (bzw. größten) Teil gerade bei der Wiedervereinigung entstehenden Spektren (Viellinienspektrum bzw. positive Banden) werden im Dunkelraum vom dortigen starken Feld mehr oder weniger vollständig ausgelöscht und setzen am Saum wieder plötzlich stark ein. Die *H*-Linien und die negativen *N*-Banden werden in der ersten Kathodenschicht von den Kanalstrahlen stark erregt. Die schnellen Elektronen im Dunkelraum erzeugen sie auch, und zwar infolge der Zunahme des Elektronenstromes, in nach dem Saume zu allmählich wachsender

1) J. Stark, Ann. d. Phys. **52**, 255, 1917; auch Jahrb. der Radioakt. **14**, 139, 1917.

1) Die Verschiedenheiten der betr. Träger interessieren uns hier nicht.



Stärke. Etwa in der Mitte des Dunkelraumes bleibt also für diese Linien und Banden ein Gebiet mit kleiner Intensität[1]). Die Linien reichen, zunächst ungeschwächt, in das neg. Glimmlicht hinein.

Die Erscheinung der Fig. 2 I erklärt sich auch durch die gemachten Annahmen. Zwischen den Netzen G_1 und G_2 fängt die Ionisation und das Leuchten an einer Stelle an, wo das Potential etwa 13 bis 18 Volt beträgt. Das durch die Stöße der langsamen Elektronen und durch die Wiedervereinigung erzeugte Licht kommt hierbei zum Vorschein. Zwischen G_2 und G_3 im *b*-Gebiet herrscht ein starkes Feld, wodurch ein „Dunkelraum" bedingt ist. Das beim Stoßen etwas schnellerer Elektronen (über 25 bis 30 Volt) entsandte Licht gehört zu den Lichtsorten *b* und *c*. In H_2 kommt in beiden Gebieten, obwohl schwächer, auch das beim Stoßen langsamerer Elektronen erzeugte Licht vor (Wiederherstellung nach Lockerung). Im schwachfeldigen *c*-Gebiet hinter G_3 tritt neben dem übrigen auch Wiedervereinigungs-Licht auf, wodurch sich das *c*-Gebiet vom *b*-Gebiet abhebt, ähnlich wie sich das Glimmlicht vom Hittorfschen Dunkelraum abhebt.

Ein von Kanalstrahlen erzeugtes Licht konnte mit einiger Sicherheit nur bei hohen G_2-Potentialen, also bei den entsprechend recht schnellen Kanalstrahlen, festgestellt werden. Wir bekamen nämlich bei hohen G_2-Potentialen zuweilen eine den ganzen Raum von der Kathode bis über G_3 hinaus füllende Leuchterscheinung. Dabei wurde vermutlich das die Kathode umgebende aus *a*- bzw. *c*-Licht bestehende Leuchten von Kanalstrahlen erzeugt.

Die Erscheinung, Fig. 2 II, erklärt sich ebenfalls auf diese Art. Im ganzen Gebiet zwischen G_1 und G_3 würde, wenn keine Raumladungen vorhanden wären, ein starkes, einen Dunkelraum bedingendes Feld herrschen. In Wirklichkeit wird der Dunkelraum auf das in der Abbildung schwach schattierte *b*-Gebiet zusammengedrängt, weil wegen der starken Ionisation um G_2 herum ein starkleitendes, schwachfeldiges Gebiet geschaffen wird, in welchem Wiedervereinigung stattfinden kann.

Es ist nicht von vornherein klar, daß die obige Erklärung die richtige, einzig mögliche ist. Vor allen Dingen muß geprüft werden, ob die Lichtsorten *a*, *b*, *c* nicht in Übereinstimmung mit der Auffassung von J. Stark und Gehrcke und Seeliger[2]) nur als Funktionen der Elektronengeschwindigkeit gedeutet werden können. Gegen eine solche Deutung, also für die Holmsche Theorie, sprechen einige Umstände, die jetzt geschildert werden sollen.

Der Dunkelraum im Falle I kann, bei etwa 0,05 mm Druck, geeigneter Stromstärke und Spannung von der in Fig. 2 angegebenen Größe, die an G_3 auch höher sein kann, sehr scharf[1]) an dem zwischen den Netzebenen G_2 und G_3 vorhandenen starkfeldigen Gebiet begrenzt werden. Dabei ist dasjenige Licht, wodurch sich *a* und *c* von *b* abheben, gerade von der Sorte, die nach der erwähnten Auffassung von langsamen Elektronen erzeugt werden müßte.

Wir behaupten: Das Auftreten von Elektronen mit gewissen kleinen Geschwindigkeiten kann in den vorliegenden Fällen nicht so streng begrenzt sein, daß dadurch die erwähnte Schärfe der Dunkelraumgrenzen erklärlich wird. Bezüglich der Grenze G_3 kann der Beweis für diese Behauptung so gestaltet werden, wie in § 8 der vorangehenden Arbeit der Beweis, daß die Theorie der ausschließlich von der Geschwindigkeit der stoßenden Elektronen abhängigen Spektren nicht die Schärfe des Glimmlichtsaumes erklären kann. Man beachte hierbei, daß bei den Versuchsverhältnissen der Abstand der Netze G_2 und G_3 nur $^1/_2$ mittlere freie Elektronenweglänge betrug.

Die scharfe Grenze bei G_2 ist ohne die Holmsche Theorie deswegen unverständlich, weil die dort anlangenden langsamen Elektronen nicht mit einheitlicher Geschwindigkeit ankommen und nicht plötzlich alle eine viel höhere Geschwindigkeit dort bekommen können. Daß der Geschwindigkeitszuwachs hinter G_2 tatsächlich ein allmählicher ist, zeigt sich besonders deutlich im Spektrogramm 3. Dort hat im ganzen Gebiet $G_2 G_3$ das Viellinienspektrum dieselbe Stärke, was darauf schließen läßt, daß die Stoßdichte auf dem Wege von G_2 bis G_3 sich wenig ändert. Die Linien H_β und H_γ wachsen aber auf dem Wege von G_2 nach G_3 ganz allmählich mit steigender mittlerer Elektronengeschwindigkeit empor zu größerer Stärke.

Beachtenswert ist, daß das *c*-Licht im ganzen, etwa 5 freie Elektronenweglängen umfassenden *c*-Gebiet dieselbe Zusammensetzung hat. Noch auffallender ist, daß bei einer Glimmentladung das ganze negative Glimmlicht mit Ausnahme des Saumgebiets ein gleichartig zusammengesetztes Licht ausstrahlt. Die letzt-

1) Dieses Intensitätsminimum ist in den Originalaufnahmen bei sowohl *H*- wie *N*-Spektren deutlich. Bei den Reproduktionen ist es nur in den *N*-Spektren deutlich.

2) E. Gehrcke u. R. Seeliger, Verhandl. d. D. Phys. Ges. **14**, 335 u. 1023, 1912; R. Seeliger, diese Zeitschr. **16**, 55, 1915.

1) Bedeutend schärfer als nach den Spektralaufnahmen zu beurteilen, da während der Belichtungszeit die Erscheinung nicht ganz konstant blieb.

erwähnten Tatsachen wären schwer begreiflich, wenn die betreffenden verschiedenen Spektren unmittelbar beim Stoß von verschieden schnellen, verschieden kräftig absorbierten Elektronen erzeugt würden, welche doch wohl alle außerhalb des betr. Gebiets ihre Geschwindigkeiten bekommen haben. Das Verhältnis zwischen der von langsamen und der von schnellen Elektronen erzeugten Lichtintensität müßte ja am Saum viel größer sein als am anderen Ende des Glimmlichts. Die Erklärung ist wohl darin zu suchen, daß die von Elektronen mit recht verschiedenen Geschwindigkeiten erzeugten Ionen bei der Wiedervereinigung zum neutralen Komplex dasselbe Spektrum aussenden, wie dies in § 9 der vorangehenden Arbeit ausgesprochen ist. Diesem Spektrum überlagert sich im c-Gebiet und im negativen Glimmlicht das beim Stoß unmittelbar (nicht bei Wiedervereinigung freier Ionen) erregte Licht.

Ein von positiven Ionen erzeugtes Leuchten konnte nicht bei unseren Versuchen störend auftreten und somit unsere obigen Schlußfolgerungen beeinträchtigen, denn die Erzeugung der Wiedervereinigungsspektren seitens positiven Ionen mit hier in Frage kommenden Geschwindigkeiten ist äußerst schwach, wenn sie überhaupt vorhanden ist. Dies folgt teils aus dem Vorhandensein des Dunkelraumes einer gewöhnlichen Glimmentladung an einer Stelle, wo viele Ionen mit den betreffenden Geschwindigkeiten passieren müssen, teils unmittelbar aus Beobachtungen von Seeliger[1]).

Wir meinen durch die hier besprochenen Versuche nicht die Holmsche Theorie des Wiedervereinigungsleuchtens bewiesen zu haben. Wir meinen aber, daß sie eine weitere Stütze dieser Theorie sind, die eine beachtenswerte Fähigkeit zur Erklärung des ersten Dunkelraumes der gewöhnlichen Glimmentladung gezeigt hat.

Die Versuche wurden teils im physikalischen Institut der Universität Berlin, teils im physikalisch-chemischen Laboratorium der Firma Siemens & Halske A.-G. Berlin gemacht. Den Herren H. Rubens, A. Wehnelt und H. Gerdien danken wir bestens, daß sie uns die Arbeit in den genannten Instituten gestatteten.

1) R. Seeliger, diese Zeitschr. 16, 55, 1915.

(Eingegangen 13. September 1918.)

Bestimmung des Streuungskoeffizienten von Röntgenstrahlen.

Von Hermann Holthusen.

Aus der Medizinischen Klinik Heidelberg.

Wenn ein Röntgenstrahlenbündel durch eine materielle Schicht fällt, so wird seine Intensität nicht nur dadurch verändert, daß ein Teil seiner Energie irgendwelche Transformationen erleidet, sondern es fehlen hinter der Schicht in dem Strahlenbündel auch alle die Strahlen, welche in der Schicht aus der Primärstrahlenrichtung abgelenkt wurden. Die Verminderung der Primärstrahlenenergie, soweit sie auf dem Wege über irgendeine Energietransformation stattfindet, bezeichnen wir als Absorption; wenn es sich um eine Ablenkung der Strahlen in andere Richtung handelt, sprechen wir von einer Streuung. Während die Intensität bei homogener Strahlung ohne weitere Einschränkung nach einem Exponentialgesetz abnimmt und durch Angabe eines konstanten μ, nämlich des Absorptionskoeffizienten, eindeutig bestimmt ist, gilt dasselbe für die Intensitätsabnahme durch Streuung nur bei einem Strahlenbündel mit kleinem Querschnitt. In diesem Falle wird die Strahlung durch Streuung ebenfalls nach einem exponentionellen Gesetz geschwächt und wir können nach Analogie des Absorptionskoeffizienten den Streuungskoeffizienten s als den auf die Masseneinheit umgerechneten Bruchteil der Strahlung definieren, der in einer dünnen Schicht dx aus der Primärstrahlenrichtung abgelenkt wird. Hat jedoch das Strahlenbündel einen größeren Querschnitt, so wird ein Teil der abgelenkten Primärstrahlen bei weiterem Durchgang durch die absorbierende Schicht wieder in die Primärstrahlenrichtung abgelenkt und die Abnahme der Intensität der Primärstrahlen durch Streuung erfolgt jetzt langsamer als es einem Exponentialgesetz entspricht, und um so langsamer, je größer der Querschnitt des Strahlenbündels ist.

Bei einer Absorptionsmessung durch Bestimmung der Intensität vor und hinter der absorbierenden Schicht messen wir also eine Größe, welche sich aus der eigentlichen Absorption, wie wir sie oben definiert haben, und aus der Streuung zusammensetzt und welche unter sonst gleichen Bedingungen von den geometrischen Verhältnissen bei der Messung (Querschnitt des Strahlenbündels) abhängig ist. Nur wenn man die Versuchsanordnung so trifft, daß man ein Strahlenbündel von kleinem Querschnitt benützt und die Entfernung des Absorptionskörpers vom Meßraum groß macht, erreicht man, daß die Wirkung der Streuung maximal wird, d. h., daß praktisch überhaupt

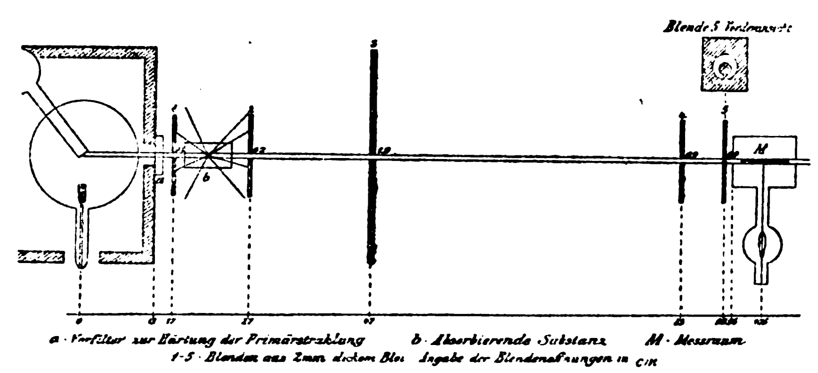


Fig. 1.

keine aus der primären Richtung abgelenkten Strahlen gemessen werden (in unserem Falle nur Strahlen von weniger als 1° Ablenkung) (Fig. 1). In diesem Falle setzt sich der aus der Schwächung der Primärstrahlung durch den absorbierenden Körper berechnete Gesamtmassenabsorptionskoeffizient g/ϱ zusammen aus dem Massenabsorptionskoeffizienten μ/ϱ und dem Massenstreuungskoeffizienten s/ϱ[1])

$$\frac{g}{\varrho} = \frac{\mu}{\varrho} + \frac{s}{\varrho} \tag{1}$$

Die Bestimmung von μ/ϱ hat also, da wir nur g/ϱ messen können, die Kenntnis von s/ϱ zur Voraussetzung.

Über den Wert von s/ϱ sind eine Reihe von Angaben in der Literatur bekannt, die in hohem Maße voneinander abweichen und von 0,2 bis 1,18 schwanken[2]). Die Werte sind durch Bestimmung des Verhältnisses von gestreuter Strahlung zur Primärstrahlung unter verschiedenen Winkeln und Integration über den ganzen Raum unter Annahme bestimmter Verteilungsgesetze gewonnen. Neuerdings ist von Hull und Rice[3]) der Wert 0,12 für den Massenstreuungskoeffizienten angegeben worden. Diese Arbeit war mir leider im Original nicht zugänglich.

Von der Streuung ist ferner bekannt, daß sie dem Atomgewicht proportional ist, mit anderen Worten: daß gleiche Massen gleiche Mengen der Primärenergie streuen[4]). Wenigstens gilt das für Elemente, welche im periodischen System nahe beieinanderstehen. Beim Übergang von großen zu kleinen Wellenlängen soll nach Barkla[5]) der Massenstreuungskoeffizient auf das Mehrfache seines Wertes ansteigen. Die Untersuchung der Absorption von γ-Strahlen macht andererseits wahrscheinlich, daß für sehr kleine Impulsbreiten der Streuungskoeffizient wieder abnimmt. Nach den vorliegenden Zahlen erscheint eine erneute Bestimmung des Streuungskoeffizienten um so mehr gerechtfertigt, als eine genaue Bestimmung des Absorptionskoeffizienten μ/ϱ einer Substanz für eine bestimmte Röntgenstrahlung bei vielen Problemen der Röntgenstrahlentechnik eine ausschlaggebende Rolle spielt. Die Beantwortung der biologisch wichtigen Frage nach der von einem Gewebe absorbierten Energiemenge hat die Kenntnis seines Absorptionskoeffizienten zur Voraussetzung. In neuerer Zeit, in der sich das Bestreben geltend macht, auch für die technischen Röntgenstrahlen die Impulsbreite als Maß für die Härte der Strahlung einzuführen, gewinnt der Absorptionskoeffizient der Strahlung eine besondere Bedeutung durch die Beziehungen, die zwischen dem Absorptionskoeffizienten und der Wellenlänge einer Strahlung festgestellt sind[1]).

In den folgenden Untersuchungen wurde die Voraussetzung gemacht, daß:

1. der Massenstreuungskoeffizient für die untersuchten Elemente < 32 bzw. deren Verbindungen gleich groß ist;

2. das bekannte Verhältnis der μ/ϱ-Werte verschiedener Substanzen auch für die kleineren Wellenlängen des Röntgenspektrums konstant bleibt. Unter diesen beiden Voraussetzungen wurde durch Bestimmung des Gesamtabsorptionskoeffizienten für verschiedene Substanzen (Aluminium, Salpetersäure, Wasser, Kohle, Paraffin) mit der gefilterten homogenen Reststrahlung technischer Röntgenröhren und Glühkathodenröhren unter Anwendung der Formel (1) auf verschiedenen Wegen ein Wert des Massenstreuungskoeffizienten gefunden, welcher

1) Vgl. auch R. Glocker, diese Zeitschr. **18**, 302 u. 330, 1917.

2) C. G. Barkla u. C. A. Sadler, Phil. Mag. **17**, 739, 1909; J. A. Crowther, Proc. Roy. Soc. A. Vol. **85**, 29, 1911 und Vol. **86**, 478, 1912.

3) Hull u. Rice, Phys. Rev. **8**, 326, 1916.

4) C. G. Barkla, Phil. Mag. **5**, 685, 1903; J. A. Crowther, Phil. Mag. **14**, 653, 1907.

5) Zitiert nach G. Großmann, Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstrahlen **22**, 4, 431, 1914.

1) W. Kossel, Verh. d. D. phys. Ges. **16**, 898, 1914; M. Siegbahn, diese Zeitschr. **15**, 753, 1914.

Tabelle I.

Substanz	Atomgewichte A	Ordnungszahl Z	Dichte	Ausrechnung nach Bragg		Ausrechnung nach Glocker	
				$\frac{Z^4}{A}$	Relativwerte bez. auf Al.	$Z^{2,58}$	Relativwerte bezogen auf Al.
Paraffin C_nH_{2n}	$C=12$ $H=1$	$C=6$ $H=1$	0,89	92,7	$\frac{1}{11,4}$ 0,0877	141,7	$\frac{1}{10,5}$ 0,095
Kohle	$C=12$	$C=6$	1,36	108	$\frac{1}{9,8}$ 0,102	165	$\frac{1}{9,06}$ 0,116
Wasser	$O=16$ $H=1$	$O=8$ $H=1$	1,00	228	$\frac{1}{4,64}$ 0,215	336	$\frac{1}{4,45}$ 0,225
Salpetersäure	$N=14$ $O=16$ $H=1$	$N=7$ $O=8$ $H=1$	1,2	235	$\frac{1}{4,50}$ 0,222	345	$\frac{1}{4,33}$ 0,231
Aluminium	$Al=27,1$	$Al=13$	2,7	1058	1 1	1495	1 1
Kupfer	$Cu=63,57$	$Cu=29$	8,9	11130	$\frac{1}{0,0951}$ 10,5	4720	$\frac{1}{0,102}$ 9,85

im Bereich einer Strahlung von $\mu/\varrho_{Al}=0,6$ bis 0,15 zwischen 0,16 und 0,15 liegt. Bei einer Impulsbreite von etwa $\mu/\varrho_{Al}=0,6$ hat die Streuung ein Maximum und nimmt sowohl für kleinere als auch für größere Impulsbreiten ab. Für Verbindungen, in deren elementarer Zusammensetzung der Wasserstoff eine Rolle spielt, wurde eine charakteristische Abweichung des Streuungskoeffizienten nach oben gefunden, welche durch Annahme einer doppelten Streuung des Wasserstoffatoms quantitativ erklärt werden kann.

Während der Durchführung der folgenden Untersuchungen erschien die Arbeit von Glocker[1]), in welcher umgekehrt durch Anwendung der Formel (1) auf Messungen von Hull und Rice unter Zugrundelegung des von ihnen gefundenen Streuungskoeffizienten 0,12 die Proportionalität zwischen den wahren Absorptionskoeffizienten zweier Körper im Gegensatz zu ihren Gesamtabsorptionskoeffizienten erwiesen wurde.

Der Verfasser kam zur Aufstellung einer Beziehung zwischen dem Massenabsorptionskoeffizienten, der Ordnungszahl der untersuchten Substanz und der Wellenlänge, welche für das Gebiet $\lambda \leqq \lambda_A$ die Form annimmt

$$\mu/\varrho = 0,0195 \times Z^{2,58} \times \lambda^{2,8}. \qquad (2)$$

Bei unserer Untersuchung wurde die von Bragg[2]) aufgestellte Beziehung zwischen der Atomabsorption und der Ordnungszahl, nach welcher die Atomabsorption proportional Z^4 ist, zugrunde gelegt. Gegenüber der Braggschen Formel, welche sich auf die Atomabsorption bezieht, hat der Ausdruck von Glocker den Nachteil, daß hier durch Einführung der Masse auf die ausschließliche Benutzung der Ordnungszahl als der für die Absorption maßgebenden Größe verzichtet wird. Die Unterschiede zwischen den Werten A des Verhältnisses zweier Absorptionskoeffizienten, wie sie sich durch Berechnung der Braggschen bzw. Glockerschen Formel ergeben, gehen aus Tabelle I hervor.

Sie werden mit steigendem Atomgewicht um so geringer, je mehr das Atomgewicht den doppelten Wert der Ordnungszahl übertrifft. Es wird sich zeigen, daß der Unterschied zwischen den nach Bragg und Glocker berechneten Werten für A keinen erheblichen Einfluß auf das Resultat der Berechnung des Streuungskoeffizienten hat.

1) R. Glocker, diese Zeitschr. **19**, 66, 1918.
2) Zit. nach F. Voltz, Strahlenther. **8**, 337, 1918.

I. Versuchsanordnung.

Vergleichbare Werte erhält man nur dann, wenn man mit einer homogenen Strahlung arbeitet. Diese Forderung ist auch bei Verwendung technischer Röhren erreichbar, wenn man die praktisch homogene Reststrahlung nach starker Vorfilterung benutzt. Im folgenden wurde die mit Aluminium oder Kupfer vorgefilterte und auf ihre Homogenität geprüfte[1]) Reststrahlung einer Glühkathodenröhre am Hochspannungsgleichrichter bzw. einer Müller-Siederöhre am Triplexinstrumentarium (Induktor mit Quecksilberunterbrecher) benutzt. Die Versuchsanordnung geht aus Fig. 1 hervor. Die Röntgenröhre war in einem allseitig geschlossenen Blendenschutzkasten aufgestellt, die Bleiblenden auf einer optischen Bank der Firma Zeiß montiert, der Meßraum, der an anderer Stelle[2]) genauer beschrieben werden soll, war nach dem Prinzip eines Zylinderkondensators gebaut. Damit die stabförmige Aluminium-Innenelektrode von 2 mm Durchmesser nicht von Strahlen getroffen werden konnte,

1) Durch Prüfung der Veränderung des Absorptionskoeffizienten bei weiterer Filterung.
2) Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. **26**, Heft 3 (im Druck).

war in Blende 5 das Zentrum des Strahlenkegels durch einen Bleikern ausgeblendet (s. Fig. 1). Der Meßraum und das Elektrometer waren allseitig von einem 2 mm dicken Bleigehäuse umgeben, welches nur an der Vorder- und Hinterseite einen Ausschnitt für das durchtretende Röntgenstrahlenbündel hatte. Das elektrische Feld lieferte die Stadtspannung, welche zur Erreichung von Sättigungsstrom völlig ausreicht. Die Ablesung wurde an einem Quarzfadenelektrometer von Spindler & Hoyer gemacht, dessen Empfindlichkeit etwa 1 Volt/Skalenteil betrug. Die Abmessungen und Abstände der Blenden waren so getroffen, daß im ungünstigsten Falle nur Strahlen von weniger als 1° (genau 57′) Ablenkung in den Meßraum gelangen konnten, also praktisch die Gesamtabschwächung durch Streuung zum Ausdruck kam.

II. Die untersuchten Substanzen.

Es kam darauf an, die Wirkung der Streuung im Verhältnis zur Absorption möglichst stark hervortreten zu lassen. Aus diesem Grunde wurden Elemente bzw. Verbindungen mit möglichst kleinem Atomgewicht untersucht. Da die Absorption der Röntgenstrahlen eine Atomeigenschaft ist, unabhängig vom Molekularverbande, so gehorcht die Absorption chemischer Verbindungen und Gemenge einem einfachen Additionsgesetz, und zwar ist, wenn M_1, M_2, M_3 .... die Massen, Z_1, Z_2, Z_3 ... die Ordnungszahlen, A_1, A_2, A_3 ... die Atomgewichte bezeichnen,

$$\frac{M_1 \frac{Z_1^4}{A_1} + M_2 \frac{Z_2^4}{A_2} + \cdots}{M_1 + M_2 + \cdots}$$

der Ausdruck, welcher das relative Absorptionsvermögen in der betreffenden Verbindung darstellt und dem Ausdruck $\frac{Z^4}{A}$ der relativen Absorption eines Elements entspricht.

Bei der Auswahl der untersuchten Körper war der Gesichtspunkt maßgebend, möglichst die Eigenschaft derjenigen Atome festzustellen, welche sich an der Zusammensetzung der organischen Verbindungen, also auch des lebenden Gewebes, vorwiegend beteiligen, also in erster Linie C, O, H, N. Untersucht wurden Aluminium, Wasser, Salpetersäure, Kohle und Paraffin.

Für die Ausrechnung des relativen Absorptionsvermögens von Paraffin, einem Gemenge der höheren Homologe der Kohlenwasserstoffreihe wurde die Formel $C_n H_2{}^n$ benutzt. Der Unterschied zwischen dieser und der genaueren Formel $C_n H_{2n+2}$ kommt bei größeren n nicht mehr in Betracht.

III. Die Versuche.

A. Berechnung von s/ϱ aus dem Gesamtabsorptionskoeffizienten.

Hat man den Absorptionskoeffizienten g/ϱ von zwei verschiedenen Elementen oder Verbindungen bestimmt, so gilt für den ersten absorbierenden Körper:

$$g/\varrho = \mu/\varrho + s/\varrho$$

für den zweiten absorbierenden Körper

$$g'/\varrho' = \mu'/\varrho' + s'/\varrho'.$$

Ferner ist nach Voraussetzung

$$s/\varrho = s'/\varrho' \text{ und } \mu/\varrho : \mu'/\varrho' = A,$$

wir erhalten

$$s/\varrho = s'/\varrho' = \frac{A\, g'/\varrho' - g/\varrho}{A - 1} \cdots \quad (2)$$

Die nach dieser Formel berechneten Resultate (Tabelle II) zeigen gute Übereinstimmung für Kohle, Salpetersäure und Aluminium. Der Mittelwert des Streuungskoeffizienten bei einer Reihe von Untersuchungen beträgt 0,160. Es

Tabelle II.

1	2	3	4	5	6
Nr.	Halbwertschicht in mm Al	Aluminium μ/ϱ	Kohle μ/ϱ	Massenstreuungskoeffizient s/ϱ nach Bragg	Massenstreuungskoeffizient s/ϱ nach Glocker
1	2,9	0,877	0,237	0,164	0,159
2	5,02	0,511	0,199	0,164	0,160
3	8,56	0,307	0,170	0,154	0,153
4	9,47	0,271	0,170	0,159	0,157
			Salpetersäure μ/ϱ		
5	2,9	0,877	0,324	0,163	0,158
6	5,02	0,511	0,231	0,151	0,147
7	8,36	0,307	0,186	0,152	0,150

fällt auf, daß bei kleinen Impulsbreiten die Werte des Streuungskoeffizienten die Tendenz haben, kleiner zu werden, doch ist die Abnahme des Streuungskoeffizienten mit der Härte eine geringe. Bei einem Vergleich von Aluminium mit Paraffin und Wasser ergibt die Ausrechnung nach der Formel 2 einen 10 bis 15 Proz. höheren Wert als für Kohle und Salpetersäure. Es liegt nahe, diese Abweichung nach oben mit der auch auf anderem Wege gefundenen[1]) abnorm hohen Streuung des Wasserstoffatoms in Zusammenhang zu bringen. In beiden Verbindungen H_2O und $C_n H_{2n+2}$ macht

1) C. G. Barkla, Phil. Mag. 5, 685, 1903; J. A. Crowther, Phil. Mag. 14, 653, 1907.

der Wasserstoff sich als Masse trotz seines niedrigen Atomgewichts quantitativ geltend. Nimmt man an, daß der Massenstreuungskoeffizient für das Wasserstoffatom doppelt so groß ist wie für die übrigen Atome, so hat man den Massenstreuungskoeffizienten wasserstoffreier Körper für H_2O mit 1,1, für Paraffin mit 1,14 zu multiplizieren. Tabelle III zeigt, daß die unter

Tabelle III.

Nr.	Halbwertschicht	Aluminium μ/ϱ	Wasser μ/ϱ	μ/ϱ Wasser berechnet für $S/\varrho = 0{,}160$	μ/ϱ Wasser ber. für S/ϱ Wasser $= 0{,}178$
1	2,9	0,877	0,319	0,315	0,333
2	5,02	0,511	0,258	0,236	0,254
3	8,36	0,439	0,234	0,220	0,238
		0,307	0,212	0,192	0,210
			Paraffin μ/ϱ	μ/ϱ Paraffin ber. für $S/\varrho = 0{,}160$	μ/ϱ Paraffin ber. für S/ϱ Paraffin $= 0{,}182$
4	2,9	0,877	0,250	0,223	0,255
5	5,02	0,511	0,223	0,191	0,213
6	8,36	0,307	0,190	0,173	0,195
7	10,4	0,246	0,190	0,167	0,190

Zugrundelegung eines Massenstreuungskoeffizienten von 0,160 und unter Berücksichtigung des Faktors 1,1 bzw. 1,14 für Wasser und Paraffin gewonnenen Werte die gefundenen Abweichungen vollständig erklären.

Die naheliegende Frage, ob auch die Wasserstoffabsorption ähnliche Abweichungen zeigt, läßt sich durch die Untersuchungen der genannten wasserstoffhaltigen Substanzen nicht entscheiden; denn die absorbierende Wirkung des Wasserstoffanteils tritt beim Wasser gegenüber dem Sauerstoff, beim Paraffin gegenüber dem Kohlenstoff infolge der Proportionalität mit der 4. Potenz der Ordnungszahlen vollständig zurück. Legt man der Bestimmung von A die Formel von Glocker zugrunde, so werden die s/ϱ-Werte etwas kleiner. Daß die Unterschiede nur geringe sind, zeigt ein Vergleich von Kolonne 5 und 6 der Tabelle II.

B. Berechnung von s/ϱ durch Filterung mit äquivalenten Schichtdicken.

Gegen die mitgeteilten Untersuchungen läßt sich immerhin der Einwand machen, daß auch die untersuchte Reststrahlung nicht im spektralen Sinne homogen war, was zur Folge hat, daß der Absorptionskoeffizient von der Filterdicke abhängig ist und die Absorptionskoeffizienten zweier verschiedener Materialien sich nicht mehr aufeinander beziehen lassen.

Die Inhomogenität war, wie die Aluminiumabsorptionskurven der kupfergefilterten Strahlung ergaben, sicherlich sehr gering, aber sie war zumal bei der Glühkathodenröhre, deren Antikathode bekanntlich ein besonders komplexes Strahlengemisch aussendet, nicht vollständig zu vermeiden. Man kann jedoch bei geeigneter Versuchsanordnung den Streuungskoeffizienten auch für eine komplexe Strahlung ohne Bestimmung des Absorptionskoeffizienten messen.

Für jede der unendlich vielen einzelnen homogenen Komponenten einer komplexen Röntgenstrahlung gilt bei ihrer Absorption das Exponentialgesetz:

$$J = J_0 e^{-g d}, \text{ wobei } g = \mu + s \text{ ist.} \tag{3}$$

Nach Filterung einer komplexen Strahlung durch das Filter A von der Dicke d und den Absorptionskoeffizienten g_1, g_2, g_3 ..... für die verschiedenen Anteile der Strahlung ist deren Intensität:

$$J_A = J_{1,0}\, e^{-g_1 d} + J_{2,0}\, e^{-g_2 d} + J_{3,0}\, e^{-g_3 d} + \cdots$$

und nach Filterung derselben komplexen Strahlung durch das Filter B von der Dicke d' und dem Absorptionskoeffizienten g'_1, g'_2, g'_3

$$J_B = J_{1,0}\, e^{-g'_1 d'} + J_{2,0}\, e^{-g'_2 d'} + J_{3,0}\, e^{-g'_3 d'} + \cdots$$

Wenn sich s innerhalb des untersuchten Spektralbereiches nicht erheblich ändert, kann ich schreiben:

$$\frac{J_A}{J_B} = \frac{e^{-s d}[J_{1,0} e^{-\mu_1 d} + J_{2,0} e^{-\mu_2 d} + J_{3,0} e^{-\mu_3 d} + \ldots]}{e^{-s' d'}[J_{1,0} e^{-\mu'_1 d'} + J_{2,0} e^{-\mu'_2 d'} + J_{3,0} e^{-\mu'_3 d'} + \ldots]} \tag{4}$$

Wähle ich jetzt d und d' so, daß $d : d' = \mu'_1 : \mu_1$ ist und damit nach der früher gemachten Voraussetzung auch gleich $\mu'_2 : \mu_2$, $\mu'_3 : \mu_3$, so wird der in der Klammer befindliche Ausdruck im Zähler und Nenner gleich, und wenn ich das durch Messung bestimmte Verhältnis

$$\frac{J_A}{J_B} = C$$

setze, so erhalte ich

$$\frac{e^{-s d}}{e^{-s' d'}} = C \tag{5}$$

und wenn

$$\frac{s}{\varrho} = \frac{s'}{\varrho'}$$

ist:

$$\frac{s}{\varrho} = \frac{\log \operatorname{nat} C}{(\varrho' d' - \varrho d)} \tag{6}$$

Der Absorptionskoeffizient fällt also aus der Rechnung vollständig fort und die Änderungen von C sind bei gleicher Dicke nur noch auf

Tabelle IV.

Nr.	Härte	g/ϱ Alum.	Schichtdicken Alum.	Schichtdicken Kohle	Schichtdicken Paraffin	$C \frac{\text{Aluminium}}{\text{Kohle}}$	$C \frac{\text{Aluminium}}{\text{Paraffin}}$	s/ϱ Kohle	s/ϱ Paraffin
1	1	3,03	1,0	20,5	3,25	1,36	1,43	0,122	0,135
2	3	1,87	"	"	"	1,44	1,56	0,147	0,163
3	5	1,56	"	"	"	1,51	1,64	0,164	0,180
4	7	0,75	"	"	"	1,58	1,80	0,181	0,222
5	8	0,60	"	"	"	1,53	1,73	0,170	0,189
6	9	0,37	"	"	"	1,47	1,64	0,153	0,181
7	10	0,30	"	"	"	1,41	1,59	0,140	0,171
8	1	3,03	1,5	39,5	52,0	1,53	1,70	0,120	0,124
9	3	1,87	"	"	"	1,69	1,95	0,147	0,157
10	5	1,56	"	"	"	1,88	2,20	0,175	0,185
11	8	0,75	"	"	"	1,80	2,19	0,164	0,183
12	10	0,60	"	"	"	1,72	2,10	0,151	0,174

Veränderungen von s zu beziehen. Bei dieser Methode der „Filterung mit äquivalenten Schichtdicken", wie man sie auch bezeichnen kann, bei welcher die Strahlung nicht streng homogen zu sein braucht, konnten die Untersuchungen über einen größeren Bereich und auf größere Impulsbreiten ausgedehnt werden[1]). Bei einer größeren Reihe von Versuchen mit verschiedenen Filtern und verschiedenen Filterdicken ergab sich übereinstimmend eine Änderung von C mit Veränderung des Härtegrades. Und zwar nimmt C mit abnehmender Impulsbreite zunächst zu, erreicht bei etwa $\mu/\varrho_{Al} = 0{,}6$ ein Maximum und nimmt von da an wieder ab (Tabelle IV).

Dieses Resultat kann erstens bedeuten, daß in der Formel (4) der in Klammern stehende Ausdruck nicht gleich 1 wird, und zwar wird die Abweichung von 1 um so größer, je weniger das Verhältnis der Filterdicken $d:d'$ dem Verhältnis $\mu':\mu$ entspricht und je weicher die Strahlung ist. Aber es müßte das Verhältnis von $\mu:\mu'$ wesentlich anders sein, als es in unseren Versuchen angenommen wurde, um die gefundenen Variationen von C zu erklären, jedenfalls müßten sie einsinnig sein. Dasselbe gilt für die zweite Möglichkeit, daß sich das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten in dem untersuchten Spektralbezirk wesentlich ändert. Bisher sprechen alle Erfahrungen für einen weitgehenden Gültigkeitsbereich des Gesetzes von der Konstanz des Verhältnisses der Absorptionskoeffizienten (Kossel, Glocker). Es bleibt nichts anderes übrig, als anzunehmen, daß die Änderungen von C mit der Härte auf gleichsinnige Veränderungen von s/ϱ zu beziehen sind; dann besagen die Resultate der Tabelle III, daß der Streuungskoeffizient s/ϱ zwischen μ/ϱ_{Al} 1,5—0,6 ein Maximum hat und sowohl bei größeren als auch bei kleineren Impulsbreiten abnimmt. Zwischen μ/ϱ 0,6—0,3 stimmen die Werte für s/ϱ gut mit den aus der Bestimmung des Absorptionskoeffizienten berechneten Werten überein. Der Widerspruch zwischen den Angaben von Barkla, der eine Zunahme des Streuungskoeffizienten mit steigender Härte fand und der Beobachtung von Ishino[1]), nach welcher für die sehr kurzwelligen γ-Strahlen ein Wert des Streuungskoeffizienten bestimmt wurde, welcher bei 0,026 liegt, findet so seine Erklärung. Denn die Barklaschen Beobachtungen wurden im Bereich einer Strahlung von 3 mm Halbwertschicht ($\mu/\varrho_{Al} = 0{,}855$) gemacht, also in einem Gebiet, in dem auch wir eine Zunahme des Streuungskoeffizienten fanden.

Auch eine Beobachtung, welche man bei der Analyse von Reststrahlungen nach Vorfilterung mit äquivalenten Schichtdicken verschiedener Substanzen machen kann, spricht in demselben Sinne. Wenn eine inhomogene Röntgenstrahlung absorbiert wird, so ist hinter dem absorbierenden Medium die Zusammensetzung der Strahlung eine andere als vor dem Filter, da die weichen langwelligen Strahlen stärker absorbiert werden als die harten kurzwelligen (Röntgensches Absorptionsgesetz). Setzt man voraus, daß die Absorptionskoeffizienten verschiedener Substanzen für verschiedene Wellenlängen einander proportional sind, so wird eine komplexe Röntgenstrahlung qualitativ und quantitativ immer dann in gleicher Weise durch Absorption verändert, wenn man Filter einschaltet, deren Massendichten sich umgekehrt verhalten wie die Absorptionskoeffizienten, d. h. welche äquivalent sind. In diesem Falle gilt die Formel (4), nach welcher bei gleicher Absorption die Intensitäten der Strahlung im allgemeinen verschieden und nur dann gleich sind, wenn sd bzw. $s'd'$ keine Größen sind. In allen anderen Fällen sind gleiche Schwächung der

1) Um möglichst eindeutige Verhältnisse zu haben, wurde nur mit der stark gefilterten und praktisch homogenen Reststrahlung der Glühkathodenröhre gearbeitet.

1) Ishino zit. nach Glocker l. c.



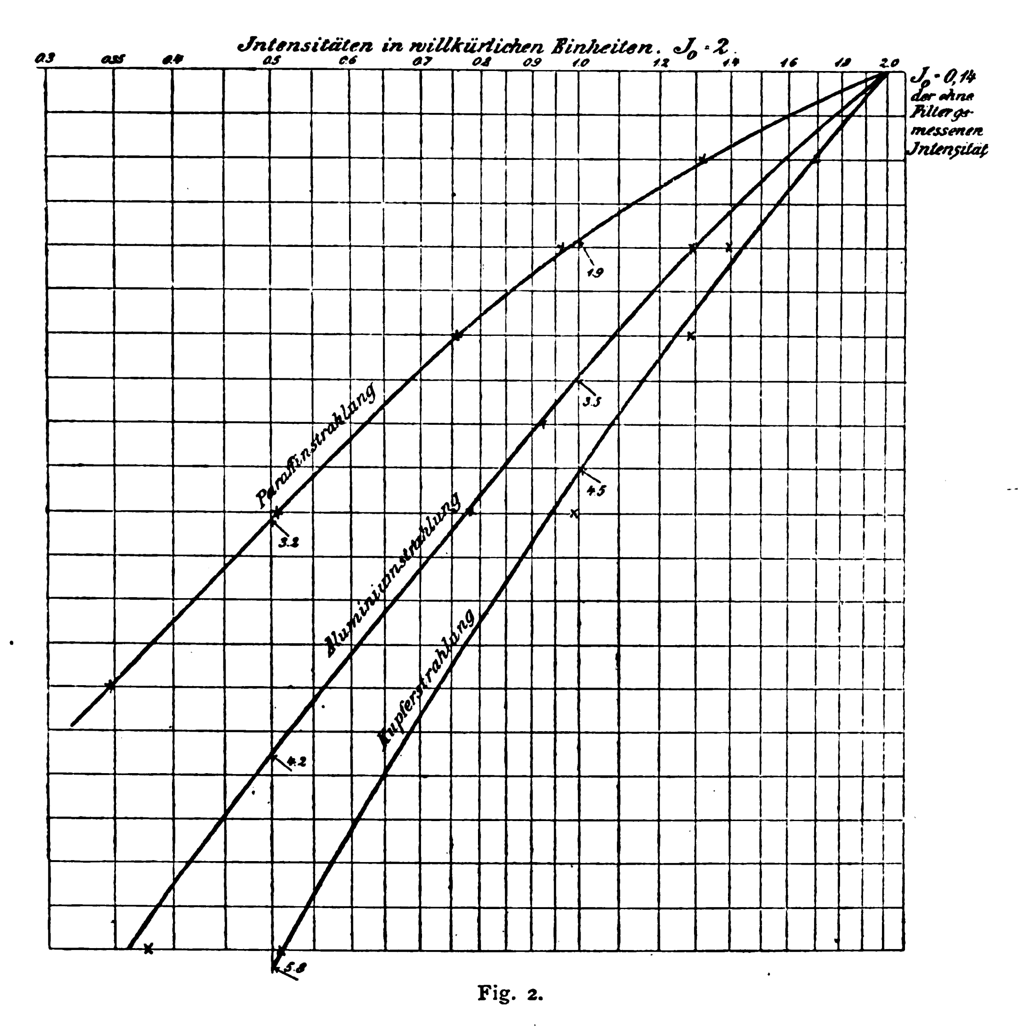


Fig. 2.

Primärstrahlung und gleiche Absorption nicht dasselbe. In dem Strahlenbereich, in welchem die Streuung den Gesamtabsorptionskoeffizienten bereits merklich beeinflußt, wird bei gleicher Schwächung der Primärstrahlung durch zwei verschiedenatomige Filter die Absorption bei dem leichtatomigen Filter die geringere sein. Nimmt man Absorptionskurven einer komplexen Röntgenstrahlung auf, die man z. B. durch Aluminium- bzw. Kupfer- und Paraffinfilter um den gleichen Betrag geschwächt hat, so ist die Zusammensetzung der Reststrahlung durchaus nicht gleich (Fig. 2). Am meisten gehärtet ist die Kupferstrahlung, am wenigsten die Paraffinstrahlung: am meisten Absorptionswirkung hat also bei gleicher Schwächung das Kupfer, am wenigsten das Paraffin. Aus diesem Versuche kann für den Streuungskoeffizienten nur so viel entnommen werden, daß er nicht den gleichen Gang mit der Härte hat wie der Absorptionskoeffizient, sonst müßte die Härtung bei allen drei Filtern die gleiche sein.

Wie wirkt nun die Streuung bei Filterung mit äquivalenten Schichtdicken?

Wenn der Streuungskoeffizient keinen Gang mit der Härte hat, so müßte hinter verschiedenen Filtern von äquivalenter Dicke trotz weitgehender Verschiedenheit der Intensitäten im Sinne der Formel (4) die Zusammensetzung der Strahlung die gleiche sein. Nach unseren Messungen nimmt die Streuung für mittelweiche Strahlen mit abnehmender Impulsbreite zu. Wenn das richtig ist, so muß die Streuung die Zusammensetzung der Strahlung in umgekehrtem Sinne ändern wie die Absorption. Nehmen wir nun solche Absorptionskurven hinter äquivalenten Filtern von Aluminium, Wasser und Paraffin auf, so finden wir tatsächlich eine Abweichung in der zu erwartenden Richtung (Tabelle V). Die Paraffinstrahlung ist trotz ihrer geringen Intensität leichter absorbierbar als die Aluminiumstrahlung und Wasserstrahlung.

Aus der großen Reihe von praktischen Folgerungen, welche aus den bisher noch viel zu

Tabelle V.

Nr.	Härte	Filter mm Alum.	Messung hinter 3 mm Alumin. Volt/sec	relative Werte	Messung hinter 10,1 cm Paraffin Volt/sec.	relative Werte
1	8	0,0	2,05	100	0,481	100
2	„	1,0	1,56	76,1	0,341	72
3	„	2,0	1,21	59,3	0,247	52
4	„	4,0	0,79	38,5	0,170	36
5	„	6,0	0,564	27,5	0,118	25
			Messung hinter 1,9 cm Wasser Volt/sec	relative Werte	Messung hinter 5,1 cm Paraffin Volt/sec	relative Werte
6	3	0,0	0,513	100	0,298	100
7	„	0,2	0,462	90	0,256	86
8	„	0,5	0,373	73	0,208	70
9	„	0,8	0,334	65	0,183	61
10	„	1,1	0,258	50	0,151	51
11	„	1,5	0,202	39	0,117	39

wenig berücksichtigten quantitativen Beziehungen zwischen Streuung und Absorption für die Röntgentechnik gezogen werden müssen, soll hier der Kürze halber nur ein Punkt Erwähnung finden.

Es ist in der Röntgentechnik üblich geworden, eine Strahlung durch Aufnahme einer Absorptionskurve zu analysieren. Wenn die Absorptionskurve einer homogenen Strahlung in ein logarithmisches Raster eingetragen eine gerade Linie darstellt, so ist andererseits bei einer komplexen Strahlung die Stärke der Krümmung ein Maß für deren Inhomogenität. Die Stärke der Krümmung ist dann nichts anderes als ein Ausdruck für die Veränderung des Absorptionskoeffizienten mit der Filterdicke. Aus der Änderung des Absorptionskoeffizienten schließen wir auf eine entsprechende Änderung der mittleren Impulsbreite der Reststrahlung bei zunehmender Filterdicke und damit auf die Art der Zusammensetzung der Strahlung. Gerade dies ist aber nach dem Vorangegangenen insofern nur bedingt richtig, als wir gar nicht den Absorptionskoeffizienten μ/ϱ, sondern den Gesamtabsorptionskoeffizienten g/ϱ der Formel (1) messen. Wenn nun die Änderung des Streuungskoeffizienten s/ϱ klein ist gegen die Änderung von μ/ϱ beim Wechsel der Impulsbreiten, so wird bei einer bestimmten Änderung von μ/ϱ g/ϱ sich um so weniger ändern, je größer s/ϱ im Verhältnis zu μ/ϱ ist. Mit abnehmender Impulsbreite und leichtatomigen Filtern ändert sich der Gesamtabsorptionskoeffizient immer weniger. Wird bei zunehmender Härte die Absorption klein im Vergleich zur Streuung, so nähert sich der Gesamtabsorptionskoeffizient asymptotisch dem Werte des Streuungskoeffizienten und bei weiterer Abnahme der Impulsbreite ändert er sich nur noch in dem Maße, wie sich der Streuungskoeffizient ändert.

In Tabelle III zeigen denn auch die μ/ϱ-Werte für Aluminium erheblich größere Unterschiede beim Übergang zu härteren Strahlungen als die Paraffinwerte, die sich vielmehr asymptotisch dem für den Massenstreuungskoeffizienten des Paraffins gefundenen Werte 0,18 nähern.

Eine harte Strahlung mit einem Paraffinfilter analysiert, würde also auch dann eine logarithmische, auf eine homogene Strahlung deutende Absorptionskurve haben, wenn sie sehr komplex ist. Beim Aluminium, mit dem in der Technik gewöhnlich gefiltert wird, ist der Streufehler weniger erheblich aber doch deutlich, wie ein Vergleich einer Aluminium- und Kupferabsorptionskurve derselben inhomogenen Strahlung ergibt.

Nur Absorptionskurven mit hochatomigen Filtern geben ein wahres Bild von der Zusammensetzung einer komplexen harten Röntgenstrahlung. Bei weicherer Strahlung verbietet sich die Anwendung hochatomiger Filter wegen der durch die charakteristische Eigenstrahlung auftretenden Komplikationen. Hier ist aber auch beim Aluminium der Streufehler gering, da die Absorption im Bereich der Wellenlängen, welche die Eigenstreuung des Kupfers hervorrufen, groß ist im Vergleich zur Streuung.

(Eingegangen 15. August 1918.)

Ableitung des quantentheoretischen Ansatzes für die Entropie ohne Zuhilfenahme der Stirlingschen Formel.

Von Karl Lichtenecker.

1. Der Ansatz für die Entropie eines Systems von N gleichartigen Elementen (Molekülen, Atomen) als logarithmische Funktion der „thermodynamischen" Wahrscheinlichkeit seines jeweiligen Zustandes wird unter Zuhilfenahme der bekannten Stirlingschen Näherungsformel für die Fakultät von n ($= n!$) hergeleitet. Diese Formel muß hierbei unter Zuhilfenahme der Annahme, daß sämtliche vorkommende n sehr große Zahlen sind, einer weitgehenden Abkürzung unterzogen werden[1]).

Abgesehen von der damit verbundenen Umständlichkeit dürfte es mißlich erscheinen, auf diesem Näherungswege eine fundamentale Beziehung abzuleiten, ohne daß die physikalische Bedeutung der Näherung hervortritt. Es ist daher vielleicht nicht unangebracht, wenn im fol-

1) M. Planck, Theorie der Wärmestr. II. Aufl. S. 122.

genden darauf hingewiesen wird, daß der in der Quantentheorie verwendete Ansatz für die Entropie auch ohne Zuhilfenahme der Stirlingschen Näherungsformel sich in einfacher Weise erhalten läßt.

2. Es sei, wie üblich, mit $N_1, N_2, N_3 \ldots\ldots$ die Zahl der elementaren Bestandteile bezeichnet, welche sich zu einem gegebenen Zeitpunkt bzw. in den diskreten Zuständen $Z_1, Z_2, Z_3 \ldots\ldots$, derer diese Elemente fähig sind, befinden. Dabei sollen diese elementaren Zustände zunächst als untereinander gleich wahrscheinlich vorausgesetzt werden. Ist N die Gesamtzahl der Elemente des Systems, so gilt

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \cdots\cdots$$

Dann ist die durch die Gleichung

$$w_i = \frac{N_i}{N}$$

definierte, als „Verteilungsdichte" bezeichnete Größe w_i die mathematische Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einer gegebenen Raumverteilung ein beliebig herausgegriffenes Molekül im i-ten Elementargebiete liegt[1]).

Die mathematische Wahrscheinlichkeit dafür, daß N_i beliebig herausgegriffene, individuell bestimmte Moleküle in diesem Elementargebiete liegen, ist

$$w_i^{N_i}$$

und die mathematische Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei gegebener Raumverteilung sämtliche N Elemente des Systems in vorbestimmten Raumgebieten liegen, ist somit

$$\Pi w_i^{N_i}\ ^{2)}.$$

Stellt man diese mathematische Wahrscheinlichkeit als Quotienten aus der Zahl der „günstigen" Fälle, gebrochen durch die Zahl der „möglichen" Fälle dar, so kann man setzen:

$$\Pi w_i^{N_i} = \frac{1}{A}$$

D. h.: unter allen Anordnungen der einzelnen Moleküle, als diskrete Individuen betrachtet, die die vorgegebene Raumverteilung realisieren, gibt es eine, bei der jedes einzelne Molekül in einem vorbestimmten Elementargebiete liegt. Die so eingeführte Größe A ist somit genau das, was nach Planck als die „thermodynamische Wahrscheinlichkeit" des Gesamtzustandes, also der gegebenen Raumverteilung, bezeichnet wird. Man erhält so unmittelbar

$$w_{\text{thermod}} = A = [\Pi w_i^{N_i}]^{-1} = [\Pi w_i^{w_i}]^{-N}$$

und

$$\lg w_{\text{thermod}} = -N \Sigma w_i \cdot \lg w_i,$$

also genau den allgemein verwendeten Ansatz.

Aus der Betrachtung, daß die Wahrscheinlichkeit zweier, voneinander unabhängiger Systeme gleich dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten beider Systeme ist, die Entropie beider Systeme zusammen dagegen die Summe der Entropien der Bestandteile ist, folgt

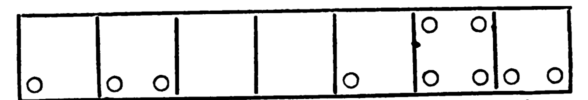
$$S = k \cdot \lg w_{\text{thermod}}$$

und somit

$$S = -k \cdot N \Sigma w_i \cdot \lg w_i.$$

3. Die so für w_{thermod} gewonnene Formel gibt für kleine Werte von N und i die „thermodynamische" Wahrscheinlichkeit, definiert als die Zahl der individuell verschiedenen Anordnungen, die den ins Auge gefaßten Gesamtzustand realisieren, zahlenmäßig auch nicht annähernd richtig.

So ist z. B. für das von Planck[1]) diskutierte Beispiel, wo $N = 10$ Elemente über 7 Zustände eines eindimensionalen Zustandsraumes verteilt sind, die Zahl der individuell



verschiedenen Anordnungen, die den Gesamtzustand verwirklichen, gleich 37800. Die Formel

$$w_{\text{thermod}} = [\Pi w_i^{N_i}]^{-1}$$

dagegen liefert für den gleichen Fall den Wert

$$\left[\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^{-1} = 2441406^1/_4.$$

4. Man kann nun ohne weiteres erkennen, worin das Wesen der hier gebrauchten Näherung besteht. Sie liegt in der Bestimmung der mathematischen Wahrscheinlichkeit dafür, daß N_i Elemente im Elementargebiet Z_i liegen, und zwar in den Worten „beliebig herausgegriffenen Elemente". Der Ausdruck $w_i^{N_i}$ wäre nur dann streng richtig, wenn für jeden Platz, an welchem sich zufolge der vorgegebenen Raumverteilung ein Individuum befindet, sämtliche Individuen in Betracht kämen, ohne Rücksicht auf jene, über deren Einordnung schon verfügt ist, d. h. für Anordnungen „mit Wiederholung". Es liegt hier derselbe Unterschied vor, der bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit einer Komplexion auftritt, je nachdem bei aufeinanderfolgenden Ziehungen von Zahlen aus einem Glücksrade die gezogenen nach jeder Ziehung wieder in das Glücksrad zurückgelegt werden oder nicht. Im ersteren Falle bildet die Reihe

1) a. a. O. S. 220.

2) Anm. bei der Korr.: Vgl. auch H. Mache, Wiener Sitz.-Ber. 1906, Bd. CXV, Abtlg. IIa, S. 1435.

1) a. a. O. S. 121.

der nacheinander gezogenen Zahlen eine Komplexion mit Wiederholung, im letzteren ohne Wiederholung.

Die hier unter der — unberechtigten — Annahme der Möglichkeit von Wiederholungen sich ergebende Zahl von Anordnungen, die eine vorgegebene Verteilung im Zustandsraume realisieren, somit w_{thermod}, ergibt sich, wie auch das mitgeteilte Zahlenbeispiel zeigt, stets zu groß.

5. Bisher war die Annahme zugrunde gelegt worden, daß die einzelnen Elementarzustände, die das Molekül (Atom, ...) anzunehmen vermag, untereinander gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.

Sind die Wahrscheinlichkeiten der Elementarzustände verschieden und schreibt man den Zuständen ..... Z_m, Z_n, Z_p, ... der Reihe nach Wahrscheinlichkeiten zu, welche das a_m, a_n, a_p ... fache der elementaren Wahrscheinlichkeit sind[1]), so kann man sich die Zustandsgebiete Z_m, Z_n, Z_p ... unterteilt denken in a_m, a_n, a_p ... Untergebiete, denen dann sämtlich gleiche Wahrscheinlichkeit zukommt. Die verschiedenen Verteilungen jedoch, die innerhalb eines elementaren Zustandsgebietes durch Einführung der neuen Untergebiete sich ergeben, dürfen nicht als solche gezählt werden, da sie ja alle zu der gleichen, ursprünglichen Raumverteilung, bei der die „Verteilungsdichte" im Z_i-ten Zustandsgebiet den Wert w_i hat, führen; sie sind also in diesem Sinne untereinander „nicht unterscheidbar". Man kann somit innerhalb der alten Elementargebiete eine vollkommen willkürliche Verteilung der Elemente vornehmen, z. B. die, daß auf alle a_i Untergebiete gleich viel, also $\frac{N_i}{a_i}$ Moleküle entfallen. „Die Verteilungsdichte" für diese neu eingeführten Untergebiete ist dann

$$\frac{w_i}{a_i}$$

Dies ist die mathematische Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein individuell bestimmtes Molekül irgendeinem bestimmten, der neu eingeführten Elementargebiete gleicher Wahrscheinlichkeit angehört. Die mathematische Wahrscheinlichkeit irgendeiner bestimmten individuellen Molekülverteilung bei gegebener Verteilung im Zustandsraum wird jetzt

$$\Pi\left(\frac{w_i}{a_i}\right)^{N_i} = \frac{1}{A}$$

und die „thermodynamische" Wahrscheinlichkeit des Gesamtzustandes somit

1) Vgl. L. Flamm, diese Zeitschr. 19, 166—168, 1918.

$$w_{\text{thermod}} = \left[\Pi\left(\frac{w_i}{a_i}\right)^{N_i}\right]^{-1} = \left[\Pi\left(\frac{w_i}{a_i}\right)^{w_i}\right]^{-N};$$

$$\lg w_{\text{thermod}} = -N\Sigma w_i \cdot \lg\frac{w_i}{a_i}$$

und daher

$$S = -k\cdot N\,\Sigma w_i \cdot \lg\frac{w_i}{a_i}.$$

in Übereinstimmung mit dem von Flamm a. a. O. gegebenen Werte.

Zusammenfassung.

Der quantentheoretische Ansatz für die Entropie eines aus N gleichartigen Elementen bestehenden Systems, welche einer abzählbaren Anzahl diskreter Zustände fähig sind, als Logarithmus der „thermodynamischen" Wahrscheinlichkeit des jeweiligen Gesamtzustandes wird ohne Zuhilfenahme der Stirlingschen Näherungsformel so abgeleitet, daß die Bedeutung der Näherung, die zu diesem Ansatze führt, klar hervortritt. Von dem Fall gleicher Wahrscheinlichkeit der elementaren Zustände ausgehend, wird der gefundene Ausdruck verallgemeinert für verschiedene Wahrscheinlichkeit der elementaren Zustände.

Wien, am 10. September 1918.

(Eingegangen 13. September 1918.)

Die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante einiger Gase und Dämpfe.

Von Mario Jona.

(Auszug aus der Göttinger Dissertation 1917.)

In einem kurzen Bericht hat P. Debye[1]) gezeigt, daß die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante der Isolatoren erklärt werden kann auf Grund der klassischen Statistik durch die Annahme der Existenz fertiger „Dipole". Die Existenz schwingungsfähiger Teilchen genügt bekanntlich nicht, um die irreguläre Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante zu erklären, die bei einer Reihe von Substanzen beobachtet worden ist. Im Anschluß an Debyes Theorie wurden im Physikalischen Institut in Göttingen zwei Arbeiten gemacht, die sich in gewisser Weise ergänzen sollten. An die Untersuchung der „Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante einiger Gase und Dämpfe" bis nahe an den Kondensationspunkt, schloß sich eine Unter-

1) P. Debye, Einige Resultate der kinetischen Theorie der Isolatoren. Diese Zeitschr. 13, 97, 1912.



suchung der Dielektrizitätskonstante einiger Flüssigkeitsgemische bei verschiedenen Konzentrationen und verschiedenen Temperaturen [1]). So bedauerlich es ist, daß zum Teil aus technischen Gründen, zum Teil wegen der Zeitverhältnisse ein besserer Anschluß der beiden Arbeiten aneinander nicht möglich war, so finden den trotzdem ihre Resultate gegenseitig eine erfreuliche qualitative Bestätigung.

Debyes Theorie der gasförmigen und flüssigen Isolatoren liefert für die Polarisation des cm³ folgenden allgemeinsten Ausdruck:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N_0 \left\{ \Sigma \frac{n_i e_i}{f_i} + \frac{\mu^2}{3kT} \right\}, \qquad (1)$$

wo ε die Dielektrizitätskonstante, N_0 die Anzahl Moleküle im cm³, k die Boltzmannsche Konstante ($k = 1{,}35 \cdot 10^{-16}$ erg.), T die absolute Temperatur und μ das von jedem Molekül getragene unveränderliche Moment ist. Jedes Molekül besteht dabei aus n_i Ladungen e_i, die mit einer Kraft f_i an ihre Ruhelage gebunden sind.

Das Prinzip der Messung gründet sich auf die Annahme, daß das Clausius-Mossotische Gesetz:

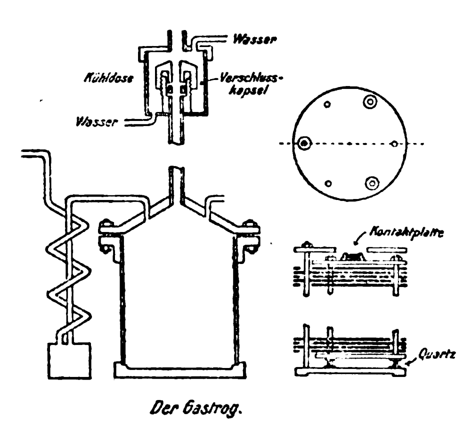
$$\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_2 - 1} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}, \qquad (2)$$

wo ϱ_1 und ϱ_2 die zu den Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 zugehörigen Dichten bedeuten, bei bloßer Druckänderung gültig sei. In dieser Form ist das Gesetz bisher richtig befunden worden [2]) und bestätigte sich auch bei Vorversuchen an Luft und Kohlendioxyd.

Die Messung der Dielektrizitätskonstante erfolgte durch eine Kapazitätsbestimmung in der Wechselstrombrücke mit einer Nullmethode. Um die höchste Empfindlichkeit der Brückenanordnung zu erreichen, wurde sie nur im Hinblick auf Relativmessungen ausgebaut. Die Brücke (s. Fig. 2) bestand im wesentlichen aus zwei gleichen Vergleichswiderständen W, W, die 2 Zweige der Brücke darstellten und 3 Luftkondensatoren, die die beiden anderen Zweige bildeten. In dem einen Zweig lagen 2 Kondensatoren parallel. Der eine C (Gastrog) (s. Fig. 1) war zur Füllung mit den Gasen eingerichtet und befand sich im Temperaturbad, der parallel geschaltete kleine Meßkondensator M diente dazu, die Kapazität dieses Zweiges, die durch Änderung der Dielektrizitätskonstante

1) L. Lange, Über den Zusammenhang zwischen dem dielektrischen Verhalten und den molekularen Assoziationen einiger Flüssigkeiten (Auszug aus der Göttinger Diss. erscheint demnächst).

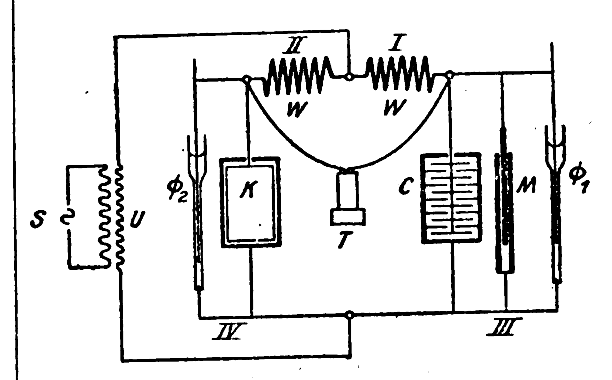
2) Bädeker, Experimentaluntersuchung über die Dielektrizitätskonstante einiger Gase und Dämpfe in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur. Zeitschr. f. phys. Chemie. 36, 305, 1901.



Der Gastrog.

Fig. 1.

im Gastrog veränderlich war, wieder der Kapazität des konstanten dritten Kondensators K im vierten Brückenzweig gleich zu machen. Ferner war den Brückenzweigen III und IV je ein sehr hoher Flüssigkeitswiderstand Φ parallel geschaltet, der dazu diente, die dielektrischen Verluste zu kompensieren.



Schaltbild der Brücke.

Fig. 2.

Um alle Apparatkonstanten bis auf eine zu eliminieren, wurde für jede Temperatur die Dielektrizitätskonstante für 2 verschiedene Drucke bestimmt. Mit Berücksichtigung der Clausius-Mossottischen Beziehung ist für jede Temperatur der Wert von $\varepsilon - 1$, auf Normaldruck bezogen, proportional der Differenz der Ablesungen an der Teilung des Meßkondensators. Im Proportionalitätsfaktor stehen nur die Dichten und die eine Apparatkonstante, die nicht zu eliminieren war. Diese bleibt, wie man zeigen kann, für alle Temperaturen bis auf Werte, die kleiner als die Beobachtungsfehler sind, konstant und bedeutet das Verhältnis der Kapazität des Meßkondensators zur Kapazität des Gastrogs. Die angegebenen absoluten Werte der Dielektrizitätskonstante sind

mit Hilfe dieser Konstante bestimmt und machen keinen Anspruch auf große Genauigkeit, da die Konstante nur angenähert bestimmt werden konnte. Sie können aber jederzeit berichtigt werden, wenn die Dielektrizitätskonstante der Substanz für eine bestimmte Temperatur genau bekannt ist.

Auf die Diskussion der Fehlerquellen und Beschreibung der Apparate und des Meßvorgangs soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Erwähnt sei nur, daß als Stromquelle ein Saitenunterbrecher diente, dessen Strom mit einem passenden Induktor auf die Spannung transformiert wurde, die die günstigsten Brückenbedingungen ergab.

Die Einstellgenauigkeit war äußerst groß. $^1/_{100000}$ der Trogkapazität war merkbar, der Fehler der Einstellung kleiner als 0,5 Prozent. Der Messung selbst kommt eine bei weitem geringere Genauigkeit zu, da für sie die kleine Differenz zweier Einstellungen in Betracht kommt. Für Luft, wo die Differenz der Einstellungen nur wenige Millimeter beträgt, war der Fehler, wenn man eine Unsicherheit von $^2/_{10}$ mm bei der Einstellung zuläßt, bereits ca. $\pm$ 4 Proz. Für Schwefeldioxyd erreicht der Fehler, da die Differenz der Einstellungen ungefähr 100 mm beträgt, und mit derselben absoluten Unsicherheit behaftet ist, nur ca. $\pm$ 0,2 Proz. Für die Dämpfe ist mit einem Fehler von ca. $\pm$ 0,4 Proz. zu rechnen, da infolge der Kondensation neue Fehler bei der Druckablesung hinzukommen.

Im folgenden werden die Meßergebnisse für Luft, Kohlendioxyd, Ammoniak, Schwefeldioxyd, Methylalkohol und Wasserdampf angeführt. In den Tabellen gibt die erste Spalte die absoluten Temperaturen, die zweite Spalte den auf gleiche Dichte bezogenen Überschuß der Dielektrizitätskonstante über 1 an. Bei der Auswertung dieser Messungen mußten die Abweichungen vom idealen Gaszustand berücksichtigt werden, da es sich bei SO_2 um ein leicht kondensierbares Gas, bei Methylalkohol und Wasser um Dämpfe handelte. In der dritten Spalte sind die Überschüsse der Dielektrizitätskonstante über 1 angegeben. die man berechnet, wenn die Änderung der Dielektrizitätskonstante mit der Temperatur nur von der gleichzeitigen Dichteänderung herrühren würde. Bei dieser Berechnung wurde von Werten ausgegangen, die in Landolt-Boernstein angegeben sind.

I. Luft[1]).

Luft kann im gemessenen Temperaturbereich als ideales Gas angesehen werden.

1) Als Molekulargewicht wurde angenommen $m = 29,34$.

Tabelle I.

T	$(\varepsilon - 1)_{\text{gem.}}$	$(\varepsilon - 1)_{\text{ber.}}$[1])	$\frac{m}{\varrho}(\varepsilon - 1)T$
392,0	$510 \cdot 10^{-6}$	$546 \cdot 10^{-6}$	$0,469 \cdot 10^{-21}$
310,0	469 „	523 „	0,492 „
332,4	484 „	480 „	0,568 „
333,7	456 „	473 „	0,546 „
366,2	392 „	437 „	0,566 „
399,7	401 „	394 „	0,711 „
444,0	337 „	357 „	0,727 „

II. Kohlendioxyd (CO_2)[2]).

Das verwandte Gas enthielt weniger als 1 Proz. Verunreinigungen. Zur Reduktion auf gleiche Dichte wurde eine nach Rayleigh und Chappuis kombinierte Zustandsgleichung verwandt. Abweichungen vom idealen Gaszustand liegen hierbei weit innerhalb der Fehlergrenze der Messungen.

Tabelle II.

T	$(\varepsilon - 1)_{\text{gem.}}$	$(\varepsilon - 1)_{\text{ber.}}$[3])	$\frac{m}{\varrho}(\varepsilon - 1)T$
295,7	$1020 \cdot 10^{-6}$	$917 \cdot 10^{-6}$	$0,978 \cdot 10^{-21}$
299,4	1025 „	905 „	0,990 „
301,0	1013 „	900 „	0,975 „
352,9	836 „	768 „	1,117 „
361,6	784 „	749 „	1,117 „
398,8	719 „	680 „	1,250 „
423,6	694 „	641 „	1,344 „
425,6	683 „	636 „	1,332 „

III. Ammoniak (NH_3)[4]).

Das Ammoniak enthielt sicher weniger als 0,5 Proz. Verunreinigungen. Die Reduktion auf gleiche Dichte erfolgte mit der Zustandsgleichung, die Holst[5]) in seinem zusammenfassen-

Tabelle III.

T	$(\varepsilon - 1)_{\text{gem.}}$	$(\varepsilon - 1)_{\text{ber.}}$[6])	$\frac{m}{\varrho}(\varepsilon - 1)T$
292,2	$722 \cdot 10^{-5}$	$722 \cdot 10^{-5}$	$6,55 \cdot 10^{-21}$
309,0	651 „	677 „	6,62 „
333,0	561 „	632 „	6,61 „
387,0	422 „	545 „	6,70 „
413,0	373 „	509 „	6,77 „
445,2	321 „	472 „	6,84 „
446,0	322 „	470 „	6,86 „
448,0	319 „	467 „	6,88 „

1) Nach Boltzmann ist $\varepsilon - 1 = 590 \cdot 10^{-6}$ bei 373° absolut.

2) Als Molekulargewicht wurde angenommen $m = 44,00$.

3) Nach Rohrmann ist $\varepsilon - 1 = 989 \cdot 10^{-6}$ bei 274° absolut.

4) Als Molekulargewicht wurde angenommen $m = 17,03$.

5) Holst, Communications from the Physical Laboratory of the University of Leiden by H. Kamerlingh-Onnes Nr. 114a—d.

6) Nach Boltzmann ist $\varepsilon - 1 = 718 \cdot 10^{-5}$ bei $T = 293$.

den Bericht über die Untersuchungen an Ammoniak in Leiden angibt.

IV. Schwefeldioxyd (SO_2)[1].

Die Reduktion auf gleiche Dichte erfolgte nach Messungen des Ausdehnungskoeffizienten von Schwefeldioxyd durch Amagat[2]).

Tabelle IV.

T	$(\varepsilon-1)$beob.	$(\varepsilon-1)$ber.[3])	$\frac{m}{\varrho}(\varepsilon-1)T$	$\frac{m}{\varrho}(\varepsilon-1)T$korr.
290,8	$895\cdot10^{-5}$	$894\cdot10^{-5}$	$9{,}97\cdot10^{-21}$	$9{,}34\cdot10^{-21}$
308,5	817 „	884 „	9,63 „	9,21 „
328,5	730 „	791 „	9,23 „	9,10 „
353,1	640 „	736 „	8,99 „	8,95 „
361,0	618 „	720 „	9,04 „	8,98 „
372,2	579 „	698 „	9,07 „	9,02 „
405,0	487 „	642 „	9,18 „	9,14 „
422,9	457 „	615 „	9,21 „	9,19 „
442,4	431 „	588 „	9,29 „	9,23 „
445,5	422 „	584 „	9,26 „	9,26 „

V. Methylalkohol (CH_3OH)[4]).

Bei Methylalkohol erfolgte die Reduktion auf gleiche Dichte nach Messungen von Ramsay und Young[5]).

Tabelle V.

T	$(\varepsilon-1)$beob.	$(\varepsilon-1)$ber.[6])	$\frac{m}{\varrho}(\varepsilon-1)T$	$\frac{m}{\varrho}(\varepsilon-1)T$korr.
351,1	$745\cdot10^{-5}$	$655\cdot10^{-5}$	$10{,}61\cdot10^{-21}$	$10{,}41\cdot10^{-21}$
366,3	655 „	627 „	9,86 „	9,75 „
380,8	589 „	604 „	9,56 „	9,53 „
398,4	531 „	576 „	9,43 „	9,40 „
407,0	503 „	565 „	9,38 „	9,36 „
417,0	476 „	551 „	9,45 „	9,45 „
441,2	449 „	521 „	9,65 „	9,64 „
451,1	431 „	510 „	9,70 „	9,65 „

VI. Wasserdampf (H_2O)[7]).

Die Reduktion der Messungen auf gleiche Dichte wurde nach einer Zustandsgleichung vorgenommen, die „Die Hütte" [8]) angibt.

In Fig. 3 sind die Werte $(\varepsilon-1)_{\text{gem.}}$ in Funktion der Temperatur stark ausgezogen dargestellt, diejenigen von $(\varepsilon-1)_{\text{ber.}}$ durch gestrichelte Linien angegeben. Die besondere irreguläre Temperaturabhängigkeit drückt die Kurve für wachsende Temperatur herab. Gleich-

Tabelle VI.

T	$(\varepsilon-1)$beob.	$(\varepsilon-1)$ber.[1])	$\frac{m}{\varrho}(\varepsilon-1)T$	$\frac{m}{\varrho}(\varepsilon-1)T$korr.
390,4	$612\cdot10^{-5}$	$754\cdot10^{-5}$	$10{,}68\cdot10^{-21}$	$10{,}33\cdot10^{-21}$
397,5	584 „	740 „	10,38 „	10,21 „
402,0	575 „	732 „	10,23, „	10,12 „
415,1	530 „	709 „	10,15 „	10,06 „
423,8	511 „	695 „	10,09 „	10,06 „
436,2	489 „	675 „	10,12 „	10,11 „
451,4	462 „	652 „	10,16 „	10,16 „

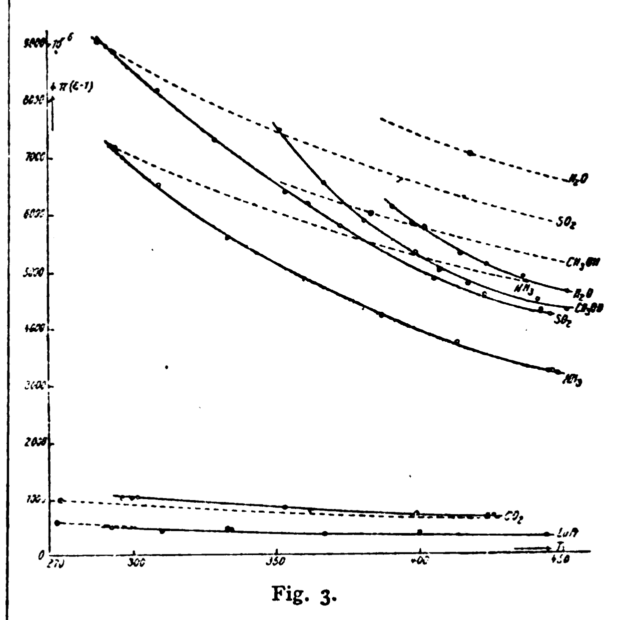


Fig. 3.

zeitig zeigt sich, daß die angegebenen absoluten Werte, auf die kein Gewicht gelegt wird, immerhin mit befriedigender Genauigkeit mit denen anderer Beobachter übereinstimmen mit Ausnahme des Wertes für Wasserdampf. Dieser wurde von Bädeker entnommen, der selbst seine Messung an Wasserdampf als nicht sehr zuverlässig bezeichnet.

Der Verlauf der Kurven entspricht dem von Debye angegebenen. Auch hier soll versucht werden, die Kurven durch einen Ausdruck der Form (1) darzustellen. Wir schreiben

$$\frac{m}{\varrho}(\varepsilon-1)=a+\frac{b}{T}, \qquad (3)$$

wobei unter m das Molekulargewicht der Substanz und ϱ ihre Dichte zu verstehen ist; a und b bedeuten Konstanten. Erweitert man diese Gleichung mit T, so erhält man:

$$\frac{m}{\varrho}(\varepsilon-1)T=aT+b. \qquad (4)$$

Die Größe $\frac{m}{\varrho}(\varepsilon-1)T$

1) Als Molekulargewicht angenommen wurde $m=64{,}07$.
2) Amagat, Compt. rend. 73, 183, 1871.
3) Nach Klemenčic ist $\varepsilon-1=905\cdot10^{-5}$ bei 287,7° absolut.
4) Als Molekulargewicht wurde angenommen $m=32{,}03$.
5) Ramsay u. Young, Phil. Trans. 178, 328, 1887.
6) Nach Bädeker ist $\varepsilon-1=600\cdot10^{-5}$ bei 383° absolut.
7) Als Molekulargewicht wurde angenommen $m=18{,}02$.
8) Die Hütte, Bd. I, S. 415.

1) Nach Bädeker ist $\varepsilon-1=705\cdot10^{-5}$ bei 418° absolut.

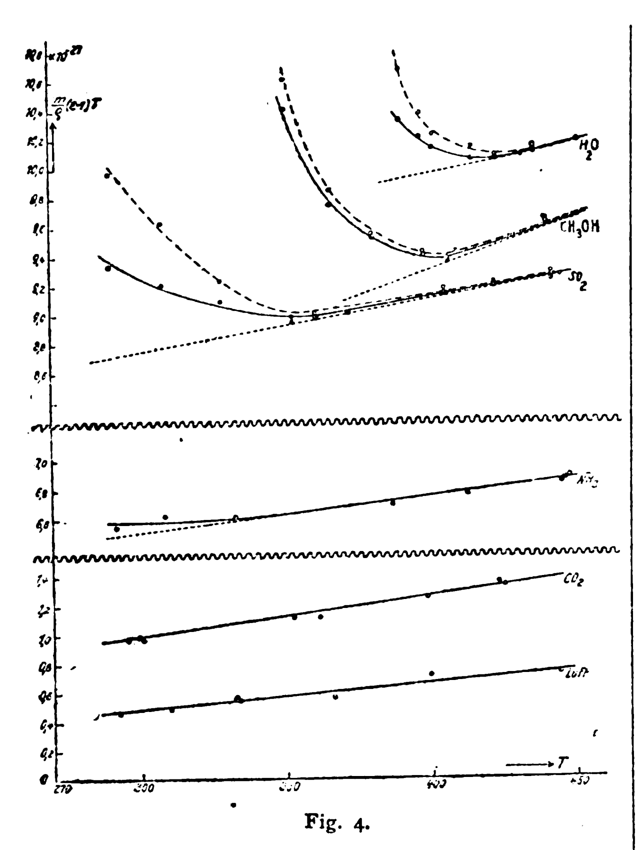


Fig. 4.

ist mithin eine lineare Funktion der Temperatur. In der 4. Kolonne der Tabellen I—VI sind die Werte für diese Größe angegeben. Sie werden in Fig. 4 durch kleine Kreise bezeichnet. Durch die Punkte für Luft, Kohlensäure und Ammoniak lassen sich gerade Linien ziehen. Die Abweichungen der Punkte von den Geraden liegen (bis auf die 2 untersten für Ammoniak) innerhalb der zugelassenen Fehlergrenzen. Die Kurven für die übrigen Substanzen weichen für tiefe Temperaturen wesentlich vom erwarteten Bild ab und nähern sich nur für höhere Temperaturen asymptotisch geraden Linien.

Die Bedeutung der Konstanten a und b in Gleichung (3) ist durch Vergleich mit der allgemeinen Gleichung (1) ersichtlich. Die Konstante a rührt von den Verschiebungselektronen im Molekül her. Es ist

$$a = \sum \frac{n_i e_i}{f_i}. \tag{5}$$

Die Konstante a ist für das optische Verhalten der Substanz maßgebend.

Die zweite Konstante b hat ihren Ursprung in der Existenz unveränderlicher Momente μ. Es ist

$$b = \frac{\mu^2}{3k} \tag{6}$$

Dieses Glied tritt optisch erst bei „langsamen" Schwingungen in Erscheinung.

Die Messungen liefern:

Für Luft:

$$a = (1{,}65 \pm 0.20) \cdot 10^{-24}$$
$$b = (0.017 \pm 0.088) \cdot 10^{-21}.$$

Während hier a mit einiger Genauigkeit sich bestimmen läßt, zeigt sich, daß innerhalb der Fehlergrenze $b = 0$ angenommen werden kann.

Für Kohlendioxyd:

$$a = (2{,}55 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-24}$$
$$b = (0{,}226 \pm 0{,}052) \cdot 10^{-21}$$

Wenn hier auch b mit geringerer Genauigkeit bestimmt ist als a, so ist es jedenfalls größer als Null.

Wir können also annehmen, daß das Moment für Luft $\mu = 0$ ist, für CO_2 wahrscheinlich $\mu = \text{ca. } 0{,}3 \cdot 10^{-18}$, jedoch sicher größer als $0{,}15 \cdot 10^{-18}$ sein wird.

Für Luft und Kohlenoxyd konnten die beiden Konstanten ohne weiteres durch Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden, da das lineare Gesetz gut erfüllt war. Für die übrigen Substanzen jedoch mußte der Grund für die Abweichung von der Linearität für die niederen Temperaturen gesucht werden. Die anomale Abweichung von der Linearität ist um so beträchtlicher, je näher die tiefste gemessene Temperatur dem Siedepunkt der Substanz liegt. Dieses Verhalten deutet darauf hin, daß wir es bei diesen Temperaturen nicht mehr mit den einzelnen Molekülen der Gase zu tun haben, sondern daß ein nicht zu vernachlässigender Teil der Moleküle sich bereits assoziiert. Koppeln sich 2 Moleküle aneinander, um ein Doppelmolekül zu bilden, so kann man sich die Bindung so vorstellen,. daß sich die beiden Moleküle mit ihren Momenten aneinander reihen und den übrigen Molekülen gegenüber in erster Annäherung als starres Doppelmolekül erscheinen, als „Dipol" mit doppeltem Moment.

Die Substanz ist dann als ein gasförmiges System anzusehen, bestehend aus 2 Molekülarten, einfache und doppelte Moleküle, dessen Gleichgewichtszustand rein thermodynamisch allgemein berechnet werden kann. Nennt man c_1 die Konzentration der einfachen Moleküle, c_2 diejenige der doppelten, so ist nach Plancks[1]) Bezeichnung der Gleichgewichtszustand gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{c_1^2}{c_2} A e^{-\frac{B}{T}} T_p^{-1}, \tag{7}$$

1) M. Planck, Thermodynamik, 2. Aufl. 1911, § 237 u. f. S. 221, 222.

Tabelle VII.

	ω	μ	A	B
Luft	$(1,65 \pm 0,26) \cdot 10^{-24}$	0	—	—
CO_2	$(2,55 \pm 0,02) \cdot 10^{-24}$	$(0,303 \pm 0,145) \cdot 10^{-18}$	—	—
NH_3	$(2,36 \pm 0,24) \cdot 10^{-24}$	$(1,53 \pm 0,01) \cdot 10^{-18}$	$1,25 \cdot 10^{12}$	$2,7 \cdot 10^{3}$
SO_2	$3,75 \cdot 10^{-24}$	$1,76 \cdot 10^{-18}$	$3,60 \cdot 10^{10}$	$2,9 \cdot 10^{3}$
CH_3OH	$7,40 \cdot 10^{-24}$	$1,61 \cdot 10^{-18}$	$2,19 \cdot 10^{14}$	$5,9 \cdot 10^{3}$
H_2O	$3,50 \cdot 10^{-24}$	$1,87 \cdot 10^{-18}$	$1,17 \cdot 10^{22}$	$13,0 \cdot 10^{3}$

wo A und B zwei Konstanten und p den Druck bedeuten.

Auch in Gleichung (3) müssen die Doppelmomente eingeführt werden; das optische Glied bleibt unverändert bestehen und es kommt nur ein drittes Glied auf der rechten Seite hinzu mit $(2\mu)^2$. Unter Berücksichtigung des Ansatzes fürs thermodynamische Gleichgewicht der Substanz wird schließlich in erster Näherung die Hauptgleichung für die Dielektrizitätskonstante zu:

$$\frac{m}{\varrho}(\varepsilon - 1) = \omega + \frac{\mu^2}{3kT} + \frac{2\mu^2}{3kT} \cdot \frac{p}{AT^C} e^{\frac{B}{T}}. \quad (8)$$

In ω ist das unveränderte optische Glied enthalten. Eine Vereinfachung dieser Gleichung läßt sich erreichen, wenn man auf die Bedeutung der Integrationskonstante C bei Planck zurückgeht. Es ist für unseren Fall der Assoziation von einfachen Molekülen zu Doppelmolekülen in erster Näherung

$$C = \frac{2C_{p1} - C_{p2}}{R} = 0. \quad (9)$$

Hier sind C_{p1} und C_{p2} die Molekularwärmen der beiden Molekülarten bei konstantem zugehörigen Partialdruck und R die Gaskonstante. Gleichung (8) nimmt also mit dieser Vereinfachung und nach Erweiterung mit T folgende Form an:

$$\frac{m}{\varrho}(\varepsilon - 1)T = \omega T + \frac{\mu^2}{3k} + \frac{2\mu^2}{3kA} p e^{\frac{B}{T}}. \quad (10)$$

In dieser erweiterten Form sagt die Hauptgleichung aus, daß

$$\frac{m}{\varrho}(\varepsilon - 1)T$$

nur seinen linearen Charakter bei genügend hohen Temperaturen hat. Das Korrektionsglied mit seinem exponentiellen Anstieg für sinkende Temperaturen bewirkt für die niederen Temperaturen die Abweichung von der Linearität. Und das Clausius-Mossottische Gesetz, das eingangs als unverändert gültig angenommen worden war, muß für 2 verschiedene Drucke p_1 und p_2 mit den zugehörigen Dichten ϱ_1 und ϱ_2 und Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 folgende Erweiterung erfahren:

$$\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_2 - 1} = \frac{\varrho_1\left\{\omega + \frac{\mu^2}{3kT} + \frac{2\mu^2}{3kAT} p_1 e^{\frac{B}{T}}\right\}}{\varrho_2\left\{\omega + \frac{\mu^2}{3kT} + \frac{2\mu^2}{3kAT} p_2 e^{\frac{B}{T}}\right\}}. \quad (11)$$

Durch eine sukzessive Näherung wurden mit Hilfe dieses erweiterten Ausdrucks des Clausius-Mossottischen Gesetzes die Werte von

$$\frac{m}{\varrho}(\varepsilon - 1)T$$

berechnet, die in der 5. Kolonne der Tabellen IV—VI stehen. Sie sind in Fig. 4 durch kreisumrandete Punkte angegeben.

In der Tabelle 7 sind die Werte der 4 Konstanten ω, μ, A und B zusammengestellt.

Holst[1]) hat aus der Zustandsgleichung nach Kamerlingh-Onnes für Ammoniak und Wasserdampf ebenfalls das Moment des Moleküls berechnet. Er findet für

NH_3: $\mu = 2,38 \cdot 10^{-18}$
H_2O: $\mu = 2,62 \cdot 10^{-18}$.

Nach Bädeker (l. c.) Messungen folgt für

NH_3: $\mu = 1,52 \cdot 10^{-18}$
SO_2: $\mu = 1,60$ „
CH_3OH: $\mu = 1,96$ „
H_2O: $\mu = 2,39$ „

Wir wollen nun die Lorentz-Lorenzsche Beziehung, über Brechungsindex n_0 und Dielektrizitätskonstante ε_0 (auf die Frequenz 0 bezogen):

$$\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} = \frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0 + 2} \quad (12)$$

nur auf das optische Glied der Dielektrizitätskonstante anwenden, für die allein sie gültig ist, und schreiben sie

$$n_0^2 - 1 = 4\pi N_0 \omega. \quad (13)$$

Um diese Beziehung prüfen zu können, muß n_0 aus den Dispersionskurven der Substanzen auf die Frequenz 0 extrapoliert werden. Da man hierbei durch das Gebiet der anomalen Dis-

1) G. Holst, Over de toestandsvergelijking van water en ammoniak. Versl. Kgl. Akad. van Wetensch. Jan. 1917.

persion kommt, so wird man für n_0 zu kleine Werte finden. Nur für Kohlensäure ist die anomale Dispersion im Ultraroten durch die Messungen von Koch[1]) bekannt. Die folgende Tabelle VIII zeigt — trotzdem, wie eingangs gesagt, kein besonderes Gewicht auf die absoluten Werte der Messung gelegt wurde — eine ganz befriedigende Übereinstimmung mit dem erwarteten Verhalten.

Tabelle VIII.

	$(n_0^2 - 1)$ [2])	$4\pi N_0 \omega$
Luft	0,000584	0,000574
CO_2	0,000900	0,000985
NH_3	0,000700	0,000804
SO_2	0,00132	0,00131
CH_3OH . . .	0,00125	0,00258
HO_2	0,00048	0,00122

Die große Differenz zwischen $(n_0^2 - 1)$ und $4\pi N_0 \omega$ für Wasserdampf, war schon nach Rubens[3]) Messungen der Absorption des Wasserdampfs für lange elektrische Wellen vorauszusehen. Debye hat für Wasser geschätzt, daß $n_0^2 = 2$ ist; Rubens berichtigte diesen Wert auf $n_0^2 = 4$. Aus diesen beiden Angaben würde für Wasserdampf folgen:

	Nach Debye	Nach Rubens	$4\pi N_0 \omega$
$n_0^2 - 1$	0,00102	0,00203	0,00122

Der aus der Dielektrizitätskonstante berechnete Wert von $4\pi N_0 \omega$ liegt zwischen beiden.

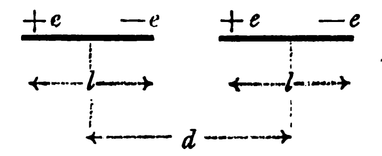
Aus dem thermodynamischen Ansatz für die Assoziation zweier Moleküle ergibt sich als Wärmetönung r des chemischen Prozesses der Assoziation unter Benützung derselben Bezeichnungen wie oben

$$r = R(B + CT). \qquad (14)$$

Da in erster Näherung $C = 0$ gesetzt worden ist, so ist die von außen zuzuführende Arbeit um ein Doppelmolekül in 2 einzelne zu sprengen, gegeben durch

$$r = BR. \qquad (15)$$

Diese Dissoziationsarbeit läßt sich einfach berechnen, wenn man den Abstand d der Moleküle im Doppelmolekül und die Dimensionen des einzelnen Dipols kennt. Um uns ein Bild der Größenordnungen zu machen, nehmen wir an, daß jeder Dipol gebildet ist durch 2 Elementarladungen, die an den Enden einer Strecke l sitzen.



Es muß d stets ein Vielfaches von l sein und beide von der Größenordnung der Moleküldimensionen. l ergibt sich aus der Annahme des Zustandekommens des Dipols. Mit Hilfe der gemessenen Konstanten B läßt sich d berechnen.

Tabelle IX.

	l	d	2ϱ	σ
Luft	0	—	—	
CO_2	$0{,}06 \cdot 10^{-8}$ cm	—	—	
NH_3	0,33 „	$2{,}36 \cdot 10^{-8}$ cm	—	$3{,}54 \cdot 10^{-8}$ cm
SO_2	0,37 „	2,52 „	$3{,}54 \cdot 10^{-8}$ cm	
CH_3OH	0,34 „	1,86 „		
H_2O	0,40 „	1,59 „	2,96 „	3,21 „

In den mit 2ϱ bzw. mit σ bezeichneten Spalten sind die Durchmesser der „Wirkungssphäre" angegeben, wie sie sich aus der van der Waalsschen Konstante bzw. aus der Konstante der Zustandsgleichung von Kamerlingh-Onnes nach Holst berechnen lassen.

Die physikalische Bedeutung der letzten Konstanten A in Gleichung (10) ergibt sich auch ohne weiteres aus dem thermodynamischen Ansatz. Da wir es hier nur mit einfachen und doppelten Molekülen einer Substanz zu tun haben, so ist nach Planck:

$$\log A = \frac{a}{R}, \qquad (16)$$

wo a die chemische Konstante der Substanz ist. Die Konstante A kann nur mit geringer Genauigkeit aus den Messungen bestimmt werden; die daraus berechneten Werte von $\frac{a}{R}$ sind daher nur grobe Annäherungen, und sind auch in keiner Weise mit den Werten in Übereinstimmung zu bringen, die Sackur für das Verhältnis $\frac{a}{R}$ angibt.

Die in der folgenden Tabelle angegebenen

Tabelle X.

	$\frac{a}{R}$ gemessen (a. d. Dielektrizitätskonst.)	$\frac{a}{R}$ berechnet (von Sackur)
NH_3	11,8	—
SO_2	11,3	+ 1,74
CH_3OH	19,2	—
H_2O	38,0	— 1,18

1) J. Koch, Ann. d. Phys. 17, 658, 1905.
2) Die Dispersionskurven wurden entnommen aus Dr. St. Loria, Die Lichtbrechung in Gasen, Sammlung Vieweg, Heft 4.
3) Rubens, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. 1913.

Zahlenwerte beziehen sich auf *cgs*-Einheiten für alle Größen mit Ausnahme des Druckes p, der in Atmosphären gemessen ist.

Die von Sackur angegebenen Zahlen sind aus theoretischen Erwägungen berechnet mit Hilfe der in Tabelle IX angegebenen Werte von 2ϱ.

(Eingegangen 17. September 1918.)

Statistik und Wahrscheinlichkeitsnachwirkung.

Nachtrag zu der gleichbezeichneten Arbeit des Verfassers. Diese Zeitschr. **19**, 421, 1918.

Von Reinhold Fürth.

Nach der v. Smoluchowskischen Theorie der Schwankungserscheinungen wird die Wahrscheinlichkeitsnachwirkung gemessen durch die Größe P, von Smoluchowski „Diffusionsfaktor" genannt.

Ihrer Definition nach ist sie die konstante Wahrscheinlichkeit dafür, daß auf ein günstiges Einzelereignis der r ten Beobachtungsserie in der $r+1$ ten ein ungünstiges folge. In dem speziellen Fall unserer Fußgängerstatistik ist ebenso wie im Falle der Diffusion in Kolloiden P eine „Austrittswahrscheinlichkeit", nämlich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Person, die sich zur Zeit der r ten Beobachtung im Bereiche der benutzten Hausfront befand zur Zeit der $r+1$ ten Beobachtung, das ist nach τ Sekunden, nicht mehr in diesem Bereiche ist.

In unserem Falle läßt sich nun P leicht berechnen. Bezeichnet v die konstante mittlere Geschwindigkeit eines Fußgängers, a die Länge der Hausfront, τ das Beobachtungsintervall, so folgt sofort

$$P=\frac{v\tau}{a}.$$

In unserem Falle war $a=24$ m, v kann man ungefähr mit 5 km pro Stunde ansetzen, τ war gleich 5 Sekunden. Daraus folgt für P der Wert

$$\underline{P=0{,}290,}$$

während aus den Schwankungsformeln der wahrscheinlichste Wert

$$\underline{P=0{,}316}$$

berechnet wurde, was wohl als sehr gute Übereinstimmung bezeichnet werden kann.

Auf die obige Formel wurde ich von Herrn L. S. Ornstein, Utrecht, freundlichst brieflich aufmerksam gemacht, wofür ich ihm an dieser Stelle bestens danke.

Prag, im Oktober 1918.

(Eingegangen 30. Oktober 1918.)

Zur Entwicklungsgeschichte des Kreiselkompasses.

Von O. Martienssen.

Gelegentlich einer Besprechung[1]) der Broschüre des Herrn H. Usener: „Der Kreisel als Richtungsweiser" gibt Herr A. Sommerfeld einige Daten über die Entwicklung des Kreiselkompasses unter Zugrundelegung einer irrtümlichen Auffassung des Schlußwortes meiner grundlegenden Arbeit vom Jahre 1906. Dadurch sehe ich mich veranlaßt, zur Entstehungsgeschichte des Kreiselkompasses folgende Tatsachen bekannt zu geben:

Van den Boos hat in Deutschland zuerst einen nordweisenden Kreiselkompaß patentiert erhalten und derartige Instrumente in Paris und später, Ende der 80er Jahre, von der Firma Siemens & Halske in Berlin ausführen lassen. Diese Kreiselkompasse, die ich in der Sammlung der Firma 1905 vorfand, besaßen eine nur kleine Richtkraft, große Dämpfung und kurze Schwingungsdauer.

Aus den Akten ergab sich, daß die Konstrukteure einen Kreiseldrall wählten, bei welchem die Schwingungsdauer ein Minimum wurde, indem sie glaubten, dann ein Maximum der Richtkraft zu haben. Diesen Trugschluß klärte ich durch erstmalige Ableitung einer exakten Theorie des Kreiselkompasses auf.

Die Theorie ergab zunächst, daß die Richtkraft mit dem Drall des Kreisels unbegrenzt wächst, die Schwingungsdauer einer Schwingung um die Nord—Süd-Richtung dagegen ein Minimum hat, wenn das durch den Kreiseldrall gegebene scheinbare Trägheitsmoment des anzeigenden Systems gleich dem natürlichen ist. Da diese Gleichheit schon bei sehr kleinem Drall auftritt, so ergab sich zunächst ohne weiteres, weshalb die Van den Boos-Apparate eine zu kleine Richtkraft besaßen, um genau in die Nord—Süd-Richtung einzuschwingen.

Weiter ergab die Theorie, daß die Schwingungsdauer ohne Änderung der Richtkraft durch Verkleinerung der metazentrischen Höhe des anzeigenden Systems beliebig vergrößert werden kann, und daß auf einem fahrenden Schiff der Kompaß durch Schiffsbeschleunigungen unzulässig gestört wird, wenn nicht die Schwingungsdauer auf $^1/_2$ bis $1^1/_2$ Stunden, je nach Schiffsgröße, gebracht wird. Aus diesem Ergebnis erklärte es sich, weshalb auch die praktischen Versuche in den Kriegsmarinen Frankreichs und Englands nach den Angaben von Dubois und Lord Kelvin mit kurzschwingenden Kreiselkompassen zu keinem Ergebnis hatten führen können.

1) Diese Zeitschr. **19**, 343 bzw. 487, 1918.



Gegen einen Kompaß mit derartig langer Schwingungsdauer, wie die Theorie es verlangte, hatten indessen die zuständigen seemännischen Kreise schwere Bedenken, und ich wies pflichtgemäß in dem Schlußwort meines Aufsatzes auf diese rein praktischen seemännischen Bedenken hin. Ich habe also durchaus nicht, wie mir vielfach nachgesagt wird, angegeben, daß der Kreiselkompaß auf einem Schiff nicht richtig arbeitet, sondern ich habe im Gegenteil angegeben, wie man den bis dahin bekannten Kompaß abändern müsse, damit er richtig arbeitet.

Herr Anschütz-Kaempfe hatte sich bis zum Erscheinen meiner Arbeit mit der Herstellung eines Azimutapparates befaßt, das ist eines Kreiselapparates, bei dem die Kreiselachse nicht nach Norden einschwingt, sondern eine eingestellte Richtung unverändert beibehält; dies ergibt sich daraus, daß er in derselben Zeit, in welcher ich in der Firma Siemens & Halske meine Arbeit ausführte, eben dieser Firma seine Erfindung zum Kauf anbot, und dies Angebot abgelehnt wurde, weil die früheren Arbeiten Werner von Siemens, in Verbindung mit Van den Boos und meine damaligen theoretischen und praktischen Versuche die Fehler seiner Anschauungsweise und die praktische Undurchführbarkeit seiner Idee erkennen ließen. Auch bestätigte mir später sein Mitarbeiter, Herr Schuler, daß vor dessen Eintritt in die Firma Anschütz & Co., das heißt vor der Veröffentlichung meiner Arbeit 1906, Herr Anschütz-Kaempfe nicht versucht hat, einen nordweisenden Kreisel zu bauen. Nach der Veröffentlichung meiner Arbeit nahm er indessen trotz der geäußerten seemännischen Bedenken die Konstrukion auf, und es gelang ihm als Ersten, nach den von mir entwickelten Ideen einen praktisch brauchbaren Kompaß zu konstruieren und zu bauen. Dabei benutzte er die von mir abgeleitete Beziehung zwischen den Azimutschwingungen und den Elevationsschwingungen zur Konstruktion einer besonderen Dämpfungseinrichtung, zu der er genötigt war, weil bei dem langsam schwingenden Kompaß auch die von Van den Boos benutzte Flüssigkeitsdämpfung unverwendbar wurde.

Der praktische Gebrauch der ersten Kompasse ergab nun, daß die Vorteile des Kompasses die seemännischen Bedenken gegen die lange Schwingungsdauer überwogen. Die Bedenken lagen in erster Linie darin, daß eine durch einen Zufall verursachte Störung über mehrere Stunden anhält, und die Kompaßrose auch erst mehrere Stunden nach Inbetriebsetzung die Nordrichtung einnimmt.

Beim praktischen Gebrauch ergab sich nun noch ein weiterer Fehler, nämlich eine Störung des Kompasses durch Schlingerbewegung des Schiffes. Diesen Fehler zuerst theoretisch aufgeklärt zu haben, ist das Verdienst des Herrn Schuler, welcher auch zuerst in der Verwendung zweier gekoppelter Kreisel ein Mittel fand, den Fehler zu beheben.

Kiel, den 1. Oktober 1918.

(Eingegangen 16. Oktober 1918.)

BESPRECHUNGEN.

L. Graetz, Lehrbuch der Physik. gr. 8. 4. umgearbeitete Auflage. VI u. 486 S. m. 269 Abbild. Leipzig und Wien, Franz Deuticke. 1917. M. 10.—.

Daß die Kunst gemeinverständlicher Darstellung dem Verf. in hohem Maße zu eigen ist, ist so bekannt, daß es genügen würde, auf die früheren Auflagen dieses Lehrbuchs hinzuweisen, wenn der Verf. nicht in dieser Auflage den merkwürdigen Versuch gemacht hätte, die Mechanik von ihrer gewohnten Stellung am Anfang hinweg und in den V. Abschnitt hinter Wärme (II), Magnetismus (III) und Elektrizität (IV) zu verlegen. Es folgen dann noch: Molekulare Eigenschaften der Körper (VI), Wellenbewegung (VII), Schall (VIII) und Licht (IX). Abschnitt (I) bringt unter der Überschrift „Elementare Tatsachen und Begriffe" ein gut Teil Dinge, die man sonst der Mechanik zuzuordnen pflegt, so daß diese sich in zwei Teile getrennt darstellt und auch manches unnötigerweise doppelt gesagt wird. Man erhält ganz den Eindruck, als sei hier eine zweisemestrige Vorlesung wiedergegeben und ein Teil des in Abschnitt (V) gebotenen Wiederholungsstoffes stehe für diejenigen da, die den ersten Teil nicht gehört haben. Da das Buch nach des Verf. Angabe für Hochschulstudierende bestimmt sein soll, so möchte Referent noch den Wunsch aussprechen, daß die vielen störenden Ungenauigkeiten und veralteten Ausdrucksweisen in zukünftigen Auflagen ausgemerzt werden. Der Satz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten (§ 11) ist keine Erfahrungstatsache, sondern eine solche der Geometrie. Dagegen folgt der Satz vom Parallelogramm der Kräfte (§ 19) nicht aus der bloßen Möglichkeit, eine Einzelkraft durch eine Strecke zu veranschaulichen, sondern ist eine Tatsache der Erfahrung, aus welcher erst der Vektorcharakter der Kraft, d. h. der Parallelogrammsatz folgt. Die Erklärung von Selbstinduktion, elektrischen Schwingungen und Elektronenträgheit mittels des unglückseligen Begriffes vom „Extrastrom" sollte man in einem modernen Lehrbuch nicht mehr finden dürfen. Um so schmerzlicher vermißt man die elektromagnetische Feldenergie. Das Prinzip der Sie-

mensschen Maschine heißt „dynamoelektrisches“, nicht aber „Dynamoprinzip“. Aus dem Versagen des Gasthermometers als Messungsmittel läßt sich noch nicht die Bedeutung von —273 als „absoluter Nullpunkt“ herleiten. W. Kaufmann.

H. Brick, Die Telegraphen- und Fernsprechtechnik in ihrer Entwicklung. (Aus Natur und Geisteswelt, Bd. 235.) 2. Auflage. kl. 8. 113 S. m. 65 Abbild. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1918. M. 1.20, geb. M. 1.50.

Verf. gibt in der Einleitung eine kurze Übersicht der akustischen und optischen Telegraphen und geht dann im besonderen durch die einzelnen Apparate der Telegraphen- und Fernsprechtechnik im allgemeinen Verkehr. Von Neuerungen findet sich bei den Stromquellen die Erfindung des amerikanischen Ingenieurs Hewitt, nämlich die Verwendung des Quecksilberdampfgleichrichters in der Schaltung für die Umformung von Drehstrom. Es hat sich gezeigt, daß der Quecksilberdampf einmal den Widerstand verringert, den der Strom zwischen Kathode und Anode zu überwinden hat und dann kein Verbrauch der Kathode aus Quecksilber eintritt, wie es bei einer solchen aus Metall oder Kohle der Fall ist. Ungeeignet aber ist der Quecksilberdampfgleichrichter für das Umformen von Strömen von weniger als drei Ampère Stärke, hier hat sich bewährt der elektromagnetische Gleichrichter der deutschen Telephonwerke. In dem Bestreben die Leitungen besser auszunutzen kam man auf die Mehrfach- und Maschinentelegraphie, und hier ist der Typendruck-Schnelltelegraph von Siemens & Halske eine Errungenschaft der letzten Jahre und bisher unerreicht an Leistungsfähigkeit und Betriebssicherheit. An Hand von vier Abbildungen gibt der Verf. eine übersichtliche Beschreibung dieses Maschinentelegraphen und interessante Angaben über seine Anwendung und Leistungen im Telegraphenverkehr. Im Abschnitt Fernsprechtechnik behandelt er natürlich auch die neuen Systeme, wie Fernsprechstellen mit Nebenanschlüssen (Zentral-, Parallel- und Reihenschaltung, Anschlußdosen), selbstkassierende Fernsprechstellen, das Telegraphon und den Fernsprechverstärker System Lieben-Reiß, der kurz vor Ausbruch des Krieges in den deutschen Telegraphenverwaltungen Eingang fand. Der Verstärker, die Lieben-Lampe genannt, ist sehr empfindlich und läßt bei richtiger Einstellung den 30fachen Wert des ankommenden Stromes erreichen und auch Ströme verstärken, welche weit unter der Hörbarkeitsgrenze des empfindlichsten Fernhörers liegen. Daher ist die Lampe nicht nur als Verstärker zwischen zwei langen Fernsprechleitungen, sondern auch am Ende einer Teilnehmerleitung zu verwenden. Kurz behandelt werden als besondere Zweige der Telegraphen- und Fernsprechtechnik auch der Telegraph und das Telephon im Heere, im Eisenbahnbetrieb und die Feuerwehrtelegraphen und elektrischen Kommando- und Signalanlagen. Zuletzt folgt die Telegraphen- und Fernsprechleitung, also Drähte und Stützpunkte für Freileitungen, Kabel und das elektrische Verhalten der Leitung. Diese verkürzte Inhaltsangabe und stellenweise Anführung der interessantesten Neuerungen in der Telegraphie mögen zu einem Durchlesen des ganzen Bändchens führen, welches anregend und unterhaltend geschrieben ist, denn ein Eingehen auf technische Einzelheiten ist vermieden, und nur Grundsächliches und Wesentliches gegeben worden. Immerhin dürfte der ganze Inhalt, wie der Verf. selbst wünscht, für den Verkehrsbeamten und Techniker als kurze Übersicht über das große Gebiet der Starkstromtechnik sehr erwünscht sein. Blaschke.

Zu Max Plancks sechzigstem Geburtstag. Ansprachen, gehalten am 26. April 1918 in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft von E. Warburg, M. v. Laue, A. Sommerfeld und A. Einstein, nebst einer Erwiderung von M. Planck. 8. 36 S. mit 1 Figur. Karlsruhe i. B., C. F. Müllersche Hofbuchhandlung. 1918. Preis brosch. M. 1.20.

Der große Hörsaal des Physikalischen Instituts der Berliner Universität faßte kaum die Zahl der Fachgenossen und Verehrer Plancks, die der Einladung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft zur Festsitzung und Feier seines sechzigsten Geburtstages gefolgt waren. Eine festliche Stimmung erfüllte den weiten Raum; die deutsche Physik ehrte sich selber, indem sie dem ersten und erfolgreichsten Theoretiker, dem Entdecker der Quanten, huldigte.

Der Präsident der Physikalisch-technischen Reichsanstalt E. Warburg eröffnete die Reihe der Ansprachen mit einer Darstellung der Verdienste, die sich Planck um die Deutsche Physikalische Gesellschaft erworben hat. Er war es, dem die Umwandlung der schon lange bestehenden Berliner Gesellschaft in eine Deutsche und damit die Zusammenfassung der deutschen Physik zu einer Körperschaft zu danken ist.

M. v. Laue gab eine eingehende Darstellung von Plancks thermodynamischen Arbeiten, die heute zum klassischen Bestande der Wissenschaft gehören. Für ihn selbst bedeuteten sie die Vorarbeiten zu dem großen Werke, das seinen Namen unsterblich machen sollte, zur Entdeckung der Quanten. Wie diese entstanden ist und zu welchen Triumphen sie geführt hat, davon wußte A. Sommerfeld ein lebendiges Bild zu entwerfen; er formulierte den Sinn der Quantentheorie als die Aufgabe des Stetigkeitsaxioms in der Physik und führte die Hörer auf kurzem Pfade durch das Dickicht der Atomtheorie, in das durch die Quanten die ersten Lichtungen geschlagen worden sind. Zum Abschluß seines Vortrages berichtete er über ein neues, verheißungsvolles Ergebnis, das die Gesetzmäßigkeit der Atomvolumina bezw. Atomgrößen im periodischen System der Elemente betrifft.

Hatten sich diese Ansprachen mit den Einzelheiten von Plancks wissenschaftlichen Wirken befaßt, so führte die Ansprache Einsteins auf die hohe Warte, von der das Treiben der Menschen vor dem philosophischen Blicke ausgebreitet liegt und sichtbar wird, wer in den Niederungen bleibt und wer daraus emporsteigt. Einsteins Worte waren ein schönes Bekenntnis zur Heiligkeit der Wissenschaft, zu deren Tempelhüter er so gut wie Planck bestellt ist.

Planck selbst ergriff zum Schluß das Wort zu einer humorvollen Erwiderung, die durch die Bescheidenheit seiner reinen Persönlichkeit eingegeben war. Als das Ziel seiner Forschung bekannte er die Versöhnung der Quantentheorie mit der klassischen Undulationstheorie des Lichts. Möge ihm die Lösung des Quantenrätsels gelingen. M. Born.

E. Gumlich, Leitfaden der magnetischen Messungen, mit besonderer Berücksichtigung der in der Physikal.-Technischen Reichsanstalt verwendeten Methoden und Apparate, nebst einer Übersicht über die magnetischen Eigenschaften ferromagnetischer Stoffe. gr. 8. VIII u. 228 S. mit 82 Abbild. Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn. 1918. Geh. M. 12.—, geb. M. 14.40.

In den physikalischen Lehrbüchern aller Größenordnungen, vom kurzen Abriß in Westentaschenformat bis zum Handbuch, nimmt die Elektrizität den ihr gebührenden breiten Raum ein. Der Magnetismus dagegen wird vielfach noch etwas stiefmütterlich behandelt. Über magnetische Messungen und Meßapparate findet sich, namentlich in den kleineren Büchern, nur äußerst wenig oder gar nichts, und doch sind diese speziell für den Studierenden der angewandten Elektrizität zum mindesten ebenso wichtig wie die rein elektrischen Messungen. Wenn uns daher jetzt ein Leitfaden der magnetischen Messungen geboten wird, so entspricht er einem wirklich vorhandenen Bedürfnis und ist daher auf das wärmste zu begrüßen, namentlich, da er auch von so berufener Seite kommt wie aus der Feder Gumlichs, des bekannten Führers und erfolgreichen Forschers auf diesem Gebiete.

Das Buch zerfällt in vier Teile, in deren erstem die magnetischen Grundbegriffe — Polstärke, Feldstärke, Induktion, Intensität, Entmagnetisierung — definiert und erläutert werden, und zwar in einer so glücklichen Art und Weise, daß sie nicht nur dem mathematischen Verstande, sondern auch der Anschauung näher gebracht werden. Der zweite Teil, der eigentliche Hauptteil, bringt eine genaue Beschreibung aller wichtigeren Meßapparate und Meßmethoden. Hierbei werden die einzelnen Methoden durch ausführliche Meßprotokolle und Meßbeispiele erläutert. Die Darstellung ist so gehalten, daß sie es jedem, der über die nötigen Grundlagen verfügt, ermöglicht, sich eine hinreichende Kenntnis der Methoden und Apparate anzueignen. Im dritten Teil werden die magnetischen Eigenschaften einer Reihe wichtiger Eisenlegierungen und anderer ferromagnetischer Substanzen gebracht und durch eine Anzahl mikrophotographischer Aufnahmen ergänzt. Der vierte Teil endlich enthält in Tabellenform die Magnetisierungskurve einer Reihe wichtiger Substanzen.

Das Buch wird in erster Linie dem Studierenden und dem Anfänger in der Praxis dienen, der sich mit magnetischen Messungen ernstlich zu befassen hat. Es wird darüber hinaus aber auch jedem Praktiker ein wertvolles Hilfsmittel und Nachschlagewerk sein. Daß in erster Linie die Methoden berücksichtigt worden sind, die bei der Reichsanstalt zur Verwendung kommen, ist keine einseitige Beschränkung des Stoffes, sondern im Gegenteil ein Vorzug; denn überall in der Praxis wird ja bei strittigen Fragen die Reichsanstalt als entscheidende Instanz angerufen, und gelten die dort ausgeführten Messungen als maßgebend.

V. Pieck.

M. Gerbel, Die Grundgesetze der Wärmestrahlung und ihre Anwendung auf Dampfkessel mit Innenfeuerung. gr. 8. VI u. 76 S. mit 26 Textfiguren. Berlin, Julius Springer. 1917. M. 2.40.

Die vorliegende Schrift, deren Gedankengänge ursprünglich in der Zeitschrift der Dampfkesseluntersuchungs- und Versicherungsgesellschaft (1915) veröffentlicht wurden, gehört einem jener problemreichen Grenzgebiete der Physik und Technik an, deren Beackerung mit verhältnismäßig geringer Mühe wertvolle Früchte zeitigt. Der Verf. leitet auf Grund des Lambertschen Cosinusgesetzes die allgemeinen Ansätze dafür her, wie die von einer beliebigen Fläche nach einer anderen beliebigen Fläche durch Strahlung übertragene Wärme rechnerisch zu ermitteln ist. Ohne Zweifel füllt er damit eine wirkliche Lücke in der Handbuchliteratur aus, und seine Ergebnisse sind nicht nur für die Wärmetechnik, sondern für die ganze elementare Strahlungstheorie von Bedeutung und lassen sich beispielsweise auf die Beleuchtungstechnik ohne jede Schwierigkeit übertragen, wiewohl sie zunächst eigentlich nur auf die Theorie der Dampfkesselfeuerung zugeschnitten sind. Die Rechenmethoden sind ganz elementar gehalten und werden dank der Klarheit und Ausführlichkeit der Entwicklungen auch dem verständlich sein, der die Integralrechnung nicht gerade zu seinem alltäglichen Arbeitszeug zählt. Die Schrift ist zwar auch dem Physiker zu empfehlen, wendet sich aber naturgemäß in erster Linie an den Ingenieur, für den die an sorgfältig ausgewählten Beispielen berechneten Wärmebilanzen der gebräuchlichen Dampfkesseltypen von Interesse sein mögen.

R. Grammel.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

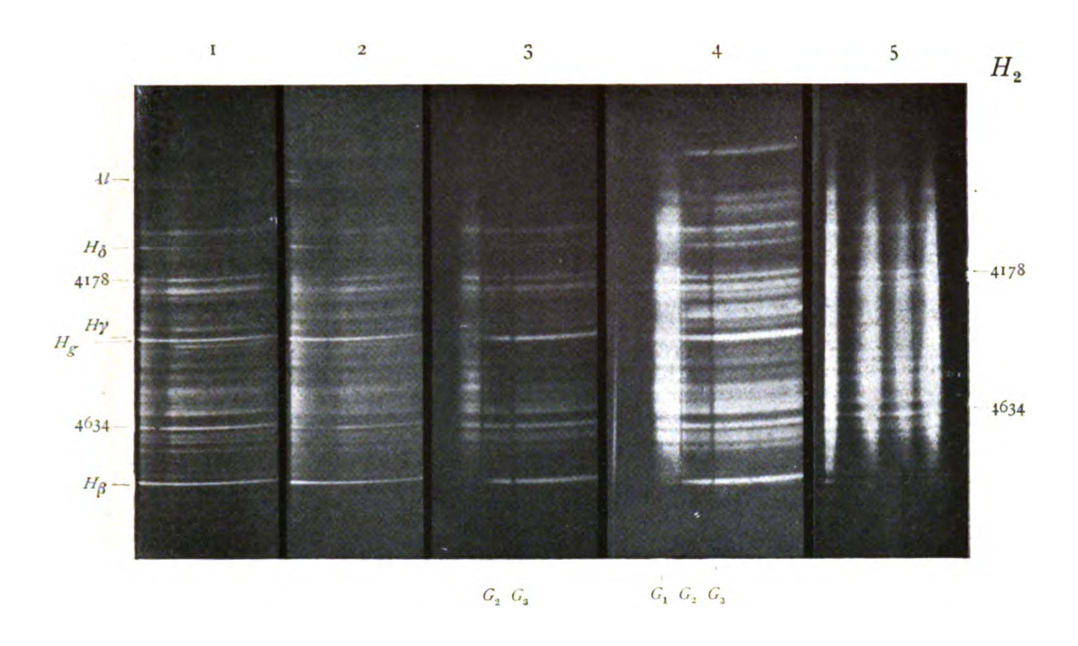
Ernannt: Der ord. Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Hans Mohrmann zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Basel.

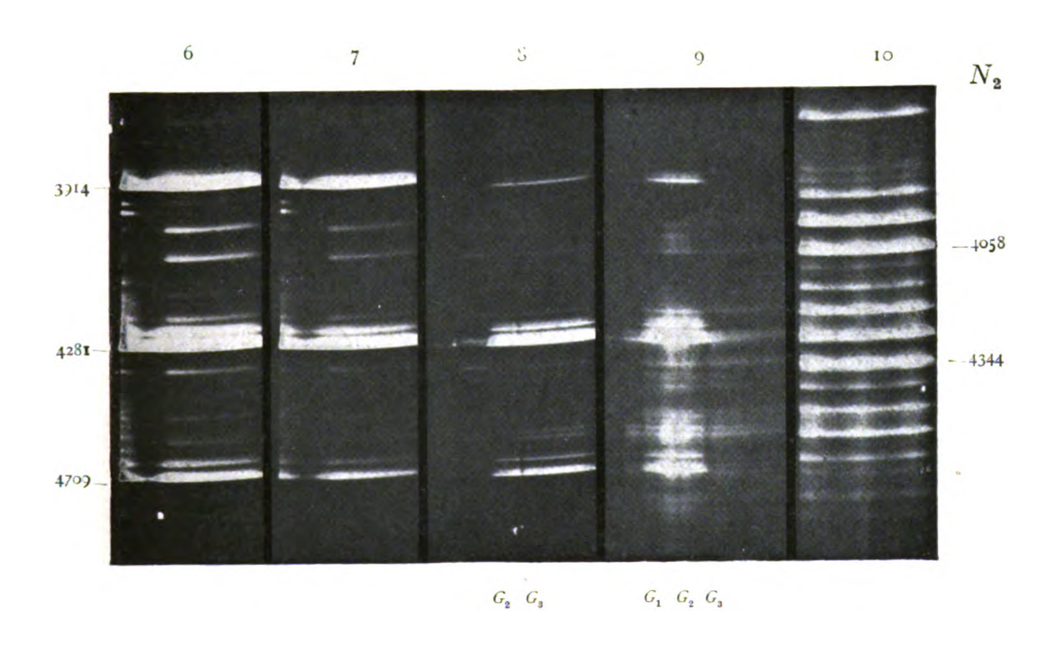
Verliehen: Dem früheren Privatdozenten für Physik an der Universität Berlin Dr. Leo Arons der Titel Professor.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.







R. Holm u. Th. Krüger, Zur Erklärung des Hittorfschen Kathodendunkelraumes einer Glimmentladung.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und H. Th. Simon



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 40 Mark, im Ausland 45 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 60 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.
Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz Albrechtstraße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstraße 2.

No. 2. 15. Januar 1919. No. 534. 20. Jahrgang.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen; B. = Besprechungen.)

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 2. 15. Januar 1919. 20. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 3 am 16. Januar 1919.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes.

Von Wolfgang Pauli jun.

Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes sind bisher bloß für den Spezialfall $g = -1$ explizite berechnet worden, aber nicht für ein beliebiges Koordinatensystem. Diese Lücke soll durch das Folgende ausgefüllt werden. Die t_i^k sind durch die Gleichungen definiert

$$t_i^k = \frac{\mathfrak{t}_i^k}{\sqrt{-g}}. \tag{1}$$

$$2\varkappa\, \mathfrak{t}_i^k = \mathfrak{G}^* \delta_i^k - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_k^{\mu\nu}} \cdot g_i^{\mu\nu}\;{}^{1)} \tag{2}$$

$$\mathfrak{G}^* = \sqrt{-g}\, G^* \tag{3}$$

$$G^* = g^{\alpha\beta}\left(\begin{Bmatrix}\alpha s\\ r\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta r\\ s\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ r\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}r s\\ s\end{Bmatrix}\right). \tag{4}$$

Um $\dfrac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_k^{\mu\nu}}$ zu berechnen, gehen wir aus von der Formel

$$\begin{aligned}\delta \mathfrak{G}^* = \begin{Bmatrix}\mu s\\ s\end{Bmatrix} \delta \frac{\partial (g^{\mu k}\sqrt{-g})}{\partial x_k} - \\ \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ k\end{Bmatrix} \delta \frac{\partial (g^{\mu\nu}\sqrt{-g})}{\partial x_k} + V_{\mu\nu}\,\delta(\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}),{}^{2)}\end{aligned} \tag{5}$$

die man auch schreiben kann

$$\begin{aligned}\delta \mathfrak{G}^* = \left[\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\mu s\\ s\end{Bmatrix}\delta_\nu^k + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\nu s\\ s\end{Bmatrix}\delta_\mu^k - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ k\end{Bmatrix}\right] \\ \delta \frac{\partial (g^{\mu\nu}\sqrt{-g})}{\partial x_k} + V_{\mu\nu}\,\delta(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}).\end{aligned} \tag{5'}$$

Darin bedeuten die $V_{\mu\nu}$ gewisse Funktionen der $g_{\mu\nu}$ und der $g_k^{\mu\nu}$, die uns nicht näher interessieren. Bezeichnen wir den Ausdruck in der eckigen Klammer für den Moment mit $K_{\mu\nu}^k$, so wird

$$\begin{aligned}\delta \mathfrak{G}^* = \left(K_{\mu\nu}^k \sqrt{-g} - \frac{1}{2} K_{\alpha\beta}^k \cdot g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\right)\delta g_k^{\mu\nu} + \\ + (\ldots)\,\delta\sqrt{-g} + (\ldots)\,\delta g^{\mu\nu},\end{aligned}$$

also nach (2) und (1)

$$2\varkappa\, t_i^k = G^*\delta_i^k - \left(K_{\mu\nu}^k - \frac{1}{2} K_{\alpha\beta}^k g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}\right) g_i^{\mu\nu} \tag{6}$$

oder ausgerechnet

$$\begin{aligned}2\varkappa\, t_i^k = G^*\delta_i^k - \begin{Bmatrix}\mu s\\ s\end{Bmatrix} g_i^{\mu k} + \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ k\end{Bmatrix} g_i^{\mu\nu} + \\ + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\alpha s\\ s\end{Bmatrix} g^{\alpha k} g_{\mu\nu} g_i^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ k\end{Bmatrix} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} g_i^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{7}$$

Das ist der allgemeine Ausdruck für die Energiekomponenten. Im Spezialfall $g = -1$ geht er in den von Einstein[1]) angegebenen über. Es ist dann nämlich

$$\begin{Bmatrix}r s\\ s\end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_r} = 0$$

und daher fällt das zweite Glied in (4), sowie das zweite, vierte und fünfte Glied in (7) weg. Substituiert man außerdem für $g_i^{\mu\nu}$ den Wert

$$g_i^{\mu\nu} = -\begin{Bmatrix}i s\\ \mu\end{Bmatrix} g^{s\nu} - \begin{Bmatrix}i s\\ \nu\end{Bmatrix} g^{s\mu},{}^{2)}$$

so erhält man

$$\begin{aligned}2\varkappa\, t_i^k = g^{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\alpha s\\ r\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta r\\ s\end{Bmatrix}\delta_i^k - \\ - 2\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ k\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}i s\\ \mu\end{Bmatrix} g^{s\nu}, \text{ w. z. b. w.}\end{aligned} \tag{8}$$

Interessanter ist der Spezialfall, daß die $g^{\mu\nu}$ sich nur unendlich wenig von den $-\delta_{\mu\nu}$ unterscheiden, und daß die Gleichungen gelten

---

1) A. Einstein, Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie, Berliner Sitzungsberichte, 1916, S. 1115, Gl. (20). — Es ist zur Abkürzung gesetzt $g_k^{\mu\nu} = \dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_k}$.

2) Vgl. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Berlin, Julius Springer 1918, S. 191.

1) Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Leipzig, Joh. Ambr. Barth 1916, S. 45, Gl. (50).

2) Man vgl. z. B. Weyl, l. c. S. 105, Gl. (41).

$$\frac{\partial \gamma'_{ik}}{\partial x_k} = 0, \qquad (9)$$

worin die γ'_{ik} durch

$$\left.\begin{array}{c} g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \\ \delta_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu \text{ und } = 1 \text{ für } \mu = \nu \end{array}\right\} \qquad (10)$$

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\gamma \qquad (11)$$

$$\gamma = \sum_\alpha \gamma_{\alpha\alpha} \qquad (12)$$

definiert sind. Aus (10), (11), (12) folgt noch

$$\gamma' = \sum_\alpha \gamma'_{\alpha\alpha} = -\gamma \qquad (13)$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\gamma'. \qquad (14)$$

Unter diesen Bedingungen hat nämlich Einstein die Feldgleichungen näherungsweise integriert[1]) und findet für t_i^k den Ausdruck

$$\left.\begin{array}{l} 2\varkappa t_i^k = \sum\limits_{\mu,\nu,\alpha} \left\{ \frac{1}{4}\delta_i^k \left[\left(\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma'}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_i}\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_k} + \frac{1}{4}\frac{\partial \gamma'}{\partial x_i}\frac{\partial \gamma'}{\partial x_k} \right\}^{2)} \end{array}\right| \qquad (15)$$

Wir haben nun die rechte Seite von (7) bis auf Größen von höherer als 2. Ordnung auszuwerten.

Dabei können wir setzen

$$g^{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}.^{3)}$$

Ferner bemerken wir, daß man hat

$$g^{\alpha\beta}\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ r \end{matrix} \right\} = \sum_\alpha \left[\begin{matrix} \alpha\alpha \\ r \end{matrix} \right] = \sum_\alpha \left(\frac{\partial \gamma_{r\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_r} \right) = \sum_\alpha \frac{\partial \gamma'_{r\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0$$

mit Rücksicht auf (9). Das zweite Glied in (4) und das letzte Glied in (7) sind deshalb zu vernachlässigen. Für G^* erhalten wir nun

$$G^* = -\left[\begin{matrix} \alpha s \\ r \end{matrix} \right]\left[\begin{matrix} \alpha r \\ s \end{matrix} \right] = -\frac{1}{4}\sum_{\alpha,r,s}\left(\frac{\partial \gamma_{r\alpha}}{\partial x_s} + \frac{\partial \gamma_{sr}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \gamma_{\alpha s}}{\partial x_r} \right)\left(\frac{\partial \gamma_{s\alpha}}{\partial x_r} + \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \gamma_{\alpha r}}{\partial x_s} \right) = \frac{1}{4}\sum_{\alpha,r,s}\left[\left(\frac{\partial \gamma_{r\alpha}}{\partial x_s} - \frac{\partial \gamma_{s\alpha}}{\partial x_r} \right)^2 - \left(\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right] = \frac{1}{4}\sum_{\alpha,r,s}\left[\left(\frac{\partial \gamma_{r\alpha}}{\partial x_\alpha} \right)^2 - 2\frac{\partial \gamma_{r\alpha}}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial \gamma_{s\alpha}}{\partial x_r} + \left(\frac{\partial \gamma_{s\alpha}}{\partial x_r} \right)^2 - \left(\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right]$$

und schließlich

$$G^* = \frac{1}{4}\sum_{\alpha,r,s}\left[\left(\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_\alpha} \right)^2 - 2\frac{\partial \gamma_{r\alpha}}{\partial x_s}\frac{\partial \gamma_{s\alpha}}{\partial x_r} \right]. \qquad (17)$$

Weiter ergibt sich für t_i^k:

$$\left.\begin{array}{l} 2\varkappa t_i^k = \frac{1}{4}\delta_i^k \sum\limits_{\alpha,r,s}\left[\left(\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_\alpha} \right)^2 - 2\frac{\partial \gamma_{r\alpha}}{\partial x_s}\frac{\partial \gamma_{s\alpha}}{\partial x_r} \right] - \\ - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma}{\partial x_\mu}\frac{\partial \gamma_{\mu k}}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial \gamma_{k\mu}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_k} \right)\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{4}\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}\frac{\partial \gamma}{\partial x_k}. \end{array}\right| \qquad (18)$$

Führen wir endlich mit Hilfe von (14) die γ'_{ik} statt der γ_{ik} ein und achten stets auf (9), so erhalten wir als Endresultat:

$$2\varkappa t_i^k = \frac{1}{4}\delta_i^k \sum_{\alpha,r,s}\left[\left(\frac{\partial \gamma'_{rs}}{\partial x_\alpha} \right)^2 - 2\frac{\partial \gamma'_{r\alpha}}{\partial x_s}\frac{\partial \gamma'_{s\alpha}}{\partial x_r} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma'}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right] + \frac{\partial \gamma'_{k\mu}}{\partial x_\nu}\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_k}\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_i} + \frac{1}{4}\frac{\partial \gamma'}{\partial x_k}\frac{\partial \gamma'}{\partial x_i}.^{1)} \qquad (19)$$

Dieser Ausdruck stimmt nun überraschenderweise nicht mit dem Einsteinschen Ausdruck (15) überein. Da aber jedenfalls beide Ausdrücke Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial(\mathfrak{T}_i^k + t_i^k)}{\partial x_k} = 0^{2)} \qquad (20)$$

und der daraus folgenden Gleichung

$$\frac{\partial t_i^k}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_i}T_{\alpha\beta} = 0^{3)} \qquad (21)$$

sind, muß ihre Differenz

$$A_i^k = -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma'_{r\alpha}}{\partial x_s}\frac{\partial \gamma'_{s\alpha}}{\partial x_r}\delta_i^k + \frac{\partial \gamma'_{k\mu}}{\partial x_\nu}\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_i} \qquad (22)$$

der Differentialgleichung

$$\frac{\partial A_i^k}{\partial x_k} = 0 \qquad (23)$$

genügen.

1) A. Einstein, Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Berliner Sitzungsber. 1916, S. 688 ff.

2) A. Einstein, Über Gravitationswellen, Berliner Sitzungsberichte 1918, S. 158, Gl. (9). — Einstein berechnet t_{ki} und nicht t_i^k, deshalb haben bei uns alle Terme das entgegengesetzte Vorzeichen wie bei Einstein.

3) Das ergibt sich aus dem Gleichungssystem $g_{\mu\alpha} \cdot g^{\mu\beta} = \delta_\alpha^\beta = \delta_{\alpha\beta}$.

1) Nebenbei bemerkt, sind diese Werte für die Energiekomponenten auch dann noch richtig, wenn die Gleichungen (9) nicht gelten.

2) A. Einstein, Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie. Berliner Sitzungsberichte 1916, S. 1115, Gl. (21).

3) A. Einstein, Über Gravitationswellen. Berliner Sitzungsberichte 1918, S. 157, Gl. (8).

Das ist in der Tat der Fall, denn man hat

$$\frac{\partial A_i^k}{\partial x_k} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma'_{r\alpha}}{\partial x_s \partial x_i}\frac{\partial \gamma'_{s\alpha}}{\partial x_r} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma'_{r\alpha}}{\partial x_s}\frac{\partial^2 \gamma'_{s\alpha}}{\partial x_r \partial x_i} + \frac{\partial^2 \gamma'_{k\mu}}{\partial x_\nu \partial x_k}\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_i} + \frac{\partial \gamma'_{k\mu}}{\partial x_\nu}\frac{\partial^2 \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_k \partial x_i}.$$

Das erste und zweite Glied der rechten Seite gehen durch Vertauschung von r und s ineinander über, sind also gleich und ihre Summe hebt sich gegen das letzte Glied fort, während das dritte Glied nach (9) verschwindet. Wir kommen also zu dem merkwürdigen Resultate, daß die t_i^k durch die Gleichungen (20) im betrachteten Spezialfalle nicht eindeutig bestimmt sind[1].

Zusammenfassung.

Die Energiekomponenten t_i^k des Gravitationsfeldes werden für den allgemeinen Fall berechnet. Der erhaltene Ausdruck wird sowohl für ein Koordinatensystem, in dem $g = -1$ ist, als auch für die Einsteinsche Näherungslösung spezialisiert und das Ergebnis mit den bekannten Ausdrücken verglichen. In letzterem Falle erweisen sich die Energiekomponenten als nicht eindeutig bestimmt.

1) Man kann dann jedes Lösungssystem von (20) Energiekomponenten nennen. Die weiteren Entwicklungen in Einsteins Arbeit „Über Gravitationswellen" werden deshalb durch die Nichteindeutigkeit des Lösungssystems von (20) nicht tangiert.

Wien, September 1918.

(Eingegangen 22. September 1918.)

Zwei Staugeräte.

Von Ragnar Holm.

Für den Anemoklinographen[1]) der Siemens & Halske A.-G. habe ich eine Stauscheibe für Windgeschwindigkeitsmessungen und einen Stauzylinder für Windneigungsmessungen ausprobiert.

Die Stauscheibe bildet die Lösung folgender Aufgabe:

Ein Staugerät für Windgeschwindigkeitsmessungen zu finden, dessen Druckdifferenz zwischen vorn und hinten innerhalb eines großen Gebietes von der Windneigung gegen die Gerätachse und auch innerhalb nicht zu knapper Grenzen davon unabhängig ist, ob die Druckdifferenz eine Luftströmung, Nebenschlußstrom, durch die Zuleitungen zum Staugerät hervorbringt. Dabei ist es wertvoll, wenn das Gerät mäßige Dimensionen bekommt.

1) Siehe H. Gerdien, Jahrb. d. wissensch. Ges. f. Flugtechnik 2, 67, 1913—14; Verhandl. d. D. phys. Ges. 15, 961, 1913 und diese Zeitschr. 14, 1161, 1913.

Der Stauzylinder bildet die Lösung folgender Aufgabe: Ein Staugerät zu finden, das meßbar auf Windneigungen reagiert, und ebenso wie die Scheibe einen Luftstrom durch die Zuleitungen verträgt, ohne daß dadurch die Skala in mehr als leicht bestimmbarer Weise verändert wird.

Beide Staugeräte sollten bequem reproduzierbar sein. Beide sollten Schutzvorrichtungen gegen Staub besitzen oder jedenfalls recht viel Staub oder Regentropfen in dem sie treffenden Luftstrom vertragen, ohne ihre Skala zu verändern.

Die Stauscheibe (Fig. 1) besteht aus einer kreisrunden Platte P (z. B.: Dicke 1 mm;

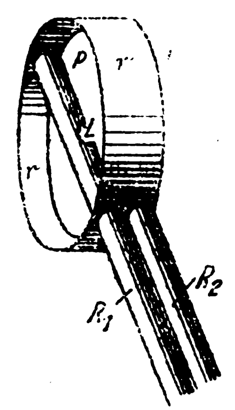


Fig. 1.

Durchmesser 60 mm), die beiderseits mit einem Rand, r, von einer Höhe gleich etwa $^1/_8$ des Scheibendurchmessers versehen ist. Die Verbindungsrohre R_1 und R_2 führen durch Löcher im Rand quer über die Scheibe. An der Scheibenmitte ist jedes R-Rohr mit einem Loch L versehen. Der an der Scheibenmitte herrschende Druck wirkt durch das betr. Loch und weiter durch das betr. R-Rohr auf das daran angeschlossene Manometer.

Der Stauzylinder wird in der Fig. 2 in Querschnittszeichnung gezeigt. Es ist ein hohler Kreiszylinder von 40 mm Durchmesser, dessen Enden durch Deckel geschlossen sind und

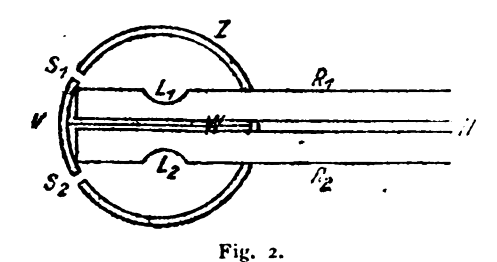


Fig. 2.

dessen Inneres durch eine Scheidewand in zwei Kammern geteilt ist. Die Länge des Zylinders ist etwa gleich dem Dreifachen seines Durchmessers. Auf der Fig. 2 bedeutet Z den Zylindermantel; W die Scheidewand; R_1 und R_2 zwei in der Mitte des Zylinders nach den Kammern führende Rohre. Die vorderen Enden dieser Rohre (bei V) sind geschlossen. Die Verbindung einer Kammer mit dem zugehörigen Rohr ist durch das Loch L_1 bzw. L_2 zustande gebracht. S_1 und S_2 sind zwei 1,5 mm weite Spalten, die etwas kürzer als die halbe Zylinderlänge sind. Ihre vordersten Ränder stehen genau 60^0 auseinander. Durch diese Spalte kommunizieren die Kammern mit der äußeren Luft.

Die Anordnung der Zuleitungsrohre zur Stauscheibe und zum Stauzylinder wurde zu dem Zwecke so gewählt, daß das Innere der Zuleitungsrohre möglichst vor Verschmutzen geschützt werden sollte. Die Löcher der R-Rohre der Stauscheibe sind ja (wie bei der Prandtlschen Scheibe) gegen vom Wind nach der Scheibe getriebene Staubteilchen geschützt. Eine entsprechende Schutzeinrichtung könnte ein Staurohr nicht bekommen. Die Kammern des Stauzylinders können einen recht großen Bodensatz (z. B. Regenwasser) haben, ehe davon etwas in die betr. R-Rohre dringt.

Mit der Stauscheibe mißt man in bekannter Weise. Nach den unten angegebenen Messungen zu urteilen, dürfte durch diese Stauscheibe die gestellte Aufgabe befriedigend gelöst sein. Mit allen Stauscheiben hat sie allerdings, wie ich bestätigt habe, die Eigenschaft gemeinsam in stark kleinwirbeliger Luft ihren Stauscheibenkoeffizienten k etwas zu vergrößern[1]). Das Prandtlsche Staurohr ist in dieser Hinsicht unempfindlicher. Es muß aber, um gegen Nebenschlußstrom genügend unempfindlich zu werden, unbequem große Dimensionen erhalten (vgl. unten). Die Stauscheibe läßt sich wohl mit einfacheren Mitteln gegen schädliche Verschmutzung schützen als das Staurohr (vgl. oben). Für Messungen mit dem Anemoklinographen im Freien, wo der Wind nicht kleinwirbelig ist, wo also der normale Stauscheibenkoeffizient k gilt, ist deshalb die Scheibe dem Rohr vorzuziehen.

Der Stauzylinder wirkt folgendermaßen: Wenn der Wind ihn direkt von vorn, von V, trifft, erhalten seine beiden Kammern denselben Druck. Wenn aber der Wind, bei horizontaler Scheidewand, von vorn, aber etwas von oben kommt, so erhält die obere Kammer einen dem Neigungswinkel, Θ, und der Windgeschwindigkeit v entsprechenden Überdruck Z der unteren Kammer gegenüber. Mit Bezug auf den die Neigung messenden Staukörper forderte die Aufgabe eine möglichst einfache Funktion $Z\,(v, \Theta)$ bei einfacher und reproduzierbarer Konstruktion. Auch diese Forderungen dürften erfüllt sein.

Die im folgenden angegebenen Messungen wurden im Auftrage der Firma Siemens & Halske A.-G. durch gefälliges Entgegenkommen in der Modellversuchsanstalt für Aerodynamik in Göttingen ausgeführt.

Die Druckdifferenz zwischen den der Scheibe bzw. dem Zylinder nächstliegenden Teilen der Zuleitungsrohre R_1 und R_2 wurde mikromanometrisch gemessen, und zwar bei verschiedenen Windgeschwindigkeiten und verschiedenen Windneigungen und auch mit verschieden stark drosselnden Kapillaren, die so als Nebenschluß eingeschaltet waren, daß durch sie eine Strömung zwischen den Rohren R_1 und R_2 stattfinden konnte.

Bezeichnungen:

v = Windgeschwindigkeit in m/sec;

H = Barometerdruck in mm Hg.

t = Lufttemperatur in C^0;

$h = v^2 \cdot 0{,}06587 \dfrac{H}{760} \dfrac{1}{1 + \dfrac{t}{273}}$ = Geschwindigkeitshöhe in mm Wasser;

ϑ^0 = Windneigung gegen die Normale der Stauscheibe;

Θ^0 = Windneigung gegen die Symmetrieebene des Stauzylinders. Ihn symmetrisch von vorn treffender Wind hat also die Neigung $\Theta = 0$;

Ψ^0 = Windneigung in der Symmetrieebene gegen die Symmetrieachse HV (Fig. 2) des Zylinders;

c = Luftstrom in ccm/sec durch die von R_1 nach R_2 leitende Kapillare;

$w = \dfrac{D}{c}$ oder $\dfrac{Z}{c}$ Widerstand der erwähnten Kapillare;

$D = D\,(h, \vartheta, c)$ = Druckdifferenz in mm Wasser an der Stauscheibe;

$Z = Z\,(h, \Theta, \Psi, c)$ = Druckdifferenz in mm Wasser zwischen den Kammern des Stauzylinders;

k = Stauscheibenkoeffizient, definiert durch $D\,(h, 0, 0) = kh$. Schon von Reck

1) Vgl. Regeln für Leistungsversuche an Ventilatoren und Kompressoren, Seite 51, Verlag: Verein D. Ingenieure, 1912. Siehe auch: Mitteilungen der Prüfungsanstalt für Heizungs- und Lüftungseinrichtungen, Heft 1, S. 41—46, 1910.

nagel[1]), später auch von O. Krell[2]) wurde k für wirbelfreie Luft angegeben zu $k = 1{,}37$;
f = Kreisfläche der Stauscheibe in cm².

Messungen an der Stauscheibe.

Tabelle I.

		Scheibe mit $f = 26{,}4$		Scheibe mit $f = 12{,}5$	
v	w	k beob.	k ber.	k beob.	k ber.
10,21	∞	1,37	1,37	1,38	1,37
	6	1,36	1,36	1,336	1,345
	2,1	1,334	1,333	1,31	1,29
5,10	∞	1,37	1,37		
	6	1,36	1,36		
	2,1	1,344	1,333		

	v = etwa 10		15		20	
$f = 26{,}4$	D beob.	D ber.	D beob.	D ber.	D beob.	D ber.
$w = \infty$	10,5	10,5	21,5	21,5	36,5	36,5
$w = 1{,}09$	10,1	10,0	20,2	20,5	34,6	34,8
$w = 0{,}43$	9,6	9,2	19,9	18,9	32,2	32,1

$k_{ber.}$ bzw. $D_{ber.}$ sind aus den Formeln (1) und (2) erhalten.

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{1}{h} \cdot D'(h, o, w), \\ \text{wo} \quad D'(h, o, w) &= D(h, o, o)\left[1 - 1{,}38 \frac{1}{f \cdot w}\right] \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Diese Formel wird von der Tabelle I auf etwa 1 Proz. genau bestätigt.

Für den Fall $f = 26{,}4$ lautet (1):

$$D'(h, o, w) = D(h, o, o)\left[1 - \frac{0{,}0523}{w}\right] \qquad (2)$$

Die Unabhängigkeit des k von v oder h wird durch die für die Stauscheibe mit $f = 26{,}4$ geltende nach Messungen zusammengestellte Tabelle II bestätigt.

Tabelle II.

$h =$	0,93	1,69	2,52	3,36	4,10
$k =$	1,365	1,385	1,385	1,370	1,375

$k_{mel} = 1{,}376$.

Über die Abhängigkeit des D von Θ (Messungen bei $h = 3{,}36$) gibt das Diagramm I (Fig. 3) Auskunft. Man sieht, daß infolge einer gegenseitigen Kompensation von P und S die Druckdifferenz D sich für ein recht weites Θ-Gebiet um $\Theta = 0$ herum fast konstant hält. Ein solches

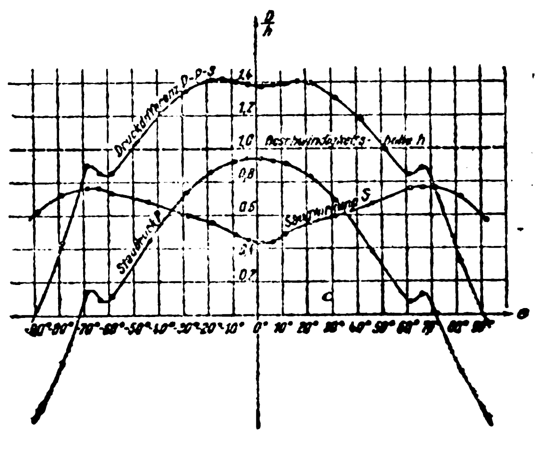


Fig. 3.

Gebiet haben auch andere Stauscheiben[1]). Die Konstanz innerhalb des betr. Gebietes — für $|\Theta| < 27^0$ ist $|D(h, \Theta, 0) - D(h, 0, 0)| < 0{,}01\,D$ bei unserer Scheibe — dürfte allerdings, nach den Göttinger Beobachtungen zu beurteilen, bei dieser Scheibe besonders gut sein. Das Prandtlsche Staurohr hat auch ein derartiges Gebiet mit der Ausdehnung $|\Theta| < 15^0$, innerhalb dessen die Messungen allerdings fast vollständig unabhängig von Θ sind[2]).

Auf freundliche Anregung von Herrn Professor L. Prandtl wurden Vergleichsmessungen zwischen einer Stauscheibe (Durchmesser 6 cm) und einem Prandtl-Staurohr von ungefähr demselben Durchmesser (5 cm) gemacht. Das Staurohr hatte für den Empfang des statischen Druckes einen den Rohrumfang fast umfassenden, 2,5 mm breiten Spalt. Für das Staurohr ergab sich etwa

$$D'(h, 0, W) = D(h, 0, 0)\left[1 - \frac{0{,}044}{W}\right]$$

d. h. fast dieselbe Nebenschlußempfindlichkeit, wie laut (2) bei der gebrauchten Stauscheibe vorhanden ist. Die Nebenschlußempfindlichkeit der Stauscheibe ist nach (1) umgekehrt proportional dem Quadrat des Durchmessers. Es ist denkbar, daß die betreffende Empfindlichkeit eines Staurohres langsamer mit den linearen Dimensionen variiert. Dann hat man zu erwarten, daß eine kleinere Stauscheibe als die verwendete empfindlicher gegen Nebenschlußstrom sein wird als ein Staurohr mit demselben Durchmesser. Eine Scheibe mit $f >$ etwa 26 müßte dagegen weniger empfindlich als das entsprechende Staurohr sein.

1) G. Recknagel, Wied. Ann. 10, 677, 1880.
2) O. Krell, Über Messung von dynamischem und statischem Druck bewegter Luft. München 1904.

1) Vgl. R. Katzmeyer, Der Motorwagen 17, 303, 1914 und Krell, l. c.
2) R. Kröner, Zeitschr. d. Vereins D. Ing. 1917, S. 605.

Da die Staurohrlänge mindestens den 5 bis 6 fachen Durchmesser beträgt, wird wohl, auch bei etwaiger Veränderung der zur Aufnahme des statischen Druckes dienenden Löcher, ein für den Anemoklinographen passendes Staurohr unbequem groß. Die leichtere (in der Bauart einfachere) mit dem Durchmesser 6 cm gerade gut passende Scheibe dürfte vorzuziehen sein, besonders da die Scheibe, wie erwähnt, bequemer gegen schädlichen Staub geschützt werden kann.

Die Tabelle I zeigt, daß D wenig mit c variiert (also bei mäßigem c fast konstant bleibt) und im übrigen eine einfache Funktion von c bzw. w ist. Das Diagramm I zeigt, daß D innerhalb weiter Grenzen fast unabhängig von Θ ist. Die Stauscheibe erfüllt offenbar die ihr gestellten Bedingungen.

Messungen am Stauzylinder.

Drei gleich dimensionierte Stauzylinder wurden untersucht. Bei den im Diagramm II (Fig. 4)

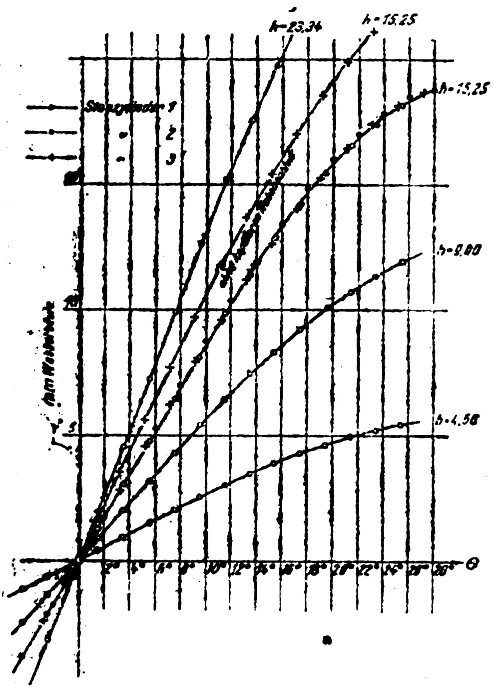


Fig. 4.

dargestellten Hauptmessungen waren die betr. Rohre R_1 und R_2 mittels einer Kapillare verbunden. Die Kapillare hatte den Widerstand $w = 0{,}95$, d. h. einer Druckdifferenz Z entsprach ein Nebenschluß-Luftstrom von

$$\frac{Z}{0{,}95} = \frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{sec.}}$$

Das Diagramm II (Fig. 4) enthält auch eine ohne den kapillaren Nebenschluß mit dem Zylinder 3 erhaltene Kurve. Die betr. Kurve hat durchweg 1,215 mal größere Ordinaten als die entsprechende Kurve mit Nebenschluß.

Der eine Zylinder wurde ein anderes Mal bei $h = 15{,}25$ und $h = 1{,}980$ geprüft, und zwar teils mit, teils ohne Nebenschluß. Dabei wurde teils der vorher gebrauchte, teils ein zweiter Nebenschluß verwendet, beide so gewählt, daß der für den Anemoklinographen in Frage kommende Widerstand einen Betrag zwischen ihren beiden haben würde. Mit dem ersten Nebenschluß ergaben sich wieder 1,215 mal kleinere Ausschläge als ohne Nebenschluß. Für den zweiten Nebenschluß ergab sich das Verhältnis 1,19. Mit Kapillaren verschiedener Stärke wurde festgestellt, daß die Abweichung der Ausschläge bei Verwendung eines Nebenschlusses (von der in der Tabelle I vorkommenden Größenordnung), von den Ausschlägen ohne Nebenschluß recht genau proportional dem Nebenschlußstrom c sind. Zur Berechnung der Z-Werte kann man die Formeln (3) und (4) benutzen. Die Formel (3) gilt bis $\Theta = 26^0$, auf Grund des Diagrammes II (Fig. 4) und der erwähnten weiteren Messungen auf 0,1 mm Wasser genau.

$$Z(h, \Theta, 0, 0) = 1{,}56 \cdot h \left[0{,}045 \cdot \Theta - \frac{(0{,}045 \cdot \Theta)^4}{8}\right] \quad (3)$$

$$Z(h, \Theta, 0, c) = Z(h, \Theta, 0, 0) \cdot \left[1 - \frac{a}{w}\right], \quad (4)$$

wobei im vorliegenden Fall die Konstante a, die natürlich von der Spaltweite abhängt, den Wert 0,18 hat.

Besondere Messungen zeigten, daß Z um weniger als 1 Proz. variiert, wenn $|\Psi| < 7^0$ bleibt.

Die angeführten Messungen zeigen, daß die Stauzylinder gut reproduzierbar sind, auch für den Fall, daß sie mit Nebenschluß verwendet werden sollen. Die Z-Skala läuft schön gerade durch den Punkt $\Theta = 0$ und hat überhaupt eine zweckmäßige, auf langer Strecke wenig von der Geraden abweichende Form. Für die Berechnung von Θ aus Z-Messungen ist es natürlich erforderlich, gleichzeitige Werte von v oder h zu kennen.

Die angegebenen Formeln gelten natürlich mit Sicherheit nur innerhalb der kleinen, von den Messungen umfaßten w- und f-Gebiete.

(Eingegangen 15. August 1918.)

Über die statischen kugelsymmetrischen Lösungen von Einsteins „kosmologischen" Gravitationsgleichungen.

Von H. Weyl.

Einstein hat in einer in den Sitzungsberichten d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1917, S. 142 erschienenen Note seinen Gravitationsgleichungen ein die Konstante λ enthaltendes Glied hinzugefügt. Über die statischen kugelsymmetrischen Lösungen dieser durch das „λ-Glied" ergänzten Gleichungen habe ich am Schluß meines Buches „Raum, Zeit, Materie" (Berlin, 1918; ich zitiere es hier mit den Anfangsbuchstaben RZM) einige Andeutungen gegeben, die ich hier etwas genauer ausführen möchte.

Die metrische Fundamentalform einer statischen kugelsymmetrischen Welt hat bei geeigneter Maßskala des Abstandes

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

vom Zentrum die Gestalt:

$$ds^2 = f^2 d\tau^2 - d\sigma^2,$$

$$d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + l\,(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2; \qquad (1)$$

darin ist τ die Zeit, $x_1 x_2 x_3$ sind die Raumkoordinaten und $d\sigma^2$ ist die metrische Fundamentalform des Raumes. Der Faktor l sowie die Lichtgeschwindigkeit f hängen nur von r ab. Wir setzen noch

$$1 + lr^2 = h^2, \qquad fh = \Delta.$$

(1) stimmt mit der metrischen Fundamentalform einer (dreidimensionalen) Rotationsfläche $z = F(r)$ im vierdimensionalen Euklidischen Raum mit den Cartesischen Koordinaten $x_1 x_2 x_3 z$ überein, wenn die den Drehriß bestimmende Funktion F aus

$$\left(\frac{dF}{dr}\right)^2 = h^2 - 1$$

bestimmt wird.

Ist die Welt masseleer, so ergibt sich[1])

$$\Delta = 1, \qquad f^2 = \frac{1}{h^2} = 1 - \frac{\lambda}{6} r^2. \qquad (2)$$

Setzen wir $\frac{6}{\lambda} = a^2$, so ist daher

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dz^2, \qquad f = \frac{z}{a},$$

wo $x_1 x_2 x_3 z$ vier an die Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + z^2 = a^2 \qquad (3)$$

geknüpfte Raumkoordinaten bedeuten. Der leere Weltraum ist also der durch (3) dargestellten „Sphäre" im vierdimensionalen Raum mit den Cartesischen Koordinaten $x_1 x_2 x_3 z$ kongruent. Da auf der Äquatorkugel $z = 0$ die Lichtgeschwindigkeit f verschwindet, die metrische Fundamentalform der Welt also singulär wird, kann von dieser Lösung nur ein bis an den Äquator nicht heranreichendes Stück realisiert sein: es widerstreitet dem Einsteinschen Gesetz, daß die Welt vollständig masseleer ist[1]). Wenigstens die Äquatorkugel muß von Materie umgeben sein.

Wir behandeln den einfachsten Fall, daß eine inkompressible Flüssigkeit von der konstanten Dichte μ eine zwischen zwei Breitenkugeln enthaltene „Schale" oder „Zone" erfüllt, die den Äquator umgibt. Im Gebiete der Flüssigkeit gelten dann die Formeln (RZM, S. 211 und S. 225)

$$\frac{1}{h^2} = 1 + \frac{2M}{r} - \frac{2\mu + \lambda}{6} r^2, \qquad (4)$$

$$\frac{2}{h^3}\frac{d\Delta}{dr} = br, \qquad (5)$$

wo M und b Konstante sind. Bedeutet P den Druck im Innern der Flüssigkeit, so ist ferner

$$(\mu + P)f = b.$$

Ist $r = r_0$ eine der beiden Grenzkugeln, zwischen denen die Flüssigkeit enthalten ist, so muß wegen des stetigen Anschlusses von $\frac{1}{h^2}$ an die im leeren Raume geltenden Werte (2) die Konstante

$$M = \frac{\mu r_0^3}{6} \qquad (6)$$

sein. Daraus geht hervor, daß beide Grenzkugeln denselben Radius r_0 besitzen, die Flüssigkeitszone also zum Äquator symmetrisch ist.

Auch in ihrem jetzigen Zustand läßt sich die Welt kongruent abbilden auf eine dreidimensionale Umdrehungsfläche (um die z-Achse) im vierdimensionalen Euklidisch-Cartesischen Raum der Koordinaten $x_1 x_2 x_3 z$. Wir bezeichnen sie als Sphäroid; sie entsteht aus der Sphäre (3), indem die zwischen den beiden Breitenkugeln $r = r_0$ enthaltene Zone herausgenommen und durch eine anders gestaltete ersetzt wird. Auch das Sphäroid ist symmetrisch zu seinem Äquator $z = 0$. Der Radius dieser Äquatorkugel, $r = a$, ist die (zwischen r_0 und a gelegene) Nullstelle von $\frac{1}{h^2}$. Setzt man $\frac{r}{a} = \varrho$ und

$$\left(\frac{r_0}{a}\right)^3 : \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right) = p,$$

[1]) RZM, S. 225. Siehe auch de Sitter, Proc. Acad. Amsterdam, Vol. XX, 30. Juni 1917.

[1]) Dies wurde von de Sitter übersehen. Vgl. Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1918, S. 270.

so ergibt eine kurze Rechnung

$$\frac{1}{h^2} = \frac{(1-\varrho)(\varrho^2+\varrho+p)}{(1-p)\varrho}.$$

Eine Funktion auf dem Sphäroid oder auch nur auf der von Flüssigkeit erfüllten Zone desselben nenne ich gerade oder ungerade, wenn sie eine gerade, bzw. ungerade Funktion von z ist. Führen wir einen Augenblick als „Uniformisierende" für die Umgebung des Äquators die Größe t durch die Gleichung

$$1-\varrho = t^2$$

ein, so bekommen wir für $\frac{1}{h}$ und z die in der Umgebung von $t=0$ konvergenten, nach ungeraden Potenzen von t fortschreitenden Entwicklungen

$$\frac{1}{h} = c_0 t + \cdots, \qquad z = c_0' t + \cdots \qquad (c_0, c_0' \neq 0).$$

Bei regulärer analytischer Fortsetzung ist also $\frac{1}{h}$ eine ungerade Funktion.

Ich setze

$$\bar{f} = \frac{\mu f}{b}, \quad \bar{\Delta} = fh = \frac{\mu \Delta}{b}.$$

Aus der Differentialgleichung für $\bar{\Delta}$:

$$\frac{1}{h^2}\frac{d\bar{\Delta}}{dr} = \frac{\mu r}{2}$$

und der durch Differentiation aus (4) hervorgehenden Formel

$$\frac{1}{h^2}\frac{dh}{dr} = \frac{M}{r^2} + \frac{2\mu+\lambda}{6} r$$

ergibt sich durch Division

$$\frac{d\bar{\Delta}}{dh} = \frac{3q}{2+p\varrho^{-3}} = A(\varrho),$$

wo die Konstante

$$q = \frac{2\mu}{2\mu+\lambda}$$

ist; also

$$\bar{\Delta} = \int A\,dh = Ah - \int h\,dA.$$

Führen wir in dem letzten Integral t als unabhängige Variable ein, so wird, da A eine gerade Funktion ist und sich in eine reguläre, nach geraden Potenzen von t fortschreitende Reihe entwickeln läßt, der Integrand bei $t=0$ regulär; wir können demnach $t=0$ oder $\varrho=1$ als untere Integrationsgrenze nehmen und erhalten dann

$$\bar{f} = \left(A + \frac{1}{h}\int_\varrho^1 h\,dA\right) + \frac{\text{const.}}{h} \quad \text{und} \quad \frac{P}{\mu} = \frac{1}{\bar{f}} - 1. \tag{7}$$

Hier ist nun in der Formel für $\bar{f}$ der erste, in runde Klammern gefaßte Teil eine gerade, der zweite, klein gedruckte, die Integrationskonstante enthaltende eine ungerade Funktion. Da auf beiden Breitenkugeln, welche die Flüssigkeitszone begrenzen, der Druck $P=0$, $\bar{f}$ also $=1$ sein muß, folgt, daß die Integrationskonstante verschwindet, jener klein gedruckte Teil daher zu streichen ist und $\varrho_0 = \frac{r_0}{a}$ der Gleichung

$$A(\varrho_0) + \frac{1}{h(\varrho_0)}\int_{\varrho_0}^1 h\,dA = 1$$

zu genügen hat. Wir sehen, daß $\bar{f}$ in der ganzen Flüssigkeitszone einschließlich des Äquators oberhalb einer positiven Grenze bleibt. Beachtet man, daß

$$\frac{q}{p} = \varrho_0^{-3},$$

so können wir jene Gleichung am einfachsten folgendermaßen formulieren. Man führe die beiden Funktionen von ϱ

$$u^2 = \frac{1-\varrho}{\varrho}(\varrho^2+\varrho+p), \quad v = \frac{3p}{2+p\varrho^{-3}},$$

ein, dann gilt für $\varrho=\varrho_0$:

$$v + u\int_\varrho^1 \frac{dv}{u} = \varrho^3. \tag{8}$$

Dies ist, wie man sieht, eine **parameterfreie Relation zwischen** $\frac{r_0}{a}$ **und** $\frac{\mu}{\lambda}$. Sie hat bei gegebenem p stets eine und nur eine Lösung $\varrho=\varrho_0(p)$. Denn die linke Seite hat als Funktion von ϱ die Ableitung

$$\frac{du}{d\varrho}\int_\varrho^1 \frac{dv}{u},$$

und da u eine abnehmende Funktion ist:

$$u^2 = (1-\varrho^2) + p\left(\frac{1}{\varrho} - 1\right),$$

v eine zunehmende, so nimmt die linke Seite von (8) monoton ab, wenn ϱ von 0 bis 1 wächst, und sinkt für $\varrho=1$ auf den Wert $\frac{3p}{2+p} < 1$. Das besagt, daß der Druck im Innern der Flüssigkeit von der Oberfläche nach dem Äquator hin monoton zunimmt, daher, wie es sein muß, überall positiv ist. Die rechte Seite unserer Gleichung, ϱ^3, nimmt, wenn ϱ das angegebene Intervall durchläuft, monoton von 0 bis 1 zu. Daraus ergibt sich die Existenz einer eindeutigen Lösung $\varrho=\varrho_0(p)$. Auch wird für sie $\varrho^3 > p$, eine Bedingung, die erfüllt sein muß, damit μ positiv ausfällt. In der Tat ist

$$v + u\int_{\varrho}^{1}\frac{dv}{u} > v + u\cdot\frac{1}{u}\int_{\varrho}^{1} dv = v(1)$$

$$= \frac{3p}{2+p} > \frac{3p}{2-1} = p.$$

Es ist von Interesse, für ein sehr wenig von 1 abweichendes ϱ_0, d. h. für eine sehr schmale Flüssigkeitszone die in ihr enthaltene Gesamtmasse zu berechnen. Für $\varrho_0 = 1$ ergibt unsere Gleichung $p = 1$, d. h. $\frac{\lambda}{2\mu} = 0$. Nehmen wir

$$\frac{\lambda}{2\mu} = \varepsilon \text{ und } 1 - \varrho = \sigma, \ (1 - \varrho_0 = \sigma_0)$$

als sehr kleine Größen an und entwickeln nach Potenzen, so kommt in erster Annäherung

$$p = 1 - 3\sigma_0 - \varepsilon, \qquad v(\varrho_0) = 1 - 3\sigma_0 - \frac{2}{3}\varepsilon;$$
$$u^2 = 3\sigma, \qquad dv = -d\sigma,$$

und unsere Relation liefert

$$1 - \sigma_0 - \frac{2\varepsilon}{3} = 1 - 3\sigma_0, \text{ also } \varepsilon = 3\sigma_0.$$

Das Volumen der mit Flüssigkeit erfüllten Zone ist

$$\int h\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = 8\pi a^3\int_{\varrho}^{1} h\varrho^2\,d\varrho,$$

und das ergibt in erster Annäherung

$$8\pi a^3\sqrt{\frac{1-p}{3}}\int_{\varrho}^{1}\frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho}} =$$

$$= 16\pi a^3\sqrt{\left(\sigma_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)\sigma_0},$$

d. i. auf Grund der bewiesenen Gleichung

$$16\pi\sigma_0 a^3\sqrt{2}.$$

Ferner ist mit der gleichen Approximation

$$a^3 = \frac{6}{\lambda}\sqrt{\frac{6}{\lambda}}, \quad \frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{6\sigma_0}.$$

Für die Masse der Kugelzone kommt daher schließlich der Wert

$$\frac{32\pi\sqrt{3}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Will man die Kugelzone schmäler und schmäler machen, so muß man also gleichzeitig die Dichte der zur Verwendung kommenden Flüssigkeit so steigern, daß die Masse oberhalb einer festen positiven Grenze bleibt; sie konvergiert für eine unendlich dünne Zone gegen den soeben angegebenen Wert. Ist die ganze Welt homogen mit Masse erfüllt (diese hat dann die Dichte λ, und es herrscht in ihr kein Druck), so ergibt sich als Gesamtmasse der Wert

$$\frac{4\pi^2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Je schmäler die Zone ist, auf die sich die Flüssigkeit zusammendrängen soll, um so größer muß ihre Masse sein; bei unendlich dünner Zone ist sie $\frac{4\sqrt{6}}{\pi}$ mal so groß wie bei homogener Erfüllung der ganzen Welt.

Der eben durchgeführten Berechnung liegt die Vorstellung zugrunde, daß der Weltraum auf das Sphäroid umkehrbar-eindeutig abgebildet ist. Daneben aber besteht die andere Analysis-situs-Möglichkeit, daß je zwei einander diametral gegenüberliegenden Punkten des Sphäroids derselbe Punkt des Weltraums entspricht; in diesem Falle müssen die eben errechneten Massenwerte halbiert werden. Es ist von den Mathematikern in der Theorie der nicht-Euklidischen Raumformen erwiesen worden[1]), daß neben den beiden angegebenen Möglichkeiten keine weitere besteht; mit gutem Grund betrachtet man die zweite als die wesentlich einfachere. Trifft für den mit einer Massenzone versehenen Weltraum die erste zu, so haben wir eine leere Oberwelt und Unterwelt, die durch den Okeanos der Flüssigkeitsschale voneinander geschieden sind. Findet aber die zweite statt, so liegt nur eine einzige masseleere Hohlkugel $r < r_0$ vor. Jenseits der Entfernung r_0 vom Zentrum beginnt das Weltmeer; stößt man in radialer Richtung durch dies Grenzmeer hindurch, so kommt man nach Zurücklegung eines endlichen, vielleicht sehr kurzen Weges auf der diametral gegenüberliegenden Seite der Hohlkugel wieder zum Vorschein.

Bis jetzt haben wir untersucht, einen wie beschaffenen Massenhorizont der leere Raum nach Einsteins kosmologischen Gleichungen erfordert. Zum Schluß noch ein paar Worte über den Massenhorizont, der das Feld gegebener kugelsymmetrisch um das Zentrum verteilter Massen m begrenzen muß! In dem leeren Raum zwischen m und dem Horizont ist (RZM, S. 226)

$$\frac{1}{h^2} = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{6}r^2, \quad m = \text{const.} \tag{9}$$

Trifft von den beiden erwogenen Analysis-situs-Möglichkeiten die zweite zu (der ich a priori den Vorzug geben möchte), so liegen die Dinge jetzt im wesentlichen ebenso wie vorher. Wir können den Weltraum kongruent durch ein „Sphäroid" darstellen. Jeder Punkt des Weltraums erscheint im Bilde doppelt, so auch die Massen m; das

1) Genaue Formulierung und Literatur bei F. Enriques, Prinzipien der Geometrie, in der Enzykl. d. math. Wissensch. III, namentlich Nr. 38, S. 116.

Sphäroid und die auf ihm herrschende Massenverteilung sind wiederum symmetrisch zum Äquator $z = 0$. Die Konstante M bestimmt sich jetzt nicht durch (6), sondern aus

$$M + m = \frac{\mu r_0^3}{6}.$$

Dadurch modifiziert sich die transzendente Gleichung (8) unwesentlich. — Stellt hingegen das Sphäroid den Weltraum umkehrbar-eindeutig dar, so muß der innerhalb der Flüssigkeitszone geltende Ausdruck (4) sich über die eine Grenzkugel hinüber stetig an die Werte (9), über die andere aber stetig an die im leeren Raum geltenden (2) anschließen. Infolgedessen liegt die Flüssigkeitszone unsymmetrisch zum Äquator, und in (7) ist die Integrationskonstante nicht $= 0$. Der Flüssigkeitshorizont wird, sofern die Dichte $\mu > \lambda$ ist, aus einer Zone bestehen, welche die leere Unterwelt von der mit den Massen m erfüllten Oberwelt trennt. Für $\mu < \lambda$ aber tritt als Massenhorizont keine Zone mehr auf, sondern eine ganze über den Äquator hinübergreifende „Kalotte" (vgl. RZM, S. 225). Im Übergangsfall $\mu = \lambda$ ist die Zone gerade zur Kalotte geworden, im Innern der Flüssigkeit herrscht dann überall der Druck 0. Die genauere Durchrechnung bietet kein erhebliches Interesse.

(Eingegangen 14. Oktober 1918.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Grundlagen und Methoden der Pyrometrie.

Von F. Henning.

Einleitung. Der experimentierende Physiker sieht sich oft vor die Aufgabe gestellt, eine Temperatur zu messen, weil fast alle physikalischen Erscheinungen von der Temperatur abhängen. Bisweilen ist die Abhängigkeit nur gering, wie z. B. beim Brechungsexponenten eines Prismas; bei Messungen hoher Genauigkeit muß sie aber dennoch berücksichtigt werden. In Optik und Mechanik besitzt die Temperatur im allgemeinen nur den Charakter einer Hilfsgröße, deren ungefähre Kenntnis fast stets genügt. Größere Bedeutung kommt ihr in der Lehre von der Elektrizität und vom Magnetismus zu, schon weil die wichtige Größe des elektrischen Widerstandes der Metalle in hohem Maße durch die Temperatur beeinflußt wird. Elektrizität und Magnetismus sind aber auch sonst wegen ihres Zusammenhanges mit den molekularen Bewegungen eng mit den thermischen Vorgängen verknüpft, bei denen die Temperatur durchaus beherrschenden Einfluß besitzt. In diesem Gebiet ist ihre genaue Kenntnis selbst außerhalb der reinen Wissenschaft von fundamentaler Bedeutung, und zahlreiche Instrumente sind erdacht worden, um die Überwachung der Temperatur von Schmelz- und Brennöfen auch durch den einfachen Fabrikarbeiter zu ermöglichen.

Wegen ihrer beträchtlichen praktischen Bedeutung besitzt die Lehre von der Messung hoher Temperaturen, die Pyrometrie, besonderes Interesse. Ich habe mich darum, einer Anregung der Schriftleitung dieser Zeitschrift folgend, gern bereit erklärt, die Grundlagen und hauptsächlichen Methoden der Pyrometrie in den folgenden Zeilen zusammenfassend darzustellen.

I. Theoretische Grundlagen.

a) Thermodynamik. Als die theoretische Grundlage aller Temperaturmessung wird oft das ideale Gas hingestellt, dessen Zustandsgleichung durch die Beziehung

$$PV = RT \quad (1)$$

gegeben ist, wenn P den Druck des Gases, V sein spezifisches Volumen und T seine absolute Temperatur bedeutet. R bezeichnet die sogenannte Gaskonstante. Ein ideales Gas ist, wie der Name sagt, ein nur in der Vorstellung vorhandener Körper, dem man sich praktisch zwar bis zum gewissen Grade annähern kann, der sich aber in aller Strenge nicht verwirklichen läßt. Es muß also befremden, daß dieser hypothetische Körper den Grundstein so wichtiger Messungen bilden soll. Die Aufklärung bringt die Thermodynamik.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik sagt aus, daß man durch endliche Prozesse nicht beliebig viel von dem Wärmeinhalt eines Körpersystems, das gegen die Umgebung völlig abgeschlossen ist, in Arbeit verwandeln kann. Insbesondere gibt es keine periodisch wirkende Maschine, die unter Wahrung des ersten Hauptsatzes von der Konstanz aller Energien aus einem Wärmebehälter beliebig viel Arbeit entnehmen kann, selbst wenn man die Umwandlung auf die günstigste Weise, nämlich durch einen idealen, unendlich langsamen Prozeß vor sich gehen läßt, bei dem die Druck- und Temperaturunterschiede verschiedener Teile des Sy-

stems unendlich klein sind, derart, daß der Prozeß in allen seinen Teilen auch rückwärts durchlaufen werden kann, d. h. daß er umkehrbar oder reversibel ist. Bei einem umkehrbaren Carnotschen Prozeß ist die in Arbeit verwandelte Wärmemenge unabhängig von dem arbeitenden Körper, der abwechselnd adiabatisch und isotherm dilatiert und komprimiert wird und der während der isothermen Teile des Prozesses eine gewisse Wärmemenge aus einem Wärmebehälter entnimmt oder eine andere kleinere, Wärmemenge an einen zweiten Wärmebehälter abgibt. Würde ein Körper K_1 mehr Wärme in Arbeit umwandeln als ein Körper K_2, so könnte man den reversiblen Prozeß in der einen Richtung, nämlich in dem Sinne eines Arbeitsgewinnes, mit dem Körper K_1 und dann in umgekehrter Richtung, nämlich im Sinne eines Arbeitsaufwandes, mit dem Körper K_2 vornehmen und wäre dadurch bei häufiger Wiederholung dieses Vorganges in den Stand gesetzt, beliebig viel Wärme in Arbeit zu verwandeln, ohne daß das System sonstige Veränderungen erleidet. Da der zweite Hauptsatz der Thermodynamik diesem Resultat widerspricht, so muß also die im Carnotschen Prozeß gewonnene Arbeit unabhängig von den Eigenschaften irgendeines speziellen Körpers sein. Die Arbeitsgröße hat also allgemeine Gültigkeit, wenn sie für einen beliebigen Körper berechnet ist. Es spricht nichts dagegen, sich den Prozeß mit einem idealisierten Körper, dem idealen Gas, durchgeführt zu denken, vorausgesetzt, daß man ihm keine Eigenschaften beilegt, die den thermodynamischen Gesetzen widersprechen.

Das ideale Gas gestattet infolge seiner einfachen Zustandsgleichung die Arbeit A herzuleiten. Es ergibt sich

$$A = Q_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} = Q_1 \frac{T_2 - T_1}{T_1} \qquad (2)$$

oder

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0\,, \qquad (3)$$

wenn man mit Q_2 und Q_1 die Wärmemengen bezeichnet, welche der betreffende Körper bei der Temperatur T_2 aufnimmt und bei der Temperatur T_1 abgibt. Gl. (2) und (3) sind für die Bildung der Entropiegröße, die in der ganzen Thermodynamik, besonders auch für die Herleitung der Methoden zur Temperaturbestimmung fundamentale Bedeutung hat, maßgebend. Würde die Gleichung des idealen Gases in größerer Verallgemeinerung $PV = R \cdot f(T)$ lauten, so müßte in dem Ausdruck für die Arbeit A die Größe $f(T_1)$ statt T_1 und $f(T_2)$ statt T_2 gesetzt werden, und die Funktion f ginge in die Entropiegröße sowie in jede Gleichung zur Definition der Temperatur ein.

Zur Bestimmung der Temperatur geben also nicht die speziellen Eigenschaften des idealen Gases den Ausschlag; entscheidend ist vielmehr nur die Festsetzung der Funktion $f(T)$, die mit den Eigenschaften des idealen Gases in naher Beziehung steht.

b) Gasthermometrie. Als praktische Grundlage der Temperaturmessung dient ein reales Gas, dessen Zustandsgleichung in der Form $PV = RT'$ geschrieben werden kann. Den Unterschied der Größe T' gegen die Temperatur T des idealen Gases gestattet die Thermodynamik zu berechnen. Die Differenz $T - T'$ ist in hohen Temperaturen klein gegen T, solange es sich um ein Gas von tiefer Kondensationstemperatur und geringer Dichte handelt, wie Helium, Wasserstoff, Stickstoff beim Druck von 1 oder 2 Atmosphären.

Für das meist verwendete Gasthermometer konstanten Volumens gilt die Beziehung

$$\frac{P - P_0}{P_{100} - P_0} = \frac{T - T_0}{T_{100} - T_0}\,,$$

oder $P = P_0(1 + \beta t)$, wenn man $t = T - T_0$ und

$$\beta = \frac{P_{100} - P_0}{100\, P_0}$$

setzt. Der Index 0 bezieht sich auf den Gefrierpunkt, der Index 100 auf den normalen Siedepunkt des Wassers.

c) Die schwarze Strahlung. Zweitens kommt für die Messung hoher Temperaturen die Beobachtung der Wärmestrahlung in Betracht, in deren Gesetze, die ebenfalls auf thermodynamischer Grundlage stehen, durch den Ausdruck für die Entropie dieselbe Größe T eingeht, die wir durch das ideale Gas eingeführt haben. Einfache Ausdrücke ergeben sich nur für die sogenannte schwarze Strahlung oder die Strahlung eines schwarzen Körpers. Dieser ist dadurch gekennzeichnet, daß er, wie etwa Ruß, alle auf ihn fallenden Strahlen absorbiert und dem Kirchhoffschen Grundgesetz (siehe unter d 1) zufolge neben diesem maximalen Absorptionsvermögen auch ein maximales Emissionsvermögen besitzt, d. h. er strahlt mehr Energie aus als irgendein anderer Körper unter gleichen Bedingungen.

Die schwarze Strahlung ist, wie Kirchhoff weiter bewies, auch dann vorhanden, wenn jede Stelle des Raumes, den die Strahlung erfüllt und jede Stelle der Wandung, die den Raum begrenzt, sich im Strahlungsgleichgewicht befindet, also in jedem Zeitelement ebensoviel Strahlungsenergie empfängt wie sie abgibt. Die schwarze Strahlung kann demnach in einem geschlossenen Hohlraum erzeugt

werden, dessen Wände gleichmäßige Temperatur besitzen. Ihre Intensität ist dann nur von dieser Temperatur abhängig, nicht dagegen vom Material der Wandung. Diese Strahlung ist der Messung zwar nur durch eine Öffnung des Hohlraumes zugänglich, die mit den aufgestellten Bedingungen streng genommen unverträglich ist. Praktisch kann man sich den theoretischen Forderungen indessen fast beliebig nähern, wenn man die Öffnung im Verhältnis zum ganzen Volumen klein wählt und wenn man die Innenwände des Hohlraumes schwärzt oder doch aus nicht gut und möglichst diffus reflektierendem Material herstellt. Die Öffnung des Hohlraumes wirkt dann wie eine ideale schwarze Fläche, da alle von außen auf die Öffnung fallende Strahlung infolge mehrfacher Reflexion im Innern des Hohlraumes absorbiert wird. Aus diesem Grunde wird der Hohlraum ebenso wie eine ideal schwarze Fläche maximalen Absorptionsvermögens als schwarzer Körper bezeichnet.

Die Bedingungen für die Existenz schwarzer Strahlung sind in der Praxis vielfach verwirklicht, besonders wenn es sich um sehr hohe Temperaturen handelt, da sich alle Temperaturunterschiede durch die Strahlung selbst um so rascher auszugleichen streben, je höher die Temperatur ist. Der theoretischen Forderung kann man sich meist sehr gut annähern, wenn man in den Heizraum ein einseitig geschlossenes Rohr einführt, und die in dessen Innern sich ausbildende Strahlung als „schwarz" betrachtet.

Für die Zwecke der Wissenschaft und der Eichung von Instrumenten bedient man sich nach dem Vorgange von Lummer und Kurlbaum elektrisch geheizter Hohlräume aus Porzellanmasse, deren Temperatur mit Hilfe von Platin-Widerstandsspiralen auf 1400 bis 1500° C gebracht werden kann.

d) Die Strahlungsgesetze. Es sind 4 Fundamentalgesetze der Wärmestrahlung zu unterscheiden:

1. Das Gesetz von Kirchhoff, durch das die Intensität der Wärmestrahlung J' eines beliebigen Körpers vom Absorptionsvermögen A zu der Intensität J der Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers in Beziehung gesetzt wird. Sein mathematischer Ausdruck ist

$$J' = A\,J\,. \tag{4}$$

Alle drei Größen hängen von der Temperatur T der Körper und von der Wellenlänge λ der Strahlung ab. Die Gleichung gilt nur für den Fall, daß sich J', A und J auf dieselbe Temperatur und dieselbe Wellenlänge beziehen. Unter der Intensität J_λ der Wärmestrahlung sei die Energie eines bestimmten Spektralbereiches verstanden, welche 1 cm² der Oberfläche des betreffenden Körpers pro Sekunde in den räumlichen Winkel 1 ausstrahlt.

2. Das Gesetz von Stefan-Boltzmann. Es sagt aus, daß die über alle Wellenlängen erstreckte gesamte Strahlungsenergie $G = \int_0^\infty J_\lambda d\lambda$ eines schwarzen Körpers der 4. Potenz der absoluten Temperatur proportional ist, so daß

$$G = aT^4. \tag{5}$$

Dies Gesetz wurde von Stefan im Jahre 1879 nach rohen Messungen rein empirisch aufgestellt und ist 1884 von Boltzmann auf thermodynamischer Grundlage in aller Strenge bewiesen. Er gelangte zu dem angegebenen Resultat, indem er die Entropie der Strahlung mit Hilfe des Strahlungsdruckes p berechnete, der sich nach den Maxwellschen Gleichungen und den Beobachtungen Lebedews zu $p = \frac{u}{3}$ ergibt, wenn man mit u die in der Volumeneinheit enthaltene gesamte Strahlungsenergie bezeichnet.

3. Das Wiensche Verschiebungsgesetz. Wien ging von einem idealen thermodynamischen Prozeß aus, bei dem er sich die Strahlung in einem vollkommen spiegelnden Zylinder komprimiert dachte. Er gelangte unter Ansetzung des Strahlungsdruckes und unter Annahme der Wellenlängenverschiebung nach dem Dopplerschen Prinzip in vollkommen strenger Weise zu dem Resultat, daß die in 1 cm³ des Raumes enthaltene Energie u_ν der Strahlung von der Frequenz ν als

$$u_\nu = \nu^3 \cdot \varphi\left(\frac{T}{\nu}\right) \tag{6}$$

darstellbar ist. Die Funktion φ blieb unbestimmt, doch ließ sich aus dieser Gleichung die praktisch wichtige Folgerung ziehen, daß das Produkt aus der Wellenlänge λ_m, für die die Energie der schwarzen Strahlung einen Maximalwert besitzt, und der Temperatur T, eine Konstante ist, also die Beziehung

$$\lambda_m T = b \tag{6a}$$

gilt. Hierbei wird allerdings schon vorausgesetzt, daß die Strahlungsenergie eines schwarzen Körpers sich bei konstanter Temperatur als Funktion der Wellenlänge durch eine Kurve mit einem deutlichen Maximum darstellen läßt. Der experimentelle Befund stimmt damit überein. Die bolometrische Untersuchung des Spektrums ergab, daß die Strahlungsenergie eines schwarzen Körpers bei sehr kurzen Wellen verschwindend kleine Werte besitzt, mit zunehmender Wellenlänge rasch ansteigt und dann von einer bestimmten Wellenlänge an wieder bis zu 0 abnimmt.

Nach dem Wienschen Gesetz rückt die Wellenlänge maximaler Energie mit steigender Temperatur immer mehr in den kurzwelligen Teil des Spektrums. Diese Verhältnisse werden des näheren durch Fig. 1 veranschau-

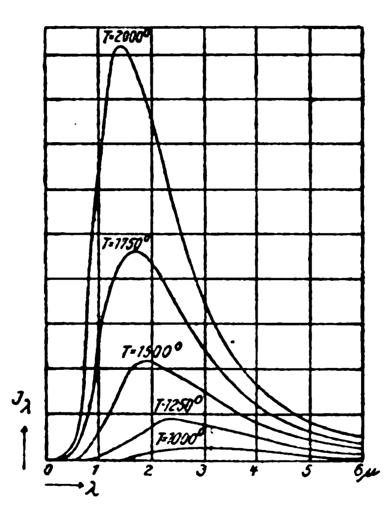


Fig. 1.

licht, in der die Strahlungsintensität als Funktion der Wellenlänge für verschiedene Temperaturen zur Darstellung gebracht ist.

4. Das Plancksche Strahlungsgesetz besitzt von allen Strahlungsgesetzen für die Pyrometrie die größte Bedeutung. Seine theoretische Begründung entbehrt aber des klassischen Bodens, auf dem die unter 1 bis 3 genannten Gesetze aufgebaut sind.

Um die Intensität der Strahlung als Funktion von Temperatur und Wellenlänge darzustellen, bedarf es besonderer Annahmen über die Wirkungsweise der kleinsten Träger der Strahlungsenergie, als welche wir hin- und herschwingende Elektronen, sogenannte Oszillatoren, ansehen. Nach dem Boltzmannschen Theorem von der gleichmäßigen Energieverteilung über alle molekularen Elemente und deren Freiheitsgrade hat die mittlere Energie $\bar{\eta}$ eines linear oszillierenden Elektrons den Wert kT, wenn k das Verhältnis zwischen der molekularen Gaskonstante R und der Avogadroschen Zahl N bezeichnet, also $\bar{\eta} = kT$ und

$$k = \frac{R}{N} = \frac{8{,}315 \cdot 10^7}{6{,}07 \cdot 10^{23}} = 1{,}37 \cdot 10^{-16}.$$

Die mittlere Energie $\bar{\eta}$ der Oszillatoren steht nach der Elektrodynamik in nahem Zusammenhang mit der Energiedichte u_ν der monochromatischen Strahlung von der Frequenz ν, wenn man annimmt, daß jede Geschwindigkeitsänderung zu einer elektromagnetischen Ausstrahlung Anlaß gibt, und zwar ist

$$\mathfrak{u}_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\bar{\eta};$$

c bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit. Hiernach wäre die Energiedichte

$$\mathfrak{u}_\nu = \frac{8\pi k}{c^3}\,\nu^2 T,$$

oder wenn man die Frequenz ν durch die Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ersetzt,

$$\mathfrak{v}_\lambda = -\,\mathfrak{u}_\nu \frac{d\nu}{d\lambda} = 8\pi k\,\lambda^{-4}\,T.$$

Für die spezifische Strahlungsintensität J_λ eines linear polarisierten Strahles, die mit der Strahlungsdichte $\mathfrak{v}_\lambda$ durch die Beziehung $J_\lambda = \mathfrak{v}_\lambda \frac{c}{8\pi}$ verknüpft ist, erhält man

$$J_\lambda = ck\lambda^{-4}\,T. \qquad (7)$$

Dieses nach Rayleigh benannte Strahlungsgesetz, das auf den scheinbar so gesicherten Vorstellungen der klassischen Physik beruht, steht mit der Erfahrung in Widerspruch, da es für die Frequenz $\nu = \infty$ bzw. für die Wellenlänge $\lambda = 0$ zu dem Wert ∞ für die Strahlungsintensität J führt, während die Beobachtungen 0 ergeben.

Um Theorie und Erfahrung in Übereinstimmung zu bringen, führte Planck den vollständig umwälzenden Grundsatz ein, daß die Oszillatoren nicht beliebig kleine Energiemengen abgeben, sondern die Energie nur in gewissen Quanten — die zwar sehr klein, aber endlich begrenzt sind — oder deren ganzzahligem Vielfachen ausstrahlen können. Nach der Planckschen Hypothese soll ferner im Gegensatz zur Emission die Absorption kontinuierlichen Charakter haben, d. h. die Oszillatoren sollen die ihnen durch Strahlung zugeführte Energie in beliebigen Teilbeträgen aufnehmen können. Ein Oszillator, auf den Strahlung einwirkt, soll seine Energie ständig der Zeit proportional erhöhen, bis er bei Erreichung eines Energiequantums ε oder dessen ganzzahligem Vielfachen 2ε, 3ε, ... $n\varepsilon$ plötzlich seine ganze Energie durch Ausstrahlung verliert. Ob der Vorgang der Emission eintritt oder nicht, wird durch die Gesetze des Zufalls entschieden. Bezeichnet man mit Z_n die Anzahl derjenigen Oszillatoren, deren Energie im Bereich der Werte von $n\varepsilon$ bis $(n+1)\varepsilon$ liegt, so muß $Z_n < Z_{n-1}$ sein, da beim Überschreiten der Stufe $n\varepsilon$ einige der sehr zahlreichen Oszillatoren Z_{n-1} ausstrahlen und also nicht in den Bereich der Kennziffer n gelangen können. Planck setzt $Z_n = Z_{n-1} - \varkappa Z_{n-1}$ und bezeichnet mit $\varkappa$ eine von n unabhängige Konstante, die mit

der Strahlungsdichte u und einer andern Konstanten p durch die Beziehung $\varkappa = [1 + pu]^{-1}$ verknüpft ist. Dieser Annahme zufolge ist $\varkappa$ sehr klein, wenn die Strahlungsdichte u sehr groß ist. Bei großer Strahlungsintensität ist also $Z_\varkappa$ nur sehr wenig kleiner als $Z_{\varkappa-1}$, d. h. es gelangen mehr Oszillatoren auf eine hohe Energiestufe als bei geringer Strahlungsdichte und großem $\varkappa$.

Die beiden willkürlichen Annahmen von der quantenhaften Emission der Energie und von dem speziellen Zusammenhang der Größe $\varkappa$ mit der Strahlungsdichte u führen mittels einer Wahrscheinlichkeitsbetrachtung ohne Hilfe der Elektrodynamik zu der Gleichung

$$u = \frac{1}{p}\left(e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1\right)^{-1},$$

aus der durch Vergleich mit dem Wienschen Gesetz (Gl. 6)

$$u = C\nu^3\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1}$$

folgt. Das Energiequantum ist also $\varepsilon = h\nu$. Für unendlich kleine Frequenzen oder unendlich lange Wellen fordert demnach auch die Plancksche Theorie unendliche Teilbarkeit der Energie, wie sie Rayleigh bei der Ableitung seiner Formel voraussetzte.

Ersetzt man die Frequenz ν durch die Wellenlänge λ, so erhält man den Planckschen Ausdruck für die spezifische Intensität der linear polarisierten Strahlung bei der Wellenlänge λ und der Temperatur T zu

$$J_\lambda = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1}.$$

Diese Gleichung, die für sehr große Wellenlängen in die Rayleighsche Beziehung Gl. (7) übergeht, wenn man $c_1 = hc^2$ setzt, ist in jeder Hinsicht durch das Experiment bestätigt worden. Insbesondere hat sich die für die Gestalt der Energiekurven (Fig. 1) charakteristische Größe $\frac{hc}{k} = c_2$ in weiten Grenzen als unabhängig von Temperatur und Wellenlänge erwiesen.

Nach den Beobachtungen von Warburg und Müller[1]) gilt zurzeit als wahrscheinlichster Wert $c_2 = 1{,}43$ cm grad. Die Konstante $c_1 = hc^2$ findet man durch Beobachtung der Gesamtstrahlungsenergie E, die von 1 cm² eines schwarzen Körpers pro Sekunde in den hemisphärischen Raum gesandt wird. Es ist

$$E = 2\pi\int_0^\infty J_\lambda d\lambda = 12{,}99\frac{\pi k^4}{c^2 h^3}T^4 = \sigma T^4.$$

1) Warburg u. Müller, Ann. d. Phys. **48**, 410 bis 432, 1915.

Als bester Wert der Konstanten σ gilt die Zahl $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-5}$ erg. cm^{-2} sec^{-1} grad^{-4}. Aus den beiden Gleichungen

$$c_2 = \frac{hc}{k} = 1{,}43 \text{ und } \sigma = 12{,}99\frac{\pi k^4}{c^2 h^3} = 5{,}7 \cdot 10^{-5}$$

folgt $h = 6{,}49 \cdot 10^{-27}$ und $k = 1{,}36 \cdot 10^{-16}$ in absoluten Einheiten. Aus der Gaskonstanten und der Avogadroschen Zahl[1]) ergibt sich, wie bereits erwähnt, $k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$. Die ausgezeichnete Übereinstimmung der auf so verschiedenen Wegen für k gefundenen Zahlengrößen bietet eine hervorragende Bürgschaft für die Stichhaltigkeit der Planckschen Hypothesen.

Die Plancksche Gleichung findet die wichtigste Anwendung im Gebiet sichtbarer Strahlung also für Wellenlängen zwischen $\lambda = 0{,}45$ und $0{,}75\,\mu$. In dem Ausdruck für die Strahlungsintensität J besitzt dann die Exponentialgröße bei allen in Betracht kommenden Temperaturen einen die Größe 1 so erheblich überragenden Wert, daß man mit ausreichender Genauigkeit

$$J_\lambda = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \tag{8}$$

setzen darf. Bei konstanter Wellenlänge folgt hieraus das Intensitätsverhältnis J/J_0 bei zwei verschiedenen Temperaturen T und T_0 zu

$$\frac{J}{J_0} = e^{\frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)} \text{ oder } \frac{\lambda}{c_2}\ln\frac{J}{J_0} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}. \tag{8a}$$

II. Meßinstrumente und Meßmethoden.

a) Allgemeines. Die Instrumente zur praktischen Messung hoher Temperaturen gliedern sich in zwei Gruppen. Diejenigen der ersten Gruppe, die Berührungsthermometer, stehen bei der Messung mit ihrem wesentlichsten Teil im thermischen Gleichgewicht mit dem Raum, dessen Temperatur bestimmt werden soll. Die Instrumente der zweiten Gruppe, die Strahlungsthermometer, messen aus der Entfernung. Sie zeigen die Intensität der Strahlung jenes Raumes an und befinden sich mit allen ihren Teilen nahezu auf Zimmertemperatur. Die obere Grenze für die Brauchbarkeit der Berührungsthermometer ist diejenige Temperatur, bei der die Angaben der Thermometer infolge nicht reversibler Änderungen der thermometrischen Substanz unsicher werden. In sehr hohen Temperaturen sind darum allein die Strahlungsthermometer verwendbar. Sie besitzen ferner den Vorteil, daß ihre Angaben nach voraufgegangener Eichung bei ein oder zwei Temperaturen sich

1) Die Avogadrosche Zahl ist aus dem elektrochemischen Äquivalent und dem Wert für die elektrische Ladung des Elektrons nach Millikan abgeleitet.

auf eine Formel gründen lassen, welche direkt die thermodynamische Temperatur liefert. Die Berührungsthermometer dagegen, deren Angaben darauf beruhen, daß sich irgendeine charakteristische Größe (Länge, Volumen, Thermokraft, elektrischer Widerstand) eines gasförmigen, flüssigen oder festen Körpers mit der Temperatur ändert, erfordern eine Eichung an vielen Temperaturpunkten und gleichzeitig die Aufstellung einer empirischen, durch keine Theorie festgelegten Interpolationsformel zwischen den Angaben des Thermometers und der Temperatur. Die Eichung muß auf das Gasthermometer gegründet werden. —

Indessen darf nicht vergessen werden, daß auch die Eichung der Strahlungsthermometer auf das Gasthermometer zurückgehen muß, und zwar gleichgültig, ob sie auf der Anwendung des Stefanschen Gesetzes oder der Planckschen Strahlungsgleichung beruhen. Jedes Strahlungsthermometer könnte zwar rein theoretisch unabhängig vom Gasthermometer an den thermometrischen Fundamentalpunkten, dem Gefrierpunkt und normalem Siedepunkt des Wassers, geeicht werden; doch ist unter diesen Bedingungen die Gesamtstrahlung sehr gering und die Teilstrahlung im Bereich sichtbarer Wellen nicht nachweisbar, so daß man gezwungen ist, für die Eichung mindestens eine höhere Temperatur, etwa diejenige des Goldschmelzpunktes, heranzuziehen, die nur durch das Gasthermometer festgelegt werden kann.

b) Eichung. Mit dem Gasthermometer sind zur Aufstellung thermometrischer Fixpunkte eine Reihe von Schmelz- und Siedepunkten solcher Körper bestimmt worden, die leicht in chemisch reiner Form zu beschaffen sind. Zur Eichung von Thermometern für hohe Temperaturen kommen nach den Festsetzungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt folgende Fixpunkte in Betracht:

Siedepunkt des Schwefels beim Luftdruck p mm Quecksilber:

$$t = 444^{\circ},55 + 0,0908\,(p - 760) - 0,000047\,(p - 760)^2.$$

Schmelzpunkte:

Zink . .	419,4°	Kupfer . .	1083°
Antimon .	630	Palladium .	1557
Silber . .	960,5	Platin . . .	1764
Gold . .	1063		

Zink, Antimon, Silber und Kupfer muß man wegen ihrer leichten Oxydierbarkeit bzw. starken Neigung zur Sauerstoffabsorption in reduzierend wirkenden Graphittiegeln schmelzen. Gold schmilzt auch im Porzellantiegel einwandfrei.

In die Schmelze dieser Metalle wird das zu eichende Berührungsthermometer hineingesteckt (Tiegelmethode). Der Fixpunkt macht sich dadurch kenntlich, daß bei langsamer Abkühlung im Augenblick des Erstarrens infolge Abgabe latenter Wärme Temperaturkonstanz eintritt.

Die Fixpunkte von Palladium und Platin bestimmt man nach der sog. Drahtmethode, da von diesen kostbaren Metallen im allgemeinen nur geringe Mengen vorhanden sind. Im Falle des Palladiums schmilzt man an die beiden Enden eines etwa 2 cm langen Drahtstückchens aus diesem Metall etwa 50 cm lange Drähte aus Platin und führt das zwischen den Platinschenkeln befindliche Palladium in einen möglichst gleichförmig geheizten elektrischen Ofen, in den gleichzeitig das zu eichende Thermometer gebracht wird, oder dessen Strahlung man beobachtet. Die Temperatur des Ofens wird langsam erhöht, bis der Palladiumschmelzpunkt erreicht ist. Dieser Augenblick gibt sich leicht durch Öffnen eines schwachen Stromes kund, den man durch die Platinschenkel hindurchschickt. In demselben Augenblick müssen die Angaben des Prüfthermometers abgelesen werden. — Die Schmelztemperatur des Platins kann man in der gleichen Weise kenntlich machen, wenn man ein Platindrähtchen zwischen Schenkeln aus einem Metall höherer Temperaturbeständigkeit, etwa einer Legierung von Platin mit 10 oder 20 Proz. Rhodium, einschmilzt. — Die Drahtmethode hat dem Schmelzvorgang im Tiegel gegenüber den großen Nachteil, daß keine Temperaturkonstanz eintritt.

c) Berührungsthermometer. Die wichtigsten hochgradigen Berührungsthermometer der Praxis sind das Thermoelement und das Widerstandsthermometer.

1. Gasthermometer. Bei gewissen Versuchen, nämlich bei Messung der Explosionstemperatur von Gasgemischen, hat man sich allerdings sogar einer Art Gasthermometer konstanten Volumens bedient, weil hier die Aufgabe vorliegt, bei der äußerst geringen Dauer des Verbrennungsvorganges eine Thermometersubstanz von sehr geringer Trägheit zu verwenden. Es dient dazu das verbrannte Gas selber, dessen Druck bei Zimmertemperatur durch ein gewöhnliches Manometer und bei der Explosionstemperatur durch die Ausbiegung einer dünnen Stahllamelle gemessen wird. Diese trägt einen leichten Spiegel, so daß die Bewegung der Lamelle an der Verschiebung eines Lichtzeigers deutlich wahrnehmbar gemacht

werden kann. Auf diese Weise sind Temperaturen bis zu $t = 4600^0$ gemessen worden.

2. Hochgradige Quecksilberthermometer. Bisweilen werden bis 700° Quecksilberthermometer benutzt. Um den bei 357° liegenden Siedepunkt des Quecksilbers heraufzusetzen, muß das Thermometer unter erhöhtem Gasdruck (bis 40 Atm.) gefüllt werden. Gefäß und Kapillare werden für Thermometer bis 700° aus Quarzglas hergestellt. Jenaer Verbrennungsröhrenglas ist bis 600° verwendbar, Jenaer Glas 59III bis 525°.

3. Das Thermoelement. Werden zwei Drähte verschiedenen Metalles zu einem Kreis zusammengefügt, und bringt man die beiden Lötstellen auf verschiedene Temperatur, so entsteht in dem Drahtkreis eine elektromotorische Kraft, die lediglich von der Temperatur der Lötstellen, aber nicht von dem Temperaturgefälle längs der Drähte abhängt. Zwecks Messung dieser thermoelektrischen Potentialdifferenz verschweißt man die beiden Metalle nur an einem Ende miteinander, während man an das andere Ende jeden Drahtes Kupferzuleitungen lötet, die zu dem Meßinstrument B (Fig. 2) führen. Die Hauptlötstelle L_1 bringt

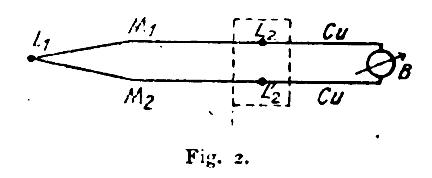


Fig. 2.

man mit dem Raum in Berührung, dessen Temperatur bestimmt werden soll. Die Nebenlötstellen L_2 und L_2' hält man durch ein Flüssigkeitsbad oder besser durch schmelzendes Eis auf gleicher Temperatur, so daß die Zusatzthermokräfte, die durch Berührung der offenen Schenkel mit den Kupferdrähten auftreten, sich gerade aufheben.

Die geringe Ausdehnung der Lötstelle bietet den Vorteil, die Temperatur an einer scharf definierten Stelle messen zu können, falls man dafür sorgt, daß die Wärmeleitung der Metallschenkel keine Fehler verursacht. Vielfach ist es aber nicht möglich, das Thermoelement ohne elektrisch isolierende Schutzhülle zu verwenden, wodurch dann wegen Vergrößerung der Wärmekapazität und der Wärmeableitung der erwähnte Vorteil zum großen Teil wieder verloren geht.

Solcher Schutzhüllen bedient man sich in der Technik schon aus dem Grunde, um die dünnen Drähte vor mechanischen Verletzungen zu bewahren. Gleichzeitig aber ist es oft nötig, die Schenkel des Thermoelements gegen Dämpfe abzusperren. Diese wirken besonders dann schädlich auf das Thermoelement ein, wenn sie Metalle oder Kohle enthalten, mit denen sich die Drähte des Thermoelementes legieren. Gewöhnlich tritt die Legierung an den Stellen des größten Temperaturgefälles ein. Die Metalle werden verunreinigt und es entstehen thermoelektrische Zusatzkräfte, die sich den elektromotorischen Kräften der Lötstellen L_1, L_2 und L_2' überlagern. Die Erfahrung lehrt, daß reine Metalle in diesem Sinne besonders thermoelektrisch empfindlich sind, Legierungen weit weniger. — Wenn ein Element auf die geschilderte Weise verdorben ist, so bleibt als einziges Heilmittel übrig, die verunreinigten Enden der Drähte zu entfernen und eine neue Hauptlötstelle L_1 herzustellen. Wollte man dem Element die ursprüngliche Länge lassen und nur eine neue Eichung vornehmen, so würden damit die Unsicherheiten nicht beseitigt, da die Zusatzthermokräfte nicht allein von der Stärke der Verunreinigungen, sondern auch von dem Temperaturgefälle längs des veränderten Drahtstückes abhängen. Sie treten nicht in die Erscheinung, wenn das Temperaturgefälle zum Verschwinden gebracht wird.

Die Schutzröhren, die das Thermoelement vor Verunreinigungen durch Legierung bewahren sollen, müssen undurchlässig für Gase sein. Es kommen dafür Röhrchen aus glasiertem Porzellan oder glasierter Marquardtscher Masse der Berliner Porzellanmanufaktur in Betracht. Letztere sind bis 1500° brauchbar. Besser ist Quarzglas, das man bis 1600° anwenden kann, allerdings nur unter häufiger Erneuerung der Röhrchen, da Quarz beim Erkalten in eine sehr brüchige Modifikation (Tridymit) übergeht. In der Nachbarschaft von Kohle, also insbesondere in einem Kohleofen, sind Schutzröhrchen aus Marquardtscher Masse nicht brauchbar, da ihr Schmelzpunkt dann infolge chemischer Veränderung erheblich herabgedrückt wird.

In elektrischen Öfen sehr hoher Temperatur tritt leicht noch eine andere Fehlerquelle für das Thermoelement auf, die darauf zurückzuführen ist, daß oberhalb 1100° auch alle sogenannten Isolatoren elektrisch zu leiten beginnen und es deshalb oft schwer zu vermeiden ist, daß ein Teil des Heizstromes in die Drähte des Thermoelementes gelangt. Eine einwandfreie Isolation ist in diesem Falle nur möglich, wenn das Thermoelement, ohne die Wandung zu berühren, frei in den Ofen gehängt wird. Ist dies nicht angängig, so ist es wünschenswert den Heizstrom kommutieren zu können. Mittelt man dann die am Thermoelement beobachteten Spannungen bei verschiedener Stromrich-

tung, so gelangt man zu einem annähernd richtigen Wert für die Thermokraft.

Für hohe Temperaturen ist das Thermoelement von Le Chatelier das wichtigste. Der eine Schenkel dieses Elementes besteht aus reinem Platin, der andere aus einer Legierung von Platin mit 10 Proz. Rhodium. Nachdem die Methoden zur reinen Herstellung des Platins von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt angegeben sind, unterscheiden sich die von der Firma W. C. Heräus in Hanau gelieferten Le Chatelierschen Elemente (Drahtdurchmesser 0,6 mm) in ihrer Thermokraft nur um wenige Promille.

Befindet sich die Hauptlötstelle auf der Temperatur t^0, die Nebenlötstellen auf 0^0, so gilt für die elektromotorische Kraft e zwischen $t = 300$ und $t = 1600^0$ die Formel

$$e = -184 + 7{,}5145\,t + 0{,}002852\,t^2 - 0{,}0000006068\,t^3.$$

Dieser Ausdruck (den ich im wesentlichen der Liebenswürdigkeit des Herrn Geheimrat Holborn verdanke), ist durch Umrechnung der Beobachtungsdaten von Holborn und Day[1]), Holborn und Valentiner[2]) sowie Day und Sosman[3]) auf die unter II b definierte Temperaturskala der Reichsanstalt gewonnen.

Das ziemlich kostspielige Le Chateliersche Thermoelement kann man bis 700^0 durch ein solches aus Silber und Konstantan ersetzen. Die Kombination Kupfer-Konstantan ist wegen der leichten Oxydierbarkeit des Kupfers nur bis 350^0 wirklich zuverlässig und gilt über 600^0 als unbrauchbar. Bis 1100^0 hat sich ein Element bewährt, dessen einer Schenkel aus Nickel, dessen anderer aus einer Legierung von Nickel mit 10 Proz. Chrom besteht. Bei allen Elementen mit Nickel ist zu beachten, daß dies Metall bei etwa 325^0 einen Umwandlungspunkt besitzt, der sich auch durch einen Sprung in der Thermokraft bemerkbar macht.

Befindet sich die Hauptlötstelle auf 500^0, die Nebenlötstellen auf 0^0, so gelten für einige Metallkombinationen annähernd folgende Thermokräfte in Millivolt

Pt/90 *Pt*, 10 *Rh*	4,21	*Fe*/Konstantan	27
Ni/90 *Ni*, 10 *Cr*	10	*Ag*/Konstantan	28
Fe/*Ni* . . .	12	*Cu*/Konstantan	28

Die genauen Werte der elektromotorischen Kräfte müssen durch besondere Eichung bestimmt werden.

1) Holborn u. Day, Ann. d. Phys. **2**, 505—545, 1900.
2) Holborn u. Valentiner, Ann. d. Phys. **22**, 1—48, 1907.
3) Day u. Sosman, Am. Journ. of Science **26**, 405—463, 1908.

Zur Interpolation zwischen den Eichpunkten haben sich für nicht zu große Temperaturbereiche besonders die Formeln von Avenarius: $e = at + bt^2$ und von Holman $e = at^b$ bewährt, welche die thermoelektrische Kraft e als Funktion t der Temperatur der Hauptlötstelle darstellen, wenn sich die Nebenlötstellen auf 0^0 befinden.

Vor Durchführung der Eichung erhitzt man die Drähte zweckmäßig einige Zeit über die höchste Temperatur hinaus, die noch gemessen werden soll. Das Material wird dadurch „gealtert", d. h. es wird in seiner Kristallstruktur und gleichzeitig in seinem thermoelektrischen Verhalten auf diese Weise schnell in einen Zustand übergeführt, den es bei häufigem Erhitzen auf tiefere Temperatur erst nach und nach und unter ständiger langsamer Änderung der Thermokraft erlangt.

4. Widerstandsthermometer. Während das Thermoelement sehr einfach zu handhaben ist und zur Ablesung seiner elektromotorischen Kraft e nur ein empfindliches Zeiger-Voltmeter erfordert, verlangt das Widerstandsthermometer eine größere Meßeinrichtung (Kompensationsapparat, Normalwiderstand, Galvanometer, Akkumulator), mit deren Hilfe es allerdings auch erheblich weitergehenden Ansprüchen an Genauigkeit gerecht wird. Als Widerstandsmaterial dient bisher fast ausschließlich Platin, dessen elektrischer Temperaturkoeffizient zwischen 0^0 und 100^0 etwa 0,0039 beträgt, mit wachsender Temperatur aber abnimmt. Wird eine Sicherheit von $0{,}1^0$ gefordert, so muß also der Widerstand auf mindestens 0,0004 seines Wertes bestimmt werden.

Man wickelt einen etwa 100 cm langen und 0,1 bis 0,2 mm dicken Platindraht auf einen Isolierkörper — am besten ein vierseitiges Porzellanprisma mit gezähnten Kanten — und lötet an die Enden des Platindrahtes, der stets in seiner ganzen Länge auf die gesuchte Temperatur gebracht wird, je zwei Zuleitungen aus Platin- oder Silberdrähten. Auf diese Weise ist es möglich, den Widerstand nach der Potentialmethode zu messen und somit den Zuleitungswiderstand, dessen Bestimmung stets mit gewissen Unsicherheiten behaftet ist, zu eliminieren.

Unterhalb 500^0 erreicht man mit dem Platin-Widerstandsthermometer leicht eine Genauigkeit von $0{,}01^0$. Neben den ausgezeichneten physikalischen und chemischen Eigenschaften des Platins ist diese bemerkenswerte Tatsache dem Umstand zu verdanken, daß der Widerstand des Platins zwischen 0 und 500^0 mit scheinbar unbegrenzter Zuverlässigkeit als eine quadratische Funktion der Temperatur t dar-

stellbar ist. Dementsprechend genügt eine Eichung des Thermometers an drei Punkten. Als diese wählt man gewöhnlich den Eis- und Siedepunkt des Wassers sowie den Siedepunkt des Schwefels.

Die Platinthermometer sind gelegentlich erheblich über 500°, nämlich bis 1100°, angewendet worden; doch erleiden sie oberhalb 900° dauernde Änderungen des Widerstandes, die teils auf mechanische Einflüsse, teils auf solche chemischer Art, nämlich Aufnahme von Verunreinigungen, zurückzuführen sind. Bisher hat noch nicht mit Sicherheit festgestellt werden können, ob die quadratische Beziehung zwischen Widerstand und Temperatur bis zu jenen hohen Wärmegraden streng gilt; es scheint, als ob sich bei 1100° Abweichungen im Betrage von 1 bis 2° bemerkbar machen.

Wahrscheinlich läßt sich das Widerstandsthermometer für diese hohen Temperaturen noch verbessern; oberhalb 1100° aber wird es kaum mit dem Thermoelement in Wettbewerb treten können, da es gegen Zerstäubung und Isolationsmängel ungleich empfindlicher ist als dieses.

d) Strahlungsthermometer. Beschränkt man sich auf die zur praktischen Messung der Temperatur geeigneten Strahlungsthermometer, so kommen im wesentlichen 4 Instrumente in Betracht, von denen eines, das Pyrometer von Féry, auf der Messung der Gesamtstrahlung beruht, alle andern dagegen auf Helligkeitsmessungen im sichtbaren Spektralbereich gegründet sind.

1. Gesamtstrahlpyrometer. Das Pyrometer von Féry besteht in seiner gebräuchlichsten Ausführung aus einem (vergoldeten) Hohlspiegel, der die Strahlung des glühenden Körpers auf die Hauptlötstelle eines Eisen-Konstantan-Elementes konzentriert, welche durch ein geschwärztes Silberplättchen verbreitert ist.

Soll das Pyrometer empfindlich sein, so muß der Lötstelle des Thermoelements beträchtliche Energie zugeführt werden. Das kann nur durch einen verhältnismäßig großen Spiegel geschehen, der wiederum eine große freie Öffnung des Strahlers erfordert. Denn der Spiegel muß stets ganz mit Strahlung ausgefüllt sein, damit das Instrument unabhängig von der Entfernung der Strahlungsquelle ist.

Die elektromotorische Kraft des Thermoelements, dessen Nebenlötstellen sich auf Zimmertemperatur befinden, kann im wesentlichen der 4. Potenz der gesuchten absoluten Temperatur ($T = t + 273$) proportional gesetzt werden. Eine geringe Abweichung von diesem Gesetz wird dadurch hervorgerufen, daß der Goldspiegel nicht alle Strahlen gleich gut reflektiert, sondern die langwelligen bevorzugt.

Das Pyrometer ist bis herab zu 400° brauchbar. Da seine Angaben dem Stefan-Boltzmannschen Strahlungsgesetz (I d 2) nicht genau folgen, so muß es bei mehreren Temperaturen geeicht werden.

2. Optische Pyrometer. Größere Zuverlässigkeit besitzen die optischen Pyrometer, deren Prinzip auf der Helligkeitsmessung in einem begrenzten Spektralbezirk beruht. Ihre Empfindlichkeit ist beträchtlich, da die Helligkeit J_λ des schwarzen Körpers sehr schnell mit der Temperatur steigt. Setzt man seine Helligkeit im gelben Licht ($\lambda = 0{,}59\,\mu$) bei $t = 600°$ als Einheit an, so beträgt sie in derselben Farbe bei $t = 1000°$ bereits $6{,}55 \cdot 10^3$, bei $t = 2000$ ist $J_\lambda = 3{,}02 \cdot 10^7$, bei $t = 3000°$ ist $J_\lambda = 8{,}02 \cdot 10^8$, bei $t = 6000°$ ist $J_\lambda = 2{,}84 \cdot 10^{10}$.

Von den optischen Pyrometern hat dasjenige von Holborn und Kurlbaum die größte Verbreitung gefunden. Zunächst mögen indessen die Instrumente von Le Chatelier und Wanner besprochen werden, da sie sich direkt auf die Anwendung der Strahlungsgleichung (8 a) gründen. Bei beiden kommt es wesentlich auf die Bestimmung eines Helligkeitsverhältnisses J/J_0 an. Daraus folgt, daß jedes Instrument eine Vergleichslichtquelle konstanter Helligkeit und eine Vorrichtung zur meßbaren Schwächung des Lichtes besitzen muß, durch die es möglich ist, zwei benachbarte Flächenstücke durch den Strahler und die Vergleichslichtquelle dem Photometerprinzip entsprechend gleich stark zu beleuchten. Die Beobachtung findet in möglichst einfarbigem Licht statt, da die im weißen Licht vorhandenen Farbenunterschiede der verschiedenen Lichtquellen die Messung erschweren.

2 α) Das Pyrometer von Le Chatelier ist ähnlich angeordnet wie das Photometer von Lummer und Brodhun. Die Intensität einer der beiden Lichtquellen wird durch graue Absorptionsgläser oder eine Irisblende mit ablesbarer Verstellung so weit abgeschwächt, bis beide im Gesichtsfeld befindlichen Flächen gleich hell erscheinen. Die Wellenlänge, bei der die Beobachtung stattfindet, wird durch ein farbiges Glas, das vor das Okular gesetzt wird, bestimmt. Man eicht das Instrument dadurch, daß man bei konstanter Helligkeit der Vergleichslampe und einem strahlenden schwarzen Körper der Temperatur T_0 als Objekt den Schwächungsfaktor B_0 feststellt, um den die Intensität des Strahlers vermindert werden muß, damit alle Teile des Gesichtsfeldes gleiche Helligkeit besitzen. Findet man dann bei unveränderter Farbe (Wellenlänge) für einen andern Strah-

lungszustand des schwarzen Körpers den Schwächungsfaktor B, so gilt für die zugehörige Intensität J bzw. Temperatur T im Anschluß an Gleichung (8a) die Beziehung

$$\ln \frac{B}{B_0} = \ln \frac{J}{J_0} = \frac{c_2}{\lambda} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right). \qquad (9)$$

Ist das Instrument mit einer Irisblende ausgerüstet, so wird das Verhältnis $\frac{B}{B_0}$ durch das Verhältnis der Blendenöffnungen gemessen. Die Irisblende kann man durch 2 gegeneinander verschiebbare keilförmige Platten aus dunklem Glase ersetzen, die einer absorbierenden Scheibe variabler Dicke gleichwertig sind. Bezeichnet man mit D die Dicke der Scheibe und mit $\varkappa$ ihren Absorptionskoeffizienten, so ist die Absorption B der Größe $e^{\varkappa D}$ proportional und für $\ln B/B_0$ ist $\varkappa (D - D_0)$ zu setzen. Unter Einführung der Abkürzungen

$$C_1 = \frac{1}{T_0} + \frac{\lambda \varkappa}{c_2} D_0 \text{ und } C_2 = \frac{\lambda \varkappa}{c_2}$$

geht Gleichung (9) in die Form

$$\frac{1}{T} = C_1 - C_2 D \qquad (9a)$$

über. Die Konstanten C_1 und C_2 sind nach Kenntnis des Absorptionskoeffizienten $\varkappa$ zu berechnen, doch können sie auch durch Eichung des Instruments bei zwei bekannten Temperaturen bestimmt werden. Gleichung (9a) gestattet die Temperatur T in besonders einfacher Weise aus der Dicke D der absorbierenden Glasschicht zu ermitteln.

2β) Das Pyrometer von Wanner ist dem Königschen Spektralphotometer nachgebildet. Die strahlende Fläche unbekannter Temperatur wird mit einer beleuchteten Metallglasscheibe verglichen, deren stets gleichbleibende Helligkeit von einer kleinen Glühlampe (4 Volt) stammt. Beide Strahlenbündel fallen durch ein geradsichtiges Polarisationsprisma. Dadurch wird jedes von ihnen in ein Farbenband und zwei senkrecht zueinander polarisierte Strahlen zerlegt. Durch Ausblendung eines schmalen Wellenlängenbereichs (meist um die rote Wasserstofflinie $\lambda = 0{,}656\,\mu$) und Fortschaffung je eines der polarisierten Teilstrahlen wird das ganze Gesichtsfeld von Licht gleicher Farbe erhellt, das aber für beide Hälften des Feldes entgegengesetzten Polarisationszustand besitzt und von verschiedenen, nämlich den beiden zu vergleichenden, Lichtquellen stammt. Durch Drehen eines Analysators, der über einer Winkelteilung beweglich ist, kann man beide Hälften des Gesichtsfeldes auf gleiche Helligkeit einstellen.

Um das Prinzip der Messung vollständiger zu erläutern, seien mit OS_0 (Fig. 3) und OS

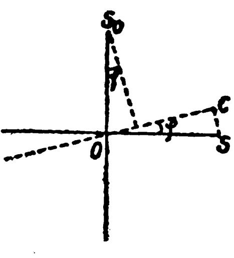


Fig. 3.

die Amplituden und Polarisationsrichtungen der beiden Lichtstrahlen vor dem Analysator bezeichnet. Dreht man den Analysator mit seiner Polarisationsrichtung in die Stellung OC und setzt man den Winkel $COS = \varphi$, so besitzen die in das Gesichtsfeld gelangenden beiden Strahlen die Amplituden $OS \cdot \cos \varphi$ und $OS_0 \sin \varphi$. Nun verhalten sich die Intensitäten wie die Quadrate der Amplituden. Also besteht zwischen dem Intensitätsverhältnis J_0/J der beiden Lichtstrahlen S_0 und S vor dem Analysator und ihrem Intensitätsverhältnis J_0'/J' hinter dem Analysator die Beziehung $\frac{J_0'}{J'} = \frac{J_0}{J} \operatorname{tg}^2 \varphi$. Stellt man nun den Analysator auf Helligkeitsgleichheit im Gesichtsfeld ein, so daß $J_0' = J'$ ist, so ergibt sich das Helligkeitsverhältnis

$$\frac{J}{J_0} = \operatorname{tg}^2 \varphi. \qquad (10)$$

Der Nullpunkt der Winkelteilung des Analysators ist durch maximale Helligkeit der einen oder maximale Dunkelheit der andern Hälfte des Gesichtsfeldes gekennzeichnet. Die Konstanten des Instruments, zu denen die Intensität J_0 des zur Vergleichung dienenden Lichtstrahls gehört, müssen durch Eichung festgelegt werden. Zu dem Zweck richtet man das Instrument auf einen schwarzen Körper der bekannten Temperatur T_1. Bezeichnet man die Lichtintensität des schwarzen Körpers im Wellenlängenbereich des Pyrometers mit J_1 und den Einstellungswinkel des Analysators mit φ_1, so erhält man $J_1/J_0 = \operatorname{tg}^2 \varphi_1$. Es ist also nach den Gleichungen (9) und (10)

$$\ln J/J_1 = \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi_1} = \frac{c_2}{\lambda} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T} \right)$$

oder

$$\ln \operatorname{tg} \varphi = a - \frac{b}{T}, \qquad (11)$$

wenn man $a = \frac{1}{2} \frac{c_2}{\lambda T_1} + \ln \operatorname{tg} \varphi_1$ und $b = \frac{c_2}{2 \lambda}$ setzt.

Die Konstanten a und b sind bei Kenntnis der

Temperatur T_1, der Wellenlänge λ und der Strahlungskonstanten c_2 berechenbar. Zieht man vor, sie mit dem Pyrometer selbst empirisch zu ermitteln, so ist nur nötig, die zu zwei bekannten Temperaturen T gehörigen Winkel φ zu bestimmen.

2γ) Das Pyrometer von Holborn und Kurlbaum beruht auf einem etwas andern Prinzip als die beiden soeben besprochenen Instrumente, da bei ihm die Vergleichslampe stets auf die Helligkeit des Strahlers gebracht wird, dessen Temperatur gemessen werden soll. Mit diesem Instrument beobachtet man nicht die Helligkeit einer vom Objekt beleuchteten Fläche, sondern man blickt auf das Objekt selbst, das man mit allen Einzelheiten wahrnimmt, so daß man das Pyrometer leicht auf jeden beliebigen Teil des Strahlers richten kann. Allerdings ist die Eichung etwas weniger einfach als bei den Pyrometern von Le Chatelier und Wanner. Es ist nämlich erforderlich, den schwarzen Körper je nach dem Meßbereich bei 3 oder 4 bekannten Temperaturen zu beobachten, um eine empirische Beziehung zwischen der Temperatur des schwarzen Körpers und der Stromstärke, die bei Einstellung des Instruments durch die Glühlampe fließt, ermitteln zu können. Meist genügt es, die Stromstärke als quadratische Funktion der Temperatur darzustellen, so daß eine Eichung an drei Punkten ausreicht.

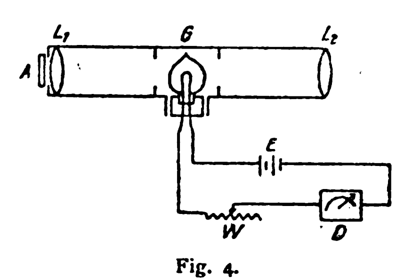


Fig. 4.

Fig. 4 veranschaulicht das Prinzip des Pyrometers: Man stellt die Okular- und Objektivlinse L_1 und L_2 so ein, daß ein Bild des Objekts am Ort der Glühlampe G entsteht, und daß Objekt und Glühlampe gleichzeitig vom Auge deutlich gesehen werden, das durch das Farbglas A blickt. Dann reguliert man durch Verschiebung des Gleitwiderstands W die Stromstärke des Glühlampenkreises, die durch das Instrument D gemessen wird, bis die Spitze des Glühfadens die gleiche Helligkeit wie ihr leuchtender Hintergrund besitzt. Die dunklen Enden des Fadens weisen deutlich auf die Stelle hin, der sich die Aufmerksamkeit zuwenden muß.

Da in diesem Pyrometer die Strahlung weder spektral zerlegt noch durch Nikols geschwächt wird, so ist die erzielte Lichtstärke erheblich größer als bei dem Pyrometer von Wanner. Es ermöglicht Messungen bis herab zu 650°.

Der Meßbereich des Pyrometers läßt sich fast beliebig ausdehnen, wenn man Absorptionsgläser verwendet, die zur Abschwächung der Lichtintensität des Strahlers vor die Objektivlinse L_2 gesteckt werden. Die Eichung der Absorptionsgläser kann mit Hilfe des Instruments selbst erfolgen, indem man zunächst ohne Absorptionsglas die wahre Temperatur T_1 eines schwarzen Körpers und dann nach Einschaltung des Absorptionsglases die scheinbare Temperatur T_2 des unverändert gebliebenen schwarzen Körpers beobachtet. Für das Verhältnis der unter diesen beiden Bedingungen ins Auge gelangenden Intensitäten J_1 und J_2 gilt nach Gl. (8a) die Beziehung

$$\ln J_1/J_2 = \ln V = \frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right).$$

Hierin bedeutet V das Schwächungsverhältnis des grauen (Rauch-)Glases und λ die dem Farbglas zugehörige Wellenlänge. Nachdem V durch die Kenntnis zweier Temperaturen T_1 und T_2 gewonnen ist, die innerhalb der Eichgrenzen des Pyrometers liegen, kann man unter Verwendung desselben Rauchglases eine höher gelegene Temperatur T_1 bestimmen, wenn nur T_2 noch innerhalb der Eichgrenzen bleibt. Durch Kombination mehrerer Absorptionsgläser lassen sich mit dem Instrument Temperaturen bis zu mehreren Tausend Grad messen, während die direkte Eichung sich im allgemeinen nur bis $T = 1500 + 273^0$ erstreckt.

Bei Verwendung eines Absorptionsglases muß man die Wellenlänge des Farbglases A kennen, die sonst in rechnerischer Hinsicht von untergeordneter oder gar keiner Bedeutung ist. Im allgemeinen ist sie mit Hilfe eines Spektrometers genau genug feststellbar. Für Messungen größter Feinheit ist ein Pyrometer mit spektraler Zerlegung erwünscht. Ein solches Spektralpyrometer, das das Prinzip des Instruments von Holborn und Kurlbaum beibehält, ist vom Verfasser[1]) angegeben und bei zahlreichen Messungen benutzt worden.

e) Strahlungspyrometrie nicht schwarzer Körper. Sobald der Strahler, dessen Temperatur gemessen werden soll, sich nicht im Wärmegleichgewicht mit seiner Umgebung befindet oder nicht das Absorptionsvermögen $A = 1$ für alle Wellenlängen besitzt, kann man mit den besprochenen Strahlungspyrometern nicht die

1) F. Henning, Temperaturmessung S. 175. Braunschweig 1915.



wahre Temperatur des betreffenden Körpers ermitteln. Man kann vielmehr nur diejenige Temperatur angeben, bei der ein schwarzer Strahler die gleiche Energie bzw. Helligkeit aussendet wie der betrachtete Körper. Diese Temperatur heißt kurz die schwarze Temperatur S des Strahlers. — Man bestimmt sie im allgemeinen nicht für die Gesamtstrahlung, da in diesem Fall ihr Zusammenhang mit der wahren Temperatur verwickelt ist. Aber auch für die Teilstrahlung bei einer bestimmten Wellenlänge ist die Beziehung zwischen der wahren und der schwarzen Temperatur nicht immer einwandfrei zu ermitteln.

Ist bei der Wellenlänge λ die Helligkeit J eines schwarzen Körpers der Temperatur T_0 gerade so groß wie die Helligkeit eines andern Körpers von der Temperatur T und dem Absorptionsvermögen A, so gelten nach Gl. (4) und (8) die Beziehungen

$$J = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T_0}} = A_{\lambda, T} c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}$$

oder da nach der Definition der schwarzen Temperatur $S = T_0$ ist,

$$\frac{\lambda}{c_2} \ln A_{\lambda, T} = \frac{1}{T} - \frac{1}{S}. \qquad (12)$$

Bei Kenntnis des Absorptionsvermögens läßt sich mit Hilfe dieser Gleichung die wahre Temperatur aus der schwarzen ableiten. Gleichzeitig erkennt man aus der Gleichung, daß sich bei gegebener wahrer Temperatur T die schwarze Temperatur S mit der Wellenlänge ändert. Man kommt also zu dem sich etwas paradox anhörenden Satz, daß für gewöhnlich die schwarze Temperatur im Rot eine andere sein wird als im Blau.

Für den schwarzen Körper ist bei allen Wellenlängen und allen Temperaturen das Absorptionsvermögen $A_{\lambda, T} = 1$, so daß sich in diesem Falle stets $T = S$ ergibt. Für andere Strahler läßt sich rein theoretisch keine andere Angabe über das Absorptionsvermögen machen als diese, daß sein Betrag zwischen 0 und $+1$ liegen muß. Dementsprechend muß $S \leq T$ sein. Die schwarze Temperatur liefert also einen unteren Grenzwert für die wahre Temperatur. Nur bei sehr kurzen Wellen sind beide Größen auch für einen beliebigen Strahler gleich, vorausgesetzt, daß das Absorptionsvermögen bei sehr kurzen Wellen nicht einen verschwindend kleinen Wert annimmt.

a) Feste undurchsichtige Körper. Das Absorptionsvermögen fester undurchsichtiger Körper kann aus ihrem Reflexionsvermögen abgeleitet werden, da sich beide Größen zu 1 ergänzen. Nun ist das Reflexionsvermögen der Metalle und der Kohle im Gebiet sichtbarer Wellenlängen bis zu sehr hohen Temperaturen von der Temperatur unabhängig, so daß man an Stelle von Gl. (12) setzen kann

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{S} + \frac{\lambda}{c_2} \ln(1 - R_\lambda), \qquad (12a)$$

wenn man mit R das Reflexionsvermögen des Metalles bei Zimmertemperatur bezeichnet. Diese wichtige Gleichung wurde von Holborn und dem Verfasser[1]) aufgestellt und zum erstenmal zur Bestimmung der wahren Temperatur strahlender Metalle angewandt. Über die Änderung des Reflexionsvermögens anderer Körper mit der Temperatur ist noch wenig bekannt.

Eine von Lummer und Pringsheim im Jahre 1899 angegebene und seitdem vielfach zitierte Regel zur Temperaturbestimmung nicht schwarzer fester Strahler kann nicht als einwandfrei gelten. Sie gründet sich auf das Wiensche Verschiebungsgesetz und fordert die Feststellung der Wellenlänge λ_m maximaler Energie. Diese liegt im allgemeinen im Ultrarot, so daß, um sie aufzufinden, dieser Teil des Spektrums bolometrisch durchgemessen werden muß. Die genannten Autoren stellten fest, daß für den schwarzen Körper $\lambda_m T = 2940$ und für blankes Platin $\lambda_m T = 2630$ gilt. Ihre Regel besagt, daß für alle Körper, deren Strahlungseigenschaften zwischen denjenigen des schwarzen Körpers und des blanken Platins liegen, das Produkt $\lambda_m T$ einen Wert zwischen 2940 und 2630 annimmt, und daß somit also ein oberer und ein unterer Grenzwert für die Temperatur des Strahlers angebbar ist. Was unter „Strahlungseigenschaft" verstanden werden soll, wird nicht erläutert. Die Theorie ergibt, wenn man von der Strahlungsgleichung (8) und dem Kirchhoffschen Gesetz Gl. (4) ausgeht,

$$\lambda_m T = \frac{c_2}{5} + \frac{1}{5} \frac{\lambda_m^2 T}{A_{\lambda_m, T}} \cdot \left(\frac{dA_T}{d\lambda}\right)_{\lambda_m}.$$

Daraus folgt erstens, daß $\lambda_m T$ nur konstant ist, wenn das Absorptionsvermögen weder von der Temperatur noch von der Wellenlänge abhängt, somit also das Produkt für Platin nicht bei allen Temperaturen den Wert 2630 haben kann, und zweitens, daß $\lambda_m T$ größere oder kleinere Werte als für den schwarzen Körper annimmt, je nachdem $\frac{dA}{d\lambda}$ positiv oder negativ ist.

Im allgemeinen muß man sich bei einem beliebigen Strahler mit der Messung der schwarzen Temperatur begnügen. Wollte man diese mit der wahren Temperatur identifizieren, so müßte man die sehr rohe Annahme machen,

1) L. Holborn u. F. Henning, Berl. Ber. 1905, S. 311—317.

daß der Strahler für die Wellenlänge, bei der die Messung stattfindet, das Absorptionsvermögen 1 besitzt. Dieses Verfahren richtet sich sofort von selbst, da man bei Beobachtung in verschiedenen Farben zu verschiedenen Temperaturen geführt würde. Nun kann man aber einen Schritt weiter gehen, indem man die Voraussetzung macht, daß das Absorptionsvermögen zwar nicht den Wert 1 besitzt, aber doch für zwei möglichst weit voneinander verschiedene Wellenlängen (etwa im roten und blauen Licht) den gleichen Betrag annimmt. Dann gelten nach Gl. (12) die Gleichungen

$$\frac{\lambda_1}{c_2} \ln A = \frac{1}{T} - \frac{1}{S_1} \quad \text{und} \quad \frac{\lambda_2}{c_2} \ln A = \frac{1}{T} - \frac{1}{S_2}$$

aus denen

$$T_g = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) S_1 S_2}{\lambda_2 S_2 - \lambda_1 S_1}$$

folgt. Diese Temperatur T_g heißt die graue Temperatur des betreffenden Körpers. Sie stimmt mit der wahren Temperatur nur dann überein, wenn das Reflexionsvermögen für alle Wellenlängen den gleichen Wert besitzt und der Körper also alles auffallende Licht in unveränderter Zusammensetzung, aber geschwächter Intensität zurückwirft. Die Bedingung der Grauheit ist streng bei keinem Körper erfüllt, sie gilt mit einiger Näherung etwa für Kohle, wenn man sich auf einen nicht sehr ausgedehnten Wellenbereich beschränkt. Für alle Körper, bei denen das Absorptionsvermögen mit zunehmender Wellenlänge abnimmt, wie z. B. bei den Metallen, ist die graue Temperatur T_g ein oberer Grenzwert für die wahre Temperatur.

Der Gedanke liegt nahe, die schwarze Temperatur S bei einer größeren Anzahl, etwa n, verschiedenen Wellenlängen λ zu beobachten, dann für A eine Funktion n—2ten Grades von λ mit $n-1$ empirischen Konstanten aufzustellen und nach Eliminierung dieser Konstanten aus den vorhandenen n-Gleichungen die Temperatur T zu berechnen. Man erhält in diesem Falle für T einen Ausdruck der Form

$$\frac{1}{T} = \Sigma \frac{a_n}{S_n},$$

bei dem die Größen a_n wechselndes Vorzeichen haben und sämtlich (teils sogar sehr erheblich) größer als 1 sind. Jedes der n-Glieder der Summe ist also größer als $\frac{1}{T}$ und da die Meßgenauigkeit von S beschränkt ist, so wird das Ergebnis um so ungenauer, je größer man die Zahl n wählt. Das Verfahren ist bei $n = 3$ bereits praktisch unbrauchbar.

b) Durchsichtige Körper. Die Temperaturmessung leuchtender Flammen und Gase bietet beträchtliche Schwierigkeiten. Führt man in dieselben ein Thermoelement oder Widerstands-Thermometer ein, so ist zu beachten, daß die Drähte infolge der eigenen Ausstrahlung und thermischen Ableitung eine niedrigere Temperatur als die Flamme besitzen. Da die Ausstrahlung der Oberfläche des Drahtes proportional ist, so kann man bei Verwendung von Drähten verschiedenen Durchmessers und Extrapolation auf den Durchmesser 0 zu annähernd richtigen Werten für die Temperatur gelangen.

Auch die Strahlungsmessungen führen nicht auf direktem Wege zum Ziel, denn für die Abhängigkeit des Emissionsvermögens durchsichtiger Körper von der Temperatur sind keine Gesetzmäßigkeiten bekannt. Da aber für durchsichtige Körper das Kirchhoffsche Gesetz von der Gleichheit des Absorptions- und Emissionsvermögens volle Gültigkeit besitzt, so ist folgender zuerst von Kurlbaum angegebener Weg gangbar: Man bringt hinter den Strahler einen schwarzen Körper, dessen Temperatur man so einstellt, daß er in einem bestimmten Wellenlängenbereich durch die Flamme hindurch ebenso hell erscheint als direkt. In diesem Falle sendet die Flamme (wenn man von ihrer geringen Reflexion absieht) gerade soviel Strahlungsenergie aus wie sie vom schwarzen Körper absorbiert. Bezeichnet man mit J die Strahlungsintensität des schwarzen Körpers bei der Temperatur T, ferner mit J' bzw. A die Strahlungsintensität bzw. das Absorptionsvermögen der Flamme, so gilt also die Beziehung $J \cdot A = J'$. Diese Gleichung kann aber nach dem Kirchhoffschen Gesetz Gl. (4) nur bestehen, wenn sich alle drei Größen J', A und J auf die gleiche Temperatur beziehen, d. h. wenn die Flamme die gleiche Temperatur besitzt wie der schwarze Körper.

Von besonderem Interesse ist die Strahlung einer leuchtenden Gasschicht von sehr großer Dicke, wie sie in der Photosphäre der Sonne der Beobachtung zugänglich ist. Man denke sich die Gasschicht, deren Temperatur als homogen angenommen sei, in sehr viele Lamellen zerlegt, deren jede für sich allein die Energie J' emittiert und das Absorptionsvermögen A besitzt. Zur Beobachtung gelangt aus der vordersten Schicht die Energie J', aus der zweiten Schicht nur derjenige Bruchteil, der von der ersten Schicht hindurchgelassen wird, nämlich $J'(1-A)$ usw., aus der n-Schicht die Energie $J'(1-A)^{n-1}$. Summiert man alle diese Energien und setzt man $n = \infty$, so erhält man, indem man bedenkt, daß $1-A$ ein echter Bruch ist, die Strahlung der ganzen Gasmasse zu $J'A$. Das ist aber nach dem Kirchhoff-



schen Gesetz die Strahlungsenergie eines schwarzen Körpers von der gleichen Temperatur wie die Gasmasse und der Ausdehnung ihrer vordersten Schicht. Die Photosphäre der Sonne strahlt also als schwarzer Körper, vorausgesetzt, daß man sie als gleichmäßig temperierte Gasschicht von sehr großer Dicke betrachten darf.

(Eingegangen 20. März 1918.)

BESPRECHUNGEN.

G. Bucky, Die Röntgenstrahlen und ihre Anwendung. (Aus Natur und Geisteswelt 556.) 8. 102 S. mit 85 Abb. im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1918. Geb. M. 1.50.

J. Rosenthal, Die Röntgentechnik. 8. 178 S. mit 197 Abb. im Text und 1 phot. Tafel. Leipzig, J. A. Barth. 1918. M. 9.—.

Von den beiden vorliegenden Büchern über Röntgentechnik ist das erste von einem Arzt geschrieben und für den Laien bestimmt. Es ist eine schwierige Aufgabe für einen Arzt, ein physikalisch-technisches Gebiet darzustellen und sie ist auch in diesem Fall nur so weit gelungen, daß das Buch nur bescheidenen Ansprüchen gerecht zu werden vermag.

Das Buch von Rosenthal ist ein Sonderabdruck aus dem von Rieder und Rosenthal herausgegebenen „Lehrbuch der Röntgenkunde", von dem bereits eine „Praktische Röntgenphysik" als Sonderdruck erschienen ist. Es hat drei Hauptabschnitte: die Hochspannungsapparate, die Röntgenröhren und die Hilfsvorrichtungen und Utensilien und beschränkt sich darauf, die technisch wichtigen Fragen darzulegen und in zahlreichen Figuren zu erläutern. Wertvoll sind die praktischen Erfahrungen des Verf., die an vielen Stellen eingefügt worden sind. Das Buch wird dem Physiker, der sich über den heutigen technischen Umfang der Röntgentechnik unterrichten will, von Nutzen sein.

P. Ludewig.

W. Schüle, Leitfaden der technischen Wärmelehre. Kurzes Lehrbuch der Mechanik der Gase und Dämpfe und der mechanischen Wärmelehre. 8. VIII u. 215 S. mit 91 Figuren und 3 Tafeln. Berlin, Julius Springer. 1917. Geb. M. 5.60.

Der vorliegende Leitfaden bildet einen Auszug aus dem I. Band des bekannten Werkes des Verf. „Technische Thermodynamik", welcher vor kurzem die 3. Auflage erlebte. Er gibt in gedrängter Form einen Überblick über das ganze Gebiet, wobei es dem Verf. in geschickter Weise gelungen ist, sich auf das wirklich Wesentliche zu beschränken. Studierende des Maschinenbaues und der technischen Physik werden allerdings zweckmäßigerweise auf das Hauptwerk zurückgreifen; dagegen wird der Leitfaden allen denjenigen, die sich nur vorübergehend mit der Materie zu beschäftigen haben und nur die Grundlagen kennen lernen wollen, viel Zeit und Mühe sparen. Gerade die Grundlagen sind in dem Leitfaden sehr sorgfältig behandelt. Die Absicht des Verf., durch die knappere Darstellungsform den aus dem Felde heimkehrenden Studierenden zu helfen, wird zweifellos erreicht.

Der Leitfaden wird sicherlich von den in Frage kommenden Kreisen gerne benutzt werden, wie ja auch dem Hauptwerk des Verf. in Kreisen seiner speziellen Fachgenossen allgemeine Anerkennung gezollt wird.

Planck.

W. Ostwald, Die wissenschaftlichen Grundlagen der analytischen Chemie. 6. Aufl. gr. 8. XII u. 238 S. mit 3 Figuren im Text. Dresden u. Leipzig, Theodor Steinkopff. 1917. In Pappband geb. M. 10.—.

W. Ostwalds „Wissenschaftliche Grundlagen der analytischen Chemie" gehören nach Form und Inhalt zu den klassischen Schriften der modernen Naturwissenschaft. Die Neuauflage des allgemein bekannten und beliebten Werkes wird deshalb nicht nur von dem engeren Kreis, an den es sich zunächst wendet, sondern darüber hinaus von allen Freunden exakter Naturforschung, die an den Arbeitsmethoden und Ergebnissen der analytischen Chemie ein Interesse nehmen, mit Freude begrüßt werden. Irgendwelche wesentlichen Änderungen gegenüber der vorhergehenden Auflage hat der Verf. nicht vorgenommen. Wie bisher behandelt er im ersten Teil des Buches in 5 Kapiteln (1. Gemenge und ihre Phasen; 2. Lösungen und reine Stoffe; 3. (Physikalische) Scheidung der Lösungsbestandteile; 4. Chemische Scheidung; 5. Die Messung der Stoffe) die Theorie der in der analytischen Chemie benutzten Vorgänge und Erscheinungen, im zweiten in 7 Kapiteln (6. Wasserstoff- und Hydroxylion; 7. Alkalimetalle; 8. Erdalkalimetalle; 9. Eisengruppe; 10. Kupfergruppe; 11. Zinngruppe; 12 Nichtmetalle) ihre Anwendung zur Scheidung der häufigeren Elemente, denen sich dann noch ein 13. Kapitel über die Berechnung der Analysen anschließt. Ein Anhang, in dem sich eine Anzahl anschaulicher und mit einfachen Hilfsmitteln ausführbarer Versuche zur Erläuterung des Vorhergehenden zusammengestellt findet, wird allen denen, die den Inhalt des Buches im Unterricht zu verwerten haben, besonders willkommen sein.

Borsche.

G. Duffing, Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Sammlung Vieweg, Heft 41/42. 8°. 134 S. mit 23 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1918. M. 5.— u. Teuerungszuschlag.

Der Nachdruck liegt auf den Titelworten: „bei veränderlicher Eigenfrequenz". Es handelt sich nicht um eine Darstellung der normalen erzwungenen Schwingungen selbst, sondern um eine Weiterbildung dieser Theorie, nicht um ein Lehrbuch, sondern um eine Forschungsarbeit.

Wenn sich auch die Mehrzahl der Schwingungserscheinungen durch das einfache Bild der erzwungenen Schwingungen hinreichend genau darstellen läßt, so mehren sich doch die Fälle, die in diesen engen Rahmen nicht mehr hineinpassen. Vielfach treten ganz eigentümliche, neuartige Erscheinungen auf: Unter ganz gleichen äußeren Bedingungen sind zwei ganz verschiedene Betriebszustände möglich; beim Übergang von tiefen zu hohen Frequenzen stellen sich andere Zustände ein, wie beim Übergang von hohen zu tiefen Frequenzen und ähnliches mehr. Elektromagnetische Schwingungskreise mit Eisen, synchrone Drehstrommaschinen bei Parallelbetrieb, Resonanzschwingungen rasch laufender Maschinen, das gewöhnliche Kreispendel bei größeren Ausschlägen zeigen solche Erscheinungen.

Der Verf. sucht auf streng mathematischem Wege tiefer in dies noch wenig erforschte Gebiet einzudringen. Der erste Teil behandelt kurz die normalen harmonischen Schwingungen, um an ihnen die Rechenoperationen, die zur Lösung der Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \chi \frac{dx}{dt} + \alpha x = R(t)$$

erforderlich sind, ins Gedächtnis zurückzurufen. Der Verf. gibt zum Schluß auch eine neue Lösung, die für eine beliebige periodische Funktion $R(t)$ gültig ist. Der zweite, Hauptteil behandelt die „pseudoharmonischen Schwingungen"; es wird nach der Lösung der erweiterten Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \chi \frac{dx}{dt} + \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 = k \sin \omega t$$

gesucht. Trotz der Beschränkung auf sinusförmige äußere Kraft gelingt dies zunächst nur für ein dämpfungsfreies System ($\chi = 0$) und unter der Voraussetzung, daß die zusätzlichen Restitutionskräfte ($-\beta x^2 - \gamma x^3$) klein sind, und auch da ist ein erheblicher Rechenaufwand und die Anwendung elliptischer Funktionen erforderlich. Das war bei den verwickelten Erscheinungen, die durch die Lösung wiedergegeben werden sollen, auch nicht anders zu erwarten. Die klare Darstellung des Verfassers, die Entwicklung des Schwierigen aus dem Einfachen, das Hervorheben der wichtigsten Ergebnisse nach jeder längeren Rechnung erleichtern das Verständnis sehr. Dem gleichen Zwecke dienen verschiedene Rechenbeispiele und der dritte Teil, der vom Verfasser angestellte Versuche am Kreispendel enthält, die die Rechnungen bestätigen. Die weiteren Teile bilden Ergänzungen zum zweiten Teil: „Einfluß der Dämpfung, Stabilität der Bewegung, Technische Bedeutung, Verallgemeinerungen". Ein Anhang enthält Formeln über elliptische Funktionen und einige Rechenoperationen, die im Text den Gedankengang zu sehr unterbrochen hätten.

Für Physiker, die vor schwierigen mathematischen Rechnungen keine Scheu haben und für alle, die sich mit diesem Spezialgebiet eingehend befassen wollen, wird das Buch eine wichtige Erweiterung ihres Wissensgebietes bilden. Barkhausen.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Delft Dr. F. E. C. Scheffer für physikalische Chemie.

Ernannt: An der Technischen Hochschule Delft Dr. J. van der Berg zum Lektor für analytische Chemie und Dr. F. Gondrian zum Lektor für analytische Chemie, der Privatdozent an der Universität Berlin und Mitglied der Physikalisch-technischen Reichsanstalt Professor Dr. Eduard Grüneisen zum a. o. Professor für mathematische Physik an der Universität Marburg, Professor W. O. Walker an der Queens University Kanada zum ord. Professor der Chemie an der Mc Master University in Toronto (an Stelle des verstorbenen Dr. J. Bishop Tingle), der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Max v. Laue in gleicher Eigenschaft an der Universität Berlin, der a. o. Professor an der Universität Berlin Dr. Max Born zum ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Frankfurt a. M.

Verliehen: Dem Privatdozenten für Astronomie und Meteorologie an der Technischen Hochschule Danzig Dr. Albert v. Brunn, dem Privatdozenten für Astronomie und angewandte Mathematik an der Universität Freiburg i. B. Ernst August Ansel, dem Privatdozenten der Physik an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Marzello Pirani, dem Mitglied des Kaiser-Wilhelm-Instituts für physikalische Chemie Dr. Friedrich Epstein in Berlin-Dahlem sowie dem ständigen Mitgliede des Material-Prüfungsamts Dr. Werner Mecklenburg in Berlin-Dahlem der Titel Professor.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der Chemie an der Universität Moskau Dr. Iwan Plotnikow (infolge Übernahme der Leitung des wissenschaftlichen photochemischen Laboratoriums bei der Aktien-Gesellschaft für Anilin-Fabrikation in Berlin).

In den Ruhestand: Der a. o. Professor der Mathematik an der Universität Jena Hofrat Dr. Gottlob Frege, der ord. Professor der anorganischen Chemie an der Technischen Hochschule Trondhjem Dr. P. Farup (wegen Krankheit).

Gestorben: Der ord. Professor der Physik und angewandten Elektrizitätslehre an der Universität Göttingen und Mitbegründer dieser Zeitschrift Geh. Regierungsrat Dr. Hermann Th. Simon, der Vorsitzende der Frankfurter chemischen Gesellschaft Professor Carl Theodor Petersen.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und H. Th. Simon



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 40 Mark, im Ausland 45 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 60 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.
Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstraße 2.

No. 3. | 1. Februar 1919. No. 535. | 20. Jahrgang.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen; B. = Besprechungen.)



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 3. | 1. Februar 1919. | 20. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 4 am 6. Februar 1919.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Elektronendampfdruck und Clausius-Clapeyronsche Gleichung.

(Bemerkung zu einigen Arbeiten von Herrn M. v. Laue.)

Von W. Schottky.

Im Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik hat Herr M. v. Laue kürzlich einige Abhandlungen[1]) über Glühelektronen veröffentlicht, deren wesentlichste thermodynamische Ergebnisse mir folgende zu sein scheinen:

1. Der Dampfdruck der Elektronen über einem glühenden Metall gehorcht nicht, wie bisher angenommen, der Clausius-Clapeyronschen Gleichung, sondern einer neuen Dampfdruckgleichung

$$\rho_g = \text{Konst.}\, T^{3/2} \cdot e^{\frac{\mu}{RT}}. \qquad (1)$$

Hierbei bedeutet ρ_g die Grenzdichte des Elektronendampfes unmittelbar an der Oberfläche des glühenden Metalles, μ ist die Zunahme der freien Energie des festen Körpers, wenn ihm ein Mol Elektronen zugeführt wird.

2. Gl. (1) gilt nur unter der Annahme, daß die elektrische Feldstärke an der Grenzfläche des Metalles einen bestimmten Wert hat; ferner muß angenommen werden, daß die sogenannte elektrische Bildkraft das Feld und die kinetische Energie der Elektronen nicht abändert. Wie unter den allgemeineren Annahmen die Dampfdruckformel lauten würde, bleibt offen.

3. Der Fehler der früheren Überlegungen bestand darin, daß man das Elektronengas als ein gewöhnliches ideales Gas behandelte; in Wirklichkeit sind Energie und Entropie eines Elektronengases, wie es sich über einer Metalloberfläche befindet, nach anderen Gesetzen zu berechnen als die entsprechenden Größen bei einem gewöhnlichen Gas.

Mit diesen Ergebnissen ist die vermeintliche frühere Klarheit, die über die Thermodynamik des Elektronendampfes bestand, anscheinend wieder aufgehoben; die einfache aus der Clausius-Clapeyronschen Gleichung abzuleitende Wilsonsche Formel

$$\rho = \text{Konst.} \cdot e^{\int \frac{W}{RT^2}\, dT}, \qquad (2)$$

in der ρ ebenfalls die Grenzdichte, W die Änderung der Gesamtenergie beim Austritt von einem Mol Elektronen aus dem Metall bedeutet, scheint ihre Bedeutung verloren zu haben.

Herr v. Laue war so freundlich, mir das Manuskript seiner Arbeit über Glühelektronen bereits im August vorigen Jahres zuzuschicken. Ich habe infolgedessen Gelegenheit gehabt, mich in die Laueschen Überlegungen zu vertiefen und es ist mir, wenn auch mit einiger Mühe, gelungen, mich in diesen thermodynamischen Fragen zu neuer Klarheit durchzuringen. Das Überraschende ist nun, daß sich diese neue Klarheit von der alten in allen wesentlichen Punkten nicht unterscheidet; die neue Elektronendampfdruckformel von Herrn v. Laue ist nur formal von der Clausius-Clapeyronschen Gleichung und der Wilsonschen Formel verschieden. Gleichzeitig läßt sich zeigen, daß die unter 2. angegebenen Einschränkungen der Gl. (1) fortfallen, und endlich ist durch das Resultat von Herrn v. Laue neuerdings die frühere Methode gerechtfertigt, welche die Elektronen im Gleichgewicht mit festen Körpern als ideales Gas betrachtet hat.

Alle diese Dinge erfordern zu ihrer völligen Klarlegung eine ausführlichere Darstellung, die

1) M. v. Laue, Glühelektronen, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 15, 205—256, 1918; Die Entropiekonstante der Glühelektronen, ebenda S. 257—270; Die Rolle der Bildkraft in der Thermodynamik der Glühelektronen. (Erscheint demnächst.)

vermutlich noch einige Zeit in Anspruch nehmen wird. Es soll dabei auch die allgemeine Bedeutung der neuen Form der Dampfdruckgleichung, wie sie sich bei den Elektronen-Betrachtungen von Herrn v. Laue ergeben hat, gewürdigt werden. An dieser Stelle möchte ich nichts anderes tun als den Beweis erbringen, daß die v. Lauesche Gleichung (1) mit der Wilsonschen Gleichung (2) und der Clausius-Clapeyronschen Gleichung identisch ist.

Aus Gl. (1) folgt durch Logarithmieren und Differenzieren:

$$\frac{d \ln \varrho}{dT} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{T} + \frac{1}{R} \frac{d}{dT}\left(\frac{\mu}{T}\right). \qquad (1')$$

Die Clausius-Clapeyronsche Gleichung lautet:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T(v-v')} \qquad (2)$$

wobei p den Druck, r die Verdampfungswärme pro Mol des gesättigten Dampfes bedeutet; v' ist das Volum, um das sich das Gesamtvolum des festen Körpers vermindert, während v das Volum von 1 Mol des Dampfes ist.

Wird v', wie es in vielen Fällen, insbesondere auch bei der Verdampfung von Elektronen, zulässig ist, als verschwindend klein gegen v angenommen, so besteht r aus der Änderung $\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n}$ der Gesamtenergie $\mathfrak{U}$, die eintritt, wenn 1 Mol verdampft (n Anzahl der dampfförmigen Mole), und aus der Gasarbeit, die bei der Vergrößerung des Gasvolumens geleistet wird. Für ideale Gase ist diese Arbeit $= RT$.

Gl. (2) geht dann über in:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} + RT}{Tv}. \qquad (2')$$

Wird nun noch

$$p = RT\varrho, \quad v = \frac{RT}{\varrho}$$

eingesetzt, so folgt aus (2')

$$\frac{d \ln \varrho}{dT} = \frac{\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n}}{RT^2} \qquad (3)$$

d. h. die Wilsonsche Gleichung, wenn $\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} = W$ gesetzt wird.

$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n}$ läßt sich nun wieder in 2 Teile zerlegen, nämlich zusammensetzen aus der Energiezunahme, die die gasförmige Phase bei der Verdampfung erfährt, und der Energieeinbuße, die der feste Körper erfährt. Wird die Energiekonstante der idealen Gase, auf $T = 0$ extrapoliert, $= 0$ gesetzt, so ist die Zunahme der Gasenergie pro Mol $= \frac{3}{2} RT$. Übrig bleibt die — negativ einzusetzende — Energieänderung der kondensierten Phase bei Zufuhr eines Moles des Dampfes. Bezeichnen wir die Energie der festen Phase mit $\mathfrak{u}'$, die Zahl der festen Mole mit n', so ist dieser Teil $= \frac{\partial \mathfrak{u}'}{\partial n'}$.

Wir haben also:

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} = \frac{3}{2} RT - \frac{\partial \mathfrak{u}'}{\partial n'}.$$

Dies in (3) eingesetzt, gibt:

$$\frac{d \ln \varrho}{dT} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{T} - \frac{\frac{\partial \mathfrak{u}'}{\partial n'}}{T^2}. \qquad (4)$$

Kehren wir nun zu Gl. (1') zurück. Dort ist μ die Änderung der freien Energie $\mathfrak{f}'$ des festen Körpers bei Zufuhr eines Moles der dampfförmigen Phase.

$$\mu = \frac{\partial \mathfrak{f}'}{\partial n'}.$$

Nun gilt für eine beliebige Arbeitskoordinate α, wie aus der Definitionsgleichung der Entropie eines beliebigen thermischen Systems durch Differenzieren folgt:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial \alpha}}{T}\right) = -\frac{\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \alpha}}{T^2}.$$

(F = freie Energie).

Angewendet auf das kondensierte System und auf die Teilchenzahl n', die sich bekanntlich auch als Arbeitskoordinate auffassen läßt, ergibt dies mit $\frac{\partial \mathfrak{f}'}{\partial n'} = \mu$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mu}{T}\right) = -\frac{\frac{\partial \mathfrak{u}'}{\partial n'}}{T^2}.$$

Wird nun schließlich noch, wie in der gewöhnlichen Dampfdrucktheorie, angenommen, daß $\frac{\partial \mathfrak{f}'}{\partial n'} = \mu$ durch die Temperatur allein gegeben ist, so ist zu setzen:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mu}{T}\right) = \frac{d}{dT}\left(\frac{\mu}{T}\right).$$

Folglich nach (5):

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{\mu}{T}\right) = -\frac{\frac{\partial \mathfrak{u}'}{\partial n'}}{T^2}.$$

Setzen wir nun endlich diese Gleichung in (1') ein, so ergibt sich:

$$\frac{d \ln \varrho}{dT} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{T} - \frac{1}{R} \frac{\frac{\partial u'}{dn'}}{T^2}.$$

Diese Gleichung ist aber mit (4) identisch, was zu beweisen war.

Siemensstadt, den 16. Dezember 1918.

(Eingegangen 18. Dezember 1918.)

Über die Ökonomie der röntgenspektroskopischen Methoden.

Von H. Seemann.

Bei der Spektralmethode Rutherfords für γ-Strahlen (Fig. 1) wird jeder vom Punkte A nach K gelangende Strahl im Kristall K reflektiert, sofern er eine Wellenlänge enthält, die unter seinem Einfallswinkel gegen die reflektierende (schraffierte) Strukturfläche reflexionsfähig ist. Wenn K in der Mitte zwischen A und dem Spalt S liegt, treffen alle in der Mittellinie von K reflektierten Strahlen, die in Fig. 1 ausgezogen gezeichnet sind, durch den

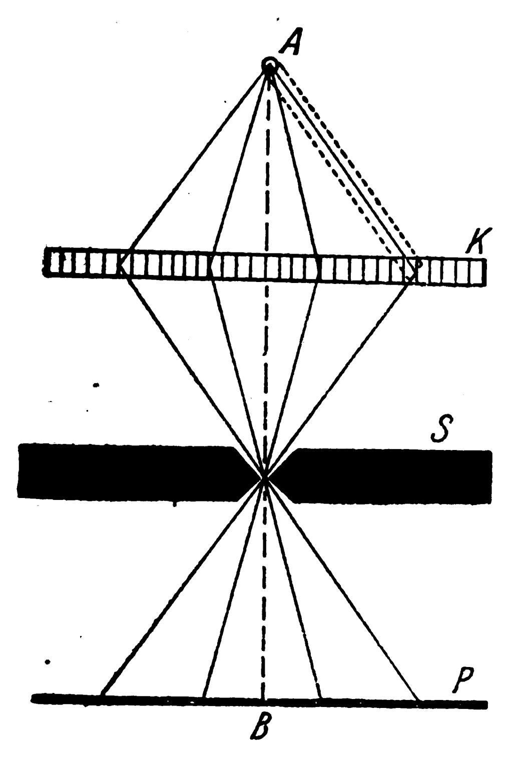


Fig. 1.

Spalt S hindurch auf die Platte P und entwerfen dort zwei spiegelbildliche Spektren, deren Nullpunkte in der Symmetrielinie bei B zusammenfallen.

Hat A endliche Ausdehnung, so treffen auch Strahlen durch S hindurch, die außerhalb der Mittellinie in K reflektiert sind (vgl. die gestrichelten Strahlen). Die Größe, die A bei gegebener Kristalldicke maximal haben kann, um noch alle von A ausgehenden Strahlen nach ihrer Reflexion in K durch S hindurchgelangen zn lassen, läßt sich für jeden Reflexionswinkel berechnen. Sie wächst mit der Kristalldicke und proportional der Spaltbreite.

Die Ökonomie der Methode, d. h. die Ausnutzung der von A ausgehenden Strahlung zum Entwerfen eines möglichst hellen und ausgedehnten Spektrums, wäre die denkbar beste, wenn die Absorption im Kristall nicht das mittlere und langwellige Spektralgebiet schwächte bzw. ganz unterdrückte. Bei Untersuchung von γ-Strahlen fällt dieser Nachteil jedoch so gut wie vollständig fort. Sie ist daher hierfür ideal, solange das Präparat klein genug ist, um kein zu großes direktes Projektionsbild durch K und S hindurch auf P zu entwerfen, das die kurzwelligen Enden der beiden Spektren überdecken könnte.

Letzterer Umstand ist es auch, der es verhindert, selbst mit sehr kleinen γ-Strahlpräparaten beliebig nahe an den Kristall und gleichzeitig mit diesem an den Spalt S heranzurücken, um aus Helligkeitsgründen möglichst nahe an die Platte P heranzukommen und um mit einem möglichst kleinen Kristall auskommen zu können. Das Projektionsbild von A auf P würde dadurch zu groß werden, ohne daß die Größe der Spektren mitwüchse.

Wollte man die Rutherfordsche Methode für Röntgenstrahlen benutzen, so müßte man mit Rücksicht auf letztgenannte Möglichkeit bei A einen Spalt aufstellen, um die zerstreute Strahlung von der näheren und weiteren Umgebung des Brennflecks und der übrigen Röntgenröhre abzuschirmen. Dadurch wird die Strahlenausnutzung der Antikathode aber außerordentlich herabgesetzt, bei einem Abstand von einigen Zentimetern zwischen Spalt und Brennfleck um mehrere Größenordnungen.

Nun ließen sich zwar leicht Röhren bauen, bei denen der Spalt A unmittelbar auf der Antikathode neben dem Brennfleck säße. Es könnte hierbei jedoch kaum verhindert werden, daß auch von den dem Brennfleck abgewandten Flächen der Spaltbacken wie auch von den Röhrenwänden Röntgenstrahlen ausgingen, die den Schutz der Spaltbacken unwirksam machten. Beides wäre vollkommen zu vermeiden, wenn man die Spaltbacken selbst zur Röhrenwand machte und den Spalt mittels dünner Leichtmetallfolien luftdicht abschlösse. Letztere lassen aber bei großer Nähe des Brennfleckes keine

höhere Strombelastung der Röhre zu und stören durch Absorption und Eigenstrahlung. Diese drei Momente gelten besonders von der Seitzschen Röntgenröhre[1]), bei der die Kathodenstrahlen direkt auf das Spaltfenster geworfen werden. Sie liefert, falls die Antikathodenfolie dick genug ist, um auch kräftige Bestrahlung zu vertragen, eine sehr homogene Strahlung, die scharf begrenzt ist von der Absorptions- und Emissionsgrenze des betr. Metalls, und eignet sich daher nur in seltenen Fällen zur Analyse. Immerhin gewährt sie weitaus die beste Anwendung der Rutherfordschen Methode.

Man sieht, daß die volle Ausnutzung der ökonomischen Vorteile der Rutherfordschen Methode für exakte vielseitige Spektraluntersuchungen technisch auf unüberwindliche Schwierigkeiten stößt. Dagegen ist es möglich, sie für die Zwecke der Analyse des härtesten Spektralgebietes mit der Lochkamerامethode[2]) so zu kombinieren, daß sie einen ihrer theoretischen Vorteile, nämlich nur ein sehr kleines Kristallstückchen zu benötigen, beibehält, wobei freilich ihr gleich eingangs gekennzeichnetes Grundprinzip, auf dem ihre Ökonomie beruht, verloren geht. Die Beschreibung der neuen Modifikation folgt in der nachstehenden Arbeit von W. Friedrich und H. Seemann.

Bei einem Vergleich der Ökonomie sämtlicher für genaue Spektralmessungen geeigneten Methoden sind folgende Fragen bezüglich des Zweckes der Untersuchungen zu berücksichtigen: 1. Soll die anzuwendende Methode nur der Ausmessung der Wellenlänge dienen (qualitative Analyse)? oder auch 2. der Messung der Intensitätsverteilung (quantitative Analyse). 3. Soll im Fall 2 nur mittelharte und weiche Strahlung oder 4. auch harte und härteste untersucht werden?

Zunächst gilt für alle Methoden gemeinsam, daß die Strahlenausnutzung vom Brennfleck praktisch fast genau umgekehrt dem Quadrate seines Abstandes vom Spalt oder der Schneide (Schneidenmethode[3])) wächst. (Bei der Rutherfordschen Methode ist hier der an Stelle von A [Fig. 1] zu setzende Spalt gemeint.) In dieser Beziehung haben die älteren Methoden einen Vorteil, bei denen der Spalt der Antikathode am nächsten sitzt, da die Schneiden- und Lochkameramethode sowie die in der folgenden Arbeit zu beschreibende Fenstermethode in 1—3 cm Entfernung vor dem Spalt oder der Schneide eine Hilfsblende erfordern, die die direkte Projektion des Brennflecks auf das Spektrum verhindert. Merklich ist dieser Vorteil aber erst dann, wenn die Antikathode sehr nahe an den Spalt herangerückt werden kann, was im allgemeinen nur bei Spezialröntgenröhren (geerdeten Metallröhren, Vakuumspektrographen) möglich ist. Bei einem Vergleich der Ökonomie der verschiedenen Methoden handelt es sich also im wesentlichen um die mehr oder weniger vorteilhafte Ausnutzung des vom Spalt oder der Schneide ausgeschnürten Bündels (für Fig. 1 Spalt A). Dies hängt einfach davon ab, ob das Bündel bei jeder Kristallage vom Kristall vor oder hinter dem Spalt voll aufgefangen wird oder nicht. Hierin bestehen bei den verschiedenen Methoden große Unterschiede, die durch den verschiedenen Abstand der Kristalle vom Spalt und durch ihre Größe bedingt sind.

Bei der Rutherfordschen Methode wird das von A ausgeblendete Bündel immer voll ausgenutzt, wenn der Kristall lang genug ist. Die erforderliche Minimallänge nimmt ab proportional der Annäherung von A zu S (Fig. 1) und der Tangente des größten gewünschten Reflexionswinkels. Sie braucht daher für das kurzwellige Spektralgebiet nur wenige Millimeter zu betragen.

Bei der Schneidenmethode ist die Ausnutzung in allen Fällen eine vollkommene, mag der Kristall auch noch so schmal sein.

Bei der Lochkameramethode ist die Ausbeute um so größer und der Kristall kann um so kleiner sein, je näher er am Spalt sitzt, je mehr die Methode sich also der Schneidenmethode nähert. Sie ist praktisch vollkommen, wenn die Annäherung etwa 1 mm beträgt bei 3 cm langem ruhenden Kristall. Letzterer vermag dann das ganze Spektrum bis 2^0 Reflexionswinkel hinab gleichzeitig zu entwerfen. Da der Brennfleck einer gewöhnlichen Röhre aber relativ zum Spektrographen (senkrecht zur Strahlen- und zur Spaltrichtung) hin und her bewegt werden muß, um diesen Spektralbereich zu bestreichen, so kann man auch mit einem bedeutend kürzeren Kristall auskommen, wenn man ihn während der Aufnahme senkrecht zu seiner Oberfläche (oder auch schief dazu) parallel verschiebt, und zwar im gleichen Tempo, aber in entgegengesetzter Richtung wie die Röhre sich gegen die Kristalloberfläche bewegt.

Fig. 2 zeigt die Wirkung dieser Verschiebung. Die reflektierende Oberfläche des Kristalls K ist dort in den drei Stellungen I, II, III gezeichnet. Stände sie in der Lage III fest, während der Brennfleck der Röntgenröhre etwa von einem Punkte rechts vom oberen Buchstaben B nach λ_3 bewegt würde, so würde der Reflexions-

1) W. Seitz, diese Zeitschr. 10, 820, 1909 u. Verh. d. D. Phys. Ges. 11, 505, 1909.
2) H. Seemann, diese Zeitschr. 18, 242, 1917.
3) H. Seemann, Ann. d. Phys. 49, 470, 1916.

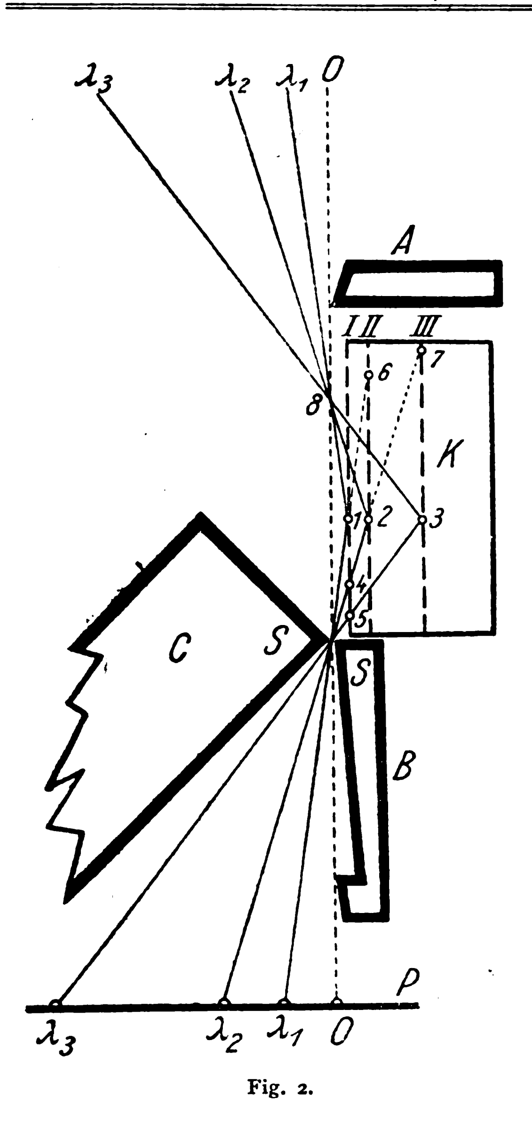


Fig. 2.

punkt der Wellenlänge λ_2 bei 7 liegen (wobei die Blende A fortzudenken ist) und der der Wellenlänge λ_3 bei 3. Die Wellenlänge λ_1 könnte nicht mehr reflektiert werden. Letzteres würde erst in der Stellung II bei 6 soeben erreicht werden. Noch kürzere Wellen könnten erst in der Stellung I und darüber hinaus reflektiert werden, wobei die längeren Wellen in 4 und 5 ihre Reflexionspunkte hätten.

Es ist demnach anzustreben, daß die Kristallfläche möglichst nahe an die Nullinie O herangerückt wird, falls man einen möglichst großen Wellenlängenbereich gleichzeitig, d. h. mit feststehendem Kristall, entwerfen will. In dieser Richtung ist jedoch oft dadurch eine Grenze gesetzt, daß die Kristallkante unter 5 durch das Spalten oder Schleifen immer etwas gelitten hat und zu exakter Reflexion nicht zu gebrauchen ist. Um längere Wellen gut zu reflektieren, darf daher ein gewisser Abstand der Kristallfläche von $O—O$ nicht unterschritten werden. Dadurch wird andererseits bedingt, daß K eine gewisse Minimallänge haben muß, um gleichzeitig auch kürzeste Wellen zu reflektieren.

Diese Forderung läßt sich in der oben angedeuteten Weise umgehen, indem K synchron mit dem Brennfleck in der Richtung $1 \leftrightarrows 3$ hin und her bewegt wird. Es läßt sich dabei (theoretisch) erreichen, daß der Reflexionspunkt aller Wellenlängen auf dieselbe Stelle 1, 2, 3 der bewegten Kristallfläche fällt, d. h. die Reflexionspunkte 1, 4, 5 der feststehenden Fläche I fallen bei geeigneter Bewegung auf die Punkte 1, 2, 3. Geht man von einer noch näher als I an O gelegenen Stellung aus, so fällt der gemeinsame Reflexionspunkt etwa in die Höhe von 4 oder 5.

Der Kristall kann demnach bei der gekennzeichneten Synchronbewegung nicht nur sehr klein sein, sondern kann auch nahe an SS sitzen. Dann kann die Blende A und somit auch die Röntgenröhre näher an SS herangebracht werden. A muß jedoch mindestens doppelt soweit von SS entfernt liegen als der Reflexionsfleck. Liegt letzterer bei 1, 2, 3, so darf A nicht näher als bei 8 liegen, da sonst die einfallenden zu reflektierenden Strahlen durch A abgeblendet werden.

Praktisch ließe es sich nur sehr schwer erreichen, daß der Reflexionspunkt bei Verschiebung von K genau an derselben Stelle der Kristallfläche stehen bliebe, da die Bogenbewegung, die der Brennfleck um SS (durch Drehung des Spektrographen um SS als Achse) beschreibt, keine lineare Funktion der Kristallverschiebung ist. Ein genaues Stehenbleiben des Reflexionsfleckes wäre aber auch gar nicht erwünscht. Vielmehr wird man die Verschiebung derart verringern, daß der Reflexionsfleck, der bei einem Brennfleck von endlicher Ausdehnung entsprechende Größen besitzt, etwas auf der Kristallfläche wandert, damit die Wirkung der Kristallfehler ausgeglichen wird.

Bei der Braggschen Methode (Fig. 3) mit und ohne Drehung des Kristalls fängt der Kristall das Bündel um so sicherer vollständig auf, je mehr er gegen die Strahlenrichtung geneigt steht (Kristallstellung K_1) und je spitzwinkliger das vom Brennfleck der Antikathode A einfallende Bündel ist. Um das härteste Spektralgebiet unbeeinträchtigt durch die direkte Projektion des Brennfleckes auf die Platte P zu entwerfen, ist ein spitzwinkliges Bündel nicht erforderlich, sofern man darauf verzichtet, das Spektrum nach zwei Seiten auf P zu entwerfen. Man läßt das Bündel etwas schief in SS einfallen und blendet durch die Hilfsblende B alle direkt auf das Spektrum gelangenden Strahlen ab.

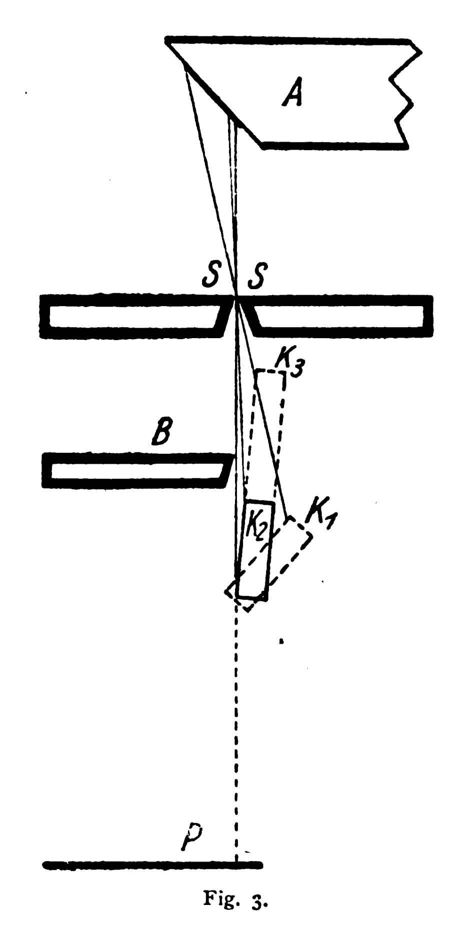


Fig. 3.

Man sieht aber, daß in einer Stellung K_2 des Kristalls, in der die kürzesten Wellenlängen reflektiert werden, nur dann das ganze Bündel voll aufgefangen wird, wenn der Kristall bis nahe an S heranreicht (K_3). Kristalle von solcher Länge ohne einseitige Krümmung und Fehler sind praktisch nicht vorhanden, da eigentlich nur Steinsalz auch wegen seiner hohen, aber trotzdem kaum ausreichenden Auflösung in Frage kommt. Ein schon recht großer fehlerfreier Kristall von 4 cm Länge fängt bei 3^0 Neigungswinkel von einem praktisch vorkommenden Bündel eines mittelgroßen Brennflecks in der Stellung der Fig. 3 nur einen kleinen Teil auf, der sich immer mehr vergrößert, je weiter er in die Lage K_1 gedreht wird. Zum Entwerfen des langwelligen Spektrums wird dagegen das ganze Bündel herangezogen. Es wird daher relativ heller als das härteste Spektralgebiet.

Die Braggsche fokussierende Drehmethode gibt demnach ein Bild der Helligkeitsverteilung im Spektrum, das unter Berücksichtigung der Kristallänge um so stärker korrigiert werden müßte, je weiter das einfallende Bündel geöffnet ist. Diese Korrektur stößt auf erhebliche Schwierigkeiten insofern, als die Helligkeits- und auch die spektrale Verteilung im Bündel selbst, d. h. im Brennfleck, ein unbekannter und zeitlich wechselnder Faktor ist. Man könnte ihn eliminieren, indem man die Röhre hin und her bewegt, wobei das Bündel durch eine zweite Hilfsblende gegenüber B, also einen zweiten weiteren Spalt bei B, begrenzt wird. Dadurch würde das Bündel bei einer Aufnahme von genügender Dauer (gegenüber der Drehperiode) gleichförmig dicht und spektral gleichförmig wirken.

Eine solche Drehbewegung bedeutet indessen eine erhebliche experimentelle Erschwerung. Meist wird es einfacher sein, das Bündel durch Neigen der Antikathode bzw. der strahlenden Fläche linienförmig schmal zu machen. Bei strahlenden Flächen mit rauher Oberfläche sind damit jedoch Helligkeitsverluste und Absorptionserscheinungen auf der Antikathode selbst verbunden. Außerdem fällt durch die Benutzung eines linienförmigen Bündels das Hauptcharakteristikum der Braggschen Drehmethode fort, das Fokussieren gleicher Wellenlängen eines beliebig weit geöffneten Bündels auf gleiche Punkte. Man erhält dann vielmehr die Drehmethode von Herweg[1]), bei der Spalt und Platte nicht gleich weit von der Drehachse des Kristalls entfernt zu sein brauchen. Man kann daher sagen, daß die fokussierende Drehmethode für quantitative Spektralanalyse im kurzwelligen Spektrum bei Benutzung der Fläche (001) von Steinsalz praktisch kaum brauchbar ist.

Die gleiche Störung wie die eben gekennzeichnete ist auch bei der Rutherfordschen Methode für Röntgenstrahlen zu berücksichtigen und zwar in noch höherem Maße, da bei der Drehmethode durch die Drehung des Kristalls bis zu einem gewissen Grade ein Ausgleich der Ungleichförmigkeit des Brennflecks erfolgt. Bei der erstgenannten Methode und auch bei der zweitgenannten, falls man den Kristall nicht dreht, ist die Helligkeitsverteilung im Spektrum vollkommen überlagert von der Helligkeits- und Härteverteilung im Brennfleck. Das Spektralbild ist in seinen Umrissen ein genaues, wenn auch nicht homozentrisches Projektionsbild des Brennflecks. Nur reichliche Hin- und Herbewegung der Röhre vor dem Spektrographen kann diesen Fehler beheben. Eine solche Bewegung ist praktisch sowieso notwendig, um einen größeren Spektralbereich zu entwerfen. Dadurch fällt ein weiterer Vorteil der ursprünglichen Rutherfordschen Methode fort. Bei der im folgenden beschriebenen Modifikation, die als eine Vereinigung der Lochkamera und der

1) J. Herweg, Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 555, 1913 u. 16, 73, 1914.

Rutherfordschen Methode aufgefaßt werden kann, bestehen dafür andere Vorzüge, die praktisch wichtig sind.

Würzburg, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 4. November 1918.)

Eine neue röntgenspektroskopische Methode.

Von W. Friedrich u. H. Seemann.

Das Wesen der neuen Methode, die hauptsächlich für die spektrale Untersuchung harter Strahlen gedacht ist, besteht darin, daß man auf das eine der beiden spiegelbildlichen Spektren, die von der in vorstehender Arbeit (Fig. 1) von Seemann beschriebene Modifikation, der Rutherfordschen Methode verzichtet. Dann fällt eine der Spaltbacken von A fort und der Kristall reflektiert nicht nur aus einer durch die Breite von A gegebenen Schichtdicke (vgl. die gestrichelten Strahlen in Fig. 1 der Seemannschen Arbeit), sondern aus seiner Gesamttiefe (vgl. Fig. 1 vorl. Arbeit.)

Die Tiefe, aus der heraus noch merkliche Strahlung in Fig. 1 auf die Platte gelangt, ist für sehr harte Strahlen schon bei Steinsalz ganz beträchtlich. Es wird für jede Wellenlänge ein Optimum der Kristalldicke bestehen, bei dem die einfallende Strahlung für die Reflexion am besten ausgenützt wird. Bei weichen Strahlen, z. B. die *Pt-L*-Linien würde die optimale Dicke nur einen kleinen Bruchteil eines Millimeters betragen, während sie bei den *Pt-K*-Linien bereits mehrere Millimeter ausmachte. Bei gegebener Dicke müßte für quantitative Spektraluntersuchungen eine Korrektion eingeführt werden im Vergleich zu den Resultaten der Methoden mit Oberflächenreflexion, abgesehen davon, daß absolut quantitativ-energetische Messungen auch mit diesen Methoden nicht ohne weiteres erreicht werden können. Der verschieden große Reflexionskoeffizient einer Netzebene für verschiedene Wellenlängen, die auch hier vorhandene Absorption in der für verschiedene Wellenlängen verschieden dicken wirksamen Kristallschicht bedingt gleichfalls Korrektionen, für die z. Z. noch die experimentellen und theoretischen Grundlagen fehlen[1]).

Ein weiterer Vorteil gegenüber der Braggschen und der Schneiden-Methode ist der, daß die Anordnung des Kristalls vor dem Spalt S die Breite der Linien, unabhängig von der Kristalldicke bzw. der Eindringungstiefe macht, wie

1) P. P. Ewald, Ann. d. Phys. **54**, 519, 1917.

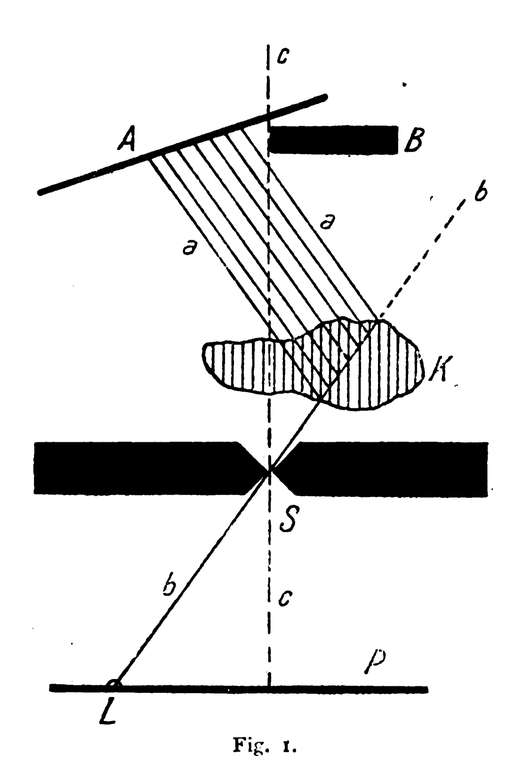


Fig. 1.

das auch bei der Rutherfordschen und der Lochkamera-Methode der Fall ist.

Fig. 1 zeigt das Prinzip. Es gelangen von der gesamten von der Strahlenquelle A ausgehenden Strahlung nur die von der gekennzeichneten Strukturfläche des Kristalls K unter einem bestimmten Winkel reflektierten Strahlen aa nach ihrer Reflexion durch den Spalt S hindurch und treffen die photographische Platte P in L. Der geometrische Ort aller derjenigen Reflexionspunkte derselben Wellenlänge und gleicher Ordnungszahl im ganzen Kristall, die durch S hindurch gelangen, ist also die Gerade b. Die anderen im ganzen Kristall an derselben Strukturfläche unter gleichen Winkeln reflektierten Strahlen derselben Wellenlänge und gleicher Ordnungszahl werden von den Spaltbacken abgefangen. Für andere Wellenlängen und Ordnungszahlen ist eine andere durch S hindurchgehende Gerade der geometrische Ort der wirksamen Reflexionspunkte.

Man sieht, daß der Kristall beliebige äußere Form haben kann, sofern er nur aus Gründen der Absorption nicht zu dick ist, und daß die Strahlenquelle beliebig breit sein kann. Für letztere gilt indessen die wichtige Beschränkung, daß sie nicht über die Nullinie c des Spektrums hinausreichen darf. c liegt in derjenigen Netzebene, in deren Verlängerung S liegt. Alle über c nach rechts hinausreichenden Punkte von A würden sich auf P innerhalb des Spektrums

projizieren und dieses überdecken, falls es bis nahe an c heranreicht. Da es technisch nicht möglich ist, einen scharf begrenzten Antikathodenbrennfleck herzustellen, über den hinaus die Strahlung vollkommen Null wird, so muß die scharfe Begrenzung der Linie c durch eine zwischen A und K aufgestellte Blende B erfolgen.

Technische Ausführung.

Beim Arbeiten mit sehr harten Strahlen, für die die beschriebene Methode hauptsächlich gedacht ist, sind verschiedene Vorsichtsmaßregeln zu beachten, die bei weniger harten Strahlen nicht berücksichtigt zu werden brauchen, erstens zur Schwächung der Durchlässigkeit der äußersten Schneide in merklicher Tiefe und zweitens zur Vermeidung der Sekundärstrahlung der Blenden und Schneidenflächen. Letzteres ist deswegen bei sehr harter Strahlung wichtig, weil erst solche die Eigenstrahlung der Schwermetalle, aus denen die Blenden und die Schneiden bestehen (*Pb*, *W*, *Au*, *Pt*), kräftig erregen und sehr störende Verschleierung der photographischen Platten besonders dann hervorrufen, wenn man der höheren Auflösung wegen mit schwächer reflektierenden Strukturflächen arbeitet, z. B. mit der (012)-Fläche des Steinsalzes, deren Auflösung ca. $2^1/_4$-mal größer ist als die der (001)-Fläche.

Die Durchlässigkeit selbst von stumpfwinkligen Schneiden aus *W* und *Pb* hat sich als so erheblich erwiesen, daß bei einer Spaltweite etwa unter $^1/_3$ mm schon ein merklicher Teil der kürzesten Strahlung durch die Schneiden hindurchgeht und das Absorptionsspektrum des Schneidenmetalls ist dem ungefilterten Spektrum derart überlagert, daß von richtiger Wiedergabe der Intensitätsverteilung im Spektrum keine Rede mehr sein kann[1]). Um diesen Übelstand wirksam zu beheben, muß der Schneidenwinkel nahe an 180^0 gebracht werden oder doch wenigstens eine der beiden Schneidenflächen so aufgestellt werden, daß die härtesten reflektierten Strahlen sie fast streifend treffen bzw. durchstrahlen.

Wie Fig. 2 zeigt, wächst die Dicke CD der zu durchdringenden Metallschicht der dort gezeichneten Schneide S für einen Strahl f in gegebener Tiefe SC proportional dem ctg des Neigungswinkels γ, also sehr schnell bei sehr kleinen Werten von γ. Es ist daher viel vorteilhafter, selbst eine spitzwinklige Schneide so aufzustellen, daß eine der beiden Schneidenflächen der Strahlenrichtung fast gleich kommt, als eine mäßig stumpfwinklige Schneide, wie etwa

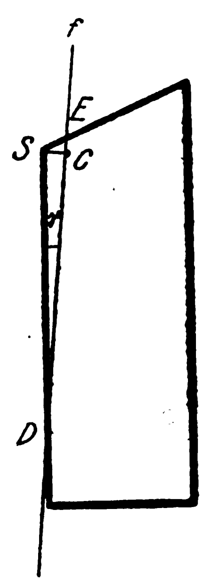


Fig. 2.

die in Fig. 2, symmetrisch in den Strahlengang zu bringen, d. h. so, daß $SE = SD$, denn dann wäre ED nur ein Bruchteil von CD der Fig. 2.

Aus Fig. 3 ist ersichtlich, wie weit dieses Prinzip sich bei der beschriebenen Methode verwirklichen läßt. Gleichzeitig zeigt sie auch deren praktische Ausführung und die Gestaltung der Hilfsblenden zur Vermeidung der Innenbestrahlung der Spaltflächen. Der in der Figur gewählte Winkelbereich, der maximal entworfen werden kann, ist der Deutlichkeit halber weit größer gewählt als für die Untersuchung härtester Strahlung erforderlich wäre. 10^0 würde genügen. Auch der Abstand des Kristalls K vom Hauptspalt S ist aus demselben Grunde relativ größer gezeichnet als in der praktischen Ausführung, wo er wenige Millimeter beträgt.

A ist der Grundriß der festen, B der der beweglichen Spaltbacke. S und M sind ihre Schneiden. Die Verschiebung von B gegen A kann parallel mittels Schlitten erfolgen, oder auch durch Drehung um eine senkrecht zur Zeichenebene etwa bei H liegende Achse. Die Ausblendung der einfallenden Strahlen in der Längsrichtung des Spaltes durch parallel zur Zeichenebene liegende Hilfsblenden ist derart zu denken, daß A und B nur so hoch sind wie es maximal erforderlich ist, d. i. etwa 5 mm, und oben und unten mit dicken Bleiplatten bedeckt sind, die mit von A nach B verlaufenden Nuten entsprechende Falze von A und B umgreifen, um zu verhindern, daß zwischen den Berührungsflächen Strahlen hindurchgelangen können. Die Kanten E, S, M, W sowie K sitzen an den Falzen und ragen in die Nuten hinein.

1) Lilienfeld, diese Zeitschr. 19, 514, 1918.

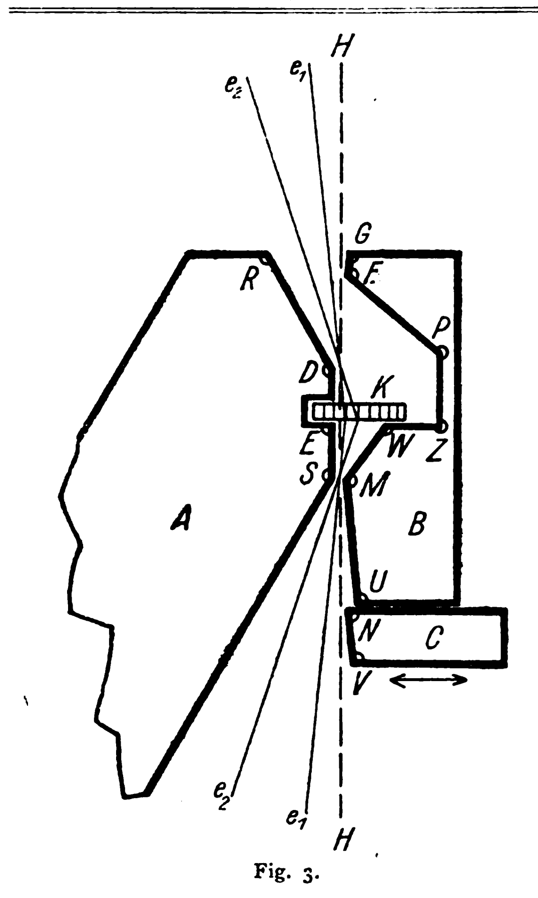


Fig. 3.

Durch den Spalt SM kann nur das an F und N vorbeigelassene schmale Strahlenbündel H direkt von der Antikathode auf die Platte gelangen. Es dient hauptsächlich zur Einstellung der Nullage des Spektrographen gegen die Röhre, indem der um die Achse S drehbare Apparat solange geschwenkt wird, bis ein etwa bei H (unten) aufgestellter Leuchtschirm aufleuchtet.

Die drei Kanten F, M, N können in einer Ebene liegen. Will man aber mit weitem Spalt arbeiten, ohne daß gleichzeitig in der Nullstellung ein breites Bündel zwischen FMN einerseits und S andererseits hindurchgelangt, so kann man C nach links verschieben, bis wenig oder gar keine Strahlen mehr direkt hindurch können. Dadurch wird die Verschleierung der Platte durch Sekundärstrahlen und durch Überstrahlung von der direkt getroffenen Platte wesentlich herabgesetzt.

Um zu verhindern, daß die Fläche MU von Strahlen getroffen wird, muß sie etwas gegen die Richtung H geneigt sein. Sie wird auch dann nicht getroffen, wenn die Strahlen aus der Richtung e_1 und e_2 einfallen, da die Kante D dies verhindert. Andererseits stört D die zu reflektierenden Strahlen solange nicht, als sie von E nicht weiter entfernt ist als von S, wie eine einfache Überlegung zeigt.

Dadurch, daß die Metallfläche SD parallel H liegt, wird erreicht, daß gerade die härtesten reflektierten Strahlen zwischen e_1 und H fast streifend über ES an S vorbeigelangen, also eine große Strecke im Metall zurücklegen müßten, um S in merklicher Tiefe zu durchstrahlen (vgl. oben).

Die Flächen FP, MW und ZP sind so geneigt und angeordnet, daß sie entweder von direkter Strahlung nicht getroffen werden (FP) oder daß ihre Sekundärstrahlen nicht durch SM hindurch auf die Platte gelangen können.

Unvermeidlich ist nur, daß die Fläche UM unmittelbar bei M geringe Sekundärstrahlung aus ihrem Innern in der Richtung e_1 und e_2 auf die Platte gelangen läßt, solange die Strahlenquelle sich innerhalb des sehr kleinen Winkels FMD befindet.

Die Kante D ist kein notwendiger Bestandteil der für die beschriebene Methode geeigneten Anordnung. Sie kann ohne weiteres fehlen. Der Block A kann z. B. in der Ebene ZWE abgeschnitten werden, ohne daß das Zustandekommen des Spektrums irgendwie verändert wird. Sie dient vielmehr lediglich dazu, die Fläche SE, die ja in der praktischen Ausführung, wie oben erwähnt, nur 1—2 mm lang ist, um mit einem möglichst kleinen Kristallstückchen auszukommen, noch um eine Kleinigkeit zu verlängern, dadurch undurchlässiger zu machen und das einfallende Gesamtstrahlenbündel zur Vermeidung überflüssiger Sekundärstrahlung auf das Mindestmaß zu beschränken. Außerdem ist das genaue Anschleifen der Fläche SE bedeutend leichter auszuführen, wenn die Schliffläche bis D reicht, also rund doppelt so lang ist.

Falls die Methode nur zur Untersuchung härterer Strahlen etwa von der Silberbandkante bis in die Nähe der *Pt-K*-Serie benutzt werden soll, könnte der Kristall bis unmittelbar an SM herangebracht werden, so daß E mit S und W mit M zusammenfallen, die Schneiden also spitzwinklig werden. Dann käme man mit einem Kristall aus, der wenig breiter als der Spalt zu sein brauchte, also z. B. auch mit Kristallnadeln. Zur Untersuchung des Kristallbaues, bei der es ja nicht auf große Härte der Strahlung ankommt, ist die Methode daher recht brauchbar, wenn sie auch technisch die Einfachheit der Schneidenmethode, die gleichfalls nur eines Kristallsplitterchens bedarf, nicht ganz erreicht, statt dessen aber Spektren liefert, deren Linienschärfe von der Durchlässigkeit der Kristalle unabhängig sind; ein Vorzug, der bei organischen Salzen schon eine erhebliche Rolle spielt[1]).

1) Vgl. Seemann, diese Zeitschr. **18**, 242, 1917.

Die neue Methode kann als eine Kombination der in der vorhergehenden Arbeit von Seemann beschriebenen Modifikation der Rutherfordschen mit der Lochkamera-Methode aufgefaßt werden. Die Ähnlichkeit mit letzterer tritt besonders dann hervor, wenn der Kristall dort während der Aufnahme senkrecht zu seiner reflektierenden Oberfläche parallel verschoben wird, um die Ungleichmäßigkeiten des Kristalls auszugleichen (vgl. Fig. 2 der vorstehenden Arbeit von Seemann). Dann ersetzt die Oberfläche sukzessive alle die in den Fig. 1 und 3 vorliegender Arbeit sowie Fig. 1 der genannten Seemannschen Arbeit durch Schraffierung angedeuteten Netzebenen des Kristalls. Der Unterschied der Reflexion in beiden Fällen ist nur der, daß die reflektierende Strukturschicht bei der Lochkameramethode nach der Seite der einfallenden und reflektierten Strahlen zu frei liegt, während sie bei der Methode Rutherfords und der hier beschriebenen im Innern des Kristalls liegt, so daß die einfallenden und reflektierten Strahlen durch Absorption geschwächt werden, wenn die Dicke der Kristallplatte ein Optimum überschreitet, das für harte Strahlen unverhältnismäßig größer ist als für weiche.

Der praktisch wichtigste Vorteil der neuen Methode, die wir Fenstermethode nennen möchten, besteht gegenüber der in anderer Beziehung überlegenen Lochkameramethode darin, daß nur ein sehr kleiner Kristall erforderlich ist, der sich außerordentlich viel leichter finden und aussuchen läßt als ein so großer, wie er für die letztgenannte Methode gerade für härteste Strahlung verwendet werden muß. Vor allem stört die langwellige einseitige Krümmung, die fast jedes größere Steinsalzstück auch bei sonst außerordentlicher Güte besitzt, nicht, da die reflektierende Schicht einen so kleinen Teil des Krümmungsbogens ausmacht, daß sie praktisch als ebenflächig gebaut betrachtet werden kann.

Die kleinen Strukturunregelmäßigkeiten können, wie bei allen anderen Methoden, auch hier durch Parallelverschiebung des Kristalls während der Aufnahme ausgeglichen werden oder auch durch eine beliebige Verrückung in Richtung der reflektierenden Strukturfläche, z. B. eine Drehung um eine senkrecht zur Strukturfläche stehende Achse.

Freiburg i. Br., Radiolog. Institut der Universitäts-Frauenklinik.

Würzburg, Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 4. November 1918.)

Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

XI.

Rasch veränderliche Felder.

1. Der Grund, aus welchem die Ableitung der Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in den Abhandlungen II[1]) und III[2]) nur annäherungsweise gültig ist und die Ableitung ihre Gültigkeit verlieren kann, wenn den sichtbaren Geschwindigkeiten

$$u_0,\ v_0,\ w_0$$

sehr große Werte oder sehr große Ableitungen nach der Zeit zukommen, liegt darin, daß wir bei jener Ableitung für die Zerlegung der Geschwindigkeiten

$$\left.\begin{aligned}\mu u&=\mu_0\left\{u_0+u_1\cos\frac{t}{T}2\pi+u_2\sin\frac{t}{T}2\pi\right\},\\ \mu v&=\mu_0\left\{v_0+v_1\cos\frac{t}{T}2\pi+v_2\sin\frac{t}{T}2\pi\right\},\\ \mu w&=\mu_0\left\{w_0+w_1\cos\frac{t}{T}2\pi+w_2\sin\frac{t}{T}2\pi\right\},\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

verlangen mußten, daß die Produkte der Schwingungsdauer T mit den ersten und auch mit den zweiten[3]) Ableitungen der Größen

$$u_0,\ v_0,\ w_0;\ u_1,\ v_1,\ w_1;\ u_2,\ v_2,\ w_2$$

nach der Zeit t vernachlässigt werden dürfen; mit Rücksicht darauf, daß wir T als eine ganz außerordentlich kleine Schwingungsdauer annehmen, noch außerordentlich klein gegen alle uns bisher in der Physik bekannten Schwingungsdauern, können wir indessen die Ableitung der Gleichungen des elektromagnetischen Feldes auch dann noch als in erster Annäherung geltend annehmen, in denen die sichtbaren Geschwindigkeiten (wie z. B. bei den Kathodenstrahlen, α, β, γ Strahlen) zwar noch wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit bleiben, aber bereits in die Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit kommen. Ebenso auch, wenn die Funktionen

$$u_1,\ v_1,\ w_1;\ u_2,\ v_2,\ w_2$$

von der Form werden:

$$\left.\begin{aligned}u_1&=\sum_j\left\{a_{j1}(x,y,z)\cos\frac{t}{\tau_j}2\pi+\right.\\ &\left.+a_{j2}(x,y,z)\sin\frac{t}{\tau_j}2\pi\right\},\ldots,\\ u_2&=\sum_j\left\{a_{j1}(x,y,z)\cos\frac{t}{\tau_j}2\pi+\right.\\ &\left.+a_{j2}(x,y\,z)\sin\frac{t}{\tau_j}2\pi\right\},\ldots,\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

---

1) Diese Zeitschr. 18, 341, 1917.
2) Diese Zeitschr. 18, 504, 1917.
3) Diese Zeitschr. 18, 343, 1917.

wobei die τ kleine Schwingungsdauern sind, die aber im Verhältnis zu T noch außerordentlich groß sein sollen. Je nach der Größenordnung der τ_j werden wir von Hertzschen Schwingungen, von Schwingungen der Reststrahlen, der ultraroten Strahlen, der Lichtstrahlen, der ultravioletten Strahlen, der Röntgenstrahlen sprechen; auch in allen solchen Fällen werden noch in erster Annäherung die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial w_2}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}&=\frac{1}{c}\left\{\frac{\overline{d}u_1}{dt}-\frac{\partial u_0}{\partial x}u_1-\right.\\
&\left.-\frac{\partial u_0}{\partial y}v_1-\frac{\partial u_0}{\partial z}w_1\right\}+\frac{1}{c}u_0\Theta_1,\ldots,\\
\frac{\partial w_1}{\partial y}-\frac{\partial v_1}{\partial z}&=-\frac{1}{c}\left\{\frac{\overline{d}u_2}{dt}-\frac{\partial u_0}{\partial x}u_2-\right.\\
&\left.-\frac{\partial u_0}{\partial y}v_2-\frac{\partial u_0}{\partial z}w_2\right\},\ldots,\\
\frac{\overline{d}\Theta_1}{dt}&=0,\\
\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}&=0.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

bestehen; die Theorie der Hertzschen Schwingungen, sowie die allgemeine Optik lassen sich in dem Sinne der Maxwellschen elektromagnetischen Theorie darstellen; nur ist jeder Begriff, jede Erscheinung mechanisch erklärt.

2. Die magnetooptischen Erscheinungen, vor allem die Erklärung der elektromagnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes, hatten für die elektromagnetische Theorie eine gewisse Schwierigkeit, und bereits Maxwell hatte daran gedacht, eine Erklärung darin zu suchen, daß magnetische Teilchen als rotierende Teilchen gedacht werden sollen, ohne irgendwelche plausible Gründe für diese neue Hypothese beizubringen. In diesen mechanischen Theorien ergibt sich von selbst, daß rasch rotierende Teilchen infolge der universellen Pulsation zu magnetischen Teilchen werden[1]), und hierauf läßt sich dann eine konsequente Theorie der magnetooptischen Erscheinungen aufstellen, nicht nur der elektromagnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes, sondern auch des Zeemanschen Phänomens und des Kerrschen elektromagnetischen Phänomens. Die Theorie dieser magnetooptischen Erscheinungen habe ich früher, zusammen mit K. Stöckl, ausführlich unter Zugrundelegung meiner mechanischen Vorstellungen behandelt, und ich brauche hier nur darauf hinzuweisen[1]).

1) Vgl. Abhandlg. VI, diese Zeitschr. 19, 12, 1918.

3. Eine der größten Schwierigkeiten der elektromagnetischen Theorien, zu deren Überwindung die Relativitätstheorie die rettende Hand bot, liegt in dem merkwürdigen Gegensatze des Fizeauschen Versuchs über die Fortführung des Lichtes durch fließendes Wasser und des Michelsonschen Versuchs über die Lichterscheinungen auf der bewegten Erde; diese Schwierigkeit löst sich in der mechanischen Theorie in folgender Weise:

Zur Erklärung des Fizeauschen Versuchs handelt es sich im wesentlichen darum, nachzuweisen, daß der Lichtäther in einem bewegten Dielektrikum nicht die sichtbaren Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 des Dielektrikums hat, sondern ruht, während nur die eingebetteten leitenden Teilchen, durch welche der Äther zum Dielektrikum wird, die sichtbare Bewegung vollführen. An ein wirkliches Ruhen des Äthers ist natürlich in der mechanischen Theorie nicht zu denken, indessen werden, wenn wir die Radien der leitenden, fortbewegten Teilchen außerordentlich klein annehmen, die durch die Bewegungen der Teilchen im Äther hervorgerufenen sichtbaren Geschwindigkeiten bereits in sehr kleinen Abständen von den Teilchen verschwindend klein sein, von der Ordnung einer Potenz der Größe

Radius der Teilchen/Zentraldistanz von den Teilchen.

Hierzu braucht man durchaus nicht anzunehmen, daß der Äther mit Bezug auf solche sichtbare Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 völlig inkompressibel sei, wie wir es in großer Annäherung mit Bezug auf die raschen, die elektromagnetischen Erscheinungen bedingenden Schwingungen vorauszusetzen haben; es folgt das gleiche, auch wenn wir mit Bezug auf die sichtbaren Geschwindigkeiten eine gewisse Kompressibilität des Äthers zulassen.

Bei dem Michelsonschen Versuche über die Lichterscheinungen auf der bewegten Erde ist zu erklären, daß der Äther auf der bewegten Erde die sichtbaren Geschwindigkeiten der Erde besitzt. Dies steht nur in einem scheinbaren Gegensatze zu der vorher erwähnten Erklärung des Fizeauschen Versuchs: Denken wir uns in einem schwach kompressiblen[2])

1) A. Korn u. K. Stöckl, Studien zur Theorie der Lichterscheinungen.
a) Das Zeemansche Phänomen. Ann. d. Phys. (4) 8, 312, 1902.
b) Die Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde. Ebd. (4) 9, 1138, 1902.
c) Das Kerrsche Phänomen. Ebd. (4) 12, 875, 1903.

2) Schwach kompressibel in bezug auf die sichtbaren Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0.

Medium eine Anzahl von starren Teilchen, welche sich alle mit der gleichen Geschwindigkeit in derselben Richtung bewegen, so wird die für die Erklärung des Fizeauschen Versuchs zugrunde zu legende Erscheinung nur eintreten, solange die Anzahl der bewegten Teilchen unterhalb einer gewissen Grenze bleibt; je größer aber die Zahl der bewegten Teilchen wird, um so schlechter wird nach der Überschreitung der Grenze die zunächst gefundene Annäherung werden, und es wird mehr und mehr eine Mitnahme des umgebenden Mediums die Folge sein. Auf der bewegten Erde werden wir eine Mitnahme des Zwischenmediums anzunehmen haben; die sichtbaren Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 werden aber mit der Entfernung von der Erde rasch zu Null abnehmen.

Der der Stokesschen Aberrationstheorie gemachte Vorwurf beruht im wesentlichen darauf, daß nach dieser Theorie anzunehmen wäre, daß u_0, v_0, w_0 nach den Gesetzen der Bewegung starrer Körper in einer inkompressiblen Flüssigkeit mit der Entfernung von der Erde abnehmen müßten; er ist hier nicht von Bedeutung, da wir eben in unserer mechanischen Theorie gar nicht völlige Inkompressibilität des Äthers für die sichtbaren Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 postulieren, sondern nur für die raschen Schwingungsbewegungen von der kleinen Schwingungsdauer T.

Prinzipielle Schwierigkeiten für die Erklärung der Aberration, des Michelsonschen und des Fizeauschen Versuchs bestehen also für die mechanische Theorie nicht.

4. Es erhebt sich die Frage: Wird die Behandlung der ponderomotorischen Wirkungen, wie wir sie in Abhandlung IV[1]) und V[2]) betrachtet haben, in rasch veränderlichen Feldern eine Modifikation erleiden? Die Ableitung der wesentlichen Formeln für die ponderomotorischen Kräfte X_0, Y_0, Z_0, welche in einem elektromagnetischen Felde auf einen den Raum τ erfüllenden Leiter wirken:

$$\left.\begin{aligned} X_0 = \frac{1}{2}\mu_0 \int_\tau \Big\{ u_1 \theta_0 - \Big[v_1\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\Big) - \\ w_1\Big(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\Big)\Big]\Big\} d\tau \\ - \frac{1}{2}\mu_0 \int_\tau \Big[v_2\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\Big) - \\ - w_2\Big(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x}\Big)\Big] d\tau, \ldots \end{aligned}\right| \quad (4)$$

sind unter der Voraussetzung abgeleitet worden, daß die schwingenden Geschwindigkeiten

$$\hat{u} = u_1 \cos\frac{t}{T} 2\pi + u_2 \sin\frac{t}{T} 2\pi, \ldots \quad (5)$$

im Äther wirbellos sind:

$$\hat{u} = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x}, \quad \hat{v} = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y}, \quad \hat{w} = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z}; \quad (6)$$

mit Rücksicht darauf aber, daß wir die Voraussetzung des universellen Dralles zugrunde legen:

$$\left.\begin{aligned} u = u' + U', \ldots \\ U' = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - a\Big(\frac{\partial W'}{\partial y} - \frac{\partial V'}{\partial z}\Big), \ldots \end{aligned}\right\} (7)$$

wo

$$\frac{\overline{du'}}{dt} = \frac{\overline{dv'}}{dt} = \frac{\overline{dw'}}{dt} = 0 \quad (8)$$

und a außerordentlich klein ist, bleibt die Ableitung in erster Annäherung auch für den Fall zeitlicher Veränderungen des elektrischen Feldes gültig, in welchen die Wirbellosigkeit des Äthers nicht bestehen kann.

Besonders interessante Probleme bietet die Betrachtung der ponderomotorischen Wechselwirkung zweier bewegter Elektronen; zu den Coulombschen Kräften werden weitere Näherungsglieder hinzutreten, welche von der Ordnung der Größen

$$\frac{v^2}{c^2}, \quad \frac{v'^2}{c^2}$$

klein sind, wenn c die Lichtgeschwindigkeit, v und v' die Geschwindigkeiten der bewegten Elektronen bezeichnen. Diese Näherungsglieder stimmen, wenn man hier die Rechnungen durchführt, obgleich sie mit allen erfahrungsmäßigen Folgerungen für die ponderomotorischen und elektromotorischen Erscheinungen im Einklang sind[1]), im allgemeinen nicht mit den Näherungsgliedern überein, welche sich nach den Theorien von Einstein und Minkowski ergeben; es ist aber auch zu bedenken, daß die Einsteinsche Relativitätshypothese für unser mechanisches System nicht mehr besteht, wenn man in so radikaler Weise, wie es in jenen Theorien verlangt wird, von der Mechanik des Äthers abstrahiert[2]).

5. Für die elektromotorischen Wirkungen in Leitern wird man natürlich bei rasch veränderlichen Feldern nicht mehr, wie dies in Abhandlung X[3]) für langsam veränderliche Felder

1) Diese Zeitschr. 18, 539, 1917.
2) Diese Zeitschr. 18, 581, 1917.

1) Es ergibt sich die Möglichkeit, die Strömung in Leitern auch als elektrische Konvektion zu betrachten; die Folgerungen aus der letzteren Auffassung und aus den Grundgleichungen (17) (diese Zeitschr. 18, 344, 1917) für Leiter sind identisch.
2) Für den Fall, daß beide Elektronen sich gleichförmig mit derselben Geschwindigkeit in derselben Richtung bewegen, habe ich die Rechnung in den Sitzber. der Berliner Math. Ges. (17, 3—8, 1918) durchgeführt.
3) Diese Zeitschr. 19, 426, 1918.

möglich war, den zeitlichen Ausgleich durch elektrostatische Kräfte vernachlässigen können; am bequemsten wird man stets nach den Formeln (4) in exakter Weise die Ausdrücke für die auf die Elektronen wirkenden Kräfte aufstellen und dann nach Hilfssatz 1 der Abhandlung X[1]) die Wirkungen der Reibung in Leitern berücksichtigen; man gelangt dann zu den erfahrungsmäßigen Formeln für die Elektrizitätsbewegung in Leitern auch für rasch veränderliche Felder.

6. Am Schlusse dieser Abhandlung will ich noch einen Einwand besprechen, welcher in der Theorie der rasch veränderlichen Felder nahe liegt, und dessen Entkräftung mit ziemlich tiefgehenden, mechanischen Untersuchungen zusammenhängt. Man könnte aus der Voraussetzung des universellen Dralles, wie sie durch die Gleichungen (7) und (8) dargestellt wird, leicht den Schluß ziehen, daß für die schwingenden Geschwindigkeiten

$$\hat{u} = u_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi + u_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi, \ldots$$

in einer ersten Annäherung die Gleichungen

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} = a \left\{ \triangle \hat{u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} \right) \right\}, \ldots$$

bestehen müssen, daher für die

$$u_1,\ v_1,\ w_1;\quad u_2,\ v_2,\ w_2$$

die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = a \left\{ \triangle u_1 - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) \right\}, \ldots$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = \triangle u_2, \ldots$$

Diese Gleichungen sind aber für rasch veränderliche Felder erfahrungsgemäß unrichtig. Es ist nun aber zu bemerken, daß der eben angeführte Schluß aus den Gleichungen (7) und (8) aus folgendem Grunde nicht gezogen werden darf:

Wenn wir die Zerlegungen

$$\mu u = \mu_0 \left(u_0 + u_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi + u_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi \right), \ldots$$

$$U' = U'_0 + U'_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi + U'_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi, \ldots$$

vornehmen, können zwar bis auf kleine Größen

$$u_1 \text{ mit } U'_1, \ldots \quad u_2 \text{ mit } U'_2, \ldots$$

übereinstimmen, ebenso auch noch die ersten Ableitungen nach x, y, z; es ist aber nicht mehr erforderlich für unsere Theorie, daß die zweiten Ableitungen bis auf kleine Größen übereinstimmen; mit den zweiten Ableitungen der wahren Geschwindigkeiten muß man überhaupt sehr vorsichtig sein; wir wissen, daß wir z. B. in Leitern bei elektrischen Strömungen sehr rasche Wirbel mit entgegengesetzten Wirbelrichtungen nebeneinander in außerordentlich kleinen Volumenteilen anzunehmen haben; das ist natürlich nur möglich, wenn die Wirbelkomponenten streng genommen mit außerordentlich großen Ableitungen, für die Analyse bequemer als abteilungsweise stetig vorausgesetzt werden. Glücklicherweise sind in der von mir dargelegten Theorie solche Betrachtungen über die zweiten Ableitungen der wahren Geschwindigkeiten unnötig, sie decken aber, wenn man ihnen nachgeht, den inneren Grund auf, aus welchem man mit Schlüssen, wie in dem hier absichtlich besonders hervorgehobenen Einwand, vorsichtig sein muß.

1) Diese Zeitschr. 19, 426, 1918.

(Eingegangen 26. September 1918.)

Über den Sehraum.

Von Hans Witte.

Zweite Mitteilung: Zur Frage nach der scheinbaren Vergrößerung des Mondes usw. am Horizont.

1.

Vor einigen Monaten habe ich in dieser Zeitschrift einen Aufsatz über den Sehraum veröffentlicht, der mehrfach über das engere physikalische Gebiet hinausging[1]). Er hat mir aber gerade auch von Fachgenossen zahlreiche Zuschriften und Anfragen eingebracht[2]). So darf ich vielleicht einiges hinzufügen.

2.

Mit den Sehraumfragen hängt aufs engste zusammen die berühmte Frage: „Warum sieht der Mond usw. am Horizonte größer aus als im Zenit?" Einerseits ist diese Mondfrage der Ausgangspunkt gewesen für das Nachdenken über das räumliche Sehen allgemein. Anderseits haben sich die Erforscher der Mondfrage mehrfach genötigt gesehen, allgemeine Tatsachen des räumlichen Sehens heranzuziehen.

1) H. Witte, Über den Sehraum. Vorläufige Mitteilung über eine gemeinsam mit Herrn E. Laqueur unternommene Arbeit. Diese Zeitschr. 19, 142, 1918.

2) Besonderen Dank für freundliche Anregung schulde ich außer Herrn Laqueur, der von Gent aus an dem Fortgang meiner Arbeit weiteren fördernden Anteil nahm, den Herren Bielschowsky, Classen, Diesselhorst, Elster und Geitel, Hofmann, Kahle, Knopf, v. Kries, Löwenthal, Meinardus, Messer, Richarz, Schumann, v. Sterneck, Timerding, R. H. Weber.

An der scheinbaren Mondvergrößerung hat nun die Physik von jeher lebhaften Anteil genommen. Die irrigen Lehren des Altertums und Mittelalters von der vergrößernden Kraft der „Dünste" waren physikalisch. In der Neuzeit meinte Hobbes (1658), die gewölbte Grenze des Luftmeeres bilde das uns sichtbare Himmelsgewölbe, und an diese Wölbung verlegten wir den Mond und die andern Gestirne. Nach Reimann (1901) sehen wir diese Grenzfläche zwar nicht, aber eine engere, stärker gekrümmte Wölbung innerhalb der Luft, die äußerste Sichtgrenze, wagerecht etwa 50 km, senkrecht etwa 14—15 km. Beide Forscher erklären also die Täuschung durch eine ihr zugrundeliegende physikalische Wirklichkeit. Physikalisches ziehen aber vielfach auch diejenigen Erklärungsversuche heran, die ganz auf seelische Täuschungen hinausgehen; denn sie gründen die Täuschung der Seele z. B. auf Luftperspektive, Helligkeit, Farbe und andere äußere Wirklichkeiten mehr. Schließlich machen einige Erklärungen körperliche Ursachen im Beobachter namhaft: auch diese enden mit dem Bau und der Wirkungsweise des Auges bei physikalischen Bedingtheiten.

Da es sich also wenigstens zum Teil um physikalische Dinge handelt, kann man einen Entscheid nur erwarten, wenn man mißt. Die erste Meßfrage lautet naturgemäß: Welches ist der Zahlenbetrag der Vergrößerung? Wieviel erscheint der Mond am Horizont größer als im Zenit?

Solche Messungen hat zuerst Herr Reimann[1]) gemacht. Seinem Beispiele sind die Herren Pozděna[2]), Dember und Uibe[3]), A. Müller[4]) gefolgt. Alle diese Messungen enthalten eine besondere Schwierigkeit. Sie sichtbar zu machen, ist der Zweck dieser zweiten Mitteilung.

3.

Die Schwierigkeit besteht in folgendem: Das Meßverfahren gerät in einen augenscheinlichen groben Widerspruch mit dem Grundgedanken. Demjenigen Grundgedanken, auf dem die eigne Ansicht der Messenden sowie überhaupt alle diejenigen Erklärungsversuche, die ernstere Beachtung gefunden haben, fußen. Ich muß daher zunächst diesen Grundgedanken wiedergeben.

Er heißt kurz: „Je ferner, um so größer."

Das Netzhautbild oder der Sehwinkel (vgl. Fig. 1) des Mondes, der Sonne usw. ist praktisch immer gleich groß[1]). Sehen wir also den Mond am Horizont z. B. dreimal größer, so kann das nur dadurch kommen, daß wir ihn innerhalb seines starren Sehwinkelkegels dreimal weiter nach außen verlegen als im Zenit.

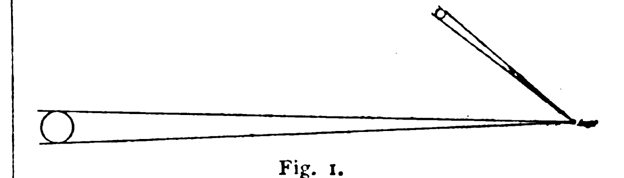


Fig. 1.

Weil wir den Horizontmond ferner glauben, deshalb sehen wir ihn größer.

Zum Belege nennt man Täuschungen an irdischen Dingen: Eine Fliege, die nahe dem Auge vorbeifliegt, wird, wenn man sich in der Entfernung irrt, für einen Sperling oder eine Schwalbe gehalten. Eine Schwalbe ebenso für einen fernen Adler.

Auch das richtige Sehen wirklich verschieden großer Dinge zieht man heran. Die beiden Kreise in der Fig. 1 mögen zwei wirklich verschieden große Äpfel bedeuten. Der eine ist dreimal größer als der andere, aber auch dreimal ferner. So machen sie im Auge das gleiche Netzhautbild, der Sehwinkel ist der gleiche. Trotzdem sehen wir den großen wirklich groß, den kleinen klein. Warum? Weil (gleichgültig, wie!) die Entfernung in unser Inneres eingeht. „Je ferner, um so größer!"

4.

Nun das Verfahren, nach dem Herr Reimann und seine Nachfolger die scheinbare Vergrößerung des Mondes messen. Wählen wir als Beispiel die Messungen von Herrn Pozděna.

Herr Pozděna nimmt zum Vergleich mit der Mondgröße eine Lampe. Die Lampe hängt 4 m vom Beobachter entfernt, ein Stück

1) Eugen Reimann, Die scheinbare Vergrößerung der Sonne und des Mondes am Horizont. Hirschberg 1901 und 1903. Auch Zeitschr. f. Psych. 30, 1 u. 161, 1902.

2) Rudolf F. Pozděna, Eine Methode zur experimentellen und konstruktiven Bestimmung der Form des Himmelgewölbes. Zeitschr. f. Psych. 51, 200, 1909.

3) H. Dember und M. Uibe, Versuch einer physikalischen Lösung des Problems der sichtbaren Größenänderung von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont. Berichte der math.-physik. Klasse der Königl. Ges. d. Wiss. zu Leipzig 69, 485, 1917. — Vgl. auch ebenda 391 u. 139, 1917.

4) Aloys Müller, Die Referenzflächen des Himmels und der Gestirne. Die Wissenschaft, Bd. 62, Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1918

1) Das Netzhautbild des Mondes etwa 0,13 mm, der Sehwinkel 31′ 8″ (in Fig. 1 übertrieben groß gezeichnet). Allgemeineres über Netzhautbild und Sehwinkel vgl. z. B. v. Helmholtz, Physiologische Optik, 3. Aufl., Bd. 1, S. 110, 1909. Hamburg und Leipzig; O. Zoth in Nagels Handbuch der Physiologie des Menschen Bd. 3, S. 344, Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1905.

seitlich[1]) von der jeweiligen Blickrichtung zum Monde. Man sieht also Mond und Lampe einigermaßen nahe nebeneinander, etwa nach Art der Fig. 2, so daß man bequem vergleichen

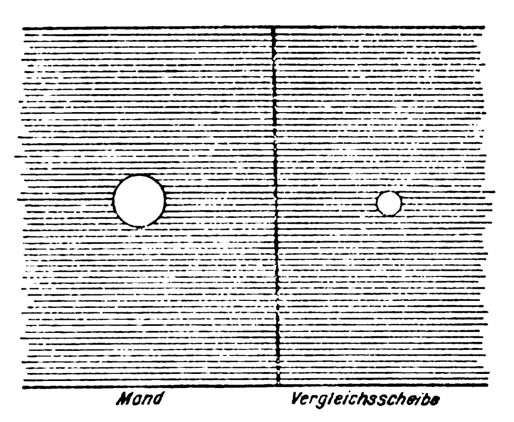


Fig. 2.

kann. Dem Beobachter zeigt die Lampe eine kreisrunde, gleichmäßig helle Scheibe, passend getönt, also einen Vergleichsmond. Die Größe der Vergleichsmondscheibe kann verändert werden. Sie wird nun solange größer und kleiner gemacht, bis der Beobachter sagt: Halt, so groß sieht augenblicklich der Mond aus.

Was findet nun Herr Pozděna?

Wenn der Mond tief steht, wird eine größere Vergleichsscheibe verlangt, als wenn er hoch steht. Das Größenverhältnis für die äußersten Grenzwerte beträgt etwa 2,6:1.

Also ganz wohl verständlich. Aber wie groß ist die Vergleichsscheibe?

Hier kommt das Merkwürdige. Zwischen den Grenzwerten, der größten und der kleinsten Vergleichsscheibe, liegt eine Scheibengröße, auf die Herr Pozděna selber besonders aufmerksam macht. Da ist die Scheibe nämlich gerade so groß, daß sie den Mond genau zudecken könnte, d. h. sie hat denselben Sehwinkel wie der Mond. Am Horizont ist der Sehwinkel der Vergleichsscheibe einen gewissen Betrag (etwa $^2/_5$) größer, nahe dem Zenit ungefähr ebensoviel kleiner; in dieser Mittelhöhe ist der Sehwinkel gleich, Mond und Vergleichsscheibe erzeugen im Auge ein gleichgroßes Bild.

Was bedeutet das?

Hier sind zwei Scheiben, die im Auge dasselbe Netzhautbild machen. Die eine (Vergleichsmond) nah, die andere (Mond selber) fern. Nun erinnern wir uns an den allgemeingültigen Grundsatz, der die ganzen Mondvergrößerungserklärungen trägt. Er heißt: „Je ferner, um so größer" — also muß doch die eine Scheibe klein aussehen, die andere groß!

Und welche Zahlen! Das kleine Scheibchen vorn, auf 4 m Entfernung, ist 36 mm groß. Die große leuchtende Kugel da hinten ist 100 Millionen mal so weit entfernt, rund 400 000 km, und demgemäß 100 Millionen mal so groß, 3600 km. Und beide sehen gleich groß aus!

Der Widerspruch liegt augenscheinlich offen da. Tatsächlich haben wir hier einen hundertmillionenfachen Unterschied der Entfernung und dementsprechend einen hundertmillionenfachen Unterschied der wirklichen Größe. Wie will man die scheinbare Vergrößerung am Monde, etwa 3 mal, mit dem vorausgesetzten Grundsatz „Je ferner, um so größer" erklären, wenn dieser Grundsatz für millionenfache wirkliche Vergrößerung — von 36 mm bis 3600 km, zwischen 4 m und 400 000 km wirklicher Entfernung — versagt?

5.

Noch mehr!

Der Grundsatz von dem Wachsen der scheinbaren Größe mit der Entfernung wird ja nun offenbar durch dies Ergebnis außerordentlich eingeengt. Er scheint nur gelten zu können unterhalb von 4 m. Dort sollte er gelten, wie das Beispiel von den Äpfeln zeigt. Aber bleibt das Apfelbeispiel nicht auch richtig, wenn der kleinere Apfel 2 m, der größere 6 m entfernt ist? Sehen wir nicht auch auf diese Entfernung den kleinen klein, den großen groß? Und werden bei den Täuschungen von Fliege, Schwalbe und Adler nicht ganz gewiß größere Entfernungen angenommen?

Kurz gesagt: Widerspricht die Einengung auf 4 m nicht einfach den Tatsachen? —

Anderseits: Bleibt es bei dem einengenden Schluß, dann würde also der Grundsatz „Je ferner, um so größer" von 4 m an bis 400 000 km hin augenscheinlich nicht gelten. Hat es nun überhaupt einen Sinn, zu erwarten, daß er hernach, in der Entfernung des Mondes, plötzlich wieder zu gelten anfängt?

Gewiß nicht. Denn je mehr wir uns in himmlische Entfernungen verlieren, um so mehr nimmt unsere Empfindlichkeit für Entfernungsunterschiede ab. Sonne und Mond in ihrem gegenseitigen Entfernungsverhältnis liefern selber das bekannteste Beispiel. Die Sonne ist 400 mal ferner als der Mond, wird aber nicht merklich ferner und nicht merklich größer gesehen.

1) Bei den Herren Dember und Uibe betrug der Winkel der beiden Blickrichtungen grundsätzlich mindestens 30°, bei Herrn Reimann 180°.

6.

Am merkwürdigsten erscheint schließlich das zahlenmäßige Endergebnis. Die genannten Forscher haben bei ihren Messungen für die Horizont-Vergrößerung des Mondes und der Sonne doch Werte erhalten, die im ganzen einen vernünftigen Eindruck machen und auch nicht gerade allzu erheblich voneinander abweichen. Sie bleiben sämtlich der alten Eulerschen Schätzung nach dem Augenmaß (2 bis 3 mal) nahe[1]).

Der Vollständigkeit halber seien noch folgende Zahlen hinzugefügt. Herrn Reimanns Scheibe (für die Sonne) war 34 cm groß und sah demgemäß bei gleichem Netzhautbild auf 38 m Entfernung so groß aus wie die Sonne; bei den Herren Dember und Uibe sind die Zahlen beinahe dieselben; Herr A. Müller, dessen neues Buch mir soeben während der Niederschrift zugeschickt wird, hat noch viel engere Maße als Herr Pozdĕna, die Vergleichssonne ist 53 cm vom Auge entfernt und bei Netzhautbildgleichheit nicht ganz 5 mm groß. Sehr verschieden sind aber die Höhen, unter denen die merkwürdige Gleichheit der Sehgröße bei gleichem Netzhautbild eintritt. Herr Reimann gibt an 55°, Herr Pozdena etwa 27°, aus Messungen der Herren Dember und Uibe errechnet sich z. B. 20°, aus Zahlen Herrn Müllers 29°, 38° u. a. m.

Ob die Messungen und Schlüsse der genannten Forscher nach alledem erneut durchgedacht werden müssen, darf ich dem Urteil der Beteiligten überlassen[1]). Zunächst drängt sich die allgemeine Folgerung mehr auf: Da das Meßverfahren in Widerspruch tritt mit dem tragenden Grundgedanken, muß in den ganzen Zusammenhängen noch irgendein unbekanntes X stecken, das es vor aller Einzelarbeit aufzufinden gilt.

Die Schwierigkeit liegt in den Sehverhältnissen von Nähe und Ferne, Größe und Kleinheit. In den räumlichen Verhältnissen des Sehens: dem „Sehraum".

Der Sehraum ist das unbekannte X. Ehe der Sehraum nicht erforscht ist, darf man nicht hoffen, die Frage nach der scheinbaren Mondvergrößerung widerspruchsfrei und vollständig zu lösen. Für diese Tatsache ist der im Vorigen aufgedeckte Widerspruch der bündigste Beweis.

1) Euler, Briefe an eine deutsche Prinzessin, London 1775 (französisch), Bd. 3, 321.

1) Die Herren Dember und Uibe haben auch versucht, Reimanns physikalische Gewölbetheorie zu festigen, indem sie sie mit Rayleighs Theorie vom Himmelsblau verbinden. Dazu möchte ich mir die Bemerkung erlauben, daß das Heranziehen von Rayleighs Theorie in dieser Weise auf Schwierigkeiten zu stoßen scheint. Auch sonst geben die außerordentlich anregenden Arbeiten der Herren Dember und Uibe sowie die grundlegende Arbeit von Herrn Reimann zu weiteren Überlegungen Anlaß, ich hoffe, darauf zurückkommen zu können.

(Eingegangen 6. Oktober 1918.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Metallographie.

Von Rudolf Ruer.

Außer den reinen Metallen zeigen auch zusammengesetzte Stoffe, und zwar nicht nur solche, die ausschließlich aus Metallen bestehen, metallischen Charakter. Zusammengesetzte Stoffe mit metallischen Eigenschaften werden als Metallegierungen oder kurzweg Legierungen bezeichnet. Unsere Kenntnisse über die Konstitution der Metallegierungen waren bis vor etwa zwei Jahrzehnten recht dürftig und unsicher, weil es bis dahin an geeigneten Untersuchungsmethoden fehlte. Die üblichen chemischen Methoden führen hier nicht zum Ziele, einmal weil die meisten Legierungen erst bei solch' hohen Temperaturen zu schmelzen beginnen, daß eine Trennung der einzelnen Bestandteile auf Grund ihres verschiedenen Aggregatzustandes durch Filtration oder Destillation nicht durchführbar ist. Man war daher ausschließlich auf die Untersuchung der vollständig erstarrten Legierungen angewiesen, doch ist auch bei diesen das allgemeinste chemische Trennungs- und Reinigungsverfahren, die Kristallisation, nicht anwendbar, da es unmöglich ist, metallische Stoffe in nichtmetallischen Stoffen ohne chemische Veränderung zu lösen. Man begnügte sich daher damit, jeweilig nur ein Strukturelement zu isolieren, indem man die fein zerteilte Legierung durch wiederholte Behandlung mit einem Reagenz, z. B. einer Säure, teilweise in Lösung brachte und die Zusammensetzung des verbleibenden Rückstandes ermittelte. Diese als Rückstandsanalyse bezeichnete Methode hat vielfach erfolgreiche An-

wendung gefunden, so isolierten Mylius, Förster und Schöne[1]) mit ihrer Hilfe das als Zementit bezeichnete Eisenkarbid Fe_3C. In zahlreichen anderen Fällen hat sie jedoch zu falschen Resultaten geführt. Der Grund für ihre Unzuverlässigkeit liegt in der Schwierigkeit, zu entscheiden, ob der erhaltene Rückstand einheitlicher Natur ist oder nicht. Diese Unsicherheit führte dazu, auch physikalische Untersuchungsmethoden heranzuziehen, beispielsweise bestimmte man in einer Legierungsreihe aus zwei Metallen die Dichte und elektrische Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der prozentischen Zusammensetzung[2]). Doch führte auch dieser Weg nicht zum gewünschten Ziele.

Unterdessen hatte die Petrographie in der mikroskopischen Untersuchung von Dünnschliffen eine exakte Methode zur Bestimmung der einzelnen Mineralien, aus denen ein Gestein besteht, ausgebildet. Der direkten Übertragung dieser Methode auf die Untersuchung der Legierungen stand die Undurchsichtigkeit der Metalle entgegen. Man beseitigte dieses Hindernis, indem man die Legierungen nach entsprechender Vorbereitung anstatt in durchfallendem in reflektiertem Lichte untersuchte (Sorby 1864, Martens 1878). Dieses sogenannte mikrographische Verfahren bildet auch jetzt noch eines der wichtigsten Hilfsmittel metallographischer Forschung. Daß auch mit seiner Hilfe die völlige Aufklärung der Konstitution der Metallegierungen nicht gelang, liegt darin begründet, daß seine Anwendung auf die Untersuchung der vollständig erstarrten Legierungen beschränkt ist. Zum vollen Verständnis der sich darbietenden Strukturbilder ist man erst gelangt, seitdem man über eine Methode verfügt, die nicht nur über den Zustand der vollständig erstarrten Legierungen, sondern auch über ihre Entstehungsgeschichte unterrichtet. Es wird dieses durch systematische Erforschung der mit der Erstarrung der geschmolzenen Reguli und ihren späteren Umwandlungen verknüpften Wärmevorgänge erreicht. Daher hat sie Tammann als thermische Analyse bezeichnet. Ihre theoretische Grundlage beruht auf der von Willard Gibbs begründeten, von Roozeboom in ihrer Bedeutung zuerst erkannten und seinen experimentellen Forschungen zugrunde gelegten Lehre vom heterogenen Gleichgewichte, die in ihrer allgemeinen Formulierung auf die Gleichartigkeit der Vorgänge bei der Erstarrung metallischer und nichtmetallischer Schmelzen, wäßriger und anderer Lösungen hinwies. Dadurch war man berechtigt, die beim Studium von Vorgängen, welche wie die Erstarrung wäßriger Lösungen bei verhältnismäßig niedriger Temperatur stattfinden und ihrer Erforschung keine besonderen experimentellen Schwierigkeiten entgegensetzen, gesammelten Erfahrungen auf Vorgänge, die bei hoher Temperatur stattfinden, zu übertragen.

Die Anwendbarkeit der Methode zur Untersuchung von Vorgängen, die sich bei hohen Temperaturen vollziehen, ist an das Vorhandensein eines geeigneten Temperaturmeßinstrumentes geknüpft. Das von Le Chatelier angegebene Thermoelement, dessen einer Draht aus Platin, dessen anderer aus einer Legierung von 90 Proz. Platin und 10 Proz. Rhodium besteht, kann zu exakten Temperaturbestimmungen bis zu 1600° C benutzt werden. Zur Erzielung derartig hoher Temperaturen dienen elektrisch geheizte Öfen.

Die mikrographischen und thermischen Methoden kontrollieren sich in ihren Resultaten gegenseitig. Als erstes mit ihrer Hilfe gewonnenes Resultat sei vorweg genommen, daß aus dem Schmelzfluß erstarrte Legierungen niemals amorph sind, sondern stets ein kristallinisches Gefüge aufweisen.

§ 1.

Heterogene Gleichgewichte.

Mit dem Ausdruck chemisches System verbindet man den Begriff der Abgeschlossenheit, dergestalt, daß man berechtigt ist, von der Wirkung der Außenwelt auf die das System zusammensetzenden Stoffe abzusehen und sie gesondert zu betrachten. Wenn ein System, beliebig lange sich selbst überlassen, keine Veränderung erleidet, so sagen wir, es befindet sich im Gleichgewicht. Dieses Kriterium ist theoretisch hinreichend, kann praktisch jedoch in gewissen Fällen, wenn nämlich die Reaktionsgeschwindigkeit der beteiligten Stoffe außerordentlich gering ist, zu Irrtümern führen. Ein bekanntes Beispiel dafür liefert ein Gemenge aus Wasserstoff und Sauerstoff, das bei gewöhnlicher Temperatur jahrelang ohne nachweisbare Veränderung aufbewahrt, jedoch durch kurze Erhitzung an einer einzigen Stelle zur Explosion gebracht werden kann. Zur Unterscheidung der im Nachfolgenden ausschließlich berücksichtigten wirklichen Gleichgewichte von den durch geringe Reaktionsgeschwindigkeit bewirkten scheinbaren Gleichgewichten dient als Kriterium, daß die bei Wärmezufuhr oder Volumenvergrößerung in der einen Richtung verlaufenden Vorgänge

1) Mylius, Förster und Schöne, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 13, 38, 1896.
2) Matthiessen, Pogg. Ann. 110, 190, 1860.

sich bei Wärmeentziehung oder Volumenverkleinerung in der entgegengesetzten Richtung vollziehen. Derartige Vorgänge werden als umkehrbare oder reversible bezeichnet.

Der im Vorstehenden als Gleichgewicht bezeichnete Zustand eines Systems muß eine gewisse Stabilität besitzen, da er sonst nicht über einen längeren Zeitraum fortbestehen könnte. Daraus ergibt sich, daß Wärmezufuhr in einem im Gleichgewichte befindlichen Systeme nur solche Vorgänge hervorrufen kann, die Wärme binden, und entsprechend Wärmeentziehung nur solche, die Wärme entwickeln. Gesetzt nämlich, es werde durch Wärmezufuhr ein Vorgang eingeleitet, der Wärme liefert, so würde durch die hierdurch gelieferte Wärmemenge ein weiteres Fortschreiten dieses Vorganges und damit weitere Wärmeentwicklung bewirkt werden. Das System würde bei der geringsten Temperaturerhöhung unter weiterem freiwilligen Steigen der Temperatur in einen anderen Zustand übergehen. Wir hätten ein instabiles System vor uns.

Der obige Satz ist von van't Hoff als principe de l'équilibre mobile bezeichnet worden.

In analoger Weise ergibt sich, daß Komprimierung eines im Gleichgewichte befindlichen Systems nur solche Vorgänge hervorrufen kann, die mit Volumenverminderung verknüpft sind, und daß Expandierung des Systems die entgegengesetzte Wirkung haben muß.

Beide Sätze werden häufig unter der Bezeichnung „Le Chateliersches Prinzip" zusammengefaßt.

In einem im Gleichgewichte befindlichen System müssen Druck und Temperatur in allen Teilen gleich sein. Häufig besteht eine solche Übereinstimmung auch bezüglich aller anderen Eigenschaften des Systems. So besteht in einem Gemenge verschiedener Gase nicht eher Gleichgewicht, als bis die Zusammensetzung in allen Teilen dieselbe geworden ist. Der gleiche als Diffusion bezeichnete Vorgang bewirkt, daß auch die in einer Lösung gegebenenfalls bestehenden Konzentrationsunterschiede das Bestreben haben, sich auszugleichen, und dasselbe gilt für einen Kristall, wenngleich hier die Diffusion meistens so langsam verläuft, daß sie sich der Beobachtung entzieht. In allen diesen Fällen befindet sich das System nicht eher im Gleichgewicht, als bis seine Eigenschaften in allen seinen Teilen, soweit man sie durch mechanische Mittel voneinander trennen kann, die gleichen sind. Wir nennen ein solches System ein homogenes.

In anderen Fällen, z. B. wenn man eine Flüssigkeit mit einer größeren Menge eines kristallisierten Körpers zusammenbringt, als sie zu lösen vermag, tritt ein solcher Endzustand nicht ein. Das System besteht vielmehr nach erreichtem Gleichgewichte aus einem flüssigen und einem kristallisierten Teile, nämlich der gesättigten Lösung und dem ungelöst gebliebenen Reste der Kristalle, die man durch mechanische Mittel, etwa durch Filtrieren, voneinander trennen kann. Ein solches System nennt man ein heterogenes System und bezeichnet nach Willard Gibbs[1]) die voneinander verschiedenen, in sich homogenen Teile, aus denen es besteht, als Phasen des betreffenden Systems. Ein homogenes System besteht also aus einer einzigen Phase, ein heterogenes aus mindestens zwei Phasen.

Nach der Zahl der das System zusammensetzenden unabhängigen, d. h. nach Willkür veränderlichen Bestandteile oder kurzweg Komponenten unterscheidet man die Systeme als Einstoffsysteme, Zweistoffsysteme oder binäre Systeme, Dreistoffsysteme oder ternäre Systeme usw. Ein System besitzt so viele unabhängige Bestandteile, als verschiedene Stoffe notwendig und hinreichend sind, um jede einzelne Phase des Systems herstellen zu können. Die Zahl derselben ist daher nicht eher anzugeben, bevor man die Zusammensetzung jeder einzelnen Phase des zu untersuchenden Systems kennt. Bei Metallegierungen ist jedoch die Anzahl der unabhängigen Bestandteile gleich der der vorhandenen Metalle, wenigstens sofern sich die Untersuchung auf alle möglichen Kombinationen der betreffenden Metalle miteinander erstrecken soll.

Als erste Gleichgewichtsbedingung für ein heterogenes System ergibt sich, abgesehen von der Gleichheit von Druck und Temperatur in allen seinen Teilen, die Forderung, daß jede der einzelnen Phasen, aus denen es besteht, für sich im Gleichgewichte ist. Dazu kommt als weitere Gleichgewichtsbedingung hinzu, daß die Phasen miteinander im Gleichgewichte sind. In dieser Hinsicht sind folgende zwei Sätze von Wichtigkeit:

1. Das Gleichgewicht ist unabhängig von der Masse der einzelnen Phasen.

So ist die Zusammensetzung einer mit einer Kristallart im Gleichgewicht befindlichen, d. h. mit ihr gesättigten Lösung unabhängig von der Menge der ungelöst gebliebenen Kristalle. Daraus folgt, daß man jede einzelne Kristallart als nur eine Phase zu zählen hat, da nach eingetretener Sättigung Zusatz von weiteren Kristallen auf das Gleichgewicht, d. h. hier auf die Zu-

1) Willard Gibbs, Transactions of the Connecticut Acad. III, 108 und 343, (1874—1878), übersetzt („Thermodynamische Studien") von W. Ostwald. Leipzig 1892.



sammensetzung der Lösung, keinen Einfluß hat. Voraussetzung für die strenge Gültigkeit des Satzes ist, daß die Zerteilung einer Phase nicht so weit getrieben werden darf, daß die Oberflächenenergie wesentlich in Betracht kommt.

2. Zwei Phasen, die mit derselben dritten im Gleichgewichte sind, sind auch miteinander im Gleichgewichte.

Hiernach ist es für das Gleichgewicht belanglos, welche Phasen miteinander in direkter Berührung sind. Man hat daher diesen Satz auch in der Form ausgesprochen, daß das Gleichgewicht unabhängig von der Anordnung der Phasen ist. Er läßt sich auf folgende Weise begründen. In einem aus zwei in direkter Berührung miteinander befindlichen Phasen A und B (Fig. 1) bestehenden Systeme herrscht definitions-

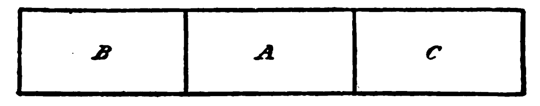


Fig. 1.

gemäß (s. § 1 am Anfang, S. 65) Gleichgewicht, wenn es, sich selbst überlassen, keine Veränderung erleidet. Es darf demnach kein Bestandteil aus der einen in die andere Phase übertreten, d. h. die chemische Affinität (etwa gemessen in Volt) der Phase A zu jeder Komponente muß ebenso groß sein, wie die der Phase B zu der gleichen Komponente. Dieselben Gleichgewichtsbedingungen gelten für die gleichfalls in direkter Berührung befindlichen Phasen A und C, sind auch sie erfüllt, so sind sie auch für die durch Phase A getrennten Phasen B und C erfüllt, d. h. auch diese beiden Phasen befinden sich im Gleichgewichte.

Es könnte nötig erscheinen, den Fall zu betrachten, daß eine Phase A sich mit einer Phase B im Gleichgewichte befände, welche einen oder mehrere der in A enthaltenen Stoffe nicht enthielte, indem ihre Affinität zu diesen Stoffen Null wäre. Auch in solchem Falle würde die Phase B mit jeder Phase im Gleichgewichte sein, die sich mit A im Gleichgewichte befindet. Doch erscheint die Betrachtung derartiger Fälle aus dem Grunde überflüssig, weil die Affinität einer Phase zu ihren Bestandteilen mit abnehmendem Gehalte an denselben wächst und theoretisch beim Gehalte Null unendlich groß wird. Jede Phase enthält also alle in dem betreffenden System auftretenden Bestandteile, wenn auch unter Umständen in unterhalb der Grenze der Nachweisbarkeit liegenden Beträgen.

Nach Obigem ist das Gleichgewicht eines Systems charakterisiert durch den Druck, unter dem es steht, durch seine Temperatur und die Zusammensetzung jeder einzelnen Phase, während die Massen der einzelnen Phasen sowie ihre Anordnung für das Gleichgewicht nicht von Belang sind.

Wir wollen nun im folgenden den Druck stets unverändert gleich einer Atmosphäre setzen, indem wir annehmen, daß die Bestimmungen in mit der Atmosphäre kommunizierenden Gefäßen ausgeführt werden. Die Schwankungen des Atmosphärendruckes, den wir als mechanischen, auf der Schmelze lastenden Druck ansehen, sollen hier unberücksichtigt bleiben. Wir sind dazu berechtigt, solange wir nur solche Gleichgewichte betrachten, an denen die gasförmige Phase nicht beteiligt ist, da in diesem Falle die durch die Änderung des Luftdruckes bewirkte Änderung der Gleichgewichtstemperatur weit unterhalb der bei gewöhnlichen Temperaturbestimmungen auftretenden Fehler liegt.

Auf dem Satz von der Unabhängigkeit des Gleichgewichts von der Masse der Phasen beruht die von Roozeboom herrührende Einteilung der heterogenen Gleichgewichte in vollständige und unvollständige, je nachdem Zuführung oder Entziehung von Wärme bei konstant gehaltenem Drucke eine Änderung der Massen, nicht aber der Zusammensetzung der koëxistierenden (d. h. im Gleichgewicht befindlichen) Phasen oder auch eine Änderung der Zusammensetzung wenigstens einer Phase bewirkt. Im ersten Falle muß bei konstant gehaltenem Druck trotz Änderung des Wärmeinhalts des Systems die Temperatur solange konstant bleiben, bis eine der vorhandenen Phasen aufgezehrt ist; im zweiten Falle muß mit der Änderung des Wärmeinhalts des Systems bei konstant gehaltenem Druck eine Änderung der Gleichgewichtstemperatur verknüpft sein.

Voraussetzung ist hierbei, daß das System während der Zuführung und Entziehung von Wärme jederzeit im Gleichgewichte ist. Die Reaktionsgeschwindigkeit des durch die Änderung des Wärmeinhalts hervorgerufenen Vorganges muß daher so groß sein, daß sie die Geschwindigkeit der Zufuhr und Abgabe von Wärme in jedem Falle übertrifft, sie muß ausschließlich „durch den Wärmefluß reguliert werden".

Das Auftreten vollständiger Gleichgewichte läßt sich mit Hilfe der Gibbsschen Phasenregel aus der Anzahl der unabhängigen Bestandteile und der Phasen des Systems vorhersagen.

Der Zustand einer einzelnen im Gleichgewichte befindlichen Phase ist bestimmt durch den Druck, die Temperatur und die Massen

der in ihr enthaltenen unabhängigen Bestandteile. Da das Gleichgewicht unabhängig von der Masse der einzelnen Phasen ist, so genügt es, statt der absoluten Massen der verschiedenen Komponenten deren relative Massen, d. h. deren Massen bezogen auf die Gesamtmasse 1, welche Konzentrationen genannt werden sollen, anzugeben, wozu bei n Bestandteilen die Kenntnis von $n-1$ Konzentrationen erforderlich ist. Über diese $n-1$ Konzentrationen, ferner über den Druck und die Temperatur, im ganzen über $n+1$ Variable, welche den Zustand einer im Gleichgewichte befindlichen Phase bestimmen, kann frei verfügt werden, d. h. sie können jede für sich innerhalb gewisser Grenzen willkürlich geändert werden, ohne eine diskontinuierliche Veränderung, beispielsweise das Auftreten einer neuen Phase zu bewirken. Man drückt das auch auf folgende Weise aus: Ein aus einer einzigen Phase bestehendes System mit n Komponenten hat $n+1$ Freiheitsgrade.

Wenn diese Phase mit einer zweiten aus den gleichen Komponenten bestehenden Phase koëxistiert, so besteht außer Gleichheit des Druckes und der Temperatur nach S. 67 auch Gleichheit der chemischen Affinitäten beider Phasen zu jeder der n Komponenten. Diese chemischen Affinitäten müssen Funktionen der $n+1$ Variablen sein, welche die Eigenschaften der betreffenden Phase bestimmen. Die Koëxistenz mit einer zweiten Phase erfordert also die Erfüllung von $n+2$ Gleichungen, mithin einer Gleichung mehr, als die $n+1$ betragende Anzahl neuer Variablen, die durch das Hinzutreten der zweiten Phase eingeführt werden, sie reduziert demnach die Anzahl der Variablen, über die für die einzelne Phase frei verfügt werden kann, von $n+1$ auf n. Mit anderen Worten, durch das Hinzutreten einer zweiten Phase büßt das System einen Freiheitsgrad ein. Das Gleiche gilt für das Hinzutreten jeder weiteren Phase, da diese nur mit der ersten verglichen zu werden braucht. Besteht das System mit n Komponenten aus p Phasen, so können wir $p-1$ Phasen als neu hinzugetreten ansehen, und die Anzahl der Freiheitsgrade f des Systems ist gleich den $n+1$ Freiheitsgraden der ersten Phase, vermindert um die $p-1$ Freiheitsgrade, welche durch das Hinzutreten von $p-1$ Phasen verloren gehen:

$$f = n + 1 - (p - 1) \text{ oder}$$
$$f = n - p + 2.$$

Diese Gleichung wird als Gibbssche Phasenregel bezeichnet.

Das Verhalten eines Systems wird in weitgehendem Maße durch die Zahl seiner Freiheitsgrade bestimmt, welche nach der Phasenregel die Differenz zwischen der Zahl der Komponenten und der Zahl der Phasen um zwei übertrifft. Da die Zahl der Freiheitsgrade nicht negativ werden kann, so beträgt in einem n Komponenten enthaltenden Systeme die Anzahl der koëxistierenden Phasen höchstens $n+2$. Das System besitzt dann keinen Freiheitsgrad, d. h. Druck, Temperatur und Zusammensetzung der einzelnen Phasen sind vollkommen festgelegt und können nicht verändert werden, bevor eine der Phasen aus dem Systeme verschwunden ist. Daher rührt die zuweilen in der Literatur vorkommende Bezeichnung eines solchen Systems als „nonvariantes System".

Indem wir (s. S. 67) den auf der Schmelze lastenden Gasdruck als mechanischen Druck auffassen und ihn konstant $=1$ Atm. setzen, sehen wir die Gasphase als nicht vorhanden an und begeben uns der Verfügung über den Druck als Variable, mithin eines Freiheitsgrades. Unter diesen Umständen können in einem im Gleichgewichte befindlichen Systeme mit n Komponenten höchstens $n+1$ Phasen gleichzeitig vorhanden sein. Sind sie vorhanden, so sind bei konstant gehaltenem Druck Temperatur und Zusammensetzung der einzelnen Phasen bestimmt und kann Zuführung oder Entziehung von Wärme keine Temperatur- und Konzentrationsänderungen, sondern nur eine Änderung der Menge der einzelnen Phasen hervorbringen, bis eine der Phasen vollständig aufgezehrt ist. Wir erkennen, daß das Gleichgewicht eines n-Stoffsystems mit $n+1$ Phasen ein vollständiges ist, und daß es beim Verluste einer Phase in ein unvollständiges übergeht. Ein vollständiges Gleichgewicht besitzt noch einen Freiheitsgrad, da der auf dem System lastende Druck verändert werden kann, wodurch eine Veränderung der Gleichgewichtstemperatur und ev. auch der Zusammensetzung einer oder mehrerer Phasen bewirkt wird. Daher wird ein solches System häufig ein monovariantes System genannt, zum Unterschiede von den Systemen mit mehr Freiheitsgraden, die nach der Zahl derselben als divariante, trivariante usw. bezeichnet werden, und von uns unter dem Namen „unvollständige Gleichgewichte" zusammengefaßt worden sind.

Anstatt der Druckes kann man auch die Temperatur als konstant annehmen und Vorgänge betrachten, die durch Volumenänderungen bewirkt werden. Je nachdem hierbei der Druck konstant bleibt oder nicht, wird man zu einer analogen Unterscheidung von vollständigen und unvollständigen Gleichgewichten geführt.

Sind in einem Systeme mehr Phasen vorhanden, als die Phasenregel zuläßt, so kann es sich nicht im Gleichgewichte befinden. Nach der Phasenregel ist in einem n-Stoffsystem die Koëxistenz von $n + 1$ flüssigen oder kristallisierten Phasen nur möglich bei der dem herrschenden Druck entsprechenden Gleichgewichtstemperatur. Befindet sich ein System bei höherer oder tieferer Temperatur, so muß eine der Phasen aufgezehrt sein. Daher kann ein im Gleichgewichte befindliches reines Metall in erstarrtem Zustande höchstens eine Kristallart, eine binäre Legierung höchstens zwei, eine ternäre Legierung höchstens drei Kristallarten enthalten. Eine Ausnahme hiervon könnte nur dann eintreten, wenn die Temperatur der Legierung zufällig mit der Temperatur eines vollständigen Gleichgewichts übereinstimmte. In solchem Falle müßte eine geringe Abkühlung oder Erwärmung das Verschwinden mindestens einer Kristallart bewirken.

§ 2.

Einstoffsysteme.

Zu den Einstoffsystemen gehören in erster Linie diejenigen, die aus nur einem Elemente bestehen. Wenn wir die Elemente als unzerlegbar ansprechen, drücken wir aus, daß innerhalb des erforschten Temperatur- und Druckgebietes die koëxistierenden Phasen eines aus nur einem Elemente aufgebauten Systems stets die gleiche Zusammensetzung haben. Es gibt aber auch aus zwei oder mehr Elementen bestehende Mischungen, welche innerhalb eines zwar begrenzten, aber nicht unendlich kleinen Temperatur- und Druckgebietes ein den Elementen analoges Verhalten zeigen. Innerhalb dieses Temperatur- und Druckgebietes gehören die aus einer solchen Mischung, die man als chemische Verbindung bezeichnet, aufgebauten Systeme gleichfalls zu den Einstoffsystemen.

Es geht aus Obigem hervor, daß das Gleichgewicht zwischen den Phasen eines Einstoffsystems niemals ein unvollständiges sein kann, da eben keine der koëxistierenden Phasen eine Änderung ihrer Zusammensetzung erleiden kann. Daher finden bei gegebenem Drucke alle Zustandsänderungen bei einer bestimmten unveränderlichen Temperatur statt.

Die für uns in Betracht kommenden Umwandlungen sind das Schmelzen und Kristallisieren, sowie der Übergang einer Kristallart in eine andere, die sogenannten polymorphen Umwandlungen. Jeder dieser Vorgänge findet bei reinen Stoffen unter Atmosphärendruck bei einer bestimmten unveränderlichen Temperatur statt, die man als Schmelz- bzw. Erstarrungspunkt und als Umwandlungspunkt bezeichnet. Nur in diesen Punkten sind zwei Formen des reinen Stoffes im Gleichgewichte miteinander und können demgemäß in einem gegen Wärmezufuhr und Wärmeentziehung abgeschlossenen Systeme beliebig lange nebeneinander existieren, sie sind beide stabil. Bei allen anderen Temperaturen ist nur eine Form stabil, so oberhalb des Schmelzpunktes die Schmelze, unterhalb desselben die Kristallart. Führen wir einem aus zwei Phasen (Formen) bestehenden Einstoffsysteme Wärme zu oder ab, so vermehrt sich die Menge der einen, es vermindert sich die Menge der anderen Phase; aber keine der Phasen ändert ihre Zusammensetzung. Die Temperatur bleibt mithin so lange unverändert, bis die eine Phase vollständig verschwunden ist. Dann erst bringt weitere Änderung des Wärmeinhalts eine Änderung der Temperatur hervor.

Wegen der dieser Betrachtung zugrunde liegenden Voraussetzung, daß das System sich jederzeit im Gleichgewichte befindet, muß von dem Auftreten von Unterkühlungen und Überhitzungen abgesehen werden. Aus dem gleichen Grunde kommen von den polymorphen Umwandlungen nur die sog. umkehrbaren (enantiotropen) in Betracht. Man versteht darunter solche Umwandlungen, die bei Wärmezufuhr in der einen, bei Wärmeentziehung in der entgegengesetzten Richtung verlaufen und danach eine vollkommene Analogie zum Schmelzen und Kristallisieren zeigen.

Die bequemste Methode zur Ermittlung der Schmelz- und Umwandlungspunkte durch die sie begleitenden Wärmevorgänge beruht auf der Beobachtung der Abkühlungs- bzw. Erhitzungsgeschwindigkeit des betreffenden Körpers in Abhängigkeit von der Temperatur. Im Nachfolgenden wird angenommen, daß die Wärmeleitfähigkeit des zu untersuchenden Körpers so groß ist, daß meßbare Temperaturdifferenzen zwischen seiner Oberfläche und seinem Innern nicht auftreten können, daß der thermometrische Apparat dem Körper keine Wärme entzieht und endlich, daß die Temperatur der Umgebung konstant ist.

Wenn ein erkaltender Körper keine Umwandlung erleidet, ist seine Abkühlungsgeschwindigkeit um so größer, je höher seine Temperatur über der der Umgebung liegt. Eine graphische Darstellung der Abhängigkeit der Temperatur von der Zeit in Form einer sog. Abkühlungskurve ist für diesen Fall durch Fig. 2 gegeben. Die Temperatur des Körpers, welche zu Anfang 1000^0 beträgt, fällt zuerst schnell, dann immer langsamer und nähert sich,

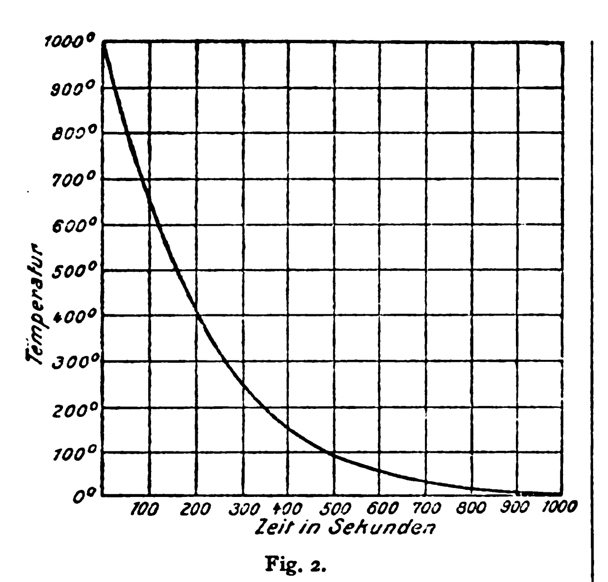


Fig. 2.

theoretisch wenigstens, asymptotisch der zu 0° angenommenen Temperatur der Umgebung, die auch Konvergenztemperatur genannt wird.

Beim Erwärmen eines Stoffes durch eine äußere Wärmequelle trifft man auf analoge Verhältnisse, wie die Erhitzungskurve Fig. 3

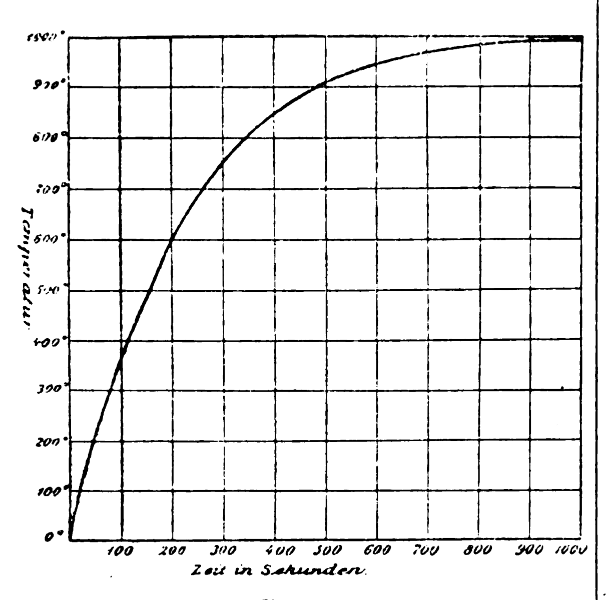


Fig. 3.

erkennen läßt. Die Temperatur steigt zuerst schnell, dann immer langsamer und nähert sich asymptotisch einer oberen Temperatur, welche gleichfalls als Konvergenztemperatur bezeichnet werden soll und von der Temperatur der äußeren Wärmequelle sowie von dem durch die Versuchsanordnung gegebenen Schutz gegen Wärmeabgabe nach außen abhängt.

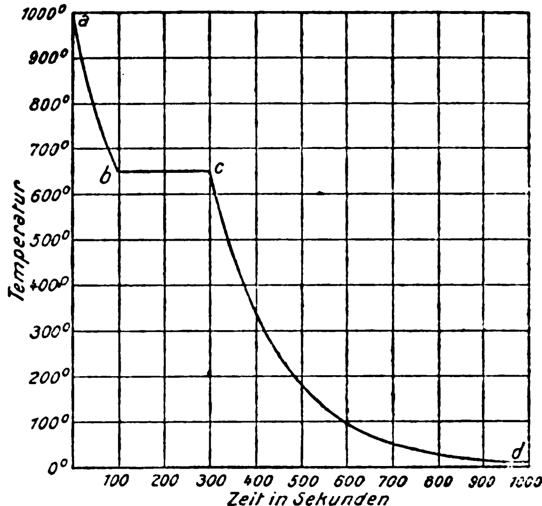


Fig. 4.

Fig. 4 gibt die Abkühlungskurve eines Stoffes von 1000° bis 0°, wenn der Stoff bei 650° eine Umwandlung, etwa den Übergang aus dem flüssigen in den kristallisierten Zustand, erleidet. Dieser Umwandlungspunkt gibt sich durch das bei 650° liegende horizontale Stück *bc* zu erkennen. Die Temperatur bleibt trotz beständiger Wärmeabgabe nach außen durch die bei der Erstarrung frei werdende Wärme so lange konstant, bis der letzte Tropfen Schmelze erstarrt ist. Man bezeichnet eine solche Periode konstanter Temperatur als Haltepunkt.

Fig. 5 läßt außer dem bei 650° liegenden Haltepunkte, der wieder dem Übergange aus dem geschmolzenen in den kristallisierten Zu-

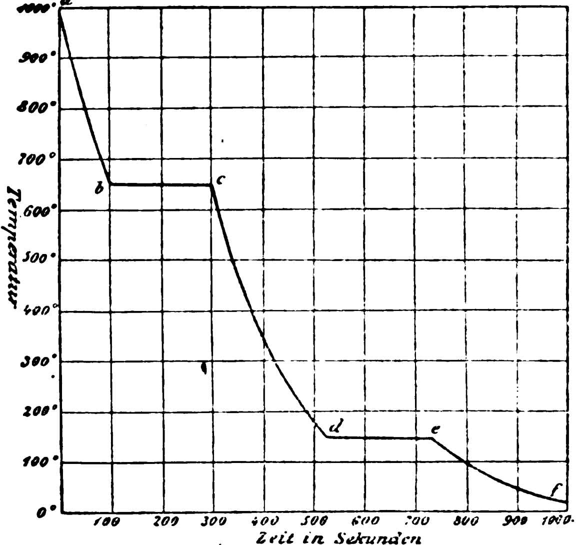


Fig. 5.

stand entsprechen möge, noch einen zweiten bei 150° liegenden erkennen. Wir entnehmen daraus, daß der Stoff bei 150° eine polymorphe Umwandlung erleidet, indem sich die bei 650° ausgeschiedenen β-Kristalle bei 150° in eine andere, die α-Form, umwandeln (die bei der niedrigsten Temperatur stabile Kristallart wird stets als α-Form bezeichnet).

Die experimentell ermittelten Abkühlungskurven weichen übrigens von den durch Fig. 4 und 5 dargestellten „idealisierten" Kurven stets ab. Insbesondere gibt sich der Endpunkt der Kristallisation oder Umwandlung niemals durch die scharfen Knicke *c* und *e* zu erkennen, es geht vielmehr das horizontale Stück durch eine Rundung kontinuierlich in das abfallende über. Der Grund für diese Abweichung liegt nach Tammann[1]) darin, daß die oben gemachte Voraussetzung bezüglich der vollkommenen Wärmeleitfähigkeit des zu untersuchenden Stoffes, sowie die Annahme, daß der thermometrische Apparat dem System keine Wärme entziehe, niemals vollständig, häufig sogar sehr unvollständig erfüllt sind.

Fig. 6 stellt eine der Abkühlungskurve Fig. 5 entsprechende, ebenfalls idealisierte Erhitzungskurve dar. Die Erhitzungskurven haben eine gewisse praktische Bedeutung zur Kontrolle der

1) Tammann, Zeitschr. f. anorgan. Chem. **47**, 291, 1905.

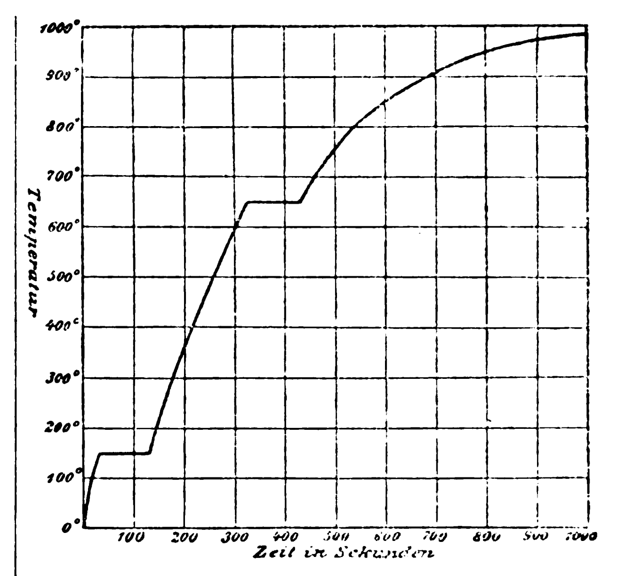


Fig. 6.

Abkühlungskurven, deren Verlauf häufig durch Unterkühlungen gestört wird, während Überhitzungen verhältnismäßig selten und dann meist in geringerem Maße auftreten. Für die zunächst folgenden Auseinandersetzungen soll stets ein idealer Verlauf der Abkühlungskurven vorausgesetzt werden, so daß es genügt, diese allein zu betrachten.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

Aug. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik. III. Bd. Festigkeitslehre. 6. Aufl. gr. 8. XVIII u. 496 S. mit 114 Figuren im Text. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner. 1918. Geheftet M. 15.—, gebunden M. 16.—

Die letzte 1914 erschienene Auflage dieses wohl am meisten verbreiteten Bandes der bewährten Föpplschen Voslesungen wurde an dieser Stelle 1915 S. 387 kurz angezeigt. In der Neuauflage hat vor allem der Abschnitt über die Formänderungsarbeit eine wesentliche Erweiterung und schärfere Begründung erfahren, wobei im Gegensatz zur früheren Fassung solche Fälle ausdrücklich ausgeschlossen werden, in denen einem vorgelegten Belastungszustand kein eindeutiger Formänderungszustand entspricht. Auch das praktisch wichtige Hakenproblem ist umgearbeitet worden, nachdem die Annahme des Verfassers, daß bei der Biegung stark gekrümmter Körper von gedrungener Gestalt nicht die Querschnittsebenen erhalten bleiben, sondern die Spannungen sich linear über den Querschnitt verteilen, mit optischen Versuchen an Glasstäben (Dissertation von Aue, Jena 1910) nicht in Einklang zu bringen war. Der Verf. führt eigene Versuche an Haken an, die keine der beiden Voraussetzungen zu stützen scheinen. Es liegt das wohl an der Unbestimmtheit des Querschnittsbegriffes bei derartigen Körpern, welche die exakte Erledigung der Aufgabe mit den Ansätzen der elementaren Biegungstheorie unmöglich macht. Da auch ein Versuch zur Lösung mit der Airyschen Spannungsfunktion, die über den Rahmen des Buches hinausgeht (Fillunger, Zeitschr. f. Math. u. Physik 1912), noch nicht zu abschließenden Ergebnissen gelangt ist, so bleibt man hierfür bis auf weiteres auf Analogieschlüsse aus Versuchen angewiesen. Sehr schön ist die am Schluß angehängte Berechnung des Drillungswiderstandes von Walzeisenkörpern, deren Querschnitte aus mehreren Rechtecken zusammengesetzt sind. Dieses Verfahren hätte man übrigens statt auf die allgemeinen Elastizitätsgleichungen, auf die leicht verständliche Theorie dünnwandiger Rohre aufbauen können, die leider auch diesmal keine Aufnahme gefunden hat. Die in allen Auflagen wiederholte fehlerhafte Abbildung der Spannungstrajektorien auf S. 114 könnte nunmehr ohne Schaden wegfallen, nachdem die richtige Zeichnung schon in der vorigen Auflage ihr gegenübergestellt wurde. Das sind indessen nur Schönheitsfehler, die den hohen Wert des Buches in keiner Weise beeinträchtigen. H. Lorenz.

Carl Cranz, Lehrbuch der Ballistik. IV. Bd. 2. Auflage. gr. 8. IV u. 174 S. m. 2 Tafeln.

Leipzig-Berlin, B. G. Teubner. 1918. Geheftet M. 16.—, gebunden M. 18.—

Der vierte Band enthält die Tabellen und Diagramme, auf die in dem schon 1918, S. 103 hier besprochenen ersten Band des Gesamtwerkes hingewiesen wird. Die gegenüber der ersten Auflage vermehrten Tabellen betreffen nicht nur rein ballistische, sondern auch einige mathematische Funktionen und Integrale von allgemeiner Bedeutung. Den Schluß bilden 9 Tafeln photographischer Momentaufnahmen über die Arbeitsweise einer Selbstladepistole, das Durchschießen eines Kupferstreifens zur Auslösung eines elektrischen Funkens, Schlieren- und Interferenzbilder der Umgebung eines fliegenden Geschosses, Luft- und Gewehrlaufschwingungen sowie fliegende Geschosse zur Feststellung der Geschwindigkeit und der Pendelungen. Das Quartformat dieses Buches ist jedenfalls handlicher als die frühere Folioausgabe. H. Lorenz.

H. Brunswig, Die Explosivstoffe. Einführung in die Chemie der explosiven Vorgänge. 3. Auflage. (Sammlung Göschen Bd. 333). Berlin und Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H. 1918. M. 1.— und 25 Pf. Teuerungszuschlag.

Der Umstand, daß das vorliegende Heftchen in verhältnismäßig kurzer Zeit bereits in dritter Auflage erscheint, ist gewiß ein Beweis, daß es in weiteren Kreisen Beachtung gefunden hat. In der Tat hat gerade die Kriegszeit für die Chemie der explosiven Vorgänge allseitiges Interesse geweckt. Brunswigs Einführung erscheint recht geeignet, eine kurze Orientierung über dieses Gebiet zu vermitteln. Da das Schriftchen vorwiegend die praktische bzw. die experimentell-technische Seite des Problems betont, ist es auch für den Nichtchemiker leicht verständlich. Dem, der sich zu weiterem Eindringen in die Materie angeregt fühlt, bringt eine dankenswerterweise der Neuauflage beigefügte Literaturübersicht die nötigen Fingerzeige.

Im allgemeinen ist gegenüber der 1914 erschienenen zweiten Auflage nicht viel geändert. Die bezüglich des Knallquecksilbers gebrachten Daten sind mit dem ausführlicher als früher behandelten Bleiazid zu einem besonderen Abschnitt zusammengefügt. Gleichfalls ist der Besprechung der „Flüssige-Luft-Sprengstoffe" ein neuer Abschnitt gewidmet, und die Angaben über Behandlung der Explosivstoffe sind erweitert.

Die auf S. 45 aufgestellte Behauptung, daß das Auftreten der Explosionswelle an die Bedingung geknüpft sei, „daß schon die Auslösung des Vorganges mit sehr großer Geschwindigkeit erfolge", ist irreführend. Es läßt sich leicht durch Versuche zeigen, daß z. B. in einem Gasgemisch unter bestimmten Bedingungen eine anfänglich relativ langsam fortschreitende Verbrennung spontan in eine Detonation übergeht. Diese mit der obigen Behauptung im Widerspruch stehende Tatsache ist von Brunswig nicht klar zum Ausdruck gebracht, wenngleich sich eine Andeutung daraufhin findet. Hier hätten die Untersuchungen von Le Châtelier, Jouget und Crussard wenigstens erwähnt werden sollen, durch die das Wesen der Explosionswelle in Gasen völlig geklärt ist.

Sprachlich inkorrekt ist die Unterschrift unter Fig. 1.

Die Änderung des Satzbildes (Fraktur statt Antiqua) kommt, wie der Vergleich mit der früheren Auflage zeigt, der Lesbarkeit nicht zugute. H. Remy.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg Dr. Wilhelm Blaschke in gleicher Eigenschaft an der Universität Tübingen, der Ing.-Chem. Dr. Ernst Berl zum ord. Professor für technische Chemie und Elektrochemie an der Technischen Hochschule Darmstadt, der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Georg Hamel in gleicher Eigenschaft an der Technischen Hochschule Berlin (unter Ablehnung der in 19, 320, 1918 gemeldeten Berufung an die Universität Tübingen), Dr. Fritz Schwarz zum Vorsteher der Abteilung für Ölprüfung bei dem Materialprüfungsamt in Berlin-Dahlem (unter Verleihung des Titels Professor), der frühere ord. Professor der Chemie an der Universität Kiel Geh. Regierungsrat Dr. Karl Harries zum ord. Honorarprofessor an der Technischen Hochschule Berlin, Professor Dr. A. W. Crossley zum Daniell-Professor für Chemie am Kings College in London, Sir Herbert Jackson zum Direktor der British Scientific Instrument Association (unter Rücktritt von der Daniell-Professur am Kings College und unter Verleihung des Titels Emeritus Professor of Chemistry in the University of London).

Berufen: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Straßburg Geh. Hofrat Dr. Friedrich Schur in gleicher Eigenschaft an die Universität Breslau.

Verliehen: Dem Privatdozenten für Chemie an der Universität Würzburg Dr. Hermann Pauly Titel und Rang eines ord. Professors, dem etatsmäßigen a. o. Professor der Chemie an der Universität Heidelberg Dr. Paul Jannasch der Titel eines ord. Honorarprofessors, dem Privatdozenten der Physik an der Universität Göttingen Dr. Heinrich Freiherr Rausch v. Traubenberg das Prädikat Professor.

Gestorben: Der frühere Professor an der Universität Süd-Karolina in Columbia Dr. William Main in Piermont New York.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und H. Th. Simon



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 40 Mark, im Ausland 45 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 60 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstraße 2.

No. 4. | 15. Februar 1919. No. 536. | 20. Jahrgang.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen; B. = Besprechungen.)

Niggli, Geometrische Kristallographie des Diskontinuums

Aus dem Vorwort

Der deutsche Kristallograph (im Gegensatz etwa zum französischen) ist gewohnt die Symmetrieeigenschaften der Kristalle so zu behandeln, als ob die zu untersuchenden Körper nicht nur scheinbare, sondern vollkommene Kontinua wären. Strukturmodelle werden meistens nur anhangsweise als Veranschaulichungsmittel in Rücksicht auf die atomistische Struktur der Materie erwähnt.

In speziellen Vorlesungen am Institut für Mineralogie und Petrographie der Universität Leipzig versuchte ich die Symmetriebeziehungen am *Diskontinuum* zu entwickeln und zum Schlusse den Übergang in die Kontinuumsbetrachtung vorzunehmen. Für die Anregung, mich mit Fragen der Kristallstruktur zu befassen, bin ich Herrn Geheimrat Prof. Dr. F. *Rinne* zu Dank verpflichtet. Durch systematischen Ausbau der Vorlesungen entstand dieses Buch. Es unterscheidet sich von kleineren, ähnlichen französischen Büchern dadurch, daß es die *Bravais*sche Einschränkung vollständig fallen läßt und in völliger Anlehnung an die *Schoenflies*schen Untersuchungen die Deckoperationen der homogenen Diskontinua erschöpfend behandelt, von dem neuerdings erschienenen Buch über Kristallstruktur von *Stephan Kreutz* durch Überwindung des *Sohncke*schen Standpunktes.

Alle möglichen Symmetrieverhältnisse homogener Diskontinua werden darin *zum erstenmal* eingehend analytisch-geometrisch untersucht. Die gewöhnlichen kristallographischen Kenntnisse sind erwünscht, bei mathematischer Veranlagung aber kaum notwendig. Vor allem soll zugleich ein Nachschlagewerk geschaffen werden, das rasch und gründlich über alle Symmetrieverhältnisse homogener Diskontinua orientiert. Tabellen, sowie ein eingehendes Sachregister, werden den Gebrauch erleichtern.

Die Anlage des Buches ist folgende: Das erste Kapitel bietet eine prinzipielle Charakterisierung homogener, starrer Diskontinua. Es soll die Begriffe und Vorstellungen präzisieren, mit dem Gegenstand der Betrachtung vertraut machen. Im zweiten Kapitel werden in allgemeiner Weise die Symmetrieverhältnisse der Diskontinua erläutert. Eine schematische Ableitung der Raumsysteme gibt über die vorhandene

Mannigfaltigkeit Aufschluß. Das dritte Kapitel vermittelt eine Einzeldarstellung dieser Raumsysteme unter Erwähnung all derjenigen Eigenschaften, welche für die praktische Verwendung von Bedeutung sind. Schließlich werden die gewonnenen Erkenntnisse im letzten Kapitel auf das Problem der Kristallstrukturlehre angewandt. Tabellen werden die Bestimmung des Raumsystems einer Kristallart aus Daten röntgenometrischer Untersuchungen gestatten.

Zitate finden sich im allgemeinen im Text nicht vor, in einem Schlußwort wird die historische Entwicklung der Kristallstrukturlehre kurz erwähnt und all jener Forscher gedacht, deren Arbeiten die Grundlage für diese Darstellung bilden.

Ich habe mich bemüht, die Erörterungen kurz und sachlich gedrängt durchzuführen, bin aber vor Wiederholungen nicht zurückgeschreckt, wenn mir diese im Interesse der Handlichkeit des Buches wünschenswert erschienen. Zur Kristallstrukturbestimmung wird man hauptsächlich Kapitel III und die Tabellen von Kapitel IV benutzen, und da habe ich zu vieles Aufeinanderrückbeziehen zu vermeiden gesucht.

Das Manuskript war vor Weihnachten 1917 vollständig abgeschlossen. Verlag und Druckerei sind mir in jeder Beziehung weitgehend entgegengekommen. Ich schulde ihnen herzlichen Dank. Dennoch ließ es sich nicht vermeiden, daß der Druck des an sich ja schwierigen Satzes nur langsam fortschritt. So entschloß ich mich auf Anraten des Verlages, und um den Wünschen mancher Fachgenossen entgegenzukommen, die bis jetzt vorliegenden fertigen Druckbogen gewissermaßen als ersten Teil ausgeben zu lassen. Der zweite und Schlußteil wird ungefähr von gleichem Umfange sein und im Frühjahr 1919 erscheinen. Es liegt im Aufbau des Buches begründet, daß die den Fachgenossen, Physiker und Chemiker wohl besonders interessierenden Folgerungen der analytisch-geometrischen Untersuchungen erst im zweiten Teil gezogen werden können. Wie die Resultate zur Strukturbestimmung anzuwenden sind, mag bis dahin in einem kleinen Aufsatz der „Physikalischen Zeitschrift" 1918, Seite 225—234 nachgelesen werden. Das diesem ersten Teil beigegebene Inhaltsverzeichnis gibt auch über die im Druck befindliche Fortsetzung Aufschluß.

Tübingen, im Oktober 1918

Paul Niggli



Niggli, Geometrische Kristallographie des Diskontinuums

Inhaltsverzeichnis des ganzen Buches

Verlag von Gebrüder Borntraeger in Berlin
W 35 Schöneberger Ufer 12a

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 4. 15. Februar 1919. Redaktionsschluß für No. 6 am 27. Februar 1919. 20. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Das Leitvermögen verdünnter mischkristallfreier Legierungen.

Von H. C. Burger.

Kürzlich hat Herr K. Lichtenecker[1]) eine Notiz veröffentlicht über das Leitvermögen mischkristallfreier Legierungen. Er gibt in dieser Notiz die Grenzen der Werte an für das Leitvermögen einer Legierung beliebiger Konzentration. Derselbe hat schon früher[2]) das Leitvermögen für eine Legierung gleicher Volumteile der beiden Komponenten berechnet, unter der Voraussetzung, daß die beiden Metalle in Würfel schachbrettartig angeordnet sind. Er spricht die Meinung aus, daß das erhaltene Resultat auch eine gute Annäherung gibt für den Fall, daß die Begrenzung der Gebiete der beiden Metalle in einer Legierung beliebig gestaltet ist.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, zu zeigen, daß die Gestalt der Grenze zwischen den Metallen einen sehr wesentlichen Einfluß auf das Leitvermögen hat. Die Berechnung des Leitvermögens bei beliebiger Konzentration stößt auf große Schwierigkeiten. Wir werden uns deshalb beschränken auf den Fall, daß die Konzentration einer der Komponenten einen sehr kleinen Wert hat. Dann wird der Stoff, welcher in geringer Menge anwesend ist und den wir durch den Index 2 bezeichnen wollen, in isolierten, kleinen und einfach zusammenhängenden Räumen in dem anderen Stoffe (1) eingelagert sein. Das gesamte Volumen derartiger Partikelchen in ein totales Volumen V sei xV. Es ist also x eine kleine Zahl.

In dem durch den Index 1 bezeichneten Bestandteil sind das Potential φ, die Feldstärke $\mathfrak{E}$ und der Strom $\mathfrak{i}$ verknüpft durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{E} = -\nabla\varphi; \quad \mathfrak{i} = \sigma_1 \mathfrak{E}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{i} = 0, \qquad (1)$$

wenn σ_1 das spezifische Leitvermögen des ersten Stoffes darstellt. Ersetzt man in dieser Formel σ_1 durch σ_2, so erhält man die Gleichungen für den Stoff 2.

Die Werte von φ, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{i}$ sind der unmittelbaren Beobachtung nicht zugänglich; wohl aber ihre räumlichen Mittelwerte:

$$\overline{\mathfrak{E}} = \frac{1}{v}\int_v \mathfrak{E}\, dv, \text{ usw.}$$

Das Volumen v, worüber integriert wird, muß dabei viele Teilchen des zweiten Stoffes enthalten.

Durch Mittelwertsbildung ergibt sich aus den Gleichungen (1):

$$\overline{\mathfrak{E}} = -\nabla\overline{\varphi}, \quad \overline{\mathfrak{i}} = \overline{\sigma\mathfrak{E}}, \quad \operatorname{div}\overline{\mathfrak{i}} = 0. \qquad (2)$$

Setzt man:

$$\overline{\sigma\mathfrak{E}} = \sigma\overline{\mathfrak{E}}, \qquad (3)$$

dann hat die Konstante σ die Bedeutung, daß die Legierung wie ein homogenes Metall mit dem Leitvermögen σ zu betrachten ist.

Wenn $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ die mittleren Feldstärken in den Stoffen 1 und 2 darstellen, hat man

$$\overline{\mathfrak{i}} = \overline{\sigma\mathfrak{E}} = \frac{1}{v}\int_v \sigma\mathfrak{E}\, dv =$$

$$= \frac{1}{v}\left(\sigma_2 \overline{\mathfrak{E}}_2 x v + \sigma_1 \overline{\mathfrak{E}}_1 (1-x) v\right),$$

oder

$$\sigma = \frac{\overline{\mathfrak{i}}}{\overline{\mathfrak{E}}} = \frac{\overline{\sigma\mathfrak{E}}}{\overline{\mathfrak{E}}} = \frac{\sigma_2 \overline{\mathfrak{E}}_2 x + \sigma_1 \overline{\mathfrak{E}}_1 (1-x)}{\overline{\mathfrak{E}}}.$$

Weiter ist:

1) K. Lichtenecker, diese Zeitschr. 19, 374, 1918.
2) K. Lichtenecker, diese Zeitschr. 10, 1005, 1909.

$$\overline{\mathfrak{E}} = \frac{1}{v}\int\limits_v \mathfrak{E} dv = \overline{\mathfrak{E}_2} x + \overline{\mathfrak{E}_1}(1-x).$$

Setzt man nun noch:

$$\frac{\overline{\mathfrak{E}_2}}{\overline{\mathfrak{E}_1}} = k, \tag{4}$$

so ergibt sich für das Leitvermögen der Legierung:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 - x(\sigma_1 - \sigma_2 k)}{1 + (k-1)x}. \tag{5}$$

Diese Formel ist gültig für einen beliebigen Wert von x. Könnte man das Verhältnis $\frac{\overline{\mathfrak{E}_1}}{\overline{\mathfrak{E}_2}} = k$ berechnen, so wäre es möglich, das Leitvermögen σ als Funktion der Konzentration x zu finden.

Für kleine Werte von x findet man aus (5):

$$\sigma = \sigma_1 - kx(\sigma_1 - \sigma_2). \tag{6}$$

Die wechselseitige Entfernung der Teilchen des Stoffes 2 wird dann groß sein gegen die Dimensionen der Teilchen. Der wechselseitige Einfluß der Teilchen darf daher vernachlässigt werden. Das elektrische Feld in einem Punkt, das nicht in der unmittelbaren Nähe eines dieser Teilchen liegt, ist also merklich homogen. In der Umgebung jedes Teilchens ist dieses homogene Feld gestört.

Es sei $\mathfrak{A}$ dieses ungestörte Feld. Die Störung erstreckt sich nur über ein Volumen, dessen Größe von der Ordnung des Volumens eines Teilchens des zweiten Stoffes ist. Jenes Volumen ist klein gegen das Volumen des zweiten Stoffes, das damit korrespondiert. Deshalb unterscheidet sich das mittlere Feld $\overline{\mathfrak{E}_1}$ nur in Größen erster Ordnung in x von dem homogenen Felde $\mathfrak{A}$. Beschränkt man sich auf Glieder erster Ordnung in x, so ergibt sich also aus (6) und (4):

$$\sigma = \sigma_1 - \frac{\overline{\mathfrak{E}_2}}{\mathfrak{A}} x(\sigma_1 - \sigma_2). \tag{7}$$

Somit erübrigt es sich, die mittlere Feldstärke $\overline{\mathfrak{E}_2}$ in einem Teilchen des zweiten Stoffes zu berechnen, wenn in dem umgebenden Stoff 1 die Feldstärke auf unendlichen Abstand den konstanten Wert $\mathfrak{A}$ hat.

Wir werden die Berechnung ausführen für Teilchen mit der Gestalt eines dreiaxigen Ellipsoids mit den Halbachsen a, b und c. Sind die Komponenten der Feldstärke $\mathfrak{A}$ nach den Axen a, b und c eines Teilchens $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$, so sind die Komponenten des homogenen inneren Feldes:

$$\mathfrak{B}_x = \frac{\mathfrak{A}_x}{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1\right)P + 1}, \quad \mathfrak{B}_y = \frac{\mathfrak{A}_y}{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1\right)Q + 1},$$

$$\mathfrak{B}_z = \frac{\mathfrak{A}_z}{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1\right)R + 1},$$

wenn man setzt:

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)D}, \qquad Q = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)D},$$

$$R = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{ds}{(c^2+s)D},$$

und

$$D = \sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)}\text{[1]}.$$

Wenn die Richtungscosinus des äußern Feldes in bezug auf die Axen der Ellipsoide α_1, α_2, α_3 sind, so ist die Komponente des inneren Feldes in der Richtung des äußeren Feldes $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}\left\{\frac{\alpha_1^2}{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-1\right)P+1} + \frac{\alpha_2^2}{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-1\right)Q+1} + \frac{\alpha_3^2}{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-1\right)R+1}\right\}.$$

Den Mittelwert dieses Ausdruckes, wenn man dem Teilchen alle möglichen Orientierungen gibt, erhalten wir, indem wir $\overline{\alpha_1^2} = \overline{\alpha_2^2} = \overline{\alpha_3^2} = \frac{1}{3}$ setzen. Da, wie leicht ersichtlich ist, die Komponente des inneren Feldes $\mathfrak{B}$, welche senkrecht zum äußeren Felde steht, verschwindet, so ist:

$$\overline{\mathfrak{E}_2} = \frac{1}{3}\mathfrak{A}\left\{\frac{1}{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-1\right)P+1} + \frac{1}{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-1\right)Q+1} + \frac{1}{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-1\right)R+1}\right\}.$$

Also wegen (7):

$$\sigma = \sigma_1 - \frac{x(\sigma_1-\sigma_2)}{3}\left\{\frac{1}{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-1\right)P+1} + \frac{1}{\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_1}-1\right)Q+1} + \frac{1}{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-1\right)R+1}\right\} \tag{8}$$

Dieser Ausdruck hängt nur ab von dem Ver-

1) Vgl. z. B. Riemann-Weber I § 159, S. 395, Gl. 10.

hältnis der Halbaxen a, b und c. Sie hat daher auch Gültigkeit, wenn alle Teilchen nicht kongruent, sondern ähnlich sind. Gibt es ellipsoidische Teilchen verschiedener Form, so muß man den Mittelwert des Ausdruckes (8) nehmen. Bei der Mittelwertsbildung muß für jede Form die Wahrscheinlichkeit berücksichtigt werden. Diese Wahrscheinlichkeit ist der Zahl der Teilchen dieser Form proportional.

Setzt man in (8) $a = b = c$, so erhält man für kugelförmige Teilchen:

$$\sigma = \sigma_1 - x \frac{3\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2)}{2\sigma_1 + \sigma_2}. \quad (9)$$

Die entsprechende Formel für plattenförmige Teilchen erhält man, indem man $b = c = \infty$ setzt. Das ergibt:

$$\sigma = \sigma_1 - x \frac{(\sigma_1 + 2\sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)}{3\sigma_2}. \quad (10)$$

Sind die Teilchen kreisrunde Stäbchen, so muß man $a = b$ und $c = \infty$ setzen und erhält:

$$\sigma = \sigma_1 - x \frac{(5\sigma_1 + \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)}{3(\sigma_1 + \sigma_2)}. \quad (11)$$

Die Formeln (9), (10) und (11) könnten auch direkt aus (7) abgeleitet werden. Man sieht dann leicht ein, daß die angegebenen Formeln auch gültig sind für schwach gekrümmte Platten bzw. Stäbchen, und daß weiter die Platten nicht ellipsenförmig zu sein brauchen[1]).

Das Leitvermögen einer verdünnten Legierung ist also nicht nur abhängig von der Konzentration und dem spezifischen Leitvermögen der Komponenten, sondern auch sehr wesentlich von der Form der Begrenzung beider Stoffe. Das wird wahrscheinlich auch der Fall sein für Legierungen beliebiger Konzentration. Ohne eine gewisse Kenntnis dieser Begrenzung ist es daher nicht möglich, das Leitvermögen zu berechnen. Dem von Herrn Lichtenecker gefundenen Wert für eine 50 proz. Legierung kommt daher keine große Bedeutung zu.

1) Es verdient Beachtung, daß die gefundenen Werte für σ zwischen den von Lichtenecker angegebenen Grenzen liegen.

Utrecht, Instituut voor theoretische natuurkunde; Oktober 1918.

(Eingegangen 4. November 1918.)

Antwort auf die Bemerkung von R. Bär zu der Arbeit: „Größen und elektrische Ladungen von kleinen Schwefel-, Selen- und Quecksilberkugeln, bestimmt aus deren Fallgeschwindigkeit und Farbe“[1]).

Von Irene Parankiewicz.

In seiner Bemerkung zu meiner Arbeit: „Größen und elektrische Ladungen von kleinen Schwefel-, Selen- und Quecksilberkugeln“[2]) berechnet R. Bär aus den von mir publizierten Messungsprotokollen einiger kleinster Hg-Kugeln, deren Ladungen unter Zugrundelegung der Theorie der Brownschen Bewegung und glaubt — obwohl die von mir nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetze berechneten Ladungen dieser Partikel ungefähr den 2000. Teil des angeblichen Elektrons ergeben — auf diesem Wege den Schluß ziehen zu können, daß die Ladungen in die Größenordnung des Elementarquantums fallen.

Nun sagen vor allem die von R. Bär angegebenen Ladungen $1{,}03 \cdot 10^{-10}$, $2{,}06 \cdot 10^{-10}$, $2{,}19 \cdot 10^{-10}$, $2{,}65 \cdot 10^{-10}$, $5{,}50 \cdot 10^{-10}$ el.-st. E., nichts über die Größenordnung des Elektrons aus, weil man bei der Präzision, welche die Bestimmung des angeblichen Elektrons heute für sich in Anspruch nimmt, nur Werte im Intervalle $4-5 \cdot 10^{-10}$ el.-st. E., d. h. nur Ergebnisse solcher Ladungsmessungen, deren Fehler kleiner als $\frac{1}{2} \cdot 10^{-10}$ el.-st. E. ist, als Aussagen über die Größenordnung des Elektrons ansehen könnte.

Die von R. Bär erhaltenen Ladungen würden demnach höchstens nur die zu wiederholten Malen an Metallteilchen und neuerdings von mir auch am Öl (J. Parankiewicz, Wiener Akademieberichte **126**, 1263, 1917; Ann. d. Phys. **53**, 564, 1917) konstatierte Tatsache bestätigen, daß sich auch nach der Theorie der Brownschen Bewegung Unterschreitungen der Ladungen des Grammäquivalentes der Elektrolyse $Ne = 290 \cdot 10^{+12}$ e.-st. E. und infolgedessen die Unterschreitungen der elementaren Ladung ergeben. Ich verweise diesbezüglich nur auf das Au-Partikel Nr. VII von Konstantinowsky, an welchem aus 86 Einzelmessungen von Fall- und Steigzeiten $Ne = 36{,}6 \cdot 10^{+12}$ e.-st. E. (entsprechend einer elementaren Ladung $e = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ e.-st. E.[3]) resultiert (D. Konstantinowsky, Wiener Akad. Ber. **123**, 1736, Tabelle 7, 1914) und auf das Ölpartikel Nr. 21, an welchem sich aus 71 Einzelmessungen Ne zu $90{,}4 \cdot 10^{12}$ e.-st. E.

1) R. Bär, diese Zeitschr. **19**, 373, 1918.
2) Diese Zeitschr. **18**, 567, 1917.
3) Bei der Annahme einer Loschmidtschen Zahl $N = 60{,}6 \cdot 10^{22}$.

(entsprechend einer elementaren Ladung $e = 1,49 \cdot 10^{-10}$ e.-st. E.) ergibt (l. c. Tabelle III S. 1277).

Da aber R. Bär der Berechnung nach der Brownschen Bewegung doch mehr Zuverlässigkeit als den Resultaten aller anderen zur Größen- und Ladungsbestimmung herangezogenen Theorien zuzuschreiben scheint, so möchte ich hier, genaueren Untersuchungen über die Brownsche Bewegung, die bereits im Gange sind, vorgreifend, erstens bezüglich der Berechnung der Ladungen nach der Theorie der Brownschen Bewegung, zweitens bezüglich der Diskrepanz zwischen den Resultaten dieser Theorie und den Resultaten des Fallgesetzes und drittens bezüglich der Frage nach der Richtigkeit und Zuverlässigkeit der nach dem Fallgesetz berechneten Ladungen folgendes bemerken:

1. R. Bär berechnet Ladungen der erwähnten Partikel — obwohl ihm das unzulässig erscheint — aus 10—18 Werten der Fall- und Steigzeiten und glaubt, indem er die Fehlerschätzung von Schrödinger auf so wenig Einzelwerte anwendet, daß seine Ladungen auf 40—70 Proz. genau sind. Nun ist die Brownsche Bewegung ebenso wie die Fehlerschätzung von Schrödinger ein Ergebnis der Statistik. Die aus ihnen erhaltenen Resultate haben nur dann einen Sinn, wenn eine umfangreiche Statistik von Einzelmessungen vorliegt. Der nach der Fehlerschätzung von Schrödinger errechnete mittlere Fehler ist bei so wenig Werten „aller Wahrscheinlichkeit nach" dem wahren Fehler der einzelnen Meßreihe nicht einmal annähernd gleich. So zeigt z. B. auch die Diskussion zwischen Zerner und Fletcher[1]), daß bei so wenig Werten sogar ein einziger Wert das Resultat bedeutend beeinflußt[2]).

2. Die Tatsache, daß die Theorie der Brownschen Bewegung und das Stokes-Cunninghamsche Fallgesetz diskrepante Resultate liefern, ist von Ehrenhaft[3]) und Konstantinowsky[4]) zunächst an Metallpartikeln konstatiert worden. Und zwar liefert die Theorie der Brownschen Bewegung an Metallteilchen größere Werte der Radien und der Ladungen als den Teilchen aus ihren Fall- bzw. Fall- und Steiggeschwindigkeiten nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetze entsprechen würde. Ferner hat Konstantinowsky (l. c. S. 1739), hervorgehoben, daß diese Diskrepanz beider Berechnungsarten in niedrigerer Größenordnung, d. h. an kleineren Partikeln immer größer wird, was auch durch die Erfahrung an den von mir gemessenen Hg-Teilchen bestätigt wird. Das unaufgeklärte Auftreten dieser Diskrepanz wird aber durch die Tatsache noch verwickelter, daß sich am Öl auch Abweichungen in entgegengesetztem Sinne wie an Metallen ergeben[1]).

1) F. Zerner, diese Zeitschr. **17**, 165, 1916; H. Fletcher, Phys. Rev. **32**, 304. 1911.

2) Als Beispiel sei ferner das Partikel Nr VIII von Konstantinowsky (l. c.) angeführt, an welchem aus 13 Fall- und 63 Steigwerten eine Ladung $e = 3,4 \cdot 10^{-10}$ e.-st. E. resultiert, während sich an demselben Partikel aus sechs ersten Fall- und sechs ersten Steigwerten $e = 6,88 \cdot 10^{-10}$ e.-st. E, aus sechs letzten Fall- und sechs letzten Steigwerten $e = 5,16 \cdot 10^{-10}$ e-st. E. ergibt. Aus weniger Werten resultieren also Ladungen, die untereinander und von der Ladung, die aus einer großen Anzahl von Beobachtungen berechnet wird, vollkommen verschieden sind.

3) F. Ehrenhaft, Wiener Akad. Ber. **123** (IIa), 55, 1914; Ann. d. Phys. **44**, 657, 1914.

4) D. Konstantinowsky, Wiener Akad. Ber. **123** (IIa), 1697, 1914; Ann. d. Phys. **46**, 261, 1915.

Die Nichtübereinstimmung der beiden genannten Methoden zwingt nun vor allem dazu, auch die Brownsche Bewegung, bevor sie einer Größen- und Ladungsbestimmung zugrunde gelegt wird, einer gründlichen Untersuchung zu unterziehen, der das Stokes-Cunninghamsche Gesetz bereits standgehalten hat. Darauf werde ich im nachfolgenden noch zusammenfassend zurückkommen.

3. Die wichtigsten Gründe aber, warum die Werte aus dem Fallgesetze als die einzig zuverlässigen angesehen werden müssen, sind die folgenden:

Die Ladungsbestimmung eines Kügelchens läßt sich auf die Größenbestimmung desselben und die Bestimmung seiner Geschwindigkeit im elektrischen Felde zurückführen. Der Kernpunkt des Problems ist also die Größenbestimmung. Nun sind es bisher drei Wege, welche die Größenbestimmung zulassen: a) die Intensität des von dem Teilchen zerstreuten Lichtes, b) die Farbe desselben, c) seine Fallgeschwindigkeit. Die beiden letzteren bilden auch Grundlagen zu einer quantitativen Größenbestimmung des Teilchens: Die Beugungstheorie des Lichtes gibt die Größe des Probekörpers aus seiner Farbe an, das Fallgesetz aus seiner Fallgeschwindigkeit. Nun stimmen die aus der Farbe und Fallgeschwindigkeit nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetze berechneten Radien der Metall-[2]) und der dielektrischen[3]) Teilchen überein, und stützen einander, während die Theorie der Brownschen Bewegung meistens zu große Werte liefert.

An den von R. Bär herangezogenen Hg-Kügelchen ergibt sich folgendes Resultat:

1) I. Parankiewicz, Wiener Akad. Ber. **126** (IIa), 1249, 1917; Ann. d. Phys. **53**, 551, 1917.

2) F. Ehrenhaft, diese Zeitschr **15**, 953, 1914; diese Zeitschr. **16**, 227, 1915; Ann. d Phys. **56**, 1, 1918; G. Laski, Wiener Akad. Ber. **123** (IIa), 601, 1917; Ann. d. Phys **53**, 1, 1917.

3) I. Parankiewicz, diese Zeitschr. **18**, 567, 1917; Wiener Akad. Ber. **137**, 1918; Ann. d. Phys. 1918.

Tabelle.

Nr. des Partikels	Beobachtete Farbe	Radius $a \cdot 10^6$ cm		
		Nach dem Widerstandsgesetze	Nach der Theorie der Brownschen Bewegung	Nach der Beugungstheorie
12	tiefblau	2,03	18,90	höchstens 3
10	tiefblau	2,15	20,20	höchstens 3
9	tiefblau	2,73	11,14	höchstens 3
1	tiefblau	2,89	16,87	höchstens 3
13	blau	4,25	21,80	3 bis 4

Man sieht aus dem Vergleiche der Kolonnen 3 und 4, daß die Theorie der Brownschen Bewegung für diese Kügelchen 5—10mal größere Radien liefert, als das Stokes-Cunninghamsche Gesetz.

Hätte also R. Bär auch die Größen dieser Partikel nach der Theorie der Brownschen Bewegung berechnet und sich nicht bloß auf die Ladungsbestimmung beschränkt, so hätte er erkannt, daß seine Schlußfolgerungen bezüglich ihrer Ladungen nicht stichhaltig sind.

An diesen kleinsten Partikeln, deren Beobachtung infolge ihrer dunklen tiefblauen Farbe und infolge ihrer sehr geringen Lichtintensität höchst mühsam ist, — sie liegen an der Grenze des derzeit Erreichten — resultieren nämlich nach der Theorie der Brownschen Bewegung Radien von *Hg*-Kugeln einer Größenordnung, die nicht nur nach der Beugungstheorie des Lichtes, sondern auch nach der elementarsten Erfahrung des Mikroskopikers die Eigenfarbe des metallischen Quecksilbers haben und infolge ihrer Größe außerordentlich stark glänzend und außerordentlich lichtintensiv erscheinen müßten. So müßte z. B. das tiefblaue *Hg*-Partikel Nr. 12, dessen Radius nach der optischen Theorie höchstens $3 \cdot 10^{-6}$ cm betragen kann, und sich nach dem Fallgesetz auch wirklich in dieser Größenordnung ergibt, nach der Theorie der Brownschen Bewegung den Radius $19 \cdot 10^{-6}$ cm (!) haben. So große *Hg*-Kugeln kommen bei der Herstellung durch Verdampfung von Quecksilber unter den bei Ehrenhaftscher Versuchsanordnung obwaltenden Umständen nur äußerst selten zum Vorschein und würden etwa den größten von F. Ehrenhaft („Über die Quanten der Elektrizität", 1914) beobachteten *Hg*-Kugeln mikroskopischer Größenordnung entsprechen.

Die Resultate des Fallgesetzes, gestützt auf die Ergebnisse der optischen Theorie, müssen also als die zuverlässigen der Ladungsbestimmung zugrunde gelegt werden.

Außer diesem Kriterium, das sich im einheitlichen Zusammenhange zwischen Farbe und Fallgeschwindigkeit der Probekörper ausspricht, und auch — wie erwähnt — an anderen Materialien (Gold, Silber, Schwefel) zur vollkommenen Übereinstimmung geführt hat[1]), gibt es auch eine Reihe von weiteren Beweisen der Richtigkeit des Stokes-Cunninghamschen Fallgesetzes. So haben es bekanntlich 1. M. Knudsen, S. Weber und Mc. Keehan auf Grund rein mechanischer Versuche als richtig erkannt. 2. J. Roux (Ann. chim. phys. **29**, 69, 1913) und hiernach O. W. Silvey (Phys. Rev. N. S. **7**, 106, 1916) haben die Gültigkeit des Stokes-Cunninghamschen Gesetzes durch die Bestimmung der Größe eines und desselben Teilchens, das zuerst in einem gasförmigen und sodann in einem flüssigen Medium fiel, bewiesen. 3. Ferner ist ein Beweis des Gesetzes in dem Umstande zu sehen, daß, wie ich es konstatieren konnte, die aus den Fallgeschwindigkeiten bei verschiedenen Gasdrucken nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetze berechneten Radien kleinster farbiger Schwefelpartikel mit den Radien, die für Partikel der betreffenden Farbe aus der optischen Theorie erschlossen werden können, übereinstimmen (diese Zeitschr. **18**, 567, 1917), und 4. habe ich neuerdings (diese Zeitschr. **19**, 280, 1918) auch auf einem unabhängigen Wege einen Beweis für die Richtigkeit des Fallgesetzes erbracht, indem ich die Größe eines und desselben Partikels bei verschiedenen Gasdrucken[2]) im Kondensator aus den zugehörigen Fallgeschwindigkeiten des Partikels nach dem genannten Widerstandsgesetze berechnet habe. Die vollkommene Übereinstimmung der so erhaltenen Radien eines und desselben Partikels beweist die Richtigkeit des Fallgesetzes.

Weil also die Divergenz der nach dem Widerstandsgesetz und der nach der Theorie der Brownschen Bewegung berechneten Radien bzw. Ladungen der *Hg*-Partikel nach unseren bisherigen Erfahrungen zu erwarten war und sich — wie die Erfahrung lehrt — in so niedriger Größenordnung umso größer ergeben mußte, weil ferner Kriterien vorliegen, die das Fallgesetz mit Hilfe anderer Theorien und auch unabhängig von denselben als vollkommen zuverlässig nachweisen, während die Theorie der Brownschen Bewegung zu aufklärungsbedürftigen Diskrepanzen führt, und weil schließlich die von R. Bär berechneten Ladungen

1) Vgl. auch J. Parankiewicz, Ann. d. Phys. **57**, 489, 1918.

2) Es ist seinerzeit bekanntlich auch E. Meyer und D. Gerlach (Festschrift J. Elster und H. Geitel) gelungen, ein und dasselbe allerdings größere Teilchen bei verschiedenen Gasdrucken zu behandeln.

höchstens nur die Tatsache bestätigen können, daß auch nach der Theorie der Brownschen Bewegung die Unterschreitungen des Elektrons resultieren, sehe ich mich dazu gezwungen, meine Schlüsse nochmals zu betonen und dieselben aufrecht zu erhalten.

Wien, I. phys. Inst. der Universität. Oktober 1918.

(Eingegangen 26. Oktober 1918.)

Die Gründe des Kampfertanzens und verwandter Erscheinungen.

Von J. Geppert.

Es ist seit langer Zeit bekannt, daß Substanzen, wie Kampfer, Menthol und Bernsteinsäure auf Wasser tanzen. Für Kampfer nahm Prevost die Dampfspannung, M. M. Richter die Lösung als Ursache an[1]). Rob. Weber[2]) fand, daß eine Reihe von kristallisierten Teerfarbstoffen auf Wasser sehr energische Bewegungen ausführen. „Als Ursachen der Bewegung sind nachgewiesen: Ein Zusammenwirken von Natur, Bau und Größe des festen Körpers, seine Kristallisation, eine verschiedene Löslichkeit, je nach der Kristallfläche, explosionsartige Auflösungsvorgänge. Ebenso bewegen sich entstehende Kristalle ..." Weiterhin beobachtete Schaum[3]) Bewegungen von Kristallen an der Grenze von Wasser oder Säure gegen Quecksilber. Cyankalium, Kaliumnitrat und Harnstoff gaben die Erscheinung bereits unter Wasser, mehrere andere Substanzen, wie namentlich übermangansaures Kalium und Kaliumdichromat unter Säure. Wurden die Kristalle mit Paraffin überzogen, in dem auf beiden Enden an entgegengesetzten Seiten Öffnungen gelassen waren, so bewegten sie sich wie ein Segnersches Wasserrad. Es handelte sich demnach um ein Rückstoßphänomen, dessen Grund ein „Lösungsstrom" ist. Rotiert demnach ein nicht mit Paraffin überzogener Kristall, so ist anzunehmen, daß der Lösungsstrom an einzelnen Stellen desselben besonders stark ist. Die Ursachen der Rotationen auf der Wasseroberfläche hat Schaum nicht untersucht. — Endlich machte Richter (l. c.) auf Beobachtungen von Franklin und den Brüdern Weber (1823) aufmerksam, die er (1893) bestätigte, ohne daß seine Mitteilung Beachtung gefunden hätte. Wirft man nämlich einen, mit Öl imprägnierten, leichten Gegenstand auf Wasser, so rotiert er. Die Brüder Weber zeigten, daß einseitige Imprägnierung des Gegenstandes eine Bewegung desselben nach der entgegengesetzten Seite hervorruft. Da sich nun die fetten Öle über die Wasseroberfläche verbreiten, so war es klar, daß es sich um ein Rückstoßphänomen handelt, das unter Bedingungen, die den von Schaum festgestellten analog sind, zu Rotationen führt.

Mir waren die soeben besprochenen Arbeiten unbekannt, als ich beim Studium von Oberflächenausbreitungen auf Erscheinungen stieß, die den soeben beschriebenen analog waren. Es gibt nämlich unter den Anilinfarben eine Anzahl, deren Lösungen sehr ausgesprochene Oberflächenverbreitung aufweisen. Warf ich nun die betreffenden Farbstoffe in Substanz auf Wasser, so rotierten einige darunter sehr deutlich. Auch hier bestand demnach ein Zusammenhang zwischen Bewegung und Oberflächenausbreitung. Der Unterschied gegenüber den Versuchen mit Öl besteht darin, daß es sich bei diesen um die Ausbreitung einer ungelösten Flüssigkeit, bei den Anilinfarben aber um die Ausbreitung einer Lösung handelt. Doch war der Effekt für die Rotation offenbar der gleiche. Da indes, wie gesagt, der Zusammenhang zwischen Oberflächenausbreitung und Rotation bei den Farben kein konstanter war, habe ich die ganze Frage einer genaueren Untersuchung unterzogen, und hoffte dabei auch die Ursachen für das Tanzen des Kampfers usw. klarstellen zu können.

Hinsichtlich der Methodik meiner Versuche möchte ich folgendes vorausschicken: Die wesentlichste Bedingung ist selbstverständlich Reinheit der benutzten Wasseroberfläche, und diese hängt wieder in erster Linie von der Reinheit des benutzten Gefäßes ab. Ich wählte für meine Versuche gewöhnlich Petrischalen von 20 cm Durchmesser mit niedrigem Rande. Nach der üblichen Reinigung werden sie mit Neradol[1]) ausgewischt, und mit Wasser kräftig ausgespült. Dann wird siedendes Wasser eingefüllt, bis es über den Rand läuft, und hierauf durch kaltes ersetzt. Zum Schluß wird destilliertes Wasser eingefüllt. Der Rand der Schale darf nicht mit den Händen berührt werden. — Wie aus den Versuchen der Brüder Weber ersichtlich, würden Versuche mit Substanzen, die an Trägern fixiert werden, anzustellen sein. Ich nahm dazu meist Deckgläser (2,5 : 3 cm), seltener Holzbrettchen von rechteckiger Gestalt. Der Regel nach wird eine Kante mit der Sub-

1) M. M. Richter, Die Lehre von der Wellenberuhigung. Berlin, R. Oppenheim. 1894.

2) Rob. Weber, diese Zeitschr. 1, 56, 1900.

3) Schaum, Über Bewegungserscheinungen sich auflösender Kristalle. Diese Zeitschr. 1, 6, 1900.

1) J. Geppert, Neradole als Reinigungsmittel. Zeitschr. f. angew. Chemie 30, 25, 85, 1917.



stanz beschickt. Am einfachsten ist es, zu dem Zweck eine Lösung der Substanz in Alkohol, Äther oder Chloroform anzuwenden, die Kante mehrfach hineinzutauchen, bis sie ordentlich überzogen ist, und dann trocknen zu lassen. Bei schmelzbaren Substanzen taucht man die Kante in die Schmelze und läßt erkalten. Endlich kann man sie mit geschmolzenem Wachs überziehen, das selbst auf Wasser keine Wirkung ausübt, und die Substanz darauf pulvern.

Ich begann die Untersuchungen mit Anilinfarbstoffen. Sie müssen chemisch rein sein, während die käuflichen häufig Zusätze enthalten, die die Oberfläche verunreinigen. Ich verdanke der Bad. Anilin- und Sodafabrik eine Anzahl derartiger Farbstoffe. Um zunächst die Ausbreitung der Lösung zu untersuchen, ist es am zweckmäßigsten, diese aus einer feinen Kapillare auf die Oberfläche auslaufen zu lassen. Dabei stellen sich die größten Unterschiede heraus. Rhodamin *B* und Kristallviolett z. B. verbreiten sich sofort über die gesamte Oberfläche, dagegen Methylenblau nur über wenige Zentimeter im Umkreis. Dem entspricht nun vollkommen die Reaktion am Träger. Man sieht unmittelbar, wie die geringe Ausbreitung des Methylenblaus eine schwache, und die starke des Kristallvioletts, eine sehr viel schnellere Bewegung auslöst. Die erreichten Leistungen sind nicht unbedeutend. Ein Zigarrenbrettchen mit Dimensionen von 4 : 20 cm, dessen breite Kante mit Kristallviolett an Wachs beschickt war, legte in einer größeren Porzellanwanne in der Sekunde 7 cm zurück. Die entsprechenden Rotationen der Farbstoffe selbst waren ursprünglich inkonstant. Dampft man aber die wäßrigen Lösungen derselben im Porzellanschälchen zur Trockne ein, und pulverisiert grob, so tanzen jetzt die Partikel auf Wasser, und zwar in der Tat desto heftiger, je größer die Oberflächenausbreitung der Lösung ist. Offenbar begünstigt diese Präparationsmethode das Auftreten bestimmter Stellen, die am kräftigsten Lösung entwickeln. Beim Nachlassen der Rotation sieht man daher sehr deutlich, daß sich an einzelnen Stellen Farbzüge loslösen, die im umgekehrten Sinne der Bewegung dieses Punktes fortziehen. Ich habe dann die Untersuchungen fortgesetzt und eine Anzahl Substanzen auf Rotation, Ausbreitung der Lösung und Reaktion am Träger untersucht. Rotation fand ich bei folgenden Substanzen, wobei die stärkst rotierenden an den Anfang gestellt sind: Buttersaures Natrium (von C. A. F. Kahlbaum), Chloralhydrat (trocken), Phenol (trocken, am besten geschmolzen und zerstoßen), Antipyrin, Kampfer, Menthol, Thymol, salzsaures Chinin, schwefelsaures Atropin, Azetanilid, Ephedrin, Phenazetin, Salizylsäure, Proponal, Sulfonal, Dionin, frisch gefälltes Chinin, Phthalsäure, deren lange Nadeln ein gutes Objekt für die Untersuchung dieser Vorgänge sind. Minimal tanzt Zimtsäure und salpetersaures Strychnin. Bei letzteren Substanzen, sowie stets bei Oxalsäure, erhält man häufig kein richtiges Tanzen, sondern nur ein Auseinanderweichen der Kristalle, die in einem Bündel auf die Wasseroberfläche geworfen wurden. Keine Rotation erhielt ich bei salzsaurem und reinem Morphin, Weinsäure, Harnsäure, Jodoform, Sulfanilsäure, Naphthionsäure, Traubenzucker, Milchzucker, Rohrzucker, sowie sämtlichen untersuchten anorganischen Substanzen.

Um einen etwas exakteren Anhalt für die Stärke der Rotation zu haben, wiederholte ich die Versuche auf absichtlich und in steigendem Maße verunreinigten Oberflächen, bis Stillstand des Tanzens erfolgte. Doch mußte die Verunreinigung schon sehr stark sein, um Substanzen, wie Chloralhydrat oder Phenol still zu stellen. Nach mehreren Versuchen kam ich auf die Seifenlösungen, die ja sehr starke Oberflächenhemmungen entwickeln, allerdings auch den Nachteil haben, daß die Oberfläche ihre Steifigkeit sehr schnell ändert. Will man daher den Einfluß verschiedener Seifenlösungen von verschiedener Konzentration miteinander vergleichen, so muß man in jedem Fall die Oberfläche unmittelbar nach ihrem Entstehen, d. h. also nach dem Ausgießen der Seifenlösung in die Schale, benutzen, und die Kristalle sofort darauf werfen. Ich benutzte eine Ölsäureseife, die ich durch Aufkochen von 1,0 g Ölsäure in 100 g Wasser mit 0,15 $NaOH$ erhielt. Hiervon mißt man heiß je einen Kubikzentimeter ab, und verdünnt ihn in steigendem Maße auf das 100- bis 10000 fache. Diese Lösungen werden dann sofort in der beschriebenen Weise benutzt. Ich erhielt die letzte deutliche Rotation, wenn in 100 ccm angewandter Seifenlösung enthalten waren an Ölsäure: Bei Phenazetin 0,07 mg, Azetanilid 0,3 mg, Antipyrin und Kampfer 5 mg, buttersaurem Natrium und Chloralhydrat 8 mg. Es waren demnach entsprechend der sehr verschiedenen Stärke des Tanzens sehr große Unterschiede zu konstatieren.

Eine weitere Unterscheidung zwischen den verschiedenen Substanzen liegt darin, daß einzelne, so namentlich Phenol und Chloralhydrat, je nach dem angewandten Präparat inkonstante Resultate zeigten. Frische Präparate beider Körper tanzten sehr stark, ältere überhaupt nicht. Als Grund ergab sich, daß die älteren Präparate Wasser angezogen hatten, und etwas feucht und zerfließlich geworden waren. Schmolz man sie und befreite sie so von ihrem Wassergehalt, so tanzten auch sie, nachdem sie grob gepulvert

waren, auf Wasser sofort. Die Erklärung ist naheliegend. Eine zerfließliche Oberfläche wird ziemlich gleichmäßig benetzt, eine trockne sehr ungleichmäßig. Daraus resultieren dann in letzterem Falle Vorzugspunkte, die Lösung entwickeln. Es ist daher erklärlich, daß die Rotation als konstantes Vorkommen am ersten bei Substanzen, wie Kampfer, beobachtet wurde, die infolge geringer Löslichkeit nicht feucht werden. Man bekommt ein wesentlich klareres Bild von den Bewegungserscheinungen, wenn man nicht auf Rotation, sondern auf Bewegung am Träger untersucht. Hier treten sehr verschiedenartige Geschwindigkeiten auf, die der oben durch die Seifenlösung bestimmten Stärke der Rotation entsprechen. Doch ist diese Methode sehr viel einfacher zu handhaben. Phenazetin verleiht dem Deckglas nur eine geringe, Azetanilid eine größere Geschwindigkeit, Kampfer und Antipyrin eine noch höhere und ungefähr gleiche, die etwa 13 cm in der Sekunde betrug, und Chloralhydrat und Phenol eine noch wesentlich größere, so daß das Deckglas bei Berührung mit dem Wasser davon schießt. Diesen Geschwindigkeiten entspricht der Oberflächenstrom, der die Kante verläßt. Seine Stärke ist leicht zu bestimmen, wenn man etwas Lykopodium dicht hinter der Kante aufpulvert. Es wird dann vom Strom fortgerissen. Selbstverständlich beobachtet man entsprechende Oberflächenausbreitungen. wenn man einen Tropfen einer gesättigten Lösung dieser Substanzen auf Wasser, das mit Lykopodium bestreut ist, bringt.

Ich möchte dann noch speziell des Kampfers oder richtiger der Kampfergruppe (Kampfer, Menthol, Thymol), von der die Untersuchung ausging, gedenken. Sie gibt alle hier in Frage kommenden Reaktionen sehr deutlich, und ich möchte nur speziell noch hervorheben, daß ein Tropfen konzentrierter Kampferlösung sich auf der Oberfläche ähnlich stark verbreitet, wie ein Tropfen konzentrierter Antipyrinlösung. Dieses Beispiel zeigt die Eigenart der Gruppe sehr deutlich, nämlich starke Oberflächenausbreitung der Lösung bei geringer Löslichkeit der Substanz. Denn die Antipyrinlösung ist in der Stärke 1 : 1 hergestellt und die Kampferlösung in der Stärke 1 : 1200. Damit ist die Kampferrotation als solche im wesentlichen erklärt. Indes ist es doch immerhin möglich, daß die Verdampfung für die Stärke derselben eine gewisse Bedeutung hat. Sie kann in zweierlei Weise wirken: 1. dadurch, daß der vom Kampferstück abgegebene Dampf sich im Wasser löst, und so die Oberflächenreaktion verstärkt und 2. dadurch, daß die über die Oberfläche ausgebreitete Lösung den Kampfer wieder an die Luft abgibt, so die Oberfläche für neues Nachströmen der Lösung frei macht und die Bildung derselben am Kristall beschleunigt. Der erste Punkt ist leicht nachzuweisen. Man legt ein Stückchen Kampfer auf ein Deckglas nahe an eine Kante, und setzt es auf Wasser, aber ohne daß das Stückchen benetzt wird. Dann bewegt sich das Deckglas und ein Oberflächenstrom verläßt die Kante in der typischen Richtung. Doch ist diese Wirkung nur schwach und kann mit der direkten Lösung aus dem Kampfer nicht konkurrieren, wie leicht zu erweisen ist. Legt man nämlich eine kleine Wasserrinne vom Kampfer zur nächsten Kante, so vermehrt sich die Geschwindigkeit sehr erheblich. Ich maß einmal das 4 fache des Betrages. Legt man ferner die Wasserrinne zu der gegenüberstehenden Kante, so kehrt sich die Bewegungsrichtung um, übertrifft also den Einfluß des Dampfes. Man kann übrigens nachweisen, daß auch Lösung allein wirkt. Zu dem Zwecke tropft man etwas Kampfer, in Chloroform gelöst, auf ein Deckglas und läßt dabei die Kanten sorgfältig frei. Dann läßt man verdunsten, und wirft das Deckglas mit der beschickten Fläche auf Wasser. Jetzt kann sich nur Lösung aus der Substanz bilden, und die Verdampfung ist ausgeschlossen. Nach einiger Zeit beginnt dann das Deckglas sich plötzlich und schnell zu bewegen. Offenbar quillt die gebildete Lösung unter dem Deckglas hervor und breitet sich dann aus. Von größerer Wirkung als das Verdampfen des Kampfers selbst, ist aber wahrscheinlich das Abdampfen desselben aus der Lösung an der Oberfläche. Wie groß dieser Einfluß ist, beweist folgender Versuch: Man legt ein Kampferstück von etwa einem halben Gramm in eine Petrischale, die flach mit Wasser gefüllt ist. Es befinden sich dann etwa 50 ccm Wasser darin. Das Stück ragt zu einem großen Teil über die Oberfläche und sendet infolgedessen fortwährend Lösung aus. Zur Kontrolle legt man ein Stück Kampfer trocken neben die Schale und kann nun beobachten, wie das Stück im Wasser sehr viel schneller abnimmt, wie das trockne. Dabei kann nur die Verdampfung vom Wasser maßgebend sein, denn die Wassermenge ist zu gering, als daß nennenswerte Mengen Kampfer darin gelöst sein könnten. Im ganzen ergibt sich demnach, daß, wenn auch der eigentliche Grund des Kampfertanzens in der Oberflächenausbreitung der Lösung zu suchen ist, doch die Verdampfung diesen Prozeß beschleunigt, und so die Bewegung verstärkt.

Bisher ist nur von der Verbreitung von Lösungen gesprochen worden. Nun haben aber, wie im Eingang erwähnt, die Brüder

Weber nachgewiesen, daß Öl, das sich in **ungelöster** Form auf dem Wasser verbreitet, ebenfalls Bewegungen auslöst; und eine etwas genauere Untersuchung dieser Verhältnisse erscheint erforderlich, da hier andere Bedingungen auftreten. Es kommen nämlich bei den Ölen zwei verschiedene Arten von Ausbreitung in Frage; die eine des Öles selbst, das als solches erkennbar sich auf dem Wasser ausdehnt, und die andere, die — einer Lösung vergleichbar — über die Wasseroberfläche unsichtbar ausgeschickt wird, und dort die bekannte Oberflächenverunreinigung bewirkt[1]). Am besten eignet sich für solche Untersuchungen nach **Agnes Pockels** (l. c.) die Ölsäure, da sie die stärksten Oberflächenerscheinungen hervorbringt. Die Erscheinungen laufen bei dieser folgendermaßen: Bringt man einen Tropfen auf die Oberfläche, so dehnt er sich sofort stark zu einem ringförmigen Gebilde aus, von dem Strahlen über die Oberfläche zucken. Man beobachtet den Vorgang am besten in schräg gespiegeltem Licht. Jenseits dieses Ringes wird die Lykopodiumschicht weit zurückgeschoben. Zum Schluß formt sich die Ölsäure zur Linse. (Die Theorie s. bei **Agnes Pockels** (l. c.) Ein leichter zu beobachtendes Bild erhält man, wenn man die Ölsäure aus einer feinen Kapillarspitze auf die Oberfläche auslaufen läßt. Dann schließt unmittelbar an die Kapillarspitze eine kurze Schicht Ölsäure an, die sich lebhaft bewegt, und von ihr aus breitet sich ein lebhafter Strom über das Wasser aus, der die Verunreinigung der Oberfläche bewirkt. Ölsäureschicht und Verunreinigung sind scharf voneinander abgesetzt. Das Bild sieht sehr ähnlich dem, das man bei begrenzt löslichen Flüssigkeiten unter gleichen Umständen erhält, also z. B. von Anilin oder Amylalkohol, nur daß hier die Schicht der ungelösten Substanz eine richtige Lösung absendet. Es ist nun klar, daß die Ausbreitung eines Öles in Substanz auf der Oberfläche andere mechanische Effekte auslösen wird, als die Ausbreitung der Verunreinigung.

Untersucht man nun zunächst die Wirkung der Ölsäure, indem man eine Kante des Deckglases damit beschickt, so erhält man die höchsten Geschwindigkeiten, die ich gesehen habe, also etwa 25 cm in der Sekunde. Hier werden beide Momente, also Ausbreitung des Öles und Ausbreitung der Verunreinigung zusammenwirken. Das Interessanteste ist selbstverständlich der Einfluß der Verunreinigung. Man kann sie für sich feststellen, sobald man Salben aus festem Paraffin mit Ölsäure anwendet. Diese lassen auch bei Beobachtung mit der Lupe keine Spur von flüssiger Ölsäure bei Berührung mit der Oberfläche erkennen, entsenden aber den Oberflächenstrom mit der Verunreinigung sehr deutlich, üben auf den Träger einen sehr starken Einfluß aus, rotieren auch in kurzen Stückchen auf Wasser gebracht usw. Man kann demnach das Resultat dahin zusammenfassen, daß es für die mechanischen Effekte prinzipiell von gleicher Bedeutung ist, ob sich eine gelöste oder ungelöste Verunreinigung auf der Wasseroberfläche verbreitet.

Bisher ist der Einfachheit halber die Sache so dargestellt, als wenn die durch die Ölsäure (oder ähnliche Substanzen wie Terpentin usw.) ausgesandte Verunreinigung der Oberfläche in der Tat — entsprechend der üblichen Annahme — nur aus ungelöster Substanz besteht. Doch ist das nicht ganz richtig, und man kann vielmehr mit den hier entwickelten Methoden nachweisen, daß es auch eine echte Ölsäurelösung gibt, die allerdings sehr viel schwächer wirkt. Das gleiche gilt auch für Terpentin und andere ätherische Öle. Zum Nachweis überzieht man die Unterfläche eines Deckglases mit Ölsäure oder noch besser mit der Ölsäure-Paraffinsalbe, achtet aber sorgfältig darauf, daß die Kanten frei bleiben, und wirft es mit dieser Fläche auf Wasser. Dann bildet sich — analog dem Kampferversuch — eine Lösung, die nach einiger Zeit das Deckglas in Bewegung setzt. Doch steht es dann wieder still. Offenbar gleitet es über die Lösung hinweg und sie muß sich dann erst wieder neu bilden, bis die Bewegung wieder anfängt. Sehr viel ausgeprägter wie bei Ölsäure ist die Erscheinung bei reinem Terpentin. Gutes reines fettes Öl gibt diese Reaktion nicht. Bei Ölsäure ist die Bewegung nur schwach, kann also am Oberflächeneffekt der Ölsäure nur wenig ausmachen. Bei Terpentin würde sie schon erheblicher sein[1]).

---

1) Die Frage, wie diese Oberflächenausbreitung, die die Spannung der Wasseroberfläche herabsetzt, aufzufassen ist, ist strittig. Während man ursprünglich bekanntlich annahm, daß es sich um eine Ölschicht minimalster Dünne handelt, trifft nach **Agnes Pockels** (s. Über die Ausbreitung reiner und gemischter Flüssigkeiten auf Wasser. Diese Zeitschr. **17**, 142, 1916) diese Theorie auf Schwierigkeiten, und sie neigt mehr dazu, einen der Adsorption verwandten Zustand anzunehmen. Doch nimmt auch sie an, daß es sich um eine ungelöste Schicht handelt.

1) Wäre der Einfluß der Ölsäure**lösung** an der Oberfläche der vorherrschende, so müßte die Ausbreitung der Ölsäure auf reinem Wasser wesentlich anders verlaufen, als auf einer konzentrierten Ölsäurelösung. Das ist aber, soweit die einfache Beobachtung einen Schluß gestattet, nicht der Fall. Zum Nachweis stellt man zuerst eine gesättigte Lösung der Ölsäure dar, indem man einige Tropfen mit Wasser im Scheidetrichter mehrfach kräftig schüttelt, absitzen läßt und nach einiger Zeit abzieht. Man erhält dann eine fein getrübte, also übersättigte

Die Bewegung des aussendenden Zentrums ist nicht die einzige mechanische Folge der Ausbreitung der Verunreinigung der Oberfläche. Eine weitere auffallende Folge ist das Mitreißen des Wassers. Zum Nachweis breitet man zuerst eine Farbstoffwolke auf dem Wasser aus, z. B. von Kristallviolett. Bringt man dann einen Tropfen einer Chloralhydratlösung oder eine Spur Ölsäure darauf, so wird die Farbwolke in die entgegengesetzte Ecke getrieben. Die entstehende Niveaudifferenz der Oberfläche wird dadurch ausgeglichen, daß Wasser aus der Tiefe nach oben steigt. Man erkennt das daran, daß kleine Farbstoffmengen, die man unter die Oberfläche gebracht hat, und die sonst langsam absinken, nach oben gesaugt werden, sobald z. B. die Rhodamin *B* Lösung sich auf dem Wasser ausbreitet. Diese Oberflächenerscheinungen erklären auch ein merkwürdiges Phänomen, das man bei Anilinfarbstoffen mit starker Oberflächenausbreitung, also z. B. bei Rhodamin *B* beobachtet. Läßt man eine Lösung desselben aus einer Kapillare auf das Zentrum einer Wasserschicht in einer Schale auslaufen, so sieht man unmittelbar an der Einströmungsstelle eine einige Millimeter lange, stark bewegte Farbschicht, auf die eine breite, ungefärbte Zone folgt. Am Rande aber häuft sich der Farbstoff an. Offenbar ersetzt das aus der Tiefe aufsteigende farblose Wasser fortwährend das mitgerissene, farbstoffhaltige. Ein ähnlicher Prozeß findet statt, sobald ein Kristall sich an der Oberfläche beim Rotieren löst. Er saugt gewissermaßen Wasser an, und stößt es wieder fort. Dadurch geht die Lösung wesentlich schneller und nach einem andern Typus vor sich, als im Innern des Wassers. Denn hier umgibt er sich mit einer Schicht konzentrierter Lösung.

Das Auseinanderreißen der obersten Wasserschicht kann gegebenenfalls so stark werden, daß, falls sie flach ist, der Boden heraustritt. Man sieht das sehr deutlich, wenn man den Boden einer Schale nur eben mit Wasser bedeckt, und dann eine mit Ölsäure benetzte Nadel ins Zentrum einsetzt. Übrigens geben auch andere Substanzen mit guter Oberflächenverbreitung, wie die Alkohole, die gleiche Erscheinung.

Mit der obersten Wasserschicht werden ferner Substanzen, die daran haften, fortgerissen, was man beim Lykopodium sehr gut beobachten kann. Doch gibt es noch viel deutlichere Beweise. Tropft man z. B. etwas flüssiges Paraffin auf die Oberfläche, so ballt es sich sofort zur Linse (falls man über ein gutes Präparat verfügt). Bringt man in diese Linse eine Lösung, die sich gut auf dem Wasser ausbreitet, z. B. 10 proz. Buttersäure oder Chloralhydratlösung, so springt das Paraffin nach einiger Zeit auseinander, und bildet je nach der Stärke der Wirkung einen Ring, oder eine Anzahl Teillinsen, die über die Fläche fliegen. Sobald nämlich die Lösung das Paraffin durchsetzt und die Wasseroberfläche berührt hat, breitet sie sich darauf aus und nimmt das dem Wasser anhaftende Paraffin mit[1]). Man erzielt den gleichen Erfolg, wenn man die betreffenden Substanzen in flüssigem Paraffin auflöst oder aufschwemmt. Dann gehen sie, sobald das Paraffin das Wasser berührt, ins Wasser über, und wirken wie im vorigen Versuch. Namentlich ist die Wirkung bei einer Kampferparaffinlösung sehr deutlich. Versetzt man weiterhin das Paraffin mit Ölsäure oder ähnlichen Körpern, so bleibt der Erfolg derselbe. Doch sind diese Erscheinungen schon sehr genau studiert. M. M. Richter (l. c.) wies nach, daß fettes Öl sein Vermögen, auf Wasser zu zerfließen, der Beimengung der Ölsäure verdankt, und Agnes Pockels[2]) wies nach, daß Mineralöle, die sonst auf Wasser Linsen bilden, auf Ölsäurezusatz (ebenso übrigens auf Zusatz von Palmitin oder Stearinsäure) zerfließen. Zu ihnen gehört auch das von mir benutzte Paraffin. — Zu dieser Gruppe von Erscheinungen gehört auch das Entstehen von Wellen auf der Oberfläche, sobald eine stärkere Verunreinigung sich darauf ausbreitet. M. M. Richter beobachtete zuerst eine solche Welle nach Aufbringung von Ölsäure auf Wasser. Man kann sie kontinuierlich erzeugen, wenn man eine Chloralhydrat- oder Antipyrinlösung von unten durch eine gekrümmte Kapillare gegen die Oberfläche ausströmen läßt. Am eigenartigsten aber tritt die Erscheinung hervor, wenn man ein etwas größeres Kampferstück in eine flach mit Wasser gefüllte Schale wirft, so daß es teilweise daraus hervorsieht (s. oben). Dann ziehen kontinuierliche Wellen vom Kampfer über die Oberfläche, bis es ganz gelöst ist. Ein ähnliches Bild erhält man, sobald andere Dämpfe,

Lösung. Bringt man sofort etwas Ölsäure darauf, so zeigt sie dieselben Reaktionen, wie auf reinem Wasser. Man darf aber mit dem Aufbringen der Ölsäure nicht zu lange warten, da sich die Oberfläche spontan verunreinigt, denn die feinen Ölsäuremengen steigen zur Oberfläche auf, und breiten sich dort aus.

1) Das Haften von Wasser an Ölen macht folgender Versuch wohl am einfachsten deutlich: Man klemmt einen Glasstab von etwa 1 cm Durchmesser senkrecht ein und läßt zunächst etwas Wasser und dann etwas flüssiges Paraffin (oder anderes Öl) daran herunter laufen. Das Wasser bildet einen Tropfen am Ende des Stabes, über den das Paraffin nachher fortgleitet, um sich daran aufzuhängen.

2) Agnes Pockels, Nature **1894**, 223.



die auch in Wasser gut löslich sind und starke Oberflächenausbreitung haben, auf Wasser fallen. Am besten sieht man die Erscheinung, wenn man ein Schälchen mit Äther in eine größere Schale mit Wasser stellt.

Bisher ist die Sache so dargestellt, als wenn Flüssigkeiten nur dann auf Wasser Bewegungen auslösen können, wenn sie an einen Träger fixiert sind. Doch bewies bereits das Beispiel der mit Kampfer oder Ölsäure versetzten Paraffinlinse, daß auch Flüssigkeiten in Linsenform Bewegungen zeigen können. Man kann indes diese Bewegungen auch unter Umständen erzeugen, die etwas mehr an das Kampferparadigma erinnern. Bringt man nämlich zunächst einmal Amylalkohol auf eine wäßrige konzentrierte Lösung desselben, so bilden sich Linsen, die lange Zeit durcheinander eilen. Dabei haben die größeren an der der Bewegung abgewandten Seite eine Einbuchtung. Dort entwickelt sich die Lösung, deren Ausbreitung die Linse einbuchtet und vorwärts treibt. Bei Anilin ist eine etwa halb konzentrierte Lösung für den gleichen Zweck erforderlich. Auf einer solchen ballt sich Anilin ebenfalls zur Linse, die sich aber ruckweise, und zwar auch mit der Einkerbung an derselben Stelle vorwärts bewegt. Hier sieht man die Entstehung der Bewegung besser. Jede Linse ist nämlich von einem unregelmäßigen Hof konzentrierter Lösung umgeben, die sich aufstaut, weil die Oberfläche verunreinigt ist. Sie sinkt langsam in die Tiefe ab. Da dieser Vorgang nicht regelmäßig ist, entstehen Konzentrationsunterschiede, die zur Aussendung neuer Lösung führen. Die gleichen ruckweisen Bewegungen sieht man auch bei Kristallen, falls sie auf verunreinigte Oberflächen geworfen werden.

Für alle besprochenen Erscheinungen ist die Oberflächenausdehnung das maßgebende. Während nun aber die Ausdehnung der Öle aus den theoretischen Voraussetzungen ohne weiteres ableitbar ist, liegt die Sache bei den Lösungen schwieriger. Hier haben, soweit ich beurteilen kann, bestimmte chemische Gruppen die Eigentümlichkeit, ihre Lösungen über die Oberfläche zu senden. So z. B. Veronal, Proponal, Azetanilid, Phenazetin — reines und salzsaures Chinin —, während andere Gruppen negativ stehen, z. B. Sulfanilsäure und Naphtionsäure, sowie die Zuckerarten. Doch müssen diese Untersuchungen mit größeren Reihen reiner Substanzen fortgesetzt werden, was zur Zeit nicht möglich ist. Ferner muß zugegeben werden, daß für einzelne Substanzen die Möglichkeit einer Verunreinigung vorliegt, die selbstverständlich das Resultat beeinflussen würde. Von flüssigen organischen Substanzen zeigen starke Oberflächenausbreitung die verdünnten Lösungen der primären Alkohole und einfachen Fettsäuren (Ameisensäure, Essigsäure, Buttersäure), während schon Oxalsäure und Zitronensäure minimale Ausbreitung zeigen, und Weinsäure gar keine. Am eigenartigsten aber ist, daß die anorganischen Substanzen, die ich untersuchte, in ihrer Reaktion auf der Oberfläche negativ ausfielen. Besonders auffallend ist dieses Resultat bei den zahlreichen gefärbten Substanzen, also den Kupfer-, Chrom- usw. Verbindungen. Hier ist der Gegensatz zu den Anilinfarben außerordentlich scharf.

Gießen, Pharmakologisches Institut.

(Eingegangen 14. Dezember 1918.)

Kolorimetrische Messungen nach der Ostwald-Skala.

Von Otto Meißner.

1. Einleitung.

Nach W. Ostwald[1]) läßt sich jede in der Natur vorkommende Färbung für das Auge eines „farbtüchtigen" Menschen durch drei zweiziffrige Zahlen, die sog. „Kennzahl", darstellen, z. B. 83. 13. 50, in der die erste Zahl die Nummer im Farbenkreis (00 = Gelb, 25 = Rot, 50 = Blau, 75 = Grün) bedeutet, die zweite den Weißgehalt w, die letzte den Schwarzgehalt s in Prozenten. Die Reinheit r in Prozenten ist somit:

$$r = 100 - (w + s).$$

Unter Zugrundelegung des Farbenkreises und der Grauskala der „Farbenfibel", 2. Aufl., habe ich die Untersuchungen, über die nachstehend ein kurzer Bericht gegeben wird, ausgeführt. Zur Bestimmung des „Farbtons" diente mir ein „Lambertscher Spiegel" aus 3 Glasplatten, wobei die untersuchte Farbe mit ihrer Gegenfarbe im Farbkreis zur Deckung gebracht wurde; zur Bestimmung von w und s dienten als „Farbfilter" drei „Hauchblätter" mit Umrahmung aus schwarzem Papier, und zwar:

Filter-Nr.	als Durchlaßfilter	als Sperrfilter
	für die Nr. des Farbenkreises	
I (rot)	90—00—40	50—85
II (blau)	35—80	85—30
III (grün)	80—00	20—50

2. Genauigkeitsprüfung.

Zur Prüfung der Genauigkeit, die mit diesem relativ primitiven Apparat zu erzielen war,

1) Die „Farbenfibel". 2. Aufl. Leipzig, Verlag Unesma. 1917.

stellte ich 24 Beobachtungen an klaren Tagen mit 3 Papierstreifen: I dunkelbraun, II rotbraun, III bräunlichgelb an und fand (c bedeutet die Nr. im Farbkreis, w und s sind im 1. Abschnitt erklärt):

	c	w	s
I	11,5 ± 1,9	04,5 ± 1,6	88,3 ± 4,7
II	13,5 ± 1,8	10,5 ± 2,8	34,8 ± 6,6
III	06,5 ± 1,7	18,5 ± 4,1	06,2 ± 3,0

Die mit ± angegebenen mittleren Fehler beziehen sich auf eine Einzelbeobachtung; systematische Einflüsse waren nicht erkennbar.

Für deutsche Reichspostmarken ergab eine Reihe von Beobachtungen:

Marke	c	w	s
Pf. $2^1/_2$	—	26,6 ± 5,5	73,4 ± 5,5
3	07,6 ± 0,7	26,0 ± 4,2	64,0 ± 5,5
5	87,0 ± 2,7	19,0 ± 4,2	50,0 ± 7,1
$7^1/_2$	c9,6 ± 1,6	27,0 ± 5,7	04,2 ± 4,3
10	29,0 ± 2,2	38,0 ± 4,5	08,0 ± 4,5
15	49,2 ± 3,4	13,6 ± 4,2	80,6 ± 1,7

Bei der grauen $2^1/_2$-Pf.-Marke war der Farbton nicht bestimmbar. Der Korrelationsfaktor k zwischen der Reinheit und mittlerem Fehler der Bestimmung des Farbtons ergab sich zu:

$$k = -0{,}450 \pm 0{,}400,$$

d. h. je geringer die Reinheit, um so unsicherer die Ermittelung des Farbtons, wie auch von vornherein zu erwarten war. (Für die drei Papierstreifen ergab sich das entsprechende $k = -0{,}364 \pm 0{,}384$. Bei Steigerung der Genauigkeit dürfte der m. F. des Korrelationsfaktors erheblich herabgehen.) Aber aus physiologischen Gründen hängt die Sicherheit der Bestimmung von c auch von der Lage im Farbenkreis ab und ist, für meine Augen, anscheinend in der 2ten Hälfte kleiner als in der 1ten.

Als Ergebnis kann man ansehen:

1. Der Farbton c ist um $\pm 2c$ unsicher, nur bei sehr unreinen Farben um mehr.

2. Weiß- und Schwarzgehalt w und s sind um ± 5 Proz. unsicher, die Reinheit r also um etwa 7 Proz.

3. Die Messungsfehler haben zufälligen Charakter[1]).

[1]) Nach Abschluß der Untersuchungen wurden mir von Herrn Geheimrat Ostwald liebenswürdigerweise Lichtfilter, ausführlichere Grauskala und Farben für jeden einzelnen Ton von 00—99 übersandt (in der Farbfibel sind nur 24 Töne angegeben, zwischen denen ich interpolierte). Die Vergleichungen, die mir das andauernd trübe Wetter mit dem noch vorhandenen Material vorzunehmen gestattete, ergaben keine systematischen Abweichungen und keine größeren Differenzen, als nach den im Texte angegebenen m. F. zu erwarten waren.

3. Messungen von Pflanzenfarben.

1. 9 Messungen an Blüten des Habichtskrauts (Mauseöhrchen), Hieracium (pilosella), ergaben:

$$c = 00{,}2 \pm 2{,}1 \qquad w = 16{,}3 \pm 7{,}4$$
$$s = 02{,}2 \pm 2{,}7.$$

Da die Farbtöne um 00 herum sehr genau geschätzt werden können, zumal bei so großer Reinheit wie hier ($r = 82 \pm 8$), dürfte der Schätzungsfehler höchstens $\pm 1c$ sein, woraus sich als mittlere Färbungsvariation (der 9 Blüten) ± 1,85 ergäbe. In der Tat sah z. B. ein mit $c = 04$ bezeichnetes Exemplar schon ganz merklich rötlich aus.

Für Bocksbart, Tragopogon sp., ergab sich

$$c = 05{,}0 \pm 1{,}2 \qquad w = 13{,}0 \pm 8{,}1$$
$$s = 06{,}2 \pm 2{,}5.$$

Die Blüten sehen auf den ersten Blick rötlicher aus als das fast genau reingelbe Habichtskraut.

Für Pechnelke, Viscaria viscosa, fand ich

$$c = 37{,}5 \pm 1{,}0 \qquad w = 14{,}2 \pm 2{,}9$$
$$s = 06{,}2 \pm 2{,}5.$$

Dabei habe ich keine abgeblühten, verblaßten Exemplare genommen. Die Blütenfarbe ist also auch hier sehr konstant.

2. Ferner bestimmte ich (vom 20. August 1918 bis Mitte September) eine große Anzahl grüner Blätter. Verschiedentlich waren dabei Spiegelungen störend: die Ostwaldsche Farbenskala bezieht sich nämlich streng genommen nur auf einen „ideal rauhen" Körper. Als Mittelwert für 12 Baumarten (Hasel, Buche, Eiche, amerikan. Eiche, Roßkastanie, Parie, Rüster, Holunder, Weide, Silberpappel, Ahorn, Platanen, Linde) ergab sich für ein ausgereiftes Laubblatt (Epoche ca. 5. September)

Färbung der Baumblätter Ende Sommer $\left\{ \begin{array}{ll} c = 88{,}2 \pm 2{,}4 & w = 07{,}0 \pm 2{,}5 \\ s = 86{,}8 \pm 3{,}6 & r = 06{,}2 \pm 4{,}4. \end{array} \right.$

Die Reinheit ist wahrscheinlich etwas zu gering, da es für die Farbtöne um 88 keine gut passenden Lichtfilter gibt.

Für mehrere frische Blätter (an „Geiztrieben") fand ich

$$c = 93 \pm 2, \quad w = 13 \pm 2, \quad s = 62 \pm 6;$$

also einen gelblicheren Farbton und merklich größere Reinheit.

Für ausgewachsene Blätter von zusammen 38 Arten Kraut-, Strauch- und Baumpflanzen ergab sich $c = 87{,}4 \pm 2{,}2$.

$c = 88$ dürfte also als die Farbe der grünen Blätter anzusehen sein.

3. Auch die Färbung von Herbstlaub habe ich untersucht. Hier herrschen, wegen des Fortfalls des Chlorophylls, gelbe bis rote Farbtöne vor. Es seien hier nur einige Beispiele von Einzelmessungen gegeben, die sich auf Blätter mit besonders für die Art charakteristischer Färbung beziehen.
(Epoche 1. Oktober, die Vulgärbez. der Farbe in Klammern).

1. Stieleiche	13. 20. 65	(braun)
2. Amerikan. Eiche	08. 10. 60	(gelbbraun)
	15. 05. 84	(dunkelbraun)
	17. 12. 75	(rötlichbraun)
3. Ahorn, Acer pl.	02. 10. 05	(gelb)
	30. 04. 60	(schmutzigrot)
4. Tulpenbaum	08. 10. 50	(rotbraun)
5. Wohlr. Wein	00. 45. 05	(hellgelb)
6. Wilder Wein	29. 12. 50	(rot)
	30. 06. 40	(brennendrot)
	33. 03. 91	(tiefpurpurn).

4. Messungen von Tierfarben.

Im August und September d. J. untersuchte ich eine Anzahl von Larven der europäischen Stabheuschrecke Bacillus Rossii F. kolorimetrisch. Es treten 2 Farben auf: grün und rotbraun; Exemplare mit letzterer Färbung werden auch als Bacillus Redtenbacheri Padewieth bezeichnet. Ich fand

Grüne Tiere: $c = 89{,}2 \pm 2{,}7 \quad w = 39{,}2 \pm 9{,}7$
$s = 27{,}5 \pm 7{,}5$
Braune „ $c = 14{,}1 \pm 6{,}5 \quad w = 51{,}8 \pm 16{,}5$
$s = 16{,}5 \pm 10{,}5$.

Die braunen variieren also stärker, wie auch schon der bloße Augenschein lehrt. Der Farbton der grünen aber ist offenbar genau chlorophyllgrün. Da er nicht, oder nicht allein, vom durchscheinenden Futter herrührt, so gewinnt hiernach die Annahme M. v. Lindens, daß es sich tatsächlich um Färbung durch Chlorophyll handle, an Wahrscheinlichkeit. Man sieht hieraus, von welcher Bedeutung diese Farbenmessungen sind bzw. werden können.

Potsdam, 20. Dezember 1918.

(Eingegangen 22. Dezember 1918.)

Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

XII.

Neue Grundlegung der Strahlungstheorie.

Mit der elektromagnetischen Theorie der Strahlung geht die mechanische Theorie in der Beziehung völlig parallel, daß als Ursache der Strahlung die mechanische Schwingung elektrischer Teilchen angesehen wird, also elektrischer Teilchen, deren sichtbare Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 von der Form sind:

$$u_0 = \sum_j \left(a_{j1} \cos \frac{t}{\tau_j} 2\pi + a_{j2} \sin \frac{t}{\tau_j} 2\pi \right), \ldots (1)$$

Je nach der Größenordnung der τ_j werden wir es mit den Hertzschen Strahlungen, ultraroten, Licht-, ultravioletten Strahlungen usw. zu tun haben; ich will hier sogleich zu der größten Schwierigkeit der Strahlungstheorie, zu der schwarzen Strahlung übergehen, welche einen Teil der theoretischen Physiker der Neuzeit unter Max Plancks Ägide zu der Annahme einer prinzipiell neuen Hypothese, der Quantenhypothese, geführt hat.

Mit Hilfe der statistischen Mechanik gewinnt man, wenn man sich im übrigen nur auf die strenge, klassische Mechanik stützt, für die Verteilung der Strahlungsenergien auf die verschiedenen Schwingungsdauern bei der schwarzen Strahlung ein der Erfahrung zuwiderlaufendes Gesetz, während Planck dadurch, daß er die Hypothesen der klassischen Mechanik durch die Quantenhypothese modifizierte, zu einem Verteilungsgesetz gelangt ist, welches mit der Erfahrung vereinbar ist. Es ist notwendig, bei der Weiterführung der mechanischen Theorien des elektromagnetischen Feldes zu diesen wichtigen Fragen Stellung zu nehmen.

Denken wir uns, nach Art der Annahme in der kinetischen Gastheorie, elektrische Teilchen in irgendwelcher ungeordneter Bewegung begriffen; es ist klar, daß von elektrischen Teilchen, welche sich geradlinig und gleichförmig bewegen, nach der mechanischen Theorie nie und nimmer Strahlungen ausgehen können; diese können erst entstehen, sobald ein Teilchen durch irgendwelche Ursachen, z. B. durch Zusammenstöße[1]) der mit den elektrischen Teilchen verbundenen ponderablen Teilchen, zu Geschwindigkeitsänderungen veranlaßt wird, die schwingungsartig sind bzw. in eine Summe von Schwingungen zerlegt werden können. In welcher Weise wir uns die elektrischen Teilchen an die ponderablen Teilchen gebunden denken — nach unserer Auffassung jedenfalls wieder infolge gewisser Eigenschwingungen — mag zunächst dahingestellt bleiben.

Wenn wir uns die Geschwindigkeitsänderungen nur durch Kräfte hervorgerufen denken, welche lediglich Funktionen der Stellen der stoßenden

1) Solche Zusammenstöße haben wir uns mechanisch, wie die Maxwellschen Stöße in der kinetischen Gastheorie, durch Abstoßungskräfte zu erklären, die ihrerseits mechanisch zu deuten sind.



Teilchen sind, z. B. durch die Maxwellschen Abstoßungskräfte, werden wir immer zu Strahlungsgesetzen gelangen, welche der Erfahrung widersprechen; dagegen werde ich hier zeigen, daß man zu einem dem Planckschen ähnlichen Verteilungsgesetze gelangen kann, wenn die Abstoßungskräfte auch von den sichtbaren Geschwindigkeiten der stoßenden Teilchen abhängig sind. Dafür, daß mechanisch erklärbare Abstoßungskräfte auch von den sichtbaren Geschwindigkeiten der stoßenden Teilchen abhängen können, haben wir mehrfache Beispiele in der Hydrodynamik (Wechselwirkung zweier in einer Flüssigkeit sich bewegender starrer Körper) und in der Elektrodynamik (Wechselwirkung zweier bewegter Elektronen). Als Resultat langjähriger Versuche in dieser Richtung kann ich mitteilen, daß die Wechselwirkungen, welche aus der gewöhnlichen mechanischen Wirkung der sichtbaren Geschwindigkeiten durch das Zwischenmedium hindurch sich ergeben, wieder nicht zu Strahlungsgesetzen führen würden, welche der Erfahrung entsprechen, dagegen kann man durch die Berücksichtigung der Wechselwirkung der bewegten Elektronen zu einem dem Planckschen ähnlichen Verteilungsgesetze gelangen. Hier kommen wir zu einer recht wichtigen Überlegung: Die Kräfte bewegter Elektronen, wie sie z. B. durch die mechanische Theorie geliefert werden, sind wesentlich durch die Individualitätskorrektur in dem mechanischen Grundgesetze beeinflußt, während die Wechselwirkung ponderabler Teilchen, wie sie nach der strengen, klassischen Mechanik zu berechnen wäre, nicht in der gewünschten Weise verwandt werden kann. Dies weist auf eine tiefer liegende Verwandtschaft der Individualitätshypothese mit der Quantenhypothese hin, der in Zukunft weiter nachgegangen werden muß. — Ich will nun zeigen, wie man aus der Berücksichtigung der Wechselwirkung der elektrischen Teilchen ein mit der Erfahrung verträgliches Strahlungsgesetz ableiten kann.

Das einfachste Beispiel eines Stoßes erhalten wir, wenn wir uns an einer Stelle (x_0, y_0, z_0) des Mediums ein Teilchen mit einer negativen sichtbaren Geschwindigkeit u_0 anlangend denken (der Einfachheit halber denken wir uns die x-Achse der Geschwindigkeitsrichtung entgegengesetzt parallel) und die Verhältnisse so annehmen, daß das Teilchen durch den Einfluß der übrigen Teilchen zur Umkehr, zur Annahme der entgegengesetzten Geschwindigkeit gezwungen wird. Der Übergang von der einen Geschwindigkeit in die entgegengesetzte wird die Ursache der von dem Teilchen ausgehenden Strahlung sein. Ein solcher Stoß würde z. B. eintreten, wenn das Teilchen auf ein Teilchen mit gleicher und entgegengesetzter Geschwindigkeit treffen würde, das in zentraler Richtung auf das erste Teilchen zufliegt. Zu bemerken ist natürlich, daß wir es hier mit einem besonders einfachen Falle eines Stoßes zu tun hätten; die Untersuchung würde aber durch Hinzunahme schiefer Stöße und die Annahme ungleicher Geschwindigkeiten der verschiedenen Teilchen (deren Geschwindigkeitsverteilung sich bei völlig ungeordneter Bewegung entsprechend dem Maxwellschen Gesetz einstellen müßte) nicht in der Hauptsache, sondern nur in nebensächlicher Komplikation verändert werden.

Ich komme damit zu dem Ausgangspunkt einer kurzen Abhandlung, welche ich vor mehreren Jahren in dieser Zeitschrift veröffentlicht habe[1]), und bei welcher ich die folgende Voraussetzung machte:

„Die ungeordnete Bewegung an irgendeiner Stelle eines Mediums im Falle der schwarzen Strahlung denken wir uns in ihrer Abhängigkeit von der Zeit derart, daß in irgendeiner Richtung ein Teilchen für $t = -\infty$ [2]) eine Geschwindigkeit u_0, für $t = +\infty$ [2]) die Geschwindigkeit $(-u_0)$ hat, zu einer bestimmten Zeit die Geschwindigkeit null. Solche Schwankungen sollen ungeordnet in beliebigen Richtungen zwischen den Geschwindigkeiten u_0 und $(-u_0)$ stattfinden. Der Einfachheit halber wollen wir die absoluten u_0 für alle Teilchen gleich annehmen

$$|u_0| = a\sqrt{T},$$

wo T die absolute Temperatur, a eine Konstante vorstellt.

Greifen wir eine bestimmte Schwankung heraus, welche zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit null ergibt, so haben wir also nach einer Funktion $u(t)$ zu suchen, welche die Eigenschaft

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= -a\sqrt{T} & \text{für } t &= -\infty, \\ u_0 &= 0 & \text{für } t &= 0, \\ u_0 &= +a\sqrt{T} & \text{für } t &= +\infty \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

besitzt."

Ich habe in meiner damaligen kurzen Notiz rein heuristisch eine einfache Funktion $u(t)$ angegeben, mit deren Hilfe sich ein der Erfahrung entsprechendes Strahlungsgesetz ableiten läßt. Diese Willkürlichkeit will ich hier vermeiden und die Funktion $u_0(t)$ aus der Wechselwirkung der stoßenden Teilchen herleiten.

Wir bezeichnen mit r die Entfernung des

1) A. Korn, Neue mechanische Vorstellungen über die schwarze Strahlung und eine sich aus denselben ergebende Modifikation des Planckschen Verteilungsgesetzes. Diese Zeitschr. 14, 632, 1913.

2) In Wahrheit sollen die Grenzen von $|t|$ noch immerhin klein, aber groß gegen die Schwingungsdauern der Lichtschwingungen sein.

einfallenden Teilchens von (x_0, y_0, z_0), dann wird zunächst eine abstoßende Kraft

$$f(r) > 0$$

auf das Teilchen wirken, z. B. die Maxwellsche Abstoßungskraft, umgekehrt proportional mit r^5, welche wir bei Gelegenheit der Reibungstheorie mechanisch durch die erste Oberschwingung der universellen Schwingungen erklärt haben[1]), oder irgendeine andere Abstoßungskraft infolge von Eigenschwingungen, auf deren Form wir im übrigen hier nicht einzugehen brauchen. Ferner haben wir aber auch die elektrischen Wechselwirkungen zu berücksichtigen; die statischen Kräfte werden sich fortheben, da im allgemeinen das einfallende Teilchen die Einwirkung von gleichvielen positiven und negativen Teilchen erleiden wird; dagegen sind die aus der Geschwindigkeit des einfallenden Teilchens entstehenden Kräfte zu beachten. Sei z. B. das einfallende Teilchen mit einem negativ elektrischen Teilchen verbunden, dann wird es die negativen Teilchen an der Stelle[2]) (x_0, y_0, z_0) mit gleich gerichteter Geschwindigkeit vor sich her treiben, die positiven Teilchen in der entgegengesetzten Richtung; die Kräfte werden daher von der Art sein, wie sie zwei in derselben Richtung bewegte Elektronen aufeinander ausüben, unter Abzug der statischen Kraft, von der Form:

$$-\varphi(r)\,u_0^2,^{3)} \quad \varphi(r) > 0.$$

Die während des Stoßes auf das einfallende Teilchen in der x Richtung wirkende Kraft ist somit:

$$f(r) - \varphi(r)\,u_0^2,$$

wo $f(r)$ und $\varphi(r)$ positiv sind. Betrachten wir den Stoß nur ganz in der Nähe der Geschwindigkeitsumkehr, so können wir in erster Annäherung für r den konstanten Wert R setzen, den r zur Zeit der geringsten Entfernung von (x_0, y_0, z_0) besitzt; wir erhalten dann also für u die Differentialgleichung

$$\frac{du_0}{dt} = \alpha - \gamma u_0^2, \tag{3}$$

wo α und γ positive Konstanten sind.

Unter den Bedingungen (2) können wir die folgende Lösung angeben:

$$\left.\begin{aligned} u_0(t) &= a\sqrt{T}\,\frac{1 - e^{-\frac{2\pi T t}{\beta}}}{1 + e^{-\frac{2\pi T t}{\beta}}} \\ &= \frac{2a\beta}{\pi\sqrt{T}} \int_0^\infty \frac{\sin \nu t\, e^{-\frac{\nu\beta}{2T}}}{1 - e^{-\frac{\nu\beta}{T}}}\, d\nu,^{1)} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wenn α und γ mit den Konstanten a, T, β durch die Gleichungen

$$\alpha = \frac{\pi a}{\beta}(\sqrt{T})^3, \qquad \gamma = \frac{\pi\sqrt{T}}{a\beta} \tag{5}$$

verbunden sind; wenn β, das eine dem Medium eigentümliche Konstante sein soll, sehr kle ist, wird u_0 in der Tat bereits für noch ziemlich kleine Werte von $|t|$ in die konstanten Werte

$$+a\sqrt{T} \text{ bzw. } -a\sqrt{T}$$

angenähert übergehen.

Wir kommen so zu einer Form der Geschwindigkeitsänderungen bei dem Stoß, welche mit der von mir früher heuristisch angegebenen verwandt ist, im übrigen, wie jene, zu dem gewünschten Resultat führen wird.

Die Werte (4) stellen die Geschwindigkeiten des in erster Annäherung als starr angesehenen einfallenden ponderablen Teilchens dar, in unmittelbarer Nähe vor und nach der Umkehr; sie sind natürlich nur die Mittelwerte der Geschwindigkeiten der einzelnen das Teilchen zusammensetzenden Elemente über den von dem Teilchen eingenommenen Raum τ. Für die wahren sichtbaren Geschwindigkeiten

$$\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{w}_0,$$

deren Mittelwerte in dem ponderablen Teilchen u_0, 0, 0 sind, werden Differentialgleichungen von der Form bestehen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\bar{u}_0 &= \frac{1}{c_i^2}\frac{\partial^2\bar{u}_0}{\partial t^2}, \ldots \quad \text{in dem Teilchen,} \\ \Delta\bar{u}_0 &= \frac{1}{c_a^2}\frac{\partial^2\bar{u}_0}{\partial t^2}, \ldots \quad \text{im Außenraume des Teilchens,} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ferner die Bedingungen der Stetigkeit und die Bedingung des Verschwindens im Unendlichen. Mit Rücksicht darauf, daß c_a^2 wegen der geringen Kompressibilität des Außenraumes für rasche Geschwindigkeitsänderungen sehr groß anzunehmen ist, werden die Geschwindigkeiten in der Umgebung des Teilchens in erster Annäherung von der Form sein

---

1) Diese Zeitschr. 19, 327, 1918.

2) Genauer: in der Umgebung dieser Stelle.

3) Mit Rücksicht darauf, daß die Geschwindigkeit der induzierten Elektronenbewegung mit u_0 proportional ist, gleich gerichtet für Teilchen, die mit dem einfallenden gleichnamig sind, entgegengesetzt gerichtet für entgegengesetzte Teilchen. Zur wirklichen Berechnung vgl. Abh. XI, diese Zeitschr. 20, 60, 1919 und Anm. (1) S. 60.

1) Bezüglich derartiger Umformungen vgl. man die Abschnitte über die Eulerschen Integrale in den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung.

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_0 &= \frac{1}{4c_i^2}\int_\tau \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial t^2}\frac{d\tau}{r_{d\tau}} = -\frac{\tau}{4c_i^2 r}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \\ \bar{v}_0 &= \bar{w}_0 = 0,\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

wenn $r_{d\tau}$ den Abstand von $d\tau$, r den Zentralabstand von dem ponderablen Teilchen vorstellt und wir uns in einer Entfernung von dem Teilchen halten, welche gegen den Radius des als kugelförmig gedachten Teilchens groß ist, wegen der Kleinheit dieses Radius aber noch sehr klein sein kann. Wir sehen hieraus, daß für die lebendige Kraft der in der Umgebung hervorgebrachten Bewegung Geschwindigkeiten in Betracht kommen, welche nicht mit den Mittelwerten u_0, sondern mit den zweiten Ableitungen[1])

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{2a\beta}{\pi\sqrt{T}}\int_0^\infty \frac{\nu^2 e^{-\frac{\nu\beta}{2T}}}{1-e^{-\frac{\nu\beta}{T}}}d\nu \quad (8)$$

proportional sind.

Die monochromatische Schwingungsenergie bei der schwarzen Strahlung wird somit proportional mit

$$\frac{\nu^4 e^{-\frac{\beta\nu}{T}}}{T\left(1-e^{-\frac{\beta\nu}{T}}\right)^2},$$

nach Planck ist sie proportional mit

$$\frac{\nu^3}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1}.$$

Das so gefundene Strahlungsgesetz ist ebenso, wie das Gesetz von Planck, mit allen Erfahrungstatsachen verträglich[2]).

Ich schließe mit dieser Abhandlung die Serie der kurzen Artikel: „Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes", welche den gegenwärtigen Stand meiner Theorie im großen darstellen sollen. Eine ausführliche, kompendiöse Darstellung sei einer späteren Zeit vorbehalten. Man kann schon jetzt voraussehen, in welcher Richtung sich diese Theorie weiter zu bewegen hat; im besonderen wird nunmehr die mechanische Erklärung der Kapillaritätskräfte und der elastischen Kräfte auf Grund der Theorie der universellen Schwingungen notwendig, später die mechanische Theorie der Spektren und der Affinitätskräfte.

(Eingegangen 30. Oktober 1918.)

1) In meiner früheren kurzen Notiz sind, was dort nicht besonders bemerkt wurde und hier berichtigt sei, die dortigen Geschwindigkeiten (4) mit den zweiten Ableitungen der Geschwindigkeiten (3) proportional. Infolge der Zusammendrängung auf einen kleinen Raum sind diese Einzelheiten dort nicht zum Ausdruck gekommen.

2) Man vgl. hierzu die Bemerkungen von A. E. H. Love (zu meiner früheren Notiz) auf der Versammlung der British Association in Birmingham 1913 (diese Zeitschr. **14**, 1301, 1913).

Über optische Absorptionskanten.

Von J. Holtsmark.

Mit Tafel II.

Es ist eine schon lange bekannte Tatsache, daß die Absorption der Röntgenstrahlen in irgendeinem Element die folgende Eigentümlichkeit zeigt. Trägt man den Absorptionskoeffizienten als Funktion der Wellenlänge auf, so erhält man eine gegen kürzere Wellen allmählich abfallende Kurve. An gewissen Stellen ist aber dieser regelmäßige Verlauf plötzlich gestört, es setzt eine starke Absorption ein, die gegen Rot hin scharf begrenzt ist und nach kürzeren Wellen allmählich abfällt. Wie Wagner[1]) zeigen konnte, hängt die Wellenlänge des Absorptionssprunges immer mit den Wellenlängen der Röntgenserien der betreffenden absorbierenden Metalle, welche diese bei geeigneter Erregung aussenden würden, zusammen, und zwar gibt es verschiedene Absorptionskanten; eine, welche zu den Linien der K-Serien in naher Beziehung steht, und eine dreifache Kante, die zu dem komplizierteren System der L-Serienlinien gehört.

Debye[2]) hat nun darauf hingewiesen, daß, wenn die Erklärung, die Sommerfeld für das obige Verhalten gegeben hat[3]), richtig ist, so müßte man etwas Ähnliches auch im optischen Spektrum nachweisen können. Diese Erklärung ist die folgende. Das Elektron, was z. B. die K-Serie emittieren kann, kreist in normalem Zustande in seiner innersten Bahn. Wenn Licht von geeigneter Wellenlänge auf das Atom fällt, wird dieses Elektron angeregt, die Strahlung wird absorbiert, und das Elektron kann eventuell ganz aus dem Atom losgerissen werden. Damit aber dies stattfindet, d. h. also auch damit Strahlung absorbiert werden kann, ist es notwendig, daß ihre Frequenz ν der Gleichung genügt

$$h\nu \geqq E,$$

wo E die Energie bedeutet, die nötig ist, um das Elektron von der innersten Bahn bis ins Unendliche zu bringen.

Im Falle des Wasserstoffs müßte das Einsetzen der Absorption gerade am Ende der

1) A. Wagner, diese Zeitschr. **18**, 433, 1917.
2) P. Debye, diese Zeitschr **18**, 428, 1917.
3) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **51**, 125, 1916.

Serie erfolgen, da dies eben einem Sprung des Elektrons von der innersten Bahn bis ins Unendliche entspricht. Die Serie des Wasserstoffs, bei deren Emission das Elektron zwischen einer äußeren und der innersten Bahn springt, liegt bekanntlich im Schumann-Gebiet der kurzen Wellen. Man kann deswegen schwer prüfen, ob am Ende dieser Serie eine Absorption vorhanden ist. Die sichtbare Wasserstoffserie entsteht bei einem Sprunge des Elektrons von einer äußeren in die zweite Bahn; wenn man also Wasserstoff in einem solchen Zustand hat, daß er die Serienlinien absorbiert, so müßte man auch die Absorption außerhalb des Endes finden können. Nun ist Wasserstoff in einem solchen Zustande auf gewissen Sternen vorhanden, und es ist auch tatsächlich J. Hartmann[1]) gelungen, in den Spektren von Wasserstoffsternen die erwähnte Absorption nachzuweisen. Es zeigte sich, daß die Absorption in den nach dem Ende zu zusammenfließenden Wasserstofflinien direkt in eine kontinuierliche Absorption übergeht, die folglich genau am Serienende anfangen muß.

Auch bei der Hauptserie des Natriums ist eine vollkommen analoge Erscheinung von Wood[2]) gefunden worden. Er untersucht die Absorption in heißem *Na*-Dampf und findet, daß alle die Hauptserienlinien des Natriums in Absorption vorhanden sind, außerdem erstreckt sich aber eine kontinuierliche Absorption von dem Ende der Serie bis zum äußersten Ultraviolett hin.

Auf Vorschlag des Herrn Debye habe ich nun einige Aufnahmen gemacht, um festzustellen, ob das Einsetzen dieser Absorption, wie bei den Röntgenstrahlen, wirklich scharf ist und ob sie genau am Ende der Serie erfolgt.

Zu dem Zwecke wurde Natrium in einem etwa 60 cm langen, mit Quarzplatten verschlossenen Eisenrohr erhitzt, indem ein mit Hilfe eines kleinen Transformators auf kleine Spannung gebrachter Wechselstrom von etwa 100 Amp. direkt durch das Rohr geleitet wurde. Das Licht eines kondensierten *Cd*-Funkens wurde durch das Rohr hindurchgeschickt und auf den Spalt eines Quarzspektrographen projiziert. Die Dispersion des Spektrographen betrug am Ende der Kaliumserie etwa 2,0 Å.-E. pro $^1/_{10}$ mm, am Ende der Natriumserie etwa 0,7 Å.-E. pro $^1/_{10}$ mm, womit eine Trennung der Serienlinien noch bis etwa $n = 25 - 30$ möglich war.

In Fig. 6, Taf. II ist eine Vergrößerung von einer Aufnahme der Natriumserie wiedergegeben, man kann noch 15—20 Linien erkennen; die erste Linie links ist die, für welche $n = 5$ ist. Die Kopie ist abgeschnitten, ungefähr dort, wo das Serienende liegt, es war auf dieser Platte nichts von der gesuchten Absorption vorhanden, weil der Dampf nicht heiß genug war. Bei höherem Dampfdruck verbreitern sich bekanntlich die ersten Linien stark und können ganz in kontinuierliche Absorption verschwinden. Bei genügend starker Heizung wurde das Licht außerhalb des Serienendes auch erheblich absorbiert.

Das Bemerkenswerte war aber, daß die nach dem Ende zu zusammenfließenden Absorptionslinien vollkommen gleichmäßig in diese kontinuierliche Absorption übergingen, an dem Ende der Serie war nichts von einem Sprung zu sehen.

In der Fig. 4 sieht man die äußersten Linien etwa achtmal vergrößert, die zwei Aufnahmen sind verschieden stark exponiert, aber sonst gleich; das Ende der Serie ist durch den Pfeil angedeutet, man sieht deutlich, wie die kontinuierliche Absorption die Linienabsorption fortsetzt. Fig. 1 ist eine Photometrierung nach

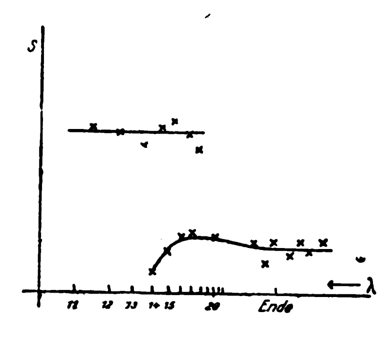


Fig. 1.

dieser Vergrößerung, sie ist mit dem lichtelektrischen Photometer gemacht. Die obere Kurve gibt die Schwärzungen in den Zwischenräumen zwischen den Absorptionslinien, die untere Kurve stellt die Schwärzungen in den Linien und im Gebiet außerhalb des Serienendes dar. Die Erscheinung wird etwas gestört durch die Linien vom *Cd*-Funken, die nicht ganz wegzubringen waren, das charakteristische Gebiet ist aber frei von solchen Linien. Bei der Photometrierung wurden derartige Linien möglichst ausgeschaltet. Es ist aus der Figur sehr deutlich zu ersehen, wie die Zwischenräume zwischen den Linien links viel heller sind als das Spektrum hinter dem Ende rechts. Außerdem sind noch die Schwärzungen in den Linien angegeben, sie setzen sich ungezwungen in der kontinuierlichen Absorption fort.

1) J. Hartmann, diese Zeitschr. **18**, 429, 1917.
2) R. W. Wood, Phil. Mag. **18**, 530, 1909.

Dieses Resultat ist sehr interessant. Es zeigt, daß die Erscheinung analog zu der Absorption bei den Röntgenstrahlen ist. Denn wenn die Linienabsorption sich gleichmäßig in die kontinuierliche Absorption fortsetzt, so muß diese genau am Serienende anfangen. Noch mehr Gewicht muß man, scheint es mir, vielleicht auf die Tatsache legen, daß die Absorption in den letzten Linien genau gleich groß ist, wie außerhalb des Endes, wie es deutlich aus der Fig. 1 zu ersehen ist. Wir werden unten die Konsequenzen dieser Tatsache eingehender besprechen.

Ich habe den Versuch mit Kalium wiederholt, dieselbe Erscheinung zeigt sich auch hier; jedoch ist die kontinuierliche Absorption in diesem Falle viel schwächer. Um sie trotzdem einwandfrei feststellen zu können, wurde ein Vergleichsspektrum, das ohne absorbierendes Kalium gemacht wurde, und genau gleich geschwärzt war, daneben photometriert (s. Fig. 5 bzw. Fig. 2). Die stark ausgezogene Linie

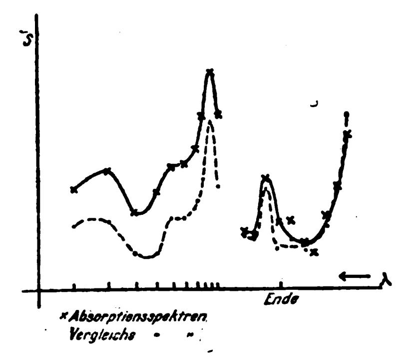


Fig. 2.

rührt von dem Spektrum mit Absorption her, die gestrichelte von dem Vergleichsspektrum. Links von dem Ende ist zwischen den Linien photometriert, rechts in der kontinuierlichen Absorption. Die Verschiedenheit der beiden Spektren ist evident, auch hier gehen die äußeren Linien kontinuierlich in die Absorption über (Fig. 5).

Zur besseren Übersicht ist in Fig. 3 nochmals die Differenz der beiden Kurven in Fig. 2 gesondert dargestellt. Links zwischen den

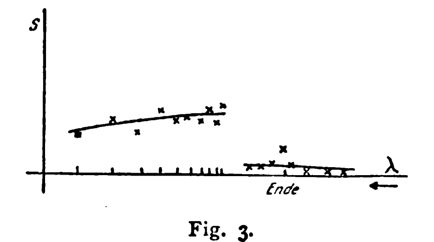


Fig. 3.

Linien, rechts in der Umgebung des Endes. Aus der Figur geht die gleichmäßige Absorption außerhalb des Endes deutlich hervor.

Nach diesem ist es wohl äußerst wahrscheinlich, daß dieselbe Erscheinung bei allen Alkalien vorhanden ist, von einer Prüfung wurde jedoch abgesehen, weil relativ sehr große Metallmengen nötig sind, um besonders bei *Cs* und *Rb* alle Linien in Absorption zu erhalten. Der hohe Siedepunkt des Lithium machte die Untersuchung der Absorption bei diesem Metall unmöglich. Es ist wohl auch sehr wahrscheinlich, daß man dasselbe bei der ultravioletten Hauptserie der Metalle der Zinkgruppe, zu denen z. B. die starke Quecksilberlinie 2536 gehört, auch finden wird, vorläufig stehen allerdings wegen der sehr kleinen Wellenlänge (um 1200 Å.-E.) des Endes bei diesen Serien der Prüfung Schwierigkeiten entgegen. Das sonstige Verhalten der Linien von diesen Hauptserien ist bekanntlich sehr ähnlich der Natriumserie.

Nach alledem hat man sich den Vorgang der Absorption in Kalium- oder Natriumdampf etwa so vorzustellen. Im Kalium- bzw. Natriumatom (die Alkalimetalle sind bekanntlich einatomig) sind schwingungsfähige (oder besser absorptionsfähige Elektronen) vorhanden, welche die Eigenschaft haben, die Frequenzen der Natriumserie zu absorbieren (vgl. die oben zitierte Arbeit von Sommerfeld). Wenn ein Quantum absorbiert ist, fliegt das Elektron aus seiner innersten normalen Bahn in eine äußere, deren Radius nach dem Sommerfeldschen Quantenansatz definiert ist. Je nach der Nummer der Linie, deren Wellenlänge das einfallende Licht hat, fliegt das Elektron verschieden weit weg und beim Ende, was der Nummer ∞ entspricht, wird es völlig frei. Es ist klar, daß das letztere Ionisation des Atoms bedeuten muß. Wenn wir jetzt eine Wellenlänge auf den Dampf auffallen lassen, die kleiner ist als dem Ende der Serie entsprechend, so wird diese auch absorbiert und das Elektron wird frei gemacht. Dies gilt offenbar in einem ziemlich großen Frequenzbereich außerhalb des Endes, jedoch wird die Absorption wahrscheinlich abnehmen, wie bei den Röntgenstrahlen.

Verwenden wir aber nun Licht, dessen Wellenlänge z. B. der dreihundertsten Natriumlinie entspricht, so wird das Elektron auf die dreihundertste Bahn geworfen. Diese hat aber einen so großen Radius, daß das Elektron unbedingt als frei angesehen werden muß. Denn durch einen einfachen Stoß mit einem der übrigen Dampfmoleküle erhält das Elektron sofort Energie genug, um aus der dreihundertsten Bahn irgendwohin befördert zu werden. Was für die dreihundertste Bahn gilt, gilt auch

für die hundertste, zwar in etwas geringerem Grade, es bleibt aber vollkommen eine Sache der Schätzung, wenn man sagen will, daß das Elektron frei ist und wenn es noch gebunden ist, nachdem es in eine äußere Bahn hinausgeworfen ist. Wenn es frei ist, müßte man das Gas als ionisiert ansehen, und wenn es gebunden ist, dürfte dies nach der gewöhnlichen Auffassung nicht der Fall sein. Lassen wir also Licht von wachsender Frequenz auf den Dampf fallen, so werden die den Linien entsprechenden Frequenzen absorbiert. Bei der ersten Linie wäre der Dampf noch nicht ionisiert, aber allmählich muß mit wachsender Seriennummer die Ionisation zunehmen und zuletzt konstant werden. Eine plötzlich einsetzende Ionisation am Ende der Serie wäre ausgeschlossen.

Nun hat aber Steubing[1]) aus Messungen, die er an Quecksilberdampf gemacht hat, den Schluß gezogen, daß dieser bei Bestrahlung mit Licht von der Wellenlänge 2536, welche der ersten Linie in der zu der Hauptserie des Natriums analogen Serie entspricht, ionisiert wird. Man müßte sich dann hier vorstellen, daß beim Quecksilber schon das Hinauswerfen in die zweite Bahn genügt, um das Elektron als frei erscheinen zu lassen[2]). Bei den Versuchen von Franck und Hertz[3]) ergab sich, daß die Ionisierungsspannung des Quecksilberdampfes 4,9 Volt war, was genau dem $h\nu$ der oben genannten Linien entspricht. Es dürfte sich in Analogie damit auch hier um ein Hinauswerfen des Elektrons in die zweite Bahn handeln. Wir können in dieser Weise weiter gehen und analog annehmen, daß der Wasserstoff ionisiert ist, wenn das Elektron in die zweite Bahn hinausgeschossen ist. Die Spannung, die nach Bohr nötig wäre, um das Elektron in die zweite Bahn ($n = 2$) zu bringen, ist 9,9 Volt. Die Ionisierungsspannung des Wasserstoffs ist zu 11 Volt und zu 11,5 Volt[4]) gemessen worden. Berücksichtigt man, daß das Wasserstoffmolekül vor dieser Ionisierung erst in Atome getrennt wird, so muß zu der obigen Zahl noch 2,6 Volt addiert werden, entsprechend der Energiedifferenz zwischen einem Wasserstoffmolekül und zwei getrennten Wasserstoffatomen. Es ist nämlich nötig, daß die Trennung und die Ionisierung gleichzeitig erfolgen, d. h. durch einen Elektronenstoß, weil die Wahrscheinlichkeit, daß ein von einem Elektron getroffenes und etwa in zwei Atome geteiltes Molekül nochmals in genügend kurzer Zeit von einem anderen Elektron getroffen wird, außerordentlich klein ist. Wir erhalten also in dieser Weise für die Ionisierungsspannung des Wasserstoffs den Wert 12,5 Volt, der mit dem Resultat der besten Messungen 11,5 Volt in genügender Übereinstimmung steht.

In derselben Weise wäre dann auch möglicherweise der Unterschied zwischen dem von Bohr für die Ionisierungsspannung des Heliums berechneten Wert 30 Volt und der tatsächlich beobachteten von etwa 20 Volt zu erklären, denn Bohr rechnet, daß das Elektron vollkommen frei werden muß, was nach unserer Auffassung nicht nötig wäre.

Da der bei der Emission der K- und L-Serie wirksame Elektronenring im Innern des Atoms liegt[1]), so kann das Serienende (die Kante der Absorption) nicht in demselben Verhältnis zu den Linien liegen, wie beim Wasserstoff. Denn das Elektron hat, um frei zu werden, erst das Feld der äußeren Elektronenringe zu durchlaufen, es muß innerhalb derselben eine Energie verwendet werden, die es außerhalb der Ringe wieder zurückerhält. Dabei liegt bekanntlich das Serienende näher an Rot, als man bei einer gewöhnlichen Serie zu erwarten hätte.

Bei dem Natrium ist nun dies nicht der Fall, wir dürfen daher schließen, daß das die Hauptserie emittierende Elektron aus einem äußeren Elektronenring genommen worden ist. Das würde wohl auch direkt aus der Tatsache zu schließen sein, daß die zur Erregung nötige Energie entsprechend der großen Wellenlänge der ersten Linie sehr klein ist und nur ein paar Volt beträgt. Das wäre kaum möglich, wenn dieses Elektron aus dem Innern des Atoms geholt werden müßte.

Eine interessante Frage bietet in dieser Beziehung das Lithium. Die Hauptserie des Lithiums liegt mit der ersten Linie noch etwas mehr nach Rot als die Hauptserie des Natriums. Wenn man Lithiumdampf in der Hauptserie absorbiert, so muß die Hauptserie von dem nor-

1) W. Steubing, diese Zeitschr. 10, 787, 1909.

2) Zusatz bei der Korrektur. J. T. Tate und P. D. Foote geben in einer nach Abschluß dieser Arbeit erschienenen Abhandlung (Phil. Mag. (6) 36, 64, 1918) eine Erklärung der Unstimmigkeit zwischen der unter der Voraussetzung von völligem Freiwerden des Elektrons berechneten Ionisierungsspannung und der gemessenen, indem sie den Begriff des Resonanzpotentials definieren. Dieses Potential wurde z. B. von Franck und Hertz gemessen und entspricht einem Hinauswerfen des Elektrons in die zweite Bahn. Unsere Überlegung, daß das Elektron in der zweiten Bahn als frei erscheinen kann, stimmt hiermit überein, man muß also genau auf die Art der Freiheit achten, das Resonanzpotential entspricht der geringsten Freiheit, das Ionisierungspotential der völligen Freiheit.

3) Franck u. Hertz, Verh. d. D. phys. Ges. 16, 457, 1914.

4) Zusammenstellung bei J. Stark, Jahrbuch d. Rad. u. El. 14, 139, 1917.

1) A. Sommerfeld, l. c.; P. Debye, diese Zeitschr. 18, 276, 1917.

malen Lithiumatom emittiert werden. Dann kann aber das Lithiumatom kaum aus drei Elektronen auf einem Ring um den positiven Kern bestehen, sondern es muß im normalen Zustand aus einem Kern mit zwei Elektronen in einem oder zwei inneren Ringen bestehen und einen in einem weiteren Kreise darum sich bewegendes drittes Elektron. Diese Überlegung deckt sich in dem Resultate mit dem von A. Hartmann[1]) und von A. Sommerfeld[2]), die aus der Wasserstoffähnlichkeit der Lithiumserien darauf schließen, daß das für die Emission der Serien verantwortliche Elektron allein in einer äußeren Bahn kreisen muß.

Es ist nun interessant zu bemerken, daß ein prinzipieller Unterschied zwischen der Absorption in den Röntgenserien und in den Serien im Sichtbaren vorhanden ist, insofern, als die sichtbaren Serien auch die Wellenlängen der Linien absorbieren, während die Röntgenserien dies nicht tun. Ebenso kann Natriumdampf durch Belichtung mit Licht von der Wellenlänge der D-Linien zur Emission dieser Linien gebracht werden[3]), während es unmöglich ist, z. B. die K_α-Linie eines Metalls durch Bestrahlung mit Licht dieser Wellenlänge zu erregen[4]). Dies läßt sich kaum anders als durch einen prinzipiellen Unterschied der beiden Erregungsarten erklären, es spielt wohl der Umstand dabei eine Rolle, daß die Emission der Röntgenserien innerhalb des Atoms, die sichtbare Emission außerhalb des Atoms vor sich geht.

1) A. Hartmann, diese Zeitschr. **18**, 14, 1917.
2) A. Sommerfeld, Sitzungsber. d. Bayer. Ak. S. 131, 1916.
3) R. W. Wood, Phil. Mag. **27**, 1018, 1914.
4) Siehe A. Wagner, diese Zeitschr. **18**, 443, 1917.

Göttingen, 5. November 1917.

(Eingegangen 15. November 1918.)

Zur Berechnung der Ionenladung in Kristallen.

Von J. Wimmer.

Die Zählung der den Atomen zukommenden Elektronenzahlen wurde für einige Kristalle zunächst schätzungsweise vorgenommen unter Verwertung von Erfahrungen an ultraroten Strahlen[1]). In letzter Zeit ist von den Herren Debye und Scherrer[2]) eine experimentelle Methode angegeben worden, die gestattet, aus Intensitätsmessungen an Röntgenstrahlaufnahmen die Ionenladung einwandfrei zu ermitteln. Die folgenden Ausführungen behandeln nun in Kürze das Verhältnis von Wertigkeit des Moleküls zur Zahl der positiven Ladungen. Läßt sich nämlich der Wert dieses Quotienten als Funktion bestimmter meßbarer Konstanten der Substanz angeben, so ist damit wenigstens für eine gewisse Gruppe von Kristallen ein Weg zur Vorausberechnung der Ionenladung gewiesen.

1) M. Born, Berl. Akad. 1918. S. 604ff.
2) Diese Zeitschr. **19**, 474ff., 1918.

Tatsächlich hat sich nun bei Berechnung des Einflusses ultraroter Eigenfrequenzen auf den Brechungsexponenten im sichtbaren Gebiet[1]) gezeigt, daß für die Kristalle $NaCl$, KCl, CaF_2 und S_iO_2 die fragliche Einwirkung dieselbe ist, gleichviel ob das mit einer seiner Wertigkeit entsprechenden Ladung behaftete Molekül als Träger ultraroter Eigenschwingungen betrachtet wird oder ob letztere zwei nach ihrer Valenz geladenen Atomgruppen als Molekülanteilen zugeschrieben werden müssen. Aus dieser Feststellung folgt nun für das Verhältnis der Wertigkeit v des Moleküls zur Elektronenzahl z die Beziehung:

$$\frac{v}{z} = \frac{G_1 + G_2}{\sqrt{G_1 \cdot G_2}} \tag{1}$$

Hierin bedeuten G_1 und G_2 die Atom- bzw. Molekulargewichte der beiden Gruppen. Es ist nun zu vermuten, daß diese Relation für eine ganze Klasse von Kristallen gilt, die ihrem inneren Aufbau nacheinander ähnlich sind und deren Molekül zweiatomig ist oder sich in zwei gleichwertige Atomgruppen zerlegen läßt.

Die nachstehende Tabelle enthält die aus (1) folgenden z-Werte für 10 Kristalle, von denen 8 dem regulären und 2 dem hexagonalen System angehören. Außerdem sind darin aufgenommen zum Vergleiche die von Born durch Schätzung, von Debye und Scherrer experimentell ermittelten Werte. Die beiden letzten Spalten enthalten die Konstante k der Drudeschen Dispersionsformel, und zwar sowohl die nach der Formel[2])

$$k = 0{,}297{,}10^8 \cdot \frac{\varrho \cdot z^2}{G_1 \cdot G_2} \tag{2}$$

berechneten Werte als auch die beobachteten.

Die den z-Werten in Klammern beigegebenen Zahlen lassen erkennen, mit welcher Genauigkeit die Forderung erfüllt ist, daß z bzw. der Proportionalitätsfaktor $\frac{\sqrt{G_1 \cdot G_2}}{G_1 + G_2}$ eine ganze Zahl sein muß.

Von den berechneten z-Werten ist ein Teil bereits durch das Experiment bestätigt, nämlich durch die Übereinstimmung des beobachteten k-Wertes mit demjenigen, welcher unter Ver-

1) J. Wimmer, diese Zeitschr. **19**, 483 bzw. 535, 1918.
2) J. Wimmer, diese Zeitschr. **19**, 484, 1918.

Substanz	G_1	G_2	v	z	z_{Born}	z_{Debye}	$k_{ber.}$	$k_{beob.}$
KCl	39,15	35,45	2	1,00	1	1	$0{,}423 \cdot 10^5$	$0{,}53 \cdot 10^5$
$NaCl$	23,05	35,45	2	1 (0,975)	1	—	$0{,}78 \cdot 10^5$	$0{,}90 \cdot 10^5$
CaF_2	40,1	38,0	4	2,00	1 oder 2	—	$2{,}5 \cdot 10^5$	$3{,}2 \cdot 10^5$
SiO_2	28,4	32,0	8	4,00	—	—	$13{,}8 \cdot 10^5$	$11{,}06 \cdot 10^5$
$CaCO_3$	52,1	48,0	12	6,01	—	—	$12{,}09 \cdot 10^5$	$11{,}3 \cdot 10^5$
KBr	39,15	79,96	2	1 (0,939)	1	—	—	—
KJ	39,15	126,97	2	1 (0,85)	1	—	—	—
NaF	23,05	19,0	2	1 (0,995)	—	—	—	—
LiF	7,03	19,0	2	1 (1,11)	—	1	—	—
ZnS	65,4	32,06	4	2 (1,88)	—	—	—	—

wendung des aus (1) folgenden z berechnet ist. Als Beispiel hierfür ist in die Tabelle $CaCO_3$ aufgenommen. Sowohl Formel (1) wie auch Formel (2)[1]) geben übereinstimmend die gleiche Ionenladung. Aus den Angaben der Tabelle geht ferner hervor, daß bei Spaltung eines Moleküls in 2 Atomgruppen die Ladungszahl z mit der Wertigkeit der letzteren übereinstimmt. Sonach sind einwertige Gruppen einfach, mehrwertige, ihrer Wertigkeit entsprechend, mehrfach geladen. Welchen Gültigkeitsbereich diese Folgerung umfaßt, darüber werden wohl die über diese Frage angekündigten Arbeiten der Herren Debye und Scherrer aufklären[2]).

Was im einzelnen die Übereinstimmung der nach (1) berechneten Werte von z mit den von Born schätzungsweise angegebenen und von Debye auf Grund des Experimentes gefundenen Elektronenzahlen anbelangt, so ist sie durchaus befriedigend. Bei CaF_2 entscheidet Formel (1) in Übereinstimmung mit der Annahme von Dehlinger[3]) für $z = 2$, während man nach Born im Zweifel sein kann, ob $z = 1$ oder $z = 2$ zu setzen ist.

Nicht aufgenommen sind in die Tabelle die Thallium- und Silbersalze. Die von Born für erstere vermuteten z-Werte stehen im Widerspruch mit der oben ausgesprochenen Folgerung und mit den aus (1) sich ergebenden Ladungszahlen $z = 1$. Da aber für die genannten Substanzen weder die Gitterstruktur noch zuverlässige Werte der Dielektrizitätskonstanten bekannt sind, so läßt sich über die Richtigkeit der Bornschen Werte bis jetzt keine bestimmte Aussage machen.

Zusammenfassung:

Zur Vorausberechnung der Ionenladungen in Kristallen, die zweiatomig sind oder sich in zwei gleichwertige Atomgruppen zerlegen lassen und deren Gitterstruktur bekannt ist, wird eine Formel angegeben und die aus ihr folgenden Werte für die Elektronenzahlen mit den bisherigen diesbezüglichen Angaben verglichen.

(Eingegangen 20. Dezember 1918.)

1) Nach z aufgelöst: $z = 1{,}835 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{G_1 \cdot G_2}{\varrho} \cdot k}$.

2) Diese Zeitschr. 19, 480, 1918.

3) Diese Zeitschr. 15, 276, 1914.

Zur physikalischen Theorie der Kometenschweife.

Von Fritz Zerner.

Von einzelnen Ausnahmen abgesehen, kann man die Kometenschweife mit Th. Bredichin nach drei Typen einteilen, deren hervorstechendes Merkmal ist, daß sie ihre Form drei verschieden starken Repulsivkräften der Sonne verdanken. In den letzten Jahren wurde zur Erklärung dieser Abstoßungskraft von Fitzgerald, P. Lebedew, Sv. Arrhenius, K. Schwarzschild, P. Debye der Druck der Sonnenstrahlen herangezogen. Da diese Hypothese infolge ihrer größeren Plausibilität die ältere, welche die Abstoßung auf elektrische Kräfte zurückführt, vollkommen verdrängt hat, scheint es wichtig, auf eine Erscheinung hinzuweisen, die auf den ersten Blick der Lichtdruckhypothese zu widersprechen scheint, sie aber in Hinsicht auf die von F. Ehrenhaft aufgefundenen lichtnegativen Photophorese stützt[1]).

I. Schmidt (Athen) hat nämlich am 9., 10. und 11. Oktober 1882 eine Nebelmasse mit bedeutender Eigengeschwindigkeit in auffallender Nähe des großen Kometen 1882/II beobachtet. Es wurde, da ihre Bahn der des Kometen sehr ähnlich war, sofort darauf aufmerksam gemacht, daß man aller Wahrscheinlichkeit nach berechtigt sei, die Entstehung dieser nebeligen Gebilde in einer Lostrennung vom Kometen zu suchen. Bei der genauen Bahnberechnung stieß

1) Für diesen Aufsatz vgl. R. Jägermann, Th. Bredichins mechanische Untersuchungen über Kometenformen. St. Petersburg 1903; P. Lebedew, Über die physikalischen Ursachen der Abweichungen vom Newtonschen Gravitationsgesetz, Vierteljahrsschrift der Astr. Ges. 37, 220 ff., 1902.

man jedoch auf Schwierigkeiten. Insbesondere hatte sich der Nebel, der am 9. eine zusammenhängende Masse mit vier Lichtknoten bildete, auseinandergezogen und bis zum 11. in zwei Teile gespalten. Die Berechnung gelang schon 1883 I. v. Hepperger[1]) nur dadurch, daß er sie für die beiden Nebelteile vom 11. und die ihnen entsprechenden Lichtknoten (vom 10. und 9.) getrennt durchführte. Er erhielt das Resultat: „Die Bewegungserscheinungen des Schmidtschen Nebels können mit ausreichender Genauigkeit durch Rechnung dargestellt werden, wenn man annimmt, daß sich der Nebel in seiner Gesamtheit in der Nacht vom 7. auf den 8. Oktober vom Kometen losgelöst habe, die einzelnen Teile des Nebels jedoch verschiedenen Kräfteäußerungen der Sonne unterworfen seien. Während die westlichen Nebelmassen sich so bewegten, als ständen sie unter dem Einfluß einer abstoßenden Wirkung der Sonne, die von der Größe derjenigen ist, welche die Schweife vom ersten Bredichinschen Typus verursacht, erfordert die Darstellung der Bewegung der östlichen Massen die Hypothese einer erhöhten anziehenden Wirkung der Sonne."

Der Theorie ist es bisher nicht gelungen, die hier auftretende verstärkte Anziehung auf eine Wirkung der Lichtstrahlen zurückzuführen. Experimentell fand jedoch Ehrenhaft[2]), daß Kugeln gewisser Substanzen mit Durchmessern der Größenordnung 10^{-5} cm von einem Lichtstrahl getroffen, diesem entgegenlaufen. Bei ungebrochenem Strahlengang nimmt sich dies so aus, als ob die Lichtquelle auf derartige „lichtnegative" Teilchen eine anziehende Wirkung ausüben würde. Die Größe dieser Kraft ist der Größenordnung nach dieselbe, wie die des zu erwartenden Lichtdruckes. Nach der Lichtdrucktheorie der Kometenschweife muß man aber annehmen, daß die Nebelmassen der Schweife aus Teilchen von 10^{-5} cm Längenausdehnung bestehen[3]). Kämen nun unter diesen Teilchen lichtnegative Substanzen vor, so müßte die Sonne auf sie mit einer stärkeren Anziehungskraft wirken als nach der Gravitation zu erwarten ist.

Nimmt man also an, daß der Schmidtsche Nebel aus lichtpositiven und lichtnegativen Teilchen bestanden hat, so bestätigen die an ihm ausgeführten Beobachtungen die Hypothese, daß es die Lichtkräfte sind, auf die die von der mechanischen Theorie der Kometenschweife geforderten Zusatzkräfte zurückgehen.

Aus dem Gesagten folgt die Möglichkeit des Auftretens einer verstärkten Anziehung der Sonne auf kometare Nebelmassen, die bei der Durchrechnung der anomalen Kometenschweife in Betracht zu ziehen ist, während heute nach Bredichin die Form einiger anomaler Kometenschweife bloß aus der durch die Ausschleuderung vom Kerne gegen die Sonne entstehenden Anfangsgeschwindigkeit der einzelnen, den Schweif bildenden Teilchen, die der Gravitation allein unterliegen, errechnet wird. Von dieser Annahme ging Bredichin aber gerade beim Kometen 1882/II ab. Von den zwei anomalen Schweifen dieses Kometen erklärte er den einen auf die vorerwähnte Weise, den anderen als den normalen Schweif eines Nebenkometen, der vom Kern des Hauptkometen in der Richtung zur Sonne gelegen ist. Die oben besprochenen Erscheinungen an dem aus ihm entstandenen Nebel legen es dagegen nahe, die Masse eines der beiden anomalen Schweife mit der lichtnegativen Materie des der verstärkten Anziehung der Sonne unterliegenden Teiles des Nebels zu identifizieren, besonders da die Kraft, mit der der andere Teil des Nebels abgestoßen wurde, der Kraft gleicht, der die Schweife des ersten Bredichinschen Typus ihre Entstehung verdanken, und der Komet auch einen solchen gezeigt hat.

Zusammenfassung:

1. Die erwähnten Erscheinungen zeigen das Auftreten eines Lichtzuges in astronomischen Verhältnissen.

2. Dies verlangt die Berücksichtigung der Annahme einer verstärkten Anziehungskraft der Sonne, insbesondere bei der Durchrechnung der anomalen Kometenschweife.

3. Umgekehrt zeigt das Auftreten des Lichtzuges in astronomischen Verhältnissen, daß diese Kraft auf einer direkten Wechselwirkung zwischen Materie und Strahlung beruht, denn die Dichte der Gasatmosphäre der kometaren Nebelmassen ist (insbesondere mit Rücksicht auf ihre verschwindende Refraktion) äußerst gering, so daß eine störende Einwirkung des Gases ausgeschlossen ist.

Wien, I. Phys. Institut der Universität. November 1918.

(Eingegangen 24. November 1918.)

1) I. v. Hepperger, Versuch einer Bahnbestimmung des Schmidtschen Nebels. Wien. Ber. 87, 603, 1883.
2) F. Ehrenhaft, Die Photophorese. Ann. d. Phys. IV, 56, 81ff., 1918, diese Ztschr. 18, 352ff., 1917.
3) K. Schwarzschild, Sitz.-Ber. der bayr. Ak. d. W. 31, 1901, 335f.

BESPRECHUNGEN.

H. W. B. Roozeboom, Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre. Zweites Heft: **Systeme aus zwei Komponenten.**

2. Teil: **Systeme mit zwei flüssigen Phasen, von E. H. Büchner.** gr. 8°. IX u. 226 S. Mit 72 Abbildungen u. 1 Tafel. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1918. M. 12.—.

3. Teil: **Pseudobinäre Systeme, von A. H. W. Aten.** gr. 8°. VIII u. 199 S. Mit 101 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1918. M. 10.60.

Das zweite Heft von Roozebooms „Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre" ist für die Beschreibung der Gleichgewichte in binären Systemen bestimmt. Hiervon ist nur der erste Teil noch in Roozebooms eigener Bearbeitung im Jahre 1904 erschienen. Er behandelt die Gleichgewichte solcher binärer Gemische, in denen im flüssigen Zustande vollständige Mischbarkeit, im kristallisierten dagegen weder Mischbarkeit noch Verbindungsfähigkeit besteht.

Der jetzt erschienene, von E. H. Büchner bearbeitete zweite Teil des zweiten Heftes behandelt binäre Systeme mit zwei flüssigen Phasen, wobei auch die Möglichkeit des Auftretens von Mischkristallen und kristallisierten Verbindungen berücksichtigt wird. Die Einteilung des Stoffes schließt sich eng an die im ersten Teil gewählte an. Zunächst werden die Gleichgewichte besprochen, an welchen keine feste Phase teilnimmt; danach diejenigen, bei welchen die Komponenten im festen Zustande auftreten; sodann die, an welchen sich eine Verbindung, und schließlich die, an denen sich Mischkristalle beteiligen. Bei der theoretischen Behandlung der Schichtengleichgewichte stellt sich der Verf. auf den Boden der van der Waalsschen Molekulartheorie binärer Gemische, da diese alle Gleichgewichte, die zwischen flüssigen und Gas-Phasen auftreten können, umfaßt und mit allen beobachteten Erscheinungen im völligen Einklang steht.

Der dritte Teil des zweiten Heftes ist gleichzeitig mit dem zweiten Teil erschienen und von A. H. W. Aten bearbeitet. Er befaßt sich mit solchen Systemen, die aus zwei Komponenten bestehen, welche sich ineinander umwandeln können. Die beiden Komponenten gleicher empirischer Zusammensetzung werden als Molekülarten bezeichnet. Das Verhalten derartiger Systeme ist im wesentlichen durch die Geschwindigkeit, mit der sich das Gleichgewicht in den einzelnen Phasen, das sog. homogene Gleichgewicht einstellt, bedingt. Ist diese Geschwindigkeit unmerkbar klein, so hat man es mit rein binären Systemen zu tun. Diese Fälle werden daher im vorliegenden Teil nur soweit behandelt, als zum Verständnis des Ganzen notwendig ist. Stellt sich dagegen das homogene Gleichgewicht so rasch ein, daß jede Phase stets im inneren Gleichgewichte ist, so schnell man auch den Zustand des Systems ändert, so hat man es vom Standpunkte der Phasenlehre mit unären Systemen zu tun. Erfolgt endlich die Einstellung des homogenen Gleichgewichtes mit einer im Verhältnis zur Herstellung des heterogenen Gleichgewichtes mäßigen Geschwindigkeit, so hat man es mit den eigentlichen pseudobinären Systemen zu tun. Jedoch berücksichtigt der vorliegende Teil auch den Fall der schnellen Einstellung des homogenen Gleichgewichtes, speziell die neueren Untersuchungen über die Allotropie, welche auf einen engen Zusammenhang zwischen den Erscheinungen der Isomerie und der Allotropie hinweisen.

Die Darstellung ist in beiden Teilen einfach, klar und sachgemäß; mathematische Deduktionen sind ferngehalten und vorwiegend graphische Darstellungen benutzt worden. R. Ruer.

Günther Bugge, Strahlungserscheinungen, Ionen, Elektronen und Radioaktivität. (Bücher der Naturwissenschaft. 4. Bd.) 4. Auflage. 141 S. Mit 4 Tafeln und 20 Zeichnungen im Text. Leipzig, Philipp Reclam jun. v. J. 1918. M. 0.50. Geb. M. 0.90.

Der Verf. wünscht in seinem Vorwort zur 4. Auflage, daß „das Büchlein als gemeinverständliche erste Einführung in das Gebiet der Strahlungserscheinungen seinen Zweck erfülle". — Ich glaube, dies kann man dem Verf. zugestehen. — Es ist ja recht schwer, das umfangreiche Gebiet der Strahlungserscheinungen und der Radioaktivität in ein kleines Bändchen zusammenzudrücken! Deshalb ist es unverständlich, daß der Verf. nicht manche Sachen, die lange ad acta gelegt sind, z. B. Crookes „strahlende Materie" (S. 31), die sagenhaften „Radioben" (S. 81), die total falschen Ansichten des Herrn Ramsay (S. 127—130), das Radiotellur, das Radioblei, glatt gestrichen hat. Statt der Thomsonschen Atomerklärung wäre besser und kürzer das Atommodell Rutherfords besprochen. Der Verf. liebt es außerdem, unbestimmte Zeitbegriffe einzuführen. Er spricht von „neu entdeckten Strahlen" (1895!), von „schon früher" entdeckter Einwirkung des ultravioletten Lichtes, vom lichtelektrischen Effekt usw. Es sind doch deutsche Physiker tadellosen Rufes, Röntgen, H. Hertz und Hallwachs, denen wir diese Entdeckungen verdanken. Warum werden sie nicht genannt, während fast kein ausländischer Physiker, der auf diesem Gebiete gearbeitet hat, vergessen ist! Fälschlicherweise wird Regener (S. 66) die Entdeckung der Scintillation zugeschrieben. Entdeckt haben sie Crookes und gleichzeitig Elster und Geitel; Regener hat sie in scharfsinniger und experimentell vollendeter Weise zur Zählung der emittierten α-Teilchen verwandt. Es finden sich noch eine ganze Anzahl von Ungenauigkeiten in dem Buche, die dem Fachmann auffallen, über die andere nicht so leicht stolpern. Nur möchte ich noch auf die Rechnung auf Seite 125 hinweisen, die von Le Bon herstammen soll, und die gewiß manchen in diesen trüben Zeiten erheitern wird. Karl Bergwitz.

Hugo Bauer, Chemie der Kohlenstoffverbindungen. IV. Heterozyklische Verbindungen. (Sammlung Göschen 104). 8°. 2. verbesserte Auflage. 134 S. Berlin und Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, G. m. b. H., 1918. Geb. M. 1.50.

Das vorliegende Bändchen der bekannten Sammlung bringt eine Zusammenstellung der wichtigsten

heterozyklischen Verbindungen, zu denen Verf. abweichend von der üblichen Praxis nicht nur 5- und 6-gliedrige heterozyklische Ringsysteme mit „Kern"-charakter, sondern auch die unbeständigen 3- und 4-Ringe wie Diazomethan u. a. m. rechnet. Die Fülle von Stoff, die er auf engem Raum zusammendrängt, dürfte dem, der ganz ohne Vorkenntnis des behandelten Gebiets sich darüber zu orientieren wünscht, das Verständnis seiner Ausführungen öfter einigermaßen erschweren. Dagegen werden sie dem bereits oberflächlich mit dem Gegenstand Vertrauten als Ergänzung der verschiedenen kleinen Lehrbücher der organischen Chemie willkommen sein, die die heterozyklischen Verbindungen meist sehr viel kürzer behandeln, als ihrer wissenschaftlichen und technischen Bedeutung entspricht. Borsche.

W. Guttmann, Grundriß der Physik. 13. bis 16. Aufl. 250 S. Mit 180 Abbildungen. Leipzig, Georg Thieme. 1918. Geb. M. 7.—.

Es ist dem Verf. gut gelungen, seiner Forderung, daß der Grundriß in erster Linie den Medizinern, Pharmazeuten und Zahnärzten als kurze Einleitung in die Physik und als Repetitorium dienen soll, gerecht zu werden. Wenn der Mediziner alles das kann und behält, was Guttmann in seinem Buche bringt, dann muß man zufrieden sein.

Verbesserungsbedürftig erscheint mir nur folgendes: Der mathematische Ansatz zu der Fig. 35 gehörig ist so, wie er daneben steht, nicht richtig. Die Fig. 51 ist direkt falsch. Das Wasser wird in dem kugelförmigen Gefäß niemals steigen. Es muß durch ein einseitig offenes U-Rohr ersetzt werden. — Ebenso ist die Erklärung der Luftelektrizität auf Seite 145 falsch. Die Ursache der Luftelektrizität zu erklären, ist durchaus nicht einfach. Sie bleibt am besten weg, wie es beim sogenannten „Erdmagnetismus" auch geschehen ist. Am besten wird nur das normale Erdfeld im Gegensatz zum gestörten unterschieden. — Ist der „Franklinsche" Blitzableiter wirklich eine „segensreiche" Erfindung?

In dem Buche vermisse ich, gerade für Mediziner, eine „moderne" Luftpumpe (etwa eine Gaede-Molekularpumpe), die Coolidge-Röhre, die Erklärung der Immersion und des Ultramikroskops, besonders aber eine Spektraltafel.

Die Frage: Was sind radioaktive Stoffe?, wird falsch beantwortet, ebenso die nach Hochfrequenzströmen ungenau! — Der Wert des Buches würde durch die Ausführung der vorgeschlagenen kleinen Änderungen noch steigen. Karl Bergwitz.

A. Baruch, Die Grundlagen unserer Zeitrechnung. (Mathem.-physikal. Bibliothek, Bd. 29.) kl. 8⁰. 51 S. Mit 10 Fig. im Text. Leipzig, B. G. Teubner. Kart. M. 1.—.

Das kleine Heftchen gibt in ganz anschaulicher Weise eine Darstellung der Grundlagen unserer Zeitrechnung, in dem der Verfasser ausgehend von der scheinbaren, täglichen Bewegung der Gestirne die Richtungsbestimmungen nach den Gestirnen erläutert und dabei einzelne Begriffe, wie Stundenwinkel usw. erklärt, mit denen die Zeiteinteilung in direktem Zusammenhange steht. Von der Steinzeit führt er zur „wahren" und „mittleren" Sonnenzeit über und erklärt den Zusammenhang dieser Zeitmaße untereinander und mit der „Zonenzeit" und der gegenwärtig beliebten „Sommerzeit", deren Einführung den Anstoß zur Abfassung des Werkchens gegeben hat, wie der Verfasser einleitend bemerkt. Kurze Darlegungen über die Einrichtung unserer Uhren, über die Zeitübertragung und die Zeitsignale schließen das für das große Publikum recht lehrreiche Heftchen. L. Ambronn.

Tagesereignisse.

Der Professor an der Universität Berlin und Mitglied der Akademie der Wissenschaften daselbst Dr. Albert Einstein wurde mit der Abhaltung von Vorlesungen über theoretische Physik an der Universität Zürich betraut. Herr Einstein wird jedes Semester etwa 5 Wochen in Zürich lesen.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Die von uns (20, 24, 1919) gemeldete Verleihung des Professorentitels an Dr. Leo Arons ist auf dessen besonderen Wunsch unterblieben.

Habilitiert: An der Böhmischen Technischen Hochschule Dr. Vojtech für Photographie und Photochemie, an der Universität Frankfurt/Main Professor Dr. techn. Richard Edler von Mises (bisher in Straßburg) für Mathematik, der Professor an der Universität in Konstantinopel Dr. Gustav Fester an der Universität Frankfurt/Main für angewandte physikalische und industrielle Chemie, der Privatdozent an der Universität Straßburg Dr. Hermann Rohmann an der Universität Tübingen für Physik, der Privatdozent an der Universität Zürich Dr. Paul Bernays an der Universität Göttingen für Mathematik.

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Göttingen Professor Dr. Heinrich Freiherr Rausch v. Traubenberg zum ord. Professor an der Baltischen Technischen Hochschule Riga.

Ehrung: Die Helmholtz-Medaille der Berliner Akademie der Wissenschaften wurde dem ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität München Geheimem Rat Dr. Wilhelm Konrad Röntgen verliehen.

Verliehen: Dem Direktor des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Kohlenforschung in Breslau Dr. Fritz Hofmann, dem Privatdozenten für Physik an der Universität Erlangen Dr. techn. Friedrich Hauser, dem Privatdozenten für Chemie an der Universität München Dr. Ludwig Kalb dem Abteilungsleiter im Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie in Berlin-Dahlem Dr. Friedrich Kerschbaum der Titel Professor.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Chemie an der Universität Birmingham Dr. Percy F. Frankland.

Gestorben: Der Privatgelehrte auf dem Gebiete der Ersatzfaserindustrie Professor Dr. Paul Hoering in Charlottenburg, der ord. Professor für praktische Astronomie und Direktor des astronomischen Observatoriums an der Harvard-Universität in Cambridge, Mass. Dr. Edward Charles Pickering.

Die Fortsetzung der zusammenfassenden Bearbeitung „Metallographie" von Prof. Ruer, Aachen, muß vorläufig infolge Beförderungsschwierigkeiten unterbleiben.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

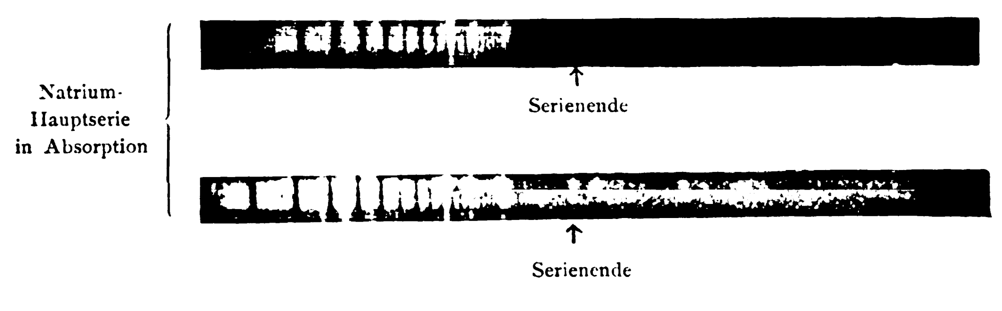


Fig. 4.

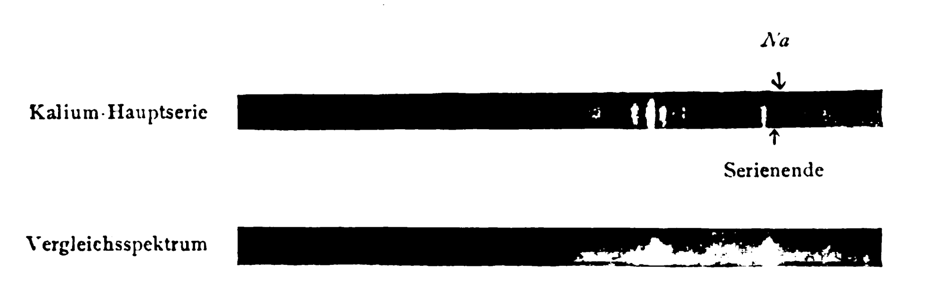


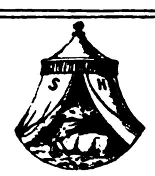
Fig. 5.

Natriumhauptserie bei
geringer Dampfdichte

Fig. 6.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und H. Th. Simon



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 40 Mark, im Ausland 45 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 60 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstraße 2.

No. 5. | 1. März 1919. No. 537. | 20. Jahrgang.

Inhaltsverzeichnis:

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 5. | 1. März 1919. Redaktionsschluß für No. 7 am 13. März 1919. | 20. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Erklärung der Röntgenspektren und die Konstitution der Atome.

Von L. Vegard.

I. Teil.

Übersicht der ersten Arbeiten.

§ 1. Im Laufe des letzten Jahres habe ich einige Arbeiten über die Erklärung der Röntgenspektren veröffentlicht. Die ersten zwei Mitteilungen wurden am 23. und 30. Oktober an die Kristiania Vid. Selsk. eingeliefert und sind später in den Verhandlungen der D. phys. Ges.[1]) veröffentlicht.

In einer weiteren Abhandlung[2]) die in Phil. Mag. für April 1918 erschienen ist, sind dieselben Fragen und noch einige andere einer noch ausführlicheren Behandlung unterworfen worden.

Seitdem habe ich mich weiter mit dem Problem beschäftigt und auf Grund der von mir aufgestellten „Hypothese der wachsenden Quantenzahlen, der normalen Elektronenringe" ist es mir gelungen, die Frequenzformeln derart zu verallgemeinern, daß man nicht nur die Hauptlinie jeder Serie, sondern auch die weiteren Linien in befriedigender Weise erklären kann. Außerdem geben die verallgemeinerten Formeln, die auf „dem Prinzip der Wiedervereinigung von Sekundärkreisen" bauen, quantitativ richtige Werte für die Abweichung von Kossels Relationen.

Endlich führen die Gleichungen der Emissionsspektren durch ganz einfache Überlegungen zu allgemeinen Formeln für die Frequenzen der Absorptionskanten, die eine sehr gute Übereinstimmung mit der Erfahrung geben.

Eine ausführlichere Beschreibung dieser neuen Untersuchungen ist in einer Abhandlung, die am 18. September an die Kristiania Vid. Selsk. eingesandt wurde, und die in Kürze in Phil. Mag. erscheinen wird, gegeben (Veröffentlichung IV).

Die allgemeinere Fassung des Problems führt zu der früher gefundenen Anzahl von Elektronen in den zwei ersten Ringen (K- und L-Ring).

Für die übrigen Ringe, die in meinen ersten Aufsätzen mehr andeutungsweise angegeben wurden, führt die allgemeine Lösung des Problems zu einigen Änderungen.

Da die ganze Theorie in ihrer jetzigen Form sich nur allmählich und schrittweise entwickelt hat, dürfte ein kurzer Überblick über die Arbeiten und die jetzige Lage der Theorien nicht ohne Interesse sein.

Die wichtigsten Ergebnisse der Veröffentlichung I, II und III sind kurz die folgenden:

1. Es wurde gezeigt, daß es möglich ist, mehrere Frequenzformeln für die K_α-Linie aufzustellen, die vom numerischen Gesichtspunkt aus ziemlich gleichwertig sind. Welche Formel die richtige ist, muß durch die Leistungsfähigkeit der zugrunde liegenden Hypothese und durch physikalische Überlegungen entschieden werden.

In dieser Hinsicht muß der Formel von Debye[1]) der Vorzug gegeben werden.

2. Überlegungen in betreff der Absorptionsverhältnisse führten mich mit Notwendigkeit zu der Annahme, daß die L-Linien nicht durch Wiedervereinigung eines Elektrons gegen einen K-Kreis entstehen können. Die L-Linien mußten durch Wiedervereinigung gegen einen normalen L-Ring, der zuvor ein Elektron verloren hatte, entstehen.

3. Wenn wir das Frequenzgesetz von Bohr:

$$h\nu = E_2 - E_1 \qquad (1)$$

auf die L-Linien übertragen, muß man die von Bohr aufgestellte Hypothese, daß in dem normalen Atome jedes Elektron ein Impulsmoment von $\frac{h}{2\pi}$ hat, aufgeben.

1) L. Vegard, Über die Erklärung der Röntgenspektren. Verh. d. D. phys. Ges. **1917**, 328 (Veröffentlichung I); Der Atombau auf Grundlage der Röntgenspektren, ebenda **1917**, 344 (Veröffentlichung II).

2) L. Vegard, The X-ray Spectra and the Constitution of the Atom. Phil. Mag. **35**, 293, 1918 (Veröffentlichung III).

1) P. Debye, diese Zeitschr. **18**, 276, 1917.

4. Statt der Bohrschen Hypothese des unveränderlichen Momentes wurde die Hypothese der veränderlichen Quantenzahlen der normalen Ringe aufgestellt.

Jedes Elektron desselben Elektronenkreises hat nach dieser Hypothese ein Impulsmoment:

$$m\omega a^2 = n\frac{h}{2\pi},$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit, m die Masse, a der Radius des Kreises und n eine ganze Zahl, die „Quantenzahl des Kreises", ist, die auf Grund der beobachteten Spektren in jedem Falle zu bestimmen ist.

Der Radius des Kreises ist durch die Gleichung:

$$a = \frac{e^2}{2hR}\frac{n^2}{N-p-S_q} \qquad (2)$$

bestimmt. N ist die Atomzahl des betreffenden Elements, q die Anzahl der Elektronen im Ringe, p die Anzahl der Elektronen zwischen dem Kern und dem Ringe, und

$$S_q = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{i=q-1}\frac{1}{\sin i\frac{\pi}{q}}.$$

Wir sehen, daß der Radius mit wachsendem n wächst. Wenn wir demnach vom Kern nach außen gehen, können die Quantenzahlen niemals abnehmen. Dagegen ist an sich die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß mehrere Ringe mit derselben Quantenzahl existieren können.

Solche Ringe mit gleichen Quantenzahlen müssen nahe aufeinander folgen, und müssen Linien geben, welche derselben Liniengattung angehören.

5. Auf Grund der erwähnten Hypothese der wachsenden Quantenzahlen der normalen Ringe wurden Frequenzformeln für die Röntgenspektren aufgestellt, und zwar unter den folgenden zwei Voraussetzungen:

a) Das Elektron rekombiniert sich mit dem gesprengten Ringe von einem selbständigen Stabilitätskreise aus (Wiedervereinigung von Sekundärkreisen),

b) das Elektron rekombiniert sich von einem der normalen äußeren Elektronenkreise des Atoms aus, (Wiedervereinigung von Primärkreisen).

Beide Voraussetzungen führten zu Frequenzformeln von der richtigen Form. Ohwohl die zweite Annahme durch passende Wahl der Elektronenzahl der K- und L-Ringe zu ganz guter Übereinstimmung für die K_α-Linie führte, wurde diese Annahme aus näher angegebenen Gründen aufgegeben, und die Deutung der Linien wurde unter der Voraussetzung a) weitergeführt.

6. Die Annahme, daß die Wiedervereinigung von Sekundärkreisen aus geschieht, ergab für K_α eine Frequenzformel, die mit der von Debye aufgestellten identisch ist. Sie führte auch zu einer befriedigenden Formel für die α-Linien der L- und M-Serie.

Die Bestimmung der L-Frequenzen führte zu einem L-Ring von 7 Elektronen mit der Quantenzahl 2.

Die Elektronenzahl des M-Ringes hängt davon ab, ob man einen oder zwei L-Ringe annimmt. In meinen ersten Arbeiten ist angedeutet, daß möglicherweise noch ein zweiter L-Ring außerhalb des ersten mit 8 Elektronen von dem Entstehen der l-Serie Rechenschaft geben könnte. In diesem Falle müßte man für den M-Ring 9 oder 10 Elektronen annehmen.

Später habe ich gefunden, daß, wenn nicht mehrere Ringe mit derselben Quantenzahl angenommen werden, man für M die beste Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment bekommt, wenn man einen dreiquantigen M-Ring mit 12 Elektronen annimmt.

7. Ein Versuch die Doublette der L-Serie, z. B. ($\alpha\beta$) und ($\gamma\delta$) in der von Sommerfeld angegebenen Weise zu erklären, führte mich zu der Annahme, daß auch Systeme von Elektronen ganz bestimmte elliptische Bahnen beschreiben können. Man muß sich etwa denken, daß alle Elektronen des L-Systems sich in Ellipsen mit gemeinsamem Brennpunkt bewegen, und daß die Hauptachsen radial mit gleichem Winkelabstand angeordnet sind. Besitzen außerdem sämtliche Elektronen dieselbe Phase, so werden in jedem Augenblick die Elektronen in Kreisen um den Kern angeordnet sein. Die Radien der Kreise aber ändern sich periodisch mit der Zeit[1]).

8. Auf Grundlage der durch die Deutung der Röntgenspektren gewonnenen Kenntnisse der inneren Elektronensysteme und mit Hilfe der Annahme, daß chemisch verwandte Elemente dieselbe Anzahl Elektronen im äußeren Ringe besitzen, wurde ein allgemeines Schema für die Konstitution sämtlicher Atome gewonnen.

Die vorgeschlagene Anordnung der Elektronen zusammen mit unserer grundlegenden Hypothese der wachsenden Quantenzahlen zeigte sich imstande auf die Ursache der Verwandtschaftsverhältnisse der Elemente, wie sie im periodischen System zum Ausdruck kommt, einen Ausblick zu eröffnen.

1) In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat Sommerfeld (diese Zeitschr. **19**, 297, 1918) dieselbe Auffassung geäußert.

Gewisse Überlegungen führten zu der Ansicht, daß die kinetische Energie eines Elektrons im äußeren Ringe sowohl für den elektronegativen Charakter als für die elektrische Leitfähigkeit maßgebend sei.

Der Grad der Elektropositivität und die Leitfähigkeit sollten wie die Größe

$$1/\sigma = \frac{n^2}{(p - S_p)^2} \tag{3}$$

variieren. n ist die Quantenzahl und p die Anzahl der Elektronen des äußeren Ringes.

Die Elemente derselben Periode (Elemente zwischen zwei aufeinander folgenden Edelgasen) besitzen nach unserem Konstitutionsschema dieselbe Quantenzahl n. In den ersten kurzen Perioden wächst die Anzahl der Elektronen fortlaufend von 1 bis 7. Gleichzeitig zeigt die Größe $1/\sigma$ eine Abnahme, welche genau der Abnahme der Elektropositivität und der elektrischen Leitfähigkeit entspricht.

Bei den langen Perioden z. B. zwischen *Ar* und *Kr* wächst die Anzahl p mit steigender Atomzahl (N) erst von $p = 1$ (*K*) zu $p = 10$ (*Ni*), dann wieder von $p = 1$ (*Cu*) zu $p = 7$ (*Br*). Diese bedingt eine Abnahme von $1/\sigma$ von *K* bis *Ni*, und dann eine plötzliche Zunahme bei *Cu*, die wieder durch eine Abnahme von *Cu* bis *Br* begleitet ist. Auch diese typische Variation finden wir in der Variation der Elektropositivität und der elektrischen Leitfähigkeit wieder.

Betrachten wir chemisch verwandte Elemente, so ist p konstant und $1/\sigma$ ist proportional mit n^2. Nehmen wir in Übereinstimmung mit unsrer Hypothese der wachsenden Quantenzahlen an, daß die Quantenzahlen der verschiedenen Perioden als ganze Zahlen, nämlich (1, 2, 3 ....) (oder vielleicht 2, 3, 4 ....) wachsen, so wird $1/\sigma$ für verwandte Elemente mit wachsenden Atomzahlen zunehmen. Hierdurch erklärt sich einfach die Zunahme der Elektropositivität (metallischen Charakters) und der elektrischen Leitfähigkeit bei chemisch verwandten Elementen, wenn wir nach höheren Atomzahlen gehen.

Der Radius (a) des äußeren Elektronenringes ist durch die Gleichung

$$a = a_H \frac{n^2}{p - S_p} \tag{4}$$

gegeben und zeigt eine ähnliche Variation wie die Größe $1/\sigma$.

Unzweifelhaft ist anzunehmen, daß das Atomvolumen von dem Radius a abhängt. Jedoch ist zu erwarten, daß das Atomvolumen auch in bedeutendem Grade von der Art der Zusammenlagerung der Atome abhängig ist, und deshalb können wir nicht ohne weiteres eine genaue Übereinstimmung zwischen der Variation von a und derjenigen des Atomvolumens erwarten. Ein Blick auf die Atomvolumkurven zeigt sofort eine gewisse Übereinstimmung, die besonders für die Alkalien und Erdalkalien zum Vorschein kommt. Der Anstieg des Atomvolumens am Ende jeder Periode ist aber ganz entgegengesetzt der Variation von a, und muß wohl durch die Bindungsart der Atome bedingt sein. Insofern eine Ähnlichkeit zwischen den Veränderungen von a und dem Atomvolumen existiert, stimmen sie mit der früher gemachten Annahme überein, daß innerhalb jeder Periode die Quantenzahl dieselbe ist, und daß die Quantenzahlen der aufeinander folgenden Perioden als ganze Zahlen (1, 2, 3 ....) anzunehmen sind.

II.

Die Verallgemeinerung der Frequenzformeln.

§ 2. Allgemeine Bemerkungen über Wiedervereinigung zwischen Primärkreisen.

Um die Frequenzformeln von irgendeiner der beiden Wiedervereinigungshypothesen aus abzuleiten, sind weitere ergänzende Annahmen erforderlich. In der kürzlich veröffentlichten Arbeit IV habe ich die verschiedenen möglichen Nebenannahmen einer eingehenden Untersuchung unterworfen. Dadurch bin ich zu ganz bedeutungsvollen Erweiterungen der vorher gewonnenen Resultate geführt worden.

Die Verallgemeinerungen gründen sich auf die Tatsache, daß die Entfernung eines Elektrons von einem Ringe eine Änderung der Bewegung der Elektronen der äußeren Ringe zur Folge hat. Jedenfalls muß, wenn die Wiedervereinigung von Primärkreisen aus stattfindet, diese Änderung näher angegeben werden.

Um den verschiedenen Möglichkeiten eine exakte Formulierung zu geben, führen wir den Ausdruck der „Ringenergie" E ein

$$E = C - \frac{2hRq}{\varrho}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varrho}{n^2}\left(N - p - S_q\right)^2}\right)$$
$$= C - W(n, p, q) \tag{5a}$$

indem wir:

$$W(n,p,q) = \frac{2hRq}{\varrho}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varrho}{n^2}\left(N - p - S_q\right)^2}\right) \tag{5b}$$

einführen.

ϱ ist eine Konstante $= 5{,}30 \cdot 10^{-5}$, R ist Rydbergs Konstante $3{,}292 \cdot 10^{15}$. Die übrigen Größen haben dieselbe Bedeutung wie vorher.

Es ist auch zweckmäßig, den folgenden Ausdruck einzuführen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{W(n,p,q)}{hR} = V(n,p,q) = \\ = \frac{2q}{\varrho}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varrho}{n^2}(N - p - S_q)^2}\right).\end{aligned}\right\} \quad (6a)$$

Wird die Variation der Elektronenmasse mit der Geschwindigkeit außer Betracht gelassen, so bekommt man:

$$V_0(n,p,q) = \frac{q}{n^2}(N - p - S_q)^2. \quad (6b)$$

Da ϱ eine kleine Größe ist, kann man „(6a)" in einer schnell konvergierenden Reihe entwickeln; in erster Annäherung ist:

$$V(n,p,q) = V_0 + \frac{\varrho}{4q} V_0^2. \quad (6c)$$

Wir werden zuerst die Wiedervereinigung von Primärkreisen betrachten.

Damit man homogene Strahlung erhalten soll, muß die Veränderung der Bewegung, welche die Entfernung des Elektrons (Erregungsprozeß) begleitet, eine ganz bestimmte sein.

Man wird dann auf die folgenden zwei Möglichkeiten geleitet:

1. Durch den Erregungsprozeß wird die Energie der äußeren Elektronenkreise nicht geändert (Unveränderlichkeit der Energie). Auch nach dem Erregungsprozeß ist die Energie eines Kreises $C - W(n,p,q)$, wo p die Anzahl der Elektronen ist, welche — in normalem Zustand des Atoms — sich innerhalb des Kreises befinden.

2. Wegen der einschneidenden Rolle, welche das Impulsmoment im Aufbau der Atome spielt, wäre die natürliche Annahme die, daß auch nach der Erregung sämtliche zurückbleibende Elektronen ihre Impulsmomente unverändert halten.

Unter dieser Voraussetzung würde die Entfernung eines Elektrons von einer Energieänderung der äußeren Elektronenringe begleitet sein, und zwar nimmt die Energie ab um eine Größe $\triangle E$, wo:

$$\triangle E = W(n, p-1, q) - W(n,p,q). \quad (7)$$

Diese Energie $\triangle E$ könnte entweder in der Form von Strahlung die Atomringe verlassen oder sie könnte für das Austreiben des Elektrons (Erregungsprozeß) nutzbar sein. Wie wir später sehen werden, ist letztere Annahme wohl unzweifelhaft die richtige.

In meiner Abhandlung III habe ich die erste Hypothese vorgezogen, und zwar aus dem folgenden Grunde:

Nehmen wir an, daß das von einem Ring (i) weggeführte Elektron durch ein von dem (k) Kreis kommendes Elektron ersetzt wird, so gibt die Bohrsche Frequenzbedingung unter der Annahme unveränderlicher Energie die Frequenzformel:

$$\frac{\nu}{R} = V(n_i,p_i,q_i) - V(n_i,p_i,q_i - 1) - V(n_k,p_k,q_k) + V(n_k,p_k,q_k - 1). \quad (8a)$$

Die Annahme einer Rekombination zwischen Primärkreisen stützt sich auf die Kosselschen Relationen, z. B.

$$\nu_{K_\beta} = \nu_{K_\alpha} + \nu_{L_\alpha} \quad (9)$$

und wie leicht einzusehen ist, wird die Kosselsche Relation ganz allgemein durch die Gleichung (8a) identisch erfüllt sein.

Unter der Annahme, daß das Winkelmoment sich ungeändert hält, und nur die Energieänderung der beiden Ringe (i) und (k) in das Strahlungsquantum eingeht, fand ich ursprünglich die Frequenzformel:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\nu}{R} = V(n_i,p_i,q_i) - V(n_i,p_i,q_i - 1) \\ - V(n_k,p_k - 1,q_k) + V(n_k,p_k,q_k - 1).\end{aligned}\right\} \quad (8b)$$

Diese Frequenzformel gibt eine zu große Abweichung von den Kosselschen Relationen und deshalb habe ich in der Abhandlung III nur die Frequenzformel unter der Voraussetzung von Unveränderlichkeit der Energie beibehalten.

Später aber habe ich gefunden, daß es möglich ist auch die Hypothese der Unveränderlichkeit der Momente mit den Kosselschen Relationen in Übereinstimmung zu bringen.

Die Elektronenringe, welche das rekombinierende Elektron auf dem Wege von dem (k) bis zu dem (i) Ring passiert, werden auch durch die Wiedervereinigung (Emissionsprozeß) ihre Energie ändern. Nehmen wir an, daß die Energieverminderung derjenigen außerhalb des (i) Ringes liegenden Kreise für die Bewegung des Elektrons nutzbar sein wird (und nicht ausstrahlt), so ist es das wahrscheinlichste, daß auch bei der Wiedervereinigung die Energieänderungen der zwischenliegenden Kreise in umgekehrter reversibler Weise in den Emissionsprozeß eingehen. Mit anderen Worten: das ganze Ringsystem bildet von i bis k etwas Ganzes und es ist die Energieänderung des ganzen Systems, welche wir in dem ausgestrahlten Energiequantum wiederfinden.

Unter dieser Voraussetzung erhält man leicht die folgende Frequenzformel:

$$\left(\frac{\nu}{R}\right)_i^k = V(n_i, p_i, q_i) - V(n_i, p_i, q_i - 1) + \sum_{l=i+1}^{l=k-1} [V(n_l, p_l, q_l) - V(n_l, p_l - 1, q_l)] + V(n_k, p_k, q_k - 1) - V(n_k, p_k - 1, q_k). \quad (10)$$

Ist j ein Ring zwischen (i) und (k), so findet man leicht:

$$\left(\frac{\nu}{R}\right)_i^k = \left(\frac{\nu}{R}\right)_i^j + \left(\frac{\nu}{R}\right)_j^k$$

oder die Kosselschen Relationen sind allgemein und identisch erfüllt.

Wenn man die V-Funktionen aus Gleichung (6c) einführt, kann man die Frequenzgleichung leicht auf folgende Form bringen:

$$\left(\frac{\nu}{R}\right)_i^k = \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2}\right) N^2 - BN + C + \varepsilon$$

wo:

$$\tfrac{1}{2} B = \frac{\Phi(q_i) + p_i}{n_i^2} - \frac{\Phi(q_k) + p_k - q_k}{n_k^2} + \sum_{l=i+1}^{l=k-1} \frac{q_l}{n_l^2}$$

$$C = \frac{\varphi(p_i q_i)}{n_i^2} - \frac{\varphi(p_k, q_k) - 2q_k(p_k - S_{q_k} - \frac{1}{2})}{n_k^2} + \sum_{l=i+1}^{l=k-1} \frac{2q_l}{n_l^2}(p_l + S_{q_l} - \tfrac{1}{2}) \quad (11a)$$

Die Funktionen Φ und φ sind dieselben, welche schon in der Arbeit III eingeführt wurden

$$\begin{aligned} \Phi(q) &= q(S_q - S_{q-1}) + S_{q-1} \\ \varphi(p, q) &= q(2p + S_q + S_{q-1})(S_q - S_{q-1}) + (p + S_{q-1})^2. \end{aligned} \quad (11b)$$

Die Größe ε ist die Korrektion für die Änderung der Masse mit der Geschwindigkeit. Man findet sie in erster Annäherung zu:

$$\varepsilon = \frac{\varrho}{4}\left\{q_i\left(\frac{N - a_i}{n_i}\right)^4 - (q_i - 1)\left(\frac{N - b_i}{n_i}\right)^4 - q_k\left(\frac{N - a_k + 1}{n_k}\right)^4 + (q_k - 1)\left(\frac{N - b_k}{n_k}\right)^4\right\} + \frac{\varrho}{4}\sum_{l=i+1}^{l=k-1} \frac{q_l}{n_l^4}[(N - a_l)^4 - (N - a_l + 1)^4], \quad (11c)$$

wo

$$a_i = p_i + S_{q_i}$$
$$b_i = p_i + S_{q_i - 1}.$$

Über die Bestimmung der Elektronenringe im Atom.

§ 3. Es zeigt sich, daß unsere Theorie zu einer Gleichungsform geführt hat, die mit der aus den Beobachtungen empirisch hergeleiteten genau übereinstimmt. Und es fragt sich, ob man die Größen n, p, q, in der Weise bestimmen kann, daß man das System von Linien in dem Röntgenspektrum erklären kann.

Es ist besonders die Größe „B“, welche für die Bestimmung der q-Werte maßgebend ist.

Man darf nur die (α)-Linien jeder Serie für die (q)-Bestimmungen verwerten, denn die höheren Glieder lassen sich dann wegen der Kosselschen Relation aus den Hauptlinien aufbauen.

Für die Bestimmung der (q)-Werte kann man dann:

$$k = i + 1$$

setzen; B ist durch die Gleichung bestimmt:

$$\tfrac{1}{2} B = \frac{\Phi(q_i) + p_i}{n_i^2} - \frac{\Phi(q_{i+1}) + p_{i+1} - q_{i+1}}{n_{i+1}^2}.$$

Wenn wir $p_{i+1} = q_i + p_i$ setzen, können wir die Gleichung so schreiben:

$$\Phi(q_{i+1}) - q_{i+1} = \left(\frac{n_{i+1}}{n_i}\right)^2 \Phi(q_i) - q_i + A = f(q_i), \quad (12)$$

wo

$$A = p_i \frac{n_{i+1}^2 - n_i^2}{n_i} - \tfrac{1}{2} B n_{i+1}^2.$$

Nehmen wir eine bestimmte Linie, so ist B als annähernd bekannt anzusehen, und es handelt sich dann darum, Werte für q_i und q_{i+1} aufzusuchen, welche die Gleichung (12) annähernd befriedigen[1]).

Theoretisch sollte also, wie aus Arbeit III hervorgeht, eine einzige Linie die q-Werte der beiden Elektronenkreise geben.

Unter der Annahme 1 von der Erhaltung der Energie der äußeren Kreise gab eine einzige Linie (K_α) ganz bestimmte q-Werte für beide Kreise. So erhielt man eine gute Formel für K_α durch die Annahme:

$$q_1 = q_K = 4, \quad q_2 = q_L = 3.$$

Mit dem gefundenen q-Wert können wir aber nicht die Frequenzen der L_α-Linie berechnen.

Mit der Annahme 2 von der Unveränderlichkeit des Moments, die auf Gleichung (12) führt, steht die Sache etwas anders.

Wenn wir die linke Seite von (12) für verschiedene q-Werte berechnen, finden wir, daß

1) Siehe Veröffentlichung III, l. c. 1917, 307—308.

$\Phi(q_{i+1}) - q_{i+1}$ sich nur verhältnismäßig wenig mit q_{i+1} ändert, oder die Frequenz ändert sich nur verhältnismäßig wenig mit der Anzahl von Elektronen in dem für den Erregungsvorgang in Betracht kommenden äußeren Ring.

In Tabelle I sind die ersten Werte von $\Phi(q)$ und $\Phi(q) - q$ angegeben.

Tabelle I.

q	$\Phi(q)$	$\Phi(q)-q$	q	$\Phi(q)$	$\Phi(q)-q$
1	0,000	— 1,000	9	7,512	— 1,488
2	0,500	— 1,500	10	8,678	— 1,322
3	1,231	— 1,769	11	9,946	— 1,054
4	2,097	— 1,903	12	11,232	— 0,768
5	3,052	— 1,948	13	12,537	— 0,463
6	4,082	— 1,918	14	13,881	— 0,119
7	5,173	— 1,827	15	15,234	+ 0,234
8	6,305	— 1,695	16	16,604	+ 0,604

Wir sehen, daß $\Phi(q) - q$ nur allmählich von -1 bis zu einem Min. ($-1,948$) abnimmt und dann wieder allmählich ansteigt.

Geben wir q_i den früher unter Annahme einer Wiedervereinigung von Sekundärkreisen aus gefundenen Wert, so entspricht $q_{i+1} = 1$ der früher unter Verwertung dieser Annahme gefundenen Lösung.

Wir sehen aber, daß wenn $q_{i+1} = 1$ eine Lösung ist, auch höhere Werte von q_{i+1} eine annähernde Lösung geben. Welcher Wert von q_{i+1} die beste Übereinstimmung gibt, kann nur unter Berücksichtigung der Werte von C und ε entschieden werden. Da die Variation von q_{i+1} nur geringe Änderungen der Frequenzen hervorruft und da man überhaupt keine ganz genaue Übereinstimmung zwischen den theoretisch hergeleiteten und den experimentellen Formeln — unter Benutzung der jetzigen Annäherungsformel — erwarten kann, ist es unmöglich die Anzahl Elektronen in einem Ringe durch eine Strahlung festzustellen, welche zustandekommt, wenn das rekombinierende Elektron von dem betreffenden Ringe ausgeht[1]).

Selbst wenn die Strahlung durch Wiedervereinigung zwischen Primärkreisen entsteht, so kann man nicht den L-Ring mit Hilfe von K_α-Strahlung bestimmen.

Die rechte Seite $f(q_i)$ der Gleichung (12) ändert sich viel rascher mit q wenigstens für die ersten Kreise, und gibt eine scharfe Bestimmung der q-Werte.

Als Resultat dieser Überlegungen ergibt sich, daß man den K-Ring durch die K-Strahlung, den L-Ring durch die L-Strahlung usw. bestimmen soll.

1) Die kürzlich von Herrn Kroo (diese Zeitschr. 19, 307, 1918) auf Grund meiner Hypothese der steigenden Quantenzahlen hergeleitete Anzahl Elektronen für den zweiten Ring ist deshalb unrichtig.

Wie wir später sehen werden, ist ein anderes Verfahren unter Benutzung der α-Linien überhaupt ausgeschlossen, denn die Annahme von Wiedervereinigung zwischen Primärkreisen muß aufgegeben werden. Dagegen kann wohl die K_β-Linie eine Bestimmung des L-Ringes geben.

Die Tatsache, daß die Frequenzen nur wenig von der Anzahl der Elektronen (q_{i+1}) in dem äußeren Ringe abhängen, macht es möglich, von der K- bis zur L- und M-Strahlung weiter zu gehen. Wenn wir annehmen, daß jede Quantenzahl nur einem einzigen Ringe entspricht, führt die theoretische Bestimmung der Hauptlinien K_α, L_α, M_α zu der in Tabelle II angegebenen Konstitution der ersten drei Ringe:

Tabelle II.

Ringsystem	Quantzahl n	Anzahl Elektronen
K	1	3
L	2	7
M	3	12

In meiner Abhandlung IV sind die Bestimmungen im einzelnen beschrieben und es sind auch verschiedene Möglichkeiten diskutiert worden.

Es ist gezeigt, das es auch wohl möglich ist ganz gute numerische Übereinstimmung für die Hauptlinien dadurch zu erhalten, daß man zwei L-Ringe oder auch zwei M-Ringe annimmt.

Die Annahme von zwei L-Ringen gibt unter den jetzigen Voraussetzungen keine befriedigende Erklärung der l-Serie, deshalb ist die Annahme eines einzigen Ringes als die einfachste vorzuziehen.

Im Falle des M-Systems kann man auch mit zwei dreiquantigen Ringen z. B. mit 8 und 7 Elektronen gute Werte für M_α erhalten, aber so lange die Annahme von mehreren Ringen mit derselben Quantenzahl keinen wesentlichen Vorteil aufweist, ist die einfachste Hypothese vorzuziehen.

Da unsere Grundgleichungen die Kosselschen Relationen erfüllen, können wir zugleich schließen, daß die Systeme, welche die L-Linien gut darstellen, auch ebenso gute Werte für die Linien höherer Frequenzen jeder Strahlengattung geben.

So bekommt man:

$$\left(\frac{\nu}{R}\right)_{K_\beta} = \left(\frac{\nu}{R}\right)_{K_\alpha} + \left(\frac{\nu}{R}\right)_{L_\alpha}$$

$$\left(\frac{\nu}{R}\right)_{L_\beta} = \left(\frac{\nu}{R}\right)_{L_\alpha} + \left(\frac{\nu}{R}\right)_{M_\alpha}.$$

Die β-Linie der L-Serie ist mit der γ-Linie von Sommerfeld identifiziert.

Die Linie L_β von Sommerfeld ist als Dublette zu betrachten, und entsteht wahrscheinlich durch Wiedervereinigung zu einem elliptischen Zustand des L-Ringes.

Im Lichte der jetzigen Erklärung der L-Linien durfte man andere Bezeichnungen einführen, z. B. die folgenden:

Siegbahn	α_1	β_1	β_2	γ_1
Sommerfeld	α	β	γ	δ
Vorschlag des Verfassers	α	α_1	β	β_1

α, β bekommt man durch Wiedervereinigung zu einem kreisförmigen, α_1, β_1 durch Wiedervereinigung zu einem elliptischen Zustand des L-Systems.

In Tabelle III sind die mit Hilfe der in Tabelle II angegebenen Konstitution berechneten Frequenzen der Linien K_α, K_β, L_α, L_β, M^α angegeben, und zwar für eine Reihe von verschiedenen Elementen.

Tabelle III.

$K\alpha$			$K\beta$		
Nr.	$\left(\frac{\nu}{R}\right)_{\text{beob.}}$	$\left(\frac{\nu}{R}\right)_{\text{ber.}}$	N	$\left(\frac{\nu}{R}\right)_{\text{beob.}}$	$\left(\frac{\nu}{R}\right)_{\text{ber.}}$
11	76,2	73,6	12	96,2	89
15	147,7	144,3	14	134,8	127,1
20	271,6	267,4	16	181,6	172,8
25	435,4	429,2	18	—	227,5
30	635,9	630,6	20	295,8	287,9
35	880,4	872,5	22	363,2	357,5
40	1156	1156	25	479,1	472,7
43	1482	1483	30	704,2	702,3
50	1871	1855	40	1292,9	1305,5
55	2290	2274	50	2109,0	2109,7
60	2761	2739	60	3121,0	3129,0
$L\alpha$			$L\beta$		
30	73,8	71,6			
40	149,8	149,1			
50	253,5	255,1	50	287,3	280,8
60	384,6	390,3	60	448,0	445,2
70	545,6	555,1	70	644,0	649,3
80	734,9	751,4	80	874,5	894,0
90	952,2	979,6	90	1143,0	1182,5
$M\alpha$					
79	156,1	152,0			
81	166,3	163,6			
82	171,8	169,4			
83	178,1	175,4			
90	220,2	219,9			
92	233,4	233,6			

Die Fig. 1 und 2 geben eine graphische Darstellung der Ergebnisse für die Linien der K-Strahlen.

Anstatt der Frequenzen selbst sind die Differenzen:

$$\frac{\nu}{R}-\left(\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{n_k^2}\right)N^2=\Delta \qquad (13)$$

als Ordinaten aufgesetzt.

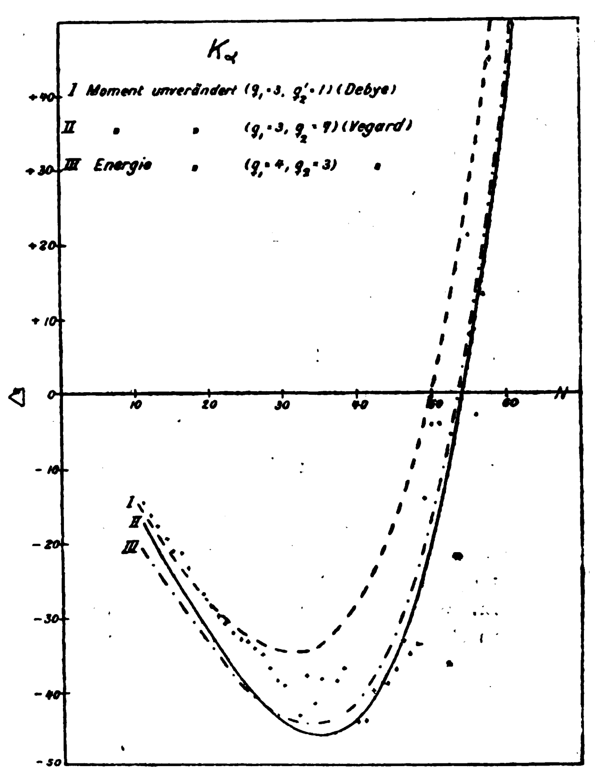


Fig. 1.

In Fig. 1 sind neben den beobachteten Werten für Δ auch drei Kurven gezeichnet, die verschiedenen Voraussetzungen entsprechen:

Kurve I ist die von Debye gefundene,
„ II ist aus Gleichung (11) berechnet,
„ III repräsentiert die in meiner Arbeit III

unter Annahme unveränderlicher Energie gefundene Lösung.

Wir sehen, daß sämtliche drei Kurven sich recht gut den Beobachtungen anschließen. Die Kurve II gibt wohl die beste Übereinstimmung; sie muß nichtsdestoweniger als unrichtig aufgegeben werden.

In Fig. 2 repräsentiert die Kurve I die aus den Experimenten für die K_β-Linie hergeleiteten Δ-Werte. Die Kurve II ist die von Debye gefundene, die Kurve III repräsentiert die aus den Gleichungen (11) berechneten Δ-Werte.

Die K_β-Kurve ist von fundamentaler Bedeutung mit Rücksicht auf die Frage, ob die Rekombination zwischen Primärkreisen stattfindet. Die K_β-Linie läßt sich jetzt bis zu einer Atomzahl 12 (Mg) experimentell verfolgen.

Bei dieser geringen Atomzahl kann der

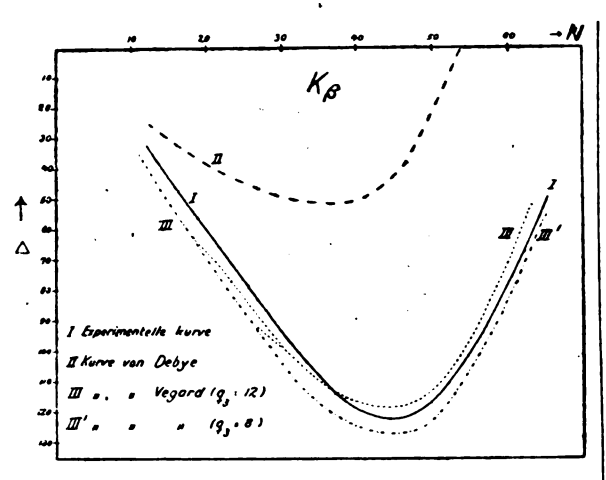


Fig. 2.

dritte Ring nur aus zwei Elektronen bestehen. Wenn wir zu höheren Atomzahlen übergehen, wird für jeden Schritt die Anzahl Elektronen im äußeren Ringe mit 1 wachsen. Dies geht bis Argon fort. Dann wird gewiß bei dem Element K ein neuer Atomring, der auch eine höhere Quantenzahl besitzt, gebildet.

Demnach muß die Anzahl Elektronen im äußeren Rekombinationskreis sich mit wachsender Atomzahl ändern, bis schließlich der M-Ring von 12 Elektronen gebildet wird.

Wir haben indessen gesehen, daß eine Änderung der Anzahl von Elektronen im äußeren Kreis keine bedeutende Einwirkung auf die Frequenzzahl ausübt. Die Einwirkung ist jedoch ausreichend, um der Kurve $\nu = f(N)$ einen charakteristischen Verlauf zu geben, welcher auch in der experimentell gefundenen Kurve zum Ausdruck kommen müßte.

Die Kurve III ist in der Weise berechnet, daß von $N = 11$ bis $N = 23$ die Anzahl der Elektronen im M-Ringe von 1 bis 12 zunimmt. Diese Variation der Elektronenzahl verursacht einen charakteristischen Verlauf der Kurve, von dem die empirische Kurve I keine Andeutung zeigt. Wenn wir vom Anfang bis zu höheren Atomzahlen übergehen, werden die Unterschiede zwischen berechneten und beobachteten Werten erst größer, erreichen ein Maximum, nehmen dann ziemlich schnell ab und dann wieder langsam, nachdem die Anzahl der Elektronen im M-Ring konstant geworden ist, wieder zu. In der Nähe von $N = 23$ bildet die theoretische Kurve einen Inflexionspunkt, während die experimentell gefundenen Punkte in diesem Gebiet sehr nahe an einer geraden Linie liegen.

Es ist zwar wahrscheinlich, daß zuerst ein dritter Ring mit 8 und erst etwas später der M-Ring mit 12 Elektronen gebildet wird. Dadurch kommt aber nicht die Annahme von Wiedervereinigung zwischen Primärkreisen in eine günstigere Stellung. Um dies zu zeigen, habe ich in Fig. 2 auch die Kurve, welche einem M-Ring von 8 Elektronen entspricht, eingezeichnet (III').

In dem Bereich, wo der 12-Ring gebildet wird, mußte die Kurve von III' auf III überspringen. Ein solcher Sprung ist in der experimentellen Kurve nicht angedeutet.

Eine bessere Übereinstimmung mit der Erfahrung würde man erhalten, wenn man zwei M-Ringe annehmen würde.

Ein innerer M-Ring mit 8 Elektronen würde die Kurve III' geben, welche sich besser der empirischen Kurve anschließen würde. Jedoch würde auch diese Kurve am Anfang eine Krümmung zeigen, welche der empirischen Kurve fremd ist.

(Eingegangen 15. November 1918.)

Schallgeber und Schallempfänger. I.

Von W. Hahnemann und H. Hecht.

Nachdem wir in früheren Arbeiten[1]) die Strahlungsvorgänge des Schalles im Medium und an den strahlenden Flächen beschrieben haben, wollen wir in dieser und einigen folgenden Arbeiten Theorie und Wirkungsweise einer Gruppe von Schallgebern und -empfängern behandeln und Mitteilungen über Versuchsergebnisse und praktisch ausgeführte Apparate machen.

Man kann zwei wesentliche Hauptgruppen der Schallapparate unterscheiden: solche, die die Energie aussenden bzw. empfangen unter Benutzung strahlender Flächen (Schallantennen) und solche, die vermittelst zugeführten Mediums periodische Quellen und Senken (Schallquellen im engeren Sinne) darstellen. Zu der ersten Gruppe gehören, um nur die wichtigsten zu nennen, alle tönenden Membranen und Glocken, zu der zweiten Gruppe Sirenen und Pfeifen[2]). Von der ersten Gruppe haben für die wissenschaftliche und technische Akustik die Membranen eine besondere Bedeutung erlangt; sie besitzen eine gute konstruktive Anpassungsfähigkeit an die Forderungen der Praxis und gestatten, bestimmte akustische Bedingungen leicht herzustellen. Mit solchen Schallapparaten wollen wir uns zunächst vorwiegend beschäftigen.

1) Hahnemann u. Hecht, Schallfelder und Schallantennen I und II, diese Zeitschr. 17, 601 ff., 1916 u. 18, 261 ff., 1917; in folgendem mit l. c. bezeichnet.

2) Hierbei ist abgesehen von der Tatsache, daß auch bei diesen strahlende Flächen gelegentlich mitwirken können.

Diese Gruppe der Membrangeber bzw. -empfänger kann man nun nach der Art weiter unterscheiden, ob sie kontinuierlich oder durch Stoß erregt werden, und welche Energieform zur Verwandlung in mechanisch-akustische angewendet wird. Wir beschränken unsere Betrachtungen zunächst auf die kontinuierliche Erregung mittels elektrischer Energie und behandeln als erste Art den im gewöhnlichen Telephon im Prinzip vorliegenden Schallerzeuger. Es wird sich im Laufe dieser ersten Abhandlung zeigen, daß wir berechtigt sind, einen solchen Schallgeber als „elektro-mechanischen Transformator" zu bezeichnen. Seine Umkehrung als Empfänger, nähere Angaben und technische Ausführung von derartigen Schallerzeugern für Wasser und Luft, sowie andere Konstruktionen und deren Theorie sollen dann in späteren Abhandlungen folgen.

Der elektro-mechanische Transformator als Schallgeber.

I. Allgemeine Beschreibung.

Zur Ableitung der Gesetze und Beziehungen zwischen den elektrischen und mechanischen Größen des elektro-mechanischen Transformators wählen wir die einfachste Form, die in Fig. 1

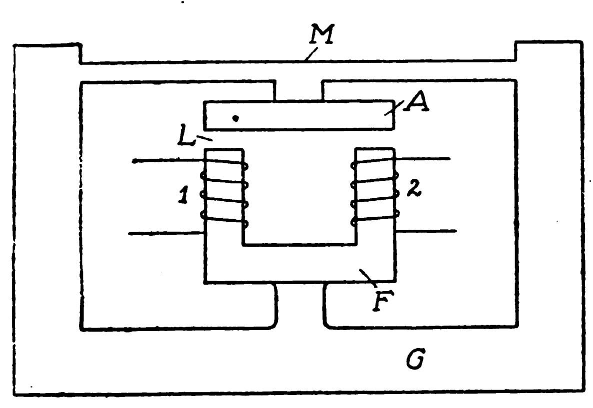


Fig. 1.

dargestellt ist. Es bedeutet M die an dem Gehäuse G befestigte Membran, die an das Medium angrenzt, in dem die Schallschwingungen erzeugt werden sollen. Starr verbunden mit der Membran ist der Anker A, mit dem Gehäuse das Feld F, die beide aus Eisen bestehen und durch einen Luftspalt L getrennt sind. Das Eisen wird man zur Verringerung der Verluste aus einzelnen Blechen aufschichten, deren Dicke der Frequenz entsprechend zu wählen ist. Anker und Feld sind von zwei Spulen 1 und 2 umschlungen, von denen die eine mit Gleichstrom, die andere mit Wechselstrom gespeist wird. Der Anker eines solchen, durch Gleichstrom polarisierten Senders vollführt mechanische Schwingungen von gleicher Frequenz wie diejenige des Wechselstroms. Die Masse des Gehäuses G, einschließlich des Feldes F, wird man zweckmäßig so wählen, daß sie das Vielfache derjenigen der Membran, einschließlich des Ankers A, beträgt. Dann können wir das Gehäuse G praktisch als ruhend annehmen, und die Schwingungsgrößen, Dämpfung, mitschwingende Mediummasse, Resonanzfrequenz usw. wie früher angegeben[1]), berechnen. Die Eigentöne des Gehäuses G, besonders der Gehäuserückwand, sind oberhalb der Membranresonanz zu legen, damit sie bei dieser Resonanz den Vorgang im Medium nicht stören.

Erregt man diesen Sender mit Wechselstrom konstanter Erregung[2]) und veränderlicher Frequenz, so erhält man folgendes Bild (Fig. 2)[3]). Als Abszisse ist die Frequenz n des erregenden Wechselstroms, als Ordinate die von der Maschine in den Sender hineingeschickte, durch ein Wattmeter zu bestimmende Leistung aufgetragen. Diese Leistung beschreibt die Resonanzkurve ABC und hat für die Frequenz n_0,

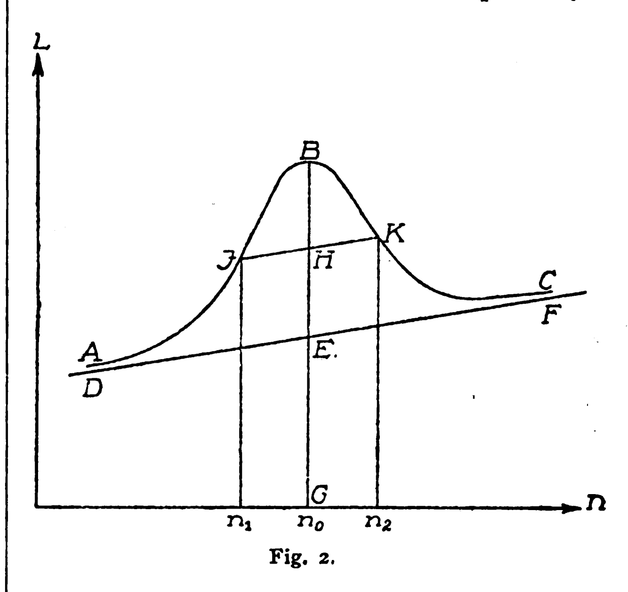


Fig. 2.

die der mechanisch-akustischen Eigenschwingung entspricht, ein Maximum[4]). Sowohl nach den niederen wie nach den höheren Frequenzen zu läuft sie in mehr oder weniger gradlinige Strecken aus, an die man die tangierende

1) l. c., Teil II, Kapitel II.

2) Was hierunter zu verstehen ist, wird später gesagt werden.

3) Maßstäblich ist der Abszissen-Nullpunkt viel weiter links anzunehmen.

4) Die Frequenz größter Leistung fällt für mechanische wie elektrische Schwingungsgebilde bei Erregung mit konstanter Kraft bzw. Spannung zusammen mit der Eigenfrequenz des freien ungedämpften Systems.

Gerade DEF legt. Durch diese Darstellung der Leistungsaufnahme sieht man, daß die gesamte Senderleistung in zwei Teile zerfällt:

Einen von der Bewegung des Ankers abhängigen Teil (Ordinate zwischen Kurve ABC und Gerade DEF) und

einen von der Ankerbewegung unabhängigen Teil (Ordinate zwischen Gerade DEF und Abszissenachse).

Der erstere stellt die mechanisch-akustische Leistung, der zweite die im Sender verbliebene Leistung dar, die in Form von Eisen- und Spulenverlusten eine Erwärmung des Senders hervorruft. Die Gerade DEF[1]) kann man auch experimentell finden, indem man den Anker durch Festbremsen an der Bewegung hindert, und bei verschiedenen Frequenzen und konstanter Erregung die Verluste direkt bestimmt.

Fällt man vom Resonanzpunkte B ein Lot auf die Abszissenachse, welches diese bei G trifft, während es die Verlustlinie bei E schneidet, so stellt das Verhältnis $BE:BG$ den mechanischen Wirkungsgrad η des Senders in Resonanz dar[2]). Legt man durch den Halbierungspunkt H der Strecke BE eine Parallele zur Verlustlinie, die die Resonanzkurve in den Punkten I und K schneidet, und fällt von den Punkten I und K Lote auf die Abszissenachse, die diese an den Stellen $n = n_1$ und $n = n_2$ treffen, so ist die Dämpfung gegeben durch

$$\mathfrak{d} = \pi \cdot \frac{n_2 - n_1}{n_0}.$$

Die experimentell auf diese Weise ermittelten Werte des mechanischen Wirkungsgrades η und der Dämpfung $\mathfrak{d}$ stellen aber nur dann gleichzeitig die akustischen Größen dar, wenn außer der Strahlungsdämpfung durch das Medium keine andere mechanische Dämpfung vorhanden ist. Dies wird aber wohl niemals vollkommen der Fall sein, da immer schädliche innere Dämpfungen vorhanden sind. Um sich von ihrer Größe ein Bild zu machen, muß man eine zweite Resonanzkurve des Gebers im Vakuum oder in einem Medium aufnehmen, dessen Strahlungsdämpfung vernachlässigbar klein gegen die Strahlungsdämpfung im untersuchten Medium und gegen die innere Dämpfung ist.

Die in Fig. 2 dargestellte Resonanzkurve geht im nichtstrahlenden Medium in die weniger gedämpfte Kurve der Fig. 3[1]) über. Nennen

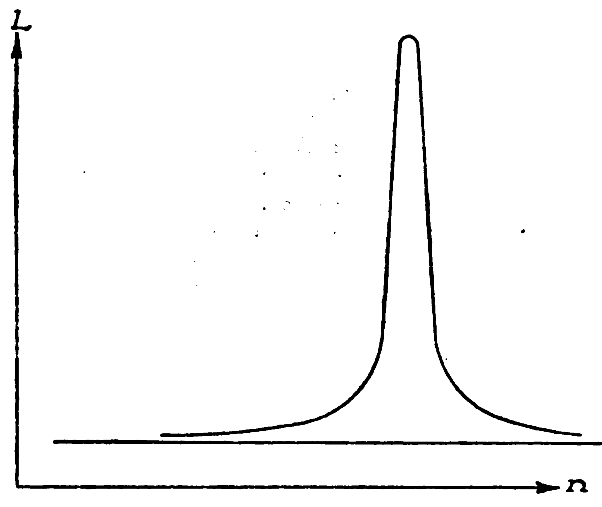


Fig. 3.

wir die Dämpfung im nichtstrahlenden Medium $\mathfrak{d}_0$, so ist der akustische Strahlungswirkungsgrad im untersuchten Medium

$$\eta_a = \eta \frac{\mathfrak{d} - \mathfrak{d}_0}{\mathfrak{d}} {}^{2)} . \qquad (1)$$

II. Theorie.

Nach der Beschreibung von Wirkungsweise und experimenteller Untersuchung des elektromechanischen Transformators wenden wir uns einer exakteren Darstellung seiner elektrischen und mechanischen Vorgänge zu.

1. Das Diagramm.

Um Gang und Ziel der folgenden Betrachtungen von vornherein klar zu kennzeichnen, stellen wir fest, daß wir anstreben, die mechanischen Vorgänge der Ankerbewegung elektro-

1) Die vollständige Gleichung der Verlustlinie ist $L = i^2 w + a_1 n\Phi^{1,6} + a_2 n^2 \Phi^2$, wenn i die Stromstärke, w den Spulenwiderstand, Φ den magnetischen Flux und a_1 und a_2 Konstante darstellen. Auf kurze Strecken, die bei geringer Dämpfung nur in Frage kommen, und bei kleinen Spulenverlusten kann man den Parabelbogen als Gerade ansprechen.

2) Wir werden im folgenden häufig zur besseren Illustration der abgeleiteten Resultate und Figuren experimentell gefundene Daten heranziehen. Dieselben sind mit Apparaten erhalten, die zur Schallerzeugung im Wasser gebaut sind. Eine genauere Beschreibung bleibt, wie schon eingangs erwähnt, einer späteren Arbeit vorbehalten. Um aber schon jetzt eine Vorstellung von der Größe der Apparate zu geben, sei erwähnt, daß Geber, deren Resonanzkurve im Wasser in Fig. 2 dargestellt ist, für Leistungen bis zu 1 Kilowatt gebaut sind und daher bei einem Wirkungsgrade von 50 Proz., wie er sich etwa aus Fig. 2 ergibt, bis zu 500 Watt Schalleistung zu strahlen gestatten. Ihre Dämpfung beträgt dabei etwa 0,2.

1) Außer der Verringerung der Dämpfung beobachten wir auch eine etwas höhere Abstimmung, die von dem Fortfall der mitschwingenden Mediummasse herrührt, und eine Erhöhung des Wirkungsgrades; eine Erklärung hierfür werden wir später finden. Die Werte für Dämpfung und Wirkungsgrad in Luft, worauf sich die Aufnahme in Fig. 3 bezieht, sind 0,02 und 90 Proz.

2) Aus den Zahlenwerten, die den Figg. 2 und 3 zugrunde liegen, folgt für diesen Apparat

$$\eta_a = 0{,}50 \cdot \frac{0{,}2 - 0{,}02}{0{,}2} = 0{,}45.$$

magnetisch zu deuten, und damit die Theorie des elektromechanischen Transformators, der im Prinzip in dem beschriebenen elektromagnetisch erregten Schallgeber vorliegt, auf die bekannte Theorie des rein elektrischen Transformators zurückzuführen[1]).

Denken wir uns, um die Vorstellung zu vereinfachen, die Spule 2 der Fig. 1, die für die Gleichstromerregung zur Erzeugung der Polarisation dient, entfernt, und entweder Anker und Feld als permanente Magnete und die Spule 1 mit Wechselstrom erregt oder Anker und Feld aus unmagnetischem Eisen und die Spule 1 von pulsierendem Strom durchflossen, so erhält man das einfache Schema der Fig. 4,

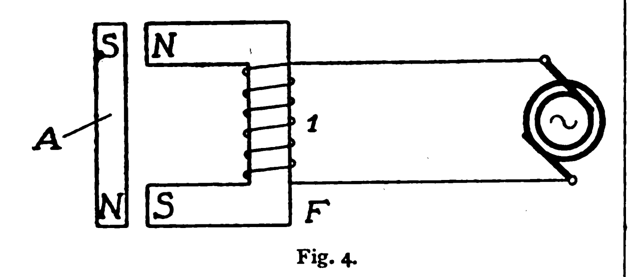


Fig. 4.

in der der Anker A sich mit der Frequenz des Wechselstroms bewegt und von der Frequenz abhängige mechanische Arbeit leistet, wie es durch Fig. 2 näher dargestellt ist. Statt den Anker nun wirkliche Bewegungen ausführen zu lassen, denken wir ihn uns dauernd festgehalten und mit einer Wicklung 2 von gleicher Windungszahl wie 1 versehen, durch die dieselbe Energie elektrisch entzogen werden soll, die dem schwingenden Anker mechanisch entnommen wurde.

Diese gedankliche Substitution ist die Grundlage für alle folgenden Betrachtungen, und wir haben uns daher darüber Rechenschaft zu geben, ob und inwieweit wir dazu berechtigt sind, — die Nützlichkeit wird sich später ganz von allein ergeben.

Wir behaupten also, daß sowohl das magnetische Kraftlinienfeld[2]) im Eisen bezüglich seiner Größe, Frequenz und Phase, und hiermit die in ihm auftretenden Verluste, wie auch die durch die Spule 2 entzogene Energie die gleichen sind, wie bei der mechanischen Ankerbewegung, d. h., daß sich durch die Substitution elektromagnetisch nichts geändert hat. Daß wir ein magnetisches Kraftfeld statt durch Annäherung und Entfernung von Eisenteilen in jeder Beziehung völlig gleichwertig auch durch Erregung mit Wechselstrom erzeugen können, gehört zu den Grundlagen der Elektrotechnik; daß aber in jedem beliebigen Falle den äquivalenten Strom zu berechnen keine leichte Aufgabe sein würde, ist wohl auch verständlich, wenn wir daran erinnern, daß Permeabilität des Eisens und ihre Abhängigkeit von der Sättigung, Widerstand der Kraftlinien in Luft und Eisen und seine Abhängigkeit von der Amplitude u. a. in die betreffende Formel eingehen. Sehr einfach dagegen wird die Aufgabe, wenn das magnetische Kraftfeld einen sinusförmigen Verlauf hat, während wir dem Ersatzstrom eine komplizierte Kurvenform beilegen und auf eine einfache Darstellung verzichten müßten, wenn das magnetische Kraftfeld kein rein sinusförmiges wäre.

Wir unterscheiden bei schwingendem Anker zwei Felder, die sich zu einem resultierenden Felde zusammensetzen: das primäre, durch die erregende Maschine aufgedrückte Feld, und das durch die Ankerbewegung hervorgerufene Gegenfeld. Im idealen Grenzfalle würde das letztere gleich und entgegengesetzt gerichtet dem erregenden Felde sein müssen, ganz ähnlich wie ein leerlaufender Elektromotor oder Turbine eine Gegenspannung bzw. Druck erzeugt, die der treibenden Spannung bzw. Druck gleich aber entgegengesetzt gerichtet sind. Das Gegenfeld des elektromagnetischen Senders entsteht durch die Ankerbewegung oder Änderung des magnetischen Widerstandes bei Vorhandensein eines konstanten magnetischen Kraftflusses, ganz ähnlich, wie die Wechselstromspannung an einem Mikrophon entsteht durch die Änderung des elektrischen Widerstandes bei Vorhandensein eines konstanten Gleichstromes. Damit nun beim Mikrophon bei einer sinusförmigen Änderung seines Widerstandes keine höheren Harmonischen auftreten können, ist es nötig, daß die Widerstandsänderung des Mikrophons klein zu dem im ganzen Kreise liegenden Gesamtwiderstand ist[1]). Dieselbe Forderung stellen wir für den Elektromagneten und wollen für die folgenden theoretischen Betrachtungen annehmen, daß die mechanische Ankeramplitude so klein ist, daß die durch sie hervorgerufene Änderung des magnetischen Widerstandes klein gegenüber dem teils im Luftspalte, teils im Eisen liegenden magnetischen Widerstand bei

1) Die Gesetze des technischen Transformators haben wir als bekannt angenommen. Wir benutzen im folgenden Ausdrücke und Bezeichnungen aus dem Buche G. Kapp, Transformatoren für Wechselstrom und Drehstrom, Berlin (J. Springer) 1907 und verweisen im übrigen auf dieses ausgezeichnete Buch.

2) Unter magnetischem Kraftlinienfeld, oder auch kurz Kraftfeld genannt, soll immer nur der veränderliche Teil des aus einem konstanten und veränderlichen Teile bestehenden Gesamtfeldes verstanden werden.

1) Siehe Barkhausen, Das Problem der Schwingungserzeugung, S. 19. Leipzig (S. Hirzel) 1907.

Ruhelage des Ankers ist. Nur in diesem Falle wird das Gegenfeld bei sinusförmiger Bewegung des Ankers, die ja bei mechanisch abgestimmten Systemen, die in Resonanz erregt werden, vorliegt, auch durch einen sinusförmigen Strom ersetzt werden können.

Dieselbe Forderung der kleinen Amplitude müssen wir auch für das erregende Feld stellen, um auch für dieses bei seiner Erzeugung durch reinen Wechselstrom einen sinusförmigen Verlauf zu erhalten, der nicht möglich wäre, wenn sich über die periodische Erregung eine periodische Widerstandsänderung überlagerte, die bei genügender Größe eine vollständige Verzerrung des Fluxes hervorrufen könnte[1]).

Die beiden, nur in der Vorstellung getrennten Felder — erregendes Feld und Gegenfeld — setzen sich nun zu dem resultierenden Felde zusammen und ergeben das allein existierende Hauptkraftfeld. Ist für die beiden Komponenten die Bedingung der sinusförmigen Grundschwingung erfüllt, so wird es auch für das resultierende Feld der Fall sein, und wir können uns die Ankerbewegung und ihre mechanische Abbremsung vollständig durch eine Spule ersetzt denken, der ein sinusförmiger Wechselstrom entnommen wird.

Diese Forderung der kleinen Amplitude, die wir, um die Theorie einfach gestalten zu können, zunächst stellen müssen, braucht allerdings in der Praxis nicht allzu streng eingehalten zu werden, da das Vorhandensein von Selbstinduktion die elektrischen und magnetischen Oberschwingungen stark schwächt, und da die mechanische Abstimmung die trotzdem noch entstehenden Felder höherer Frequenz nicht zur Auswirkung kommen läßt; und in der Tat werden wir auch später sehen, daß die für unendlich kleine Amplituden abgeleiteten Gesetze auch für endliche Amplituden ihre Gültigkeit beibehalten.

Wir glauben hierdurch nachgewiesen zu haben, daß wir im elektromechanischen Transformator die Fluxänderung infolge der Ankerbewegung durch die Einführung einer Stromspule ersetzt denken können. Da das Gegenfeld der Ankerbewegung gleichphasig und proportional der Ankeramplitude ist, vertritt in der elektrischen Substitution die Stromstärke die Stelle der mechanischen Amplitude; Stromstärke und Amplitude sind in diesem Falle physikalisch völlig gleichwertige Begriffe. Hierdurch ergibt sich die der gewöhnlichen Bezeichnungsweise widersprechende Festsetzung, daß das Analogon von mechanischer Masse bzw. Elastizität in dieser Spule ein elektrischer Kondensator bezw. Selbstinduktion ist.

Um nun nach Festhalten des Ankers und Einführung der Stromspule den elektrischen Arbeitsvorgang für die Erregung absolut gleich zu gestalten, müssen wir diese Spule durch Selbstinduktion, Kapazität und Widerstand schließen, wie dies in Fig. 5 schematisch dargestellt ist. Diese Forderung ergibt sich auf Grund folgender Überlegungen:

Wie wir vorher sahen, beschreibt ein in die Wicklung 1 eingeschaltetes Wattmeter bei festgehaltenem Anker die zugehörige Verlustlinie, in

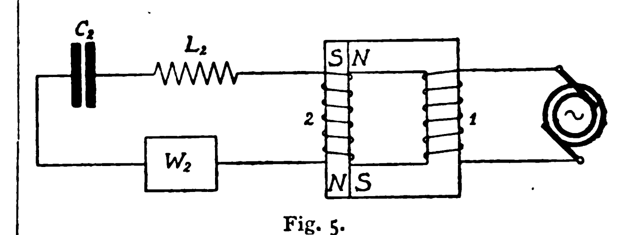


Fig. 5.

Fig. 2 im besonderen die Gerade DEF. Wenn nun im Kreise der Spule 2 außerdem eine Leistung verbraucht wird, die den Ordinaten zwischen Resonanzkurve ABC und Verlustlinie DEF entspricht, dann stellt das System mit festgehaltenem Anker und Spulenkreis 2 vollständig das System des frei beweglichen Ankers dar. Dies ist aber in der Tat der Fall, sobald wir die Größen L_2, C_2 und w_2 richtig dimensionieren.

Selbstinduktion L_2 und Kapazität C_2 denken wir uns verlustlos und für die Frequenz n_0 der mechanischen Resonanz aufeinander abgestimmt; sie sind dann vollständige Analoga der Membranelastizität und Schwingungsmasse. Der Widerstand w_2 ist so zu dimensionieren, daß er mit dem Quadrate der mit der Frequenz veränderlichen Stromstärke des Kreises 2 multipliziert für alle Frequenzen Leistungen ergibt, die den Ordinaten zwischen Resonanzkurve und Verlustlinie entsprechen. Wie dies im einzelnen zu geschehen hat, werden wir später sehen. Zunächst gehen wir daran, das Strom- bzw. Spannungsdiagramm eines solchen Transformators aufzustellen.

Um dies möglichst übersichtlich zu gestalten, nehmen wir einen idealen streuungslosen Transformator, d. h. eine magnetische Kopplung zwischen den beiden Spulen 1 und 2 von 100 Proz. an und vernachlässigen den Ohmschen Spannungsabfall in den Spulen selbst.

Unter diesen Voraussetzungen stellt Fig. 6 das Senderdiagramm für den Fall der Resonanz

1) Diese Beeinflussung des Fluxes durch die Widerstandsänderung des magnetischen Kreises infolge der Ankerschwingung ist dagegen nötig und maßgebend bei unpolarisierter Erregung und soll in einer späteren Arbeit behandelt werden.

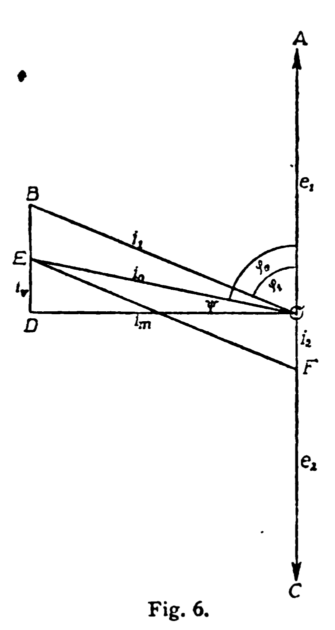


Fig. 6.

dar. OA und OB sind die primär an der Spule unseres Senders gemessene Spannung und Stromstärke e_1 und i_1, letztere um den Winkel φ_1 nacheilend, der sich rechnerisch unter Zuhilfenahme der wattmetrisch bestimmten Leistung ergibt. Die Spannung e_2 der Spule 2 ist e_1 gleich und entgegengesetzt und wird durch OC dargestellt. Die Spannungen von L_2 und C_2, die wir uns im Punkte O senkrecht nach links bzw. rechts errichtet denken müssen, heben sich gegenseitig auf, da wir uns im Abstimmungsfalle befinden; der Kreis 2 stellt eine reine Ohmsche Belastung dar, und die Richtung von i_2 fällt in die Richtung von e_2. Errichtet man im Punkte O nach links eine Senkrechte und fällt von B aus das Lot BD, so stellt letzteres die Wattkomponente des Stromes dar. Unter Benutzung des nach Fig. 2 ermittelten Wirkungsgrades teilt man BD im Verhältnis

$$BE : ED = \eta : 1 - \eta;$$

dann stellt BE den Wert

$$\eta\, i_1 \cos\varphi_1$$

dar. Da der Wirkungsgrad gleich dem Verhältnis von sekundärer zu primärer Energie ist, so ist

$$\eta\, e_1 i_1 \cos\varphi_1 = e_2 i_2 \cos\varphi_2;$$

und da in unserem Falle $e_1 = e_2$ und $\cos\varphi_2 = 1$ ist, so ist Strecke $BE = i_2$. Wir tragen also BE von O aus nach unten bis F ab und erhalten in $OBEF$ das Stromparallelogramm mit $OE = i_0$ als Summenstrom von i_1 und i_2. In der Figur $EDOA$ erhalten wir gleichzeitig das Leerlaufdiagramm. $OE = i_0$ zerlegt sich in die beiden Komponenten $OD = i_m$ und $ED = i_v$, von denen

$$i_m = i_1 \sin\varphi_1 = i_0 \sin\varphi_0$$

den Magnetisierungsstrom darstellt und mit dem Kraftflusse gleichphasig ist, während

$$i_v = (1 - \eta)\, i_1 \cos\varphi_1$$

denjenigen Teil der Wattkomponente des Stromes i_1 darstellt, der die Eisenverluste des Transformators deckt. Den Winkel

$$EOD = R - \varphi_0 = \psi$$

nennen wir den Verlustwinkel des Transformators.

Aus dem Diagramm, das tatsächlichen Verhältnissen und der in Fig. 2 wiedergegebenen Resonanzkurve im Wasser etwa entspricht, erkennt man, daß dieser elektromechanische Transformator sich in zwei wesentlichen Punkten von einem der gebräuchlichen elektrischen Transformatoren sehr zu seinem Nachteil unterscheidet. Er besitzt nur etwa 50 Proz. Wirkungsgrad gegenüber einem mit etwa 95 Proz. arbeitenden technischen Transformator und erscheint sekundär zu wenig belastet — zu offen, wie der Praktiker sagt. Die mechanisch-akustische Belastung unseres Transformators ist von seiner mechanischen Reibungs- und akustischen Strahlungsdämpfung abhängig. Erstere ist konstant, letztere ändert sich von Medium zu Medium. Wollen wir den Transformator stärker belasten, so müssen wir ihn in einem Medium betreiben, das einen kleineren Strahlungswiderstand oder eine geringere Schallhärte besitzt. Als Schallhärte haben wir früher[1]) das Verhältnis

$$\frac{P}{A} = a\varrho\, 2\pi n$$

definiert und auch gesehen, daß man dieses in weitgehender Analogie zum Ohmschen Gesetz der Elektrizität

$$\frac{P}{I} = a\varrho$$

schreiben kann. Medien mit kleinen Werten von Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Dichte wirken also wie kleine Widerstände. Den größtmöglichen Kurzschluß für den elektromechanischen Transformator stellt das Vakuum dar, während er als vollständig offen zu betrachten ist, wenn der Anker festgebremst ist, d. h. wenn der kleinsten Amplitude bereits eine unendliche Kraft entsprechen würde. Zwischen diesen beiden extremen Grenzen stehen die Medien Luft und Wasser.

Wenn es nur darauf ankäme, den mechanischen und nicht gleichzeitig auch den akusti-

1) l. c., Teil I, Kapitel I.

schen Wirkungsgrad zu vergrößern, so könnten wir daher den Geber statt im Wasser in Luft betreiben, wodurch er ohne weiteres wesentlich bessere Transformatoreigenschaften erhält. Das Diagramm nimmt dann folgende in Fig. 7 dargestellte Gestalt an und ähnelt schon mehr dem bekannten eines guten elektrischen Transformators. Der Sender hat entsprechend der Resonanzkurve in Fig. 3 einen Wirkungsgrad von etwa 90 Proz. und hat primär nur geringe Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom, ganz wie es einem guten technischen elektrischen Transformator zukommt. Die Sache sieht aber wesentlich anders aus, wenn wir statt des mechanischen Wirkungsgrades den akustischen betrachten. Daß der akustische Wirkungsgrad des im Diagramm (Fig. 6) dargestellten Senders noch immer 45 Proz. gegen 50 Proz. des mechanischen Wirkungsgrades beträgt, haben wir schon früher erwähnt. Wenn wir jetzt, um den akustischen Wirkungsgrad für Luft zu bestimmen, dem obengenannten Verfahren entsprechend die Dämpfung im Vakuum messen wollten, so würde es uns mit einfachen Mitteln wohl kaum gelingen, einen Dämpfungsunterschied $\Delta \mathfrak{d}$ zwischen Luft und Vakuum festzustellen. Auf alle Fälle wird $\frac{\Delta \mathfrak{d}}{\mathfrak{d}_0}$ eine sehr kleine Zahl sein, und der luftakustische Wirkungsgrad $\eta_a = 0{,}9 \frac{\Delta \mathfrak{d}}{\mathfrak{d}_0}$ des im Diagramm (Fig. 7) gezeichneten Senders wird trotz des großen mechanischen Wirkungsgrades von 90 Proz. nur wenige Prozent betragen.

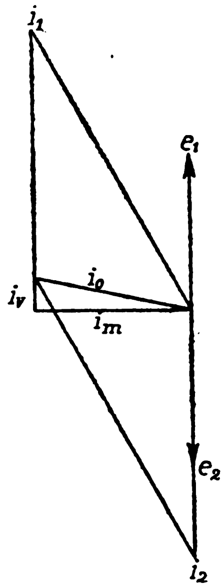


Fig. 7

2. Beziehungen zwischen Wirkungsgrad, Dämpfung und Verlustwinkel.

Die Diagramme (Fig. 6 u. 7) können wir nun benutzen, um zwei wichtige Beziehungen zwischen den der Messung zugänglichen Größen des primären Phasenwinkels zwischen Strom und Spannung φ_1 und des Verlustwinkels ψ bzw. φ_0, sowie des mechanischen Wirkungsgrades η und der Dämpfung $\mathfrak{d}$ abzuleiten.

Die erste Beziehung zwischen η, φ_1 und φ_0 gestattet den Wirkungsgrad ohne Aufnahme der vollständigen Resonanzkurve aus zwei Messungen zu finden, die man im Resonanzpunkt und in einem Punkte solcher Verstimmung (z. B. Punkt A in Fig. 2) vornimmt, in dem keine nennenswerte mechanische Leistung mehr vorhanden ist[1]). Aus dem Diagramm folgt

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{i_m}{(1-\eta)\, i_1 \cos \varphi_1}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{i_m}{i_1 \cos \varphi_1}$$

mithin

$$\eta = 1 - \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_0}. \tag{2a}$$

Wenn man, wie es den praktischen Verhältnissen des gezeichneten Diagramms entspricht

$$\sin \varphi_0 = \sin \varphi_1 = 1$$

setzen kann, erhält man auch direkt durch die Leistungsfaktoren ausgedrückt, den Wirkungsgrad zu

$$\eta = 1 - \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_1}\text{[2])}.$$

Eine zweite Beziehung zwischen Wirkungsgrad und Dämpfung, die wir gleichfalls aus den Diagrammen ableiten können, setzt uns u. a. in den Stand, Dämpfung oder Wirkungsgrad in unbekannten Medien zu finden, wenn eine der beiden Größen gemessen ist.

Denken wir uns die beiden Diagramme (Fig. 6 u. 7) für gleiche Erregung d. h. gleiches i_m gezeichnet, so ist in beiden das Stromdreieck i_m, i_v, i_0 mit dem Winkel ψ und den Spannungen e_1 und e_2 das gleiche, und infolgedessen sind auch die Verluste die gleichen. Bezeichnen wir die ungleichen Größen im Diagramm (Fig. 7) mit gestrichenen Buchstaben, während für die entsprechenden des Diagramms (Fig. 6) die ungestrichenen beibehalten werden, so ist das Verhältnis von $i_2 : i_2'$ oder, was das-

1) Vorausgesetzt ist hierbei, daß der Verlustwinkel in dem betrachteten Frequenzbereich konstant ist.

2) Experimentell gemessene Werte eines Senders, der im wesentlichen den in den Figuren und Diagrammen gezeichneten Verhältnissen entspricht, sind

$$\eta = 0{,}5, \quad \cos \varphi_0 = 0{,}2 \text{ und } \cos \varphi_1 = 0{,}4.$$

selbe ist, dasjenige der mechanischen Amplituden gleich

$$\eta\, i_1 \cos\varphi_1 = \eta'\, i_1' \cos\varphi_1'.$$

Da die mechanischen Amplituden sich umgekehrt wie die mechanischen Dämpfungen verhalten, so ist:

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}'} = \frac{\eta'\, i_1' \cos\varphi_1'}{\eta\, i_1 \cos\varphi_1}.$$

Das Verhältnis $1-\eta:\eta$ ist in den Figuren in den Strecken $ED:EB$ dargestellt, und daher ist:

$$\frac{1-\eta}{\eta} = \frac{i_v}{\eta\, i_1 \cos\varphi_1}$$

und

$$\frac{1-\eta'}{\eta'} = \frac{i_v}{\eta'\, i_1' \cos\varphi_1'}$$

oder

$$\frac{1-\eta}{\eta} \cdot \frac{\eta'}{1-\eta'} = \frac{\eta'\, i_1' \cos\varphi_1'}{\eta\, i_1 \cos\varphi_1}$$

oder gleich $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}'}$, und daher:

$$\frac{\mathfrak{d}\cdot\eta}{1-\eta} = \frac{\mathfrak{d}'\eta'}{1-\eta'}.$$

Dieser Ausdruck stellt eine Konstante des betreffenden Apparates[1]) dar, die für alle Medien und Arbeitsverhältnisse Gültigkeit hat und in der angewandten Akustik oft große Dienste leisten kann. Da es meistens darauf ankommt, große Wirkungsgrade bei großer Dämpfung zu erzielen, so könnte diese Apparatkonstante als quantitativer Wertmesser verschiedener Apparate untereinander dienen.

3. Das Kreisdiagramm der Verstimmung.

Den Arbeitsvorgang im elektromechanischen Transformator können wir, elektrisch gesprochen, so ansehen, daß beim allmählichen Eintritt in die Resonanz der Wattwiderstand, der bei niederer und höherer Frequenz annähernd gleich ist und Verlustwiderstand genannt werden möge, wächst, und zwar entsprechend seinem Wirkungsgrade, bis er in der Resonanz seinen höchsten Wert gleich Verlustwiderstand + mechanischer Arbeitswiderstand erreicht. Dieser Vorgang drückt sich im wesentlichen in der Zunahme des $\cos\varphi$ aus. Die Abhängigkeit der scheinbaren Selbstinduktion des Gebers von der Frequenz ist keiner so einfachen und unmittelbaren Vorstellung und Erfassung zugänglich; wir stellen daher, um diese Abhängigkeit zu untersuchen, das Diagramm des Senders für Verstimmung auf.

Das Diagramm der Fig. 6 erfährt beim Herausgehen aus der Resonanz dadurch Veränderungen, daß e_2 und i_2 nicht mehr gleichphasig sind, sondern daß je nachdem wir mit tieferer oder höherer Frequenz als der Resonanzfrequenz erregen, eine Voreilung oder Nacheilung von Strom gegenüber der Spannung eintritt. Die Phasenverschiebung im Stromkreise 2 der Fig. 5 zwischen e_2 und i_2 beträgt bei der Frequenz ω

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}{w_2}$$

oder, wenn die Resonanzfrequenz ω_R durch die Beziehung $\omega_R^2 L_2 C_2 = 1$ gegeben ist, auch

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\omega_R L_2}{w_2}\left(\frac{\omega}{\omega_R} - \frac{\omega_R}{\omega}\right).$$

Setzen wir

$$\frac{\omega_R}{\omega} = 1 + x$$

und beschränken uns auf die Nachbarschaft der Resonanz, so wird, da

$$\frac{\omega_R L_2}{w_2} = \frac{\pi}{\mathfrak{d}}$$

ist,

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{2\pi x}{\mathfrak{d}},$$

wobei positive x, d. h. negative Winkel oder Phasenvoreilung den tieferen Frequenzen entsprechen.

Legen wir den Winkel φ_2 in dem Diagramm der Fig. 8 beispielsweise für eine Verstimmung oberhalb der Resonanz an den e_2-Vektor an und fällen von C ein Lot auf den freien Schenkel, das diesen in G trifft, so stellt CG die Differenz zwischen den Spannungen e_{L_2} und e_{C_2} dar, die wir uns jetzt im Punkte O senkrecht auf OG errichtet denken müssen, und zwar e_{L_2} nach links unten und e_{C_2} nach rechts oben. Wird das Stromdreieck ODE konstant gehalten[1]), so ist der geometrische Ort des Endpunktes von i_1 ein Kreis, der die Strecke EB zum Durchmesser hat. Zieht man durch E eine Parallele zu OG bis zum Schnittpunkte H mit dem genannten Kreise, so ist $OHEF$ das Stromparallelogramm. Fällt man die Lote HKL, BM und EN, so kann man folgendermaßen die Richtigkeit des Kreisdiagramms beweisen.

1) Die bereits früher mitgeteilten Werte für Wirkungsgrad und Dämpfung eines Senders im Wasser bzw. in der Luft waren 50 Proz. und 0,2 bzw. 90 Proz. und 0,02 und ergeben mithin für die Konstante dieses Apparates in den beiden Medien die Werte 0,2 bzw. 0,18.

1) Dies bedeutet Konstanz des Verlustwinkels φ_0 bzw. ψ in dem betrachteten Frequenzbereich.

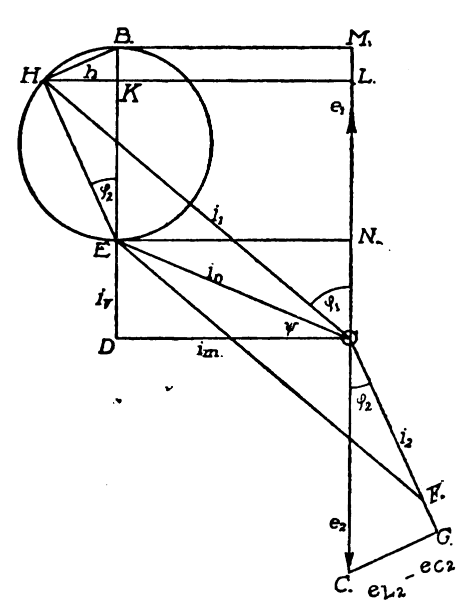


Fig. 8.

Nennen wir die Wirkungsgrade in Resonanz und bei Verstimmung η_R und η, letzteres bezogen auf die Gesamtleistung bei Resonanz, so ist

$$\frac{\eta}{\eta_R} = \frac{1}{1+\left(\frac{2\pi x}{\mathfrak{d}}\right)^2} = \cos^2\varphi_2 \text{ [1]}.$$

Diese Beziehung wollen wir auch aus dem Kreisdiagramm ableiten und damit seine Richtigkeit beweisen.

Aus dem Dreieck EHK folgt

$$\cos\varphi_2 = \frac{EK}{EH}$$

und aus dem Dreieck EHB

$$\cos\varphi_2 = \frac{EH}{EB},$$

da infolge der Lage des Punktes H auf dem Kreise letzteres ein rechtwinkliges ist. Infolgedessen ist auch

$$\cos^2\varphi_2 = \frac{EK}{EB} = \frac{LN}{MN} = \frac{\eta}{\eta_R},$$

was nachzuweisen war, um die Richtigkeit der Konstruktion des Kreisdiagramms zu erhärten.

Die Selbstinduktionen in einem beliebigen Punkte und bei Leerlauf sind gegeben durch

$$\omega L = \frac{e_1}{i_1}\sin\varphi_1$$

$$\omega_0 L_0 = \frac{e_0}{i_0}\sin\varphi_0.$$

Halten wir, wie in der Fig. 8, den Flux konstant[1]), so ist

$$\frac{e_1}{\omega} = \frac{e_0}{\omega_0}$$

und daher, wenn wir die Strecke HK mit h bezeichnen:

$$\frac{L}{L_0} = \frac{i_0}{i_1}\cdot\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_0} = \left(\frac{i_0}{i_1}\right)^2\left(1 \pm \frac{h}{i_m}\right),$$

wobei das $+$-Zeichen für das Gebiet oberhalb und das $-$-Zeichen für das Gebiet unterhalb der Resonanz gilt.

Dieser Wert müßte nun durch η_R, φ_0 bzw. ψ, und φ_1 oder φ_2 ausgedrückt werden und könnte dann zur Berechnung von L/L_0 dienen. Wir haben dies versucht, glauben aber, von der Mitteilung der sehr komplizierten Formel absehen zu können, da sie zu unübersichtlich ist, um in Frage zu kommen für eine Diskussion, wie sich L/L_0 mit den Variabeln ändert. Eine viel klarere Vorstellung, besonders der Grenz- und Übergangsfälle gewinnt man durch Interpretation des Ausdrucks

$$\left(\frac{i_0}{i_1}\right)^2\left(1 \pm \frac{h}{i_m}\right)$$

an Hand des Diagramms (Fig. 8).

Besonderes Interesse erweckt der Fall, wenn

$$\frac{h}{i_m} = -1, \text{ d. h. } L/L_0 = 0$$

wird; dies tritt ein, wenn der Kreis den e_2-Vektor berührt. Die analytische Bedingung, die sich ohne weiteres aus der geometrischen Figur ergibt, lautet

$$\operatorname{tg}\psi = 2\,\frac{1-\eta_R}{\eta_R}.$$

Nimmt der Verlustwinkel noch größere Werte an, als dieser Gleichung entspricht, so schneidet der Kreis den e_2-Vektor, und $1 - \frac{h}{i_m}$ und damit L/L_0 wird negativ, d. h. der elektro-mechanische Transformator wirkt elektrisch als Kapazität. Das Diagramm nimmt dann folgende Gestalt an (Fig. 9). Nennt man die Schnittpunkte des Kreises mit der Spannungslinie P und Q, so bestimmen diese beiden Punkte die beiden Verstimmungswinkel φ_2' und φ_2'', in denen der Transformator als reiner Ohmscher Widerstand wirkt. Auf dem Kreisbogen $QEBP$ tritt zum Widerstand eine Selbstinduktionswir-

1) Dies folgt aus der bekannten Dämpfungsformel

$$\mathfrak{d} = 2\pi x \sqrt{\frac{(y/y_0)^2}{1-(y/y_0)^2}},$$

worin y_0 und y die Amplituden bei Resonanz und Verstimmung bedeuten.

1) Hierdurch findet die früher unbeantwortet gebliebene Frage ihre Erledigung, was bei der Aufnahme der Resonanzkurve unter konstanter Erregung zu verstehen ist.

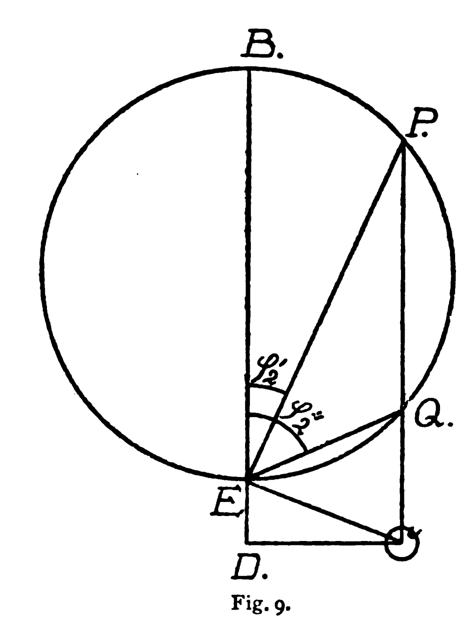


Fig. 9.

kung und auf dem restlichen Kreisbogen PQ eine Kapazitätswirkung. Hierbei entspricht der zu EB links liegende Halbkreis den Frequenzen oberhalb und der rechts liegende den Frequenzen unterhalb der Resonanz, während der Punkt B dem Resonanzpunkt und der Punkt E den Frequenzen 0 und ∞ entspricht.

In den Fig. 10 und 11 haben wir für zwei Fälle (elektromechanische Transformatoren in Wasser und Luft) die Abhängigkeit von L von der Verstimmung als Kurve aufgetragen, wie sie sich aus den Kreisdiagrammen ergibt, die für zwei durch Beobachtung gewonnene Wertgruppen von η, $\mathfrak{d}$ und ψ gezeichnet sind. Durch

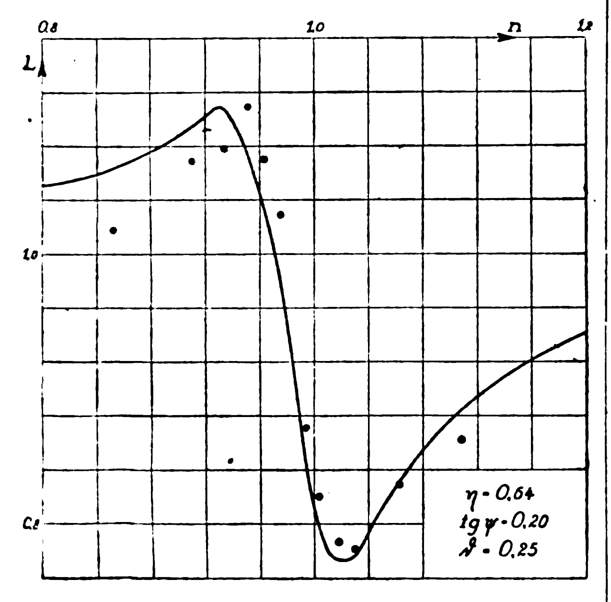


Fig. 10.

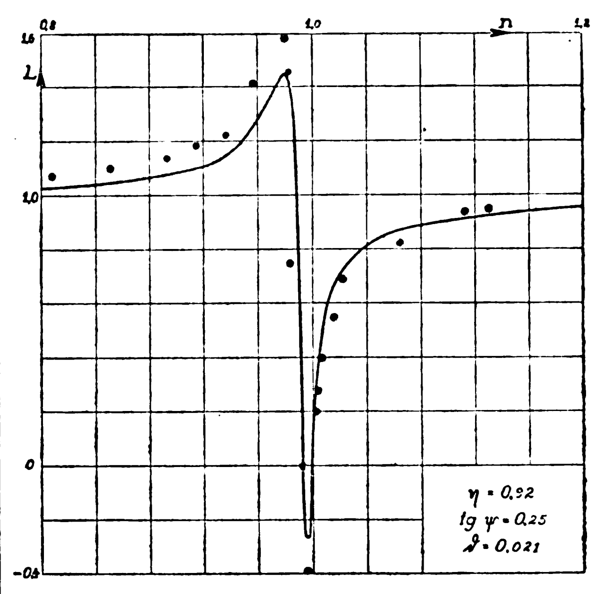


Fig. 11.

Punkte markiert sind gleichzeitig die direkt beobachteten Werte, wie sie sich aus Spannung, Strom, Leistung und Frequenz ergeben. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung eine gute, insbesondere ist für die Kurve in Luft die Kapazitätswirkung sowohl bei Beobachtung wie bei Berechnung in gleichem Maße vorhanden.

Daß Telephone gelegentlich als Kapazitäten wirken können, ist u. a. von Wagner in seiner Arbeit zur Verbesserung des Telephons[1]) schon erwähnt worden. Auch hat er ganz ähnliche Kurven für die Abhängigkeit von L und w von der Frequenz gefunden. Eine diagrammatische Auswertung seiner Beobachtungen und Vergleiche mit der Theorie war uns leider nicht möglich, da hierfür einige experimentelle Angaben fehlen.

Bei der Untersuchung von Telephonen wird man nämlich nicht, wie bei den unseren Angaben zugrunde liegenden Schallgebern für große Leistungen, den Ohmschen Spannungsabfall in der Spule vernachlässigen können; es besteht aber gar keine Schwierigkeit, das Diagramm dahin zu erweitern[2]), indem man in Richtung des Stromes den Spannungsabfall durch Ohmschen Widerstand aufträgt und aus dieser und der Klemmenspannung die Feldspannung ermittelt. Ob eine Untersuchung nach den Gesichtspunkten des elektro-mechanischen Transformators eine Verbesserung des Telephons bringen würde, ist nicht ohne weiteres zu bejahen, da es bei diesem Apparat nicht so sehr auf große Lautstärke in Reso-

1) Elektrotechnische Zeitschrift 1911, 80 ff.
2) Siehe Kapp, Transformatoren.

nanz, als auf gute Klangfarbe und Zeichnung der menschlichen Sprache unterhalb der Resonanz ankommt; immerhin erscheint uns eine Untersuchung von diesem Gesichtspunkt aus lohnenswert.

Zusammenfassung.

In vorstehenden Ausführungen ist gezeigt worden, daß ein Schallgeber, wie er prinzipiell in einem Telephon vorliegt, theoretisch als elektrischer Transformator behandelt werden kann, indem die mechanische Wirkung der Ankerbewegung durch elektrische Vorgänge gedanklich ersetzt wird.

Es sind die Diagramme solcher elektromechanischer Transformatoren für Resonanz und Verstimmung aufgestellt. Aus ihnen sind wichtige Beziehungen zwischen den elektrischen und mechanischen Größen abgeleitet, die auch durch Beobachtungen bestätigt werden.

Kiel, im Dezember 1918.

(Eingegangen 22. Dezember 1918.)

Über den Sehraum.

Von Hans Witte.

Dritte Mitteilung: Zur scheinbaren Größe des Mondes.

(Mit Tafeln III u. IV.)

1.

Beim Sehraum gehen die Grundfragen auf die scheinbare Entfernung und die scheinbare Größe. Kurz (nach Hering): Sehferne und Sehgröße.

Über die Sehferne des Mondes kann man unmittelbar nicht wohl ins reine kommen. Eine Schwierigkeit habe ich in meiner ersten Mitteilung ausgeführt. Es gibt noch mehr.

Die Sehgröße des Mondes erlebt man dagegen unmittelbar. Der Mond sieht (im Durchschnitt) so groß aus wie ein kleiner bis mittelgroßer Teller, etwa 20 cm. Entsprechende Maße gelten für die Sonne, für Sternabstände, für Kometen, Feuerkugeln usw.

Diese Behauptung habe ich in meiner ersten Arbeit[1]) einfach hingestellt und darauf die weiteren Schlüsse aufgebaut. Die folgenden Zeilen beabsichtigen, die Behauptung gegenüber etwaigen Zweifeln zu erhärten.

2. Zweifel.

Euler[2]) lächelt über die Leute, die den Mond für einen Schweizerkäse halten; Lichtenberg[1]) tadelt einen geistlichen Freund, der den scheinbaren Halbmesser eines Sonnenhofes (Halo) in Schuhen angegeben hatte; Gauß[2]) rückt ab von den „Personen, die den Mond nach Teller- oder Wagenräderbreiten schätzen". Die Physik liebt den Tellermond nicht. Auch sonst wollen manche nachdenklichen Leute nichts von ihm wissen.

Der Grund ist leicht anzugeben. Er liegt in dem zahlenmäßigen Mißverhältnis. Und zwar nach beiden Seiten. In einer Weise findet das Nachdenken den Tellermond zu klein, in anderer Weise zu groß.

Das erste bezieht sich auf die wirkliche Größe des Mondes. Der Mond ist 3600 km groß. Dies weiß der denkende Mensch, und deshalb schämt er sich des Tellers.

Das zweite bezieht sich auf den Sehwinkel des Mondes. Man wendet vielleicht ein, da könne von einem Mißverhältnis keine Rede sein, zwischen einer Streckengröße und einem Winkel gebe es überhaupt kein Verhältnis. Zugestanden; dann läge darin nur ein weiterer Grund, den Teller abzuweisen. Aber der Sehwinkel kann gewissermaßen auch als Strecke erlebt werden. Wer zeichnet, mißt den Sehwinkel mit dem Zeichenstift ab, indem er den Stift mit ausgestrecktem Arm quer vor den fernen betrachteten Gegenstand hält und passend abgreift.

In ähnlicher Weise greifen viele Menschen mit den Fingern ab oder mit beiden Händen, wenn sie sich überzeugen wollen, wie groß ein ferner Gegenstand „wirklich aussieht". Vielleicht ist das ein Rest einer ganz ursprünglichen, rein flächenhaften Raumauffassung, wobei alles in Greifnähe gesehen wird. Blindgeborene, die später durch eine Operation das Augenlicht gewinnen, sehen anfangs flächenhaft, und zwar meist greifnah. Kinder greifen nach allem; auch dem Mond. Jedenfalls kann man bei vielen Erwachsenen, selbst wissenschaftlich gebildeten, die Probe machen: Man fragt sie zuerst, wie groß der Mond aussieht, bekommt als Antwort den Teller, vielleicht gar anschaulich mit den gerundeten Händen gezeigt „so groß!"; dann sagt man: Nun messen Sie mal nach, wie groß er wirklich aussieht — die Antwort erfolgt in den meisten Fällen, wie oben geschildert, die Gefragten greifen den Mond mit den Fingern ab. Viele haben das auch schon früher von selber gemacht und wissen, was herauskommt.

---

1) Diese Zeitschr. 19, 142, 1918.

2) Briefe an eine deutsche Prinzessin über verschiedene Gegenstände der Physik und der Philosophie, französisch, Bd. 1, 138, London 1775. (Brief vom 1. 8. 1760).

1) Georg Christoph Lichtenbergs Briefe, herausgegeben von Chr. W. Lichtenberg Bd. 1, 10, Göttingen 1846, (Brief vom 18. 6. 1784).

2) Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel, herausgeg. von der Preuß. Akad. d. Wiss. 1880, S. 498 (Brief vom 9. 4. 1830).

Fig. 1.

Gewiß entspricht dies Winkelmeßverfahren nicht gerade wissenschaftlichen Genauigkeitsanforderungen. Die Schwankungen betragen mehr als 100 Proz., je nachdem der Arm ausgestreckt oder gebeugt wird. Grundsätzlich ist aber das Ergebnis das gleiche. Das Mißverhältnis gegenüber dem Teller springt in die Augen. Bei diesem „Nachmessen" greift man noch nicht einen Finger breit ab, kann man doch den Vollmond bei ganz ausgestrecktem Arme bequem mit einem Pfennig verdecken[1]).

3.

Im ganzen haben sich aber die Forscher nur sehr selten die Mühe gegeben, solche Gründe zur Widerlegung des Tellermondes ausführlich zu entwickeln. Wo es einmal ausnahmsweise geschieht, findet sich wohl eine dritte Überlegung. Ich möchte sie zunächst mit den Worten Lichtenbergs wiedergeben (als er das geistliche Fußmaß für den Himmel zurückweist):

„Will man aber je scheinbare Größen durch Fußmaße ausdrücken, so muß man notwendig sagen, wie weit man sich dieses Maß vom Auge denkt. So ist es z. E. ganz ordentlich gesprochen, wenn ich sage: Der Mond sieht mir so groß aus, als ein zinnerner Teller, den ich 10 Fuß vom Auge weg halte; denn nun wird der Winkel, der die scheinbare Größe ist, gleich gegeben, sobald nur der Durchmesser des Tellers gegeben ist" . . .

Das heißt: Ein Teller allein besagt gar nichts. Halte ich den Teller nah vors Auge, so sieht er groß aus, hängt er hinten an der Wand, oder sehe ich ihn gar fern im Gelände, so sieht er klein aus und immer kleiner. Wenn nicht hinzugefügt wird, in welcher Entfernung vom Auge sich der Teller befinden soll, so hat die Aussage „so groß wie ein Teller" keinen Sinn. Da nun gewisse Menschen bestimmt sagen, sie sähen den Mond so groß wie einen Teller, müssen sie sich ganz offenbar diesen Teller in einer ganz bestimmten Entfernung vom Auge denken. Welches ist diese Entfernung?

Offenbar, sagt Lichtenberg, ist es diejenige Entfernung, in welcher der Teller den Mond gerade verdecken kann. Denn in dieser, und nur in dieser, Augenentfernung wird der Teller genau unter demselben Sehwinkel wie der Mond gesehen, erzeugt dasselbe Netzhautbild im Auge wie der Mond (Fig. 1).

Die wirkliche Größe des Mondes beträgt 3600 km, die wirkliche Entfernung des Mondes 400 000 km, der Mond-Sehwinkel, durch beide bestimmt, etwa $^1/_2{}^0$ (in Fig. 1 und 2 übertrieben groß gezeichnet). Einen Teller breit — nehmen wir als durchschnittliche Zahl 20 cm — sperrt dieser Mond-Sehwinkel auseinander auf etwa 22 m Entfernung vom Auge. Wer also sagt, der Mond sehe ihm so groß wie ein 20 cm-Teller aus, muß sich notwendigerweise den Teller 22 m weit vom Auge entfernt denken. Dann ist es „ganz ordentlich gesprochen". Andernfalls hat die Aussage keinen Sinn.

Und daraus nun der Schluß: Wenn einer durchaus den Mond mit einer in 22 m Entfernung befindlichen, und demzufolge 20 cm großen Scheibe vergleichen will, dann kann er das ja natürlich tun. Aber ebensogut kann er natürlich im selben Augenblick eine Deckscheibe auf 11 m Entfernung anbringen, dann muß die Scheibe 10 cm groß gemacht werden, und der Mond sieht so groß aus wie diese 10-cm-Scheibe. Oder er denkt sich die Deckscheibe auf 44 m Entfernung 40 cm groß, dann sieht der Mond so groß wie diese 40-cm-Scheibe aus. Und so weiter ohne Ende, wie es einem gerade paßt (vgl. Fig. 2). Die Scheibe gerade auf 22 m zu denken, also 20 cm groß, und den Mond dieser Scheibe gleichsetzen, ist zwar zulässig, jedoch durchaus willkürlich. Alle die anderen möglichen Vergleichsentfernungen und Scheibengrößen haben das gleiche Recht.

Für sich allein ist der 20-cm-Vergleichsteller schlechthin unsinnig; denkbar nur als willkürlicher Einzelfall einer unendlichen Menge gleichberechtigter Möglichkeiten, und mit dem ausdrücklichen Zusatz: Augenentfernung 22 m.

4.

Manchmal wird dieser dritte Einwand auch noch umgedreht. Die Zahl nicht nur auf den Teller bezogen, sondern auch auf den Mond. Dann heißt er folgendermaßen:

[1]) Nämlich auf 70 cm Entfernung vom Auge mit einem Kreisscheibchen vom Durchmesser 6,3 mm (für den mittleren Mondsehwinkel von 31′ 8″).

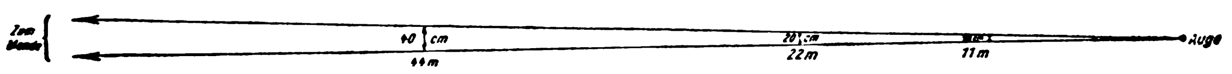


Fig. 2.

Wenn jemand den Mond so groß wie einen Teller sieht, so darf man umgekehrt fragen: An welche Stelle des Mond-Sehwinkels verlegt der Mann in Gedanken den Mond?

Je näher er sich nämlich den Mond denkt (fährt man fort), um so kleiner muß er ihn sehen. „Je näher, um so kleiner", heißt ja der feste Grundsatz alles räumlichen Sehens bei fest gegebenem Sehwinkel. Volkstümlich gesprochen: Aus dem Sehwinkel kann der Mond bzw. das gedachte Mondbild nicht heraus. Es muß den Sehwinkel immer ganz genau ausfüllen, einerlei auf welche Entfernung es der Beschauer in Gedanken verlegt. Man vergleiche nochmals die Fig. 2, jetzt bedeuten die Scheiben (40 cm, 20 cm, 10 cm usw.) gedachte Mondbilder.

Einen Teller breit — 20 cm — sperrt der Mond-Sehwinkel auseinander auf 22 m. Wer also den Mond einen Teller groß sieht, verlegt den Mond auf eine scheinbare Augenentfernung von 22 m.

Ebensogut kann er den Mond aber nun im selben Augenblick auf 11 m legen und 10 cm groß sehen, oder auf 44 m Entfernung 40 cm groß, usw. usw., wie oben.

5.

Zusammengefaßt, im Sinne Lichtenbergs und seiner Genossen:

Der Mond kann im selben Augenblick ebensowohl so groß gesehen werden wie ein Dosendeckel (10 cm), ein Teller (20 cm), eine Waschschüssel (40 cm) usw.; und umgekehrt der Dosendeckel, der Teller, die Waschschüssel usw. so groß wie der Mond. Nur muß man sowohl den Mond wie den Vergleichsgegenstand in Gedanken in diejenige Entfernung vom Auge bringen, wo die Vergleichsscheibe den Mond deckt. Soll es nun gerade einmal ein Teller (20 cm) sein, dann auf 22 m.

6.

Dieser dritte Einwand gibt also dem Tellermond immerhin ein gewisses verhältnismäßiges Recht, oder wenigstens eine verhältnismäßige Möglichkeit. Indessen knüpft sich gerade an die Entfernung von 22 m, die der Einwand für notwendig erklärt, ein letztes Bedenken.

Ob jemand den Mond auf 22 m verlegt, bleibe dahingestellt. Den Vergleichsteller verlegt auf 22 m kein Mensch.

Abgesehen natürlich von mathematisch Gebildeten, die sich sagen, da gehört der Teller hin, und sich deshalb einreden, sie sähen ihn da. Der Unbefangene denkt meistens über die Entfernungsfrage überhaupt nicht nach. Achtet man aber genauer auf, so zeigt sich, daß ihm wohl eine Entfernung vorschwebt. Jedoch keineswegs die Entfernung 22 m, daran denkt er nicht und davon fühlt er nichts. Es ist bemerkenswerterweise die allernächste Nähe, insbesondere die Greifnähe.

Oben wurde bereits geschildert, was sehr viele Leute auf die Frage „Wie groß sieht der Mond aus?" tun. Sie formen den 20-cm-Teller mit den Händen. Die Hände halten sie dabei in bequemer Greifhaltung vor dem Körper, wie man sie halten würde, wenn man einen wirklichen Teller darin hielte. Steht zufällig ein passender Teller auf dem Tische, oder findet sich, noch besser, in der Nähe eine ebenso große gelbliche Scheibe, so wird sie gern gleich in die Hand genommen: „der Mond". Allem Augenschein nach ist die Meinung dabei die, man könne den Mond eigentlich, wenn man die Hände hebt, mit der Scheibe oder dem Teller unmittelbar verdecken, oder ihn in die gerundeten Hände einrahmen. Daß dies wirklich die Meinung ist, zeigt sich, wenn man den Versuch in der oben (2) geschilderten Weise fortsetzt. Diejenigen Leute, welche die Probe zum ersten Male machen (und das sind mehr, als man denkt), verraten ein unverkennbares Erstaunen. Sie wundern sich, daß die Hände mehr als 40 mal zu weit fassen. Also hatten sie geglaubt, der Mond passe in die Hände hinein, der greifnahe Teller decke den Mond ab.

7. Eigene Versuche (gemeinsam mit Herrn E. Laqueur).

Im ganzen sind das wohl Schwierigkeiten genug. Man versteht, wenn unsere physikalische Wissenschaft den Tellermond abwies. Als Herr Laqueur[1]) mich zum Nachdenken über den Tellermond anregte, haben wir in den Facharbeiten viel gesucht, aber zunächst nichts gefunden. Die Grundversuche über das Erleben des Tellermondes hatten wir mit Hunderten von Versuchspersonen durchgeführt, da entdeckten wir endlich eine Quelle, aus der sich in vollen Maßen Zustimmung schöpfen ließ (von Sterneck), zwei andere (von Kries und Höfler) fand ich erst nach der Niederschrift des ersten Aufsatzes.

Unsere gemeinsamen Versuche zerfielen in drei Gruppen.

8.

a) Die Versuchspersonen wurden einfach gefragt: Wie groß sieht der Mond aus?

Sie zeigten dann mit den gerundeten Händen, malten einen Kreis in die Luft vor sich hin, verglichen mit runden Gegenständen („wie

1) Vgl. diese Zeitschr. 19, 151, 1918.

ein ..."), griffen nach einem zufällig vorhandenen Vergleichsgegenstand, usw.

Das Ergebnis war im Durchschnitt ein Durchmesser von (etwa) 20 cm. Beim Vergleichen wurde z. B. gesagt: wie ein Dessertteller (ein Professor), wie ein Schinkenteller (ein Geheimrat), kopfgroß (ein Maler), wie eine Dienstmütze (verschiedene Kanoniere).

b) Papierscheiben von 1 cm bis 50 cm Durchmesser wurden vorgelegt, die Versuchspersonen sollten angeben, ob eine passende darunter wäre.

Das Ergebnis war das gleiche.

Natürlich bestand die Gefahr, daß sich die Versuchspersonen durch die vorhandenen Scheiben beeinflussen ließen; insbesondere, daß sie sich gedrängt fühlten, eine mittelgroße zu wählen. Dem wurde begegnet, indem manchmal nur größere, manchmal nur kleinere vorgelegt wurden.

c) Die Versuchspersonen sollten auf einem großen Blatt Papier oder einer Wandtafel zeichnen, wie groß.

Hier war zu vermeiden, daß die Blatt- oder Tafelgröße einen Einfluß übte. Die Zeichenfläche wurde deshalb möglichst groß, aber verschieden groß genommen. Manchmal ein Quartblatt, manchmal eine Wand.

Auch hier war das Ergebnis im Durchschnitt die Scheibe vom Durchmesser etwa 20 cm.

9.

Abweichungen kamen in allen drei Fällen vor. Insbesondere schienen Kurzsichtige etwas kleiner, Kinder etwas größer zu zeigen. Für die weiteren Schlüsse ist das Wesentliche: die Abweichungen waren selten und gering. Der „Teller" zeigte sich als ein durchaus fester mittlerer Wert, der von weitaus den meisten Versuchspersonen mit großer Annäherung immer wieder angegeben wurde [1]).

Ähnliche feste Maße und von ähnlicher Größenordnung fanden sich bei der Sonne, bei Sternabständen, bei Wolken und anderen himmlischen Gebilden mehr.

Die Versuchspersonen gehörten allen erreichbaren Berufen und Lebensaltern an. Herr Laqueur hatte in seiner damaligen Stellung als Abteilungsarzt ein besonders reichhaltiges und vielseitiges Material an den Offizieren und Mannschaften der hiesigen Ersatzabteilung. Wie die Fragenden streng vermieden, den Versuchspersonen irgendwelche Angaben nahe zu legen, so wurde selbstverständlich auch auf alle Weise verhindert, daß die Versuchspersonen einander beeinflußten.

1) Und zwar sowohl, wenn der Mond gleichzeitig am Himmel sichtbar war, wie auch aus dem Gedächtnis.

10. Andere Belege.

Da die Wissenschaft den Tellermond scheel ansieht, könnte man vielleicht doch zweifeln, ob unsere Ergebnisse allgemein gelten. Ich erlaube mir daher zunächst, mich auf die unter 7 genannten Forscher zu berufen.

Herr v. Sterneck sieht den Mond, je nachdem der Mond hoch oder tief steht, 10 cm bis etwa 30 cm groß, ausnahmsweise bei besonderen Lichtverhältnissen (Dämmerung) noch etwas größer, bis 41 cm. Versuchspersonen haben ihm ähnliche Angaben gemacht. Für Sonne, Sterne, Wolken findet er Werte von gleicher Größenordnung. Herr v. Sterneck verfügt über eine besonders feine Empfindlichkeit in diesen Schätzungen, sie ermöglicht ihm, außerordentlich genaue Zahlen anzugeben. Seine Theorie der „Referenzflächen" ist auf diese Zahlen gegründet; ich darf auf sein Buch [1]) sowie auf die Bemerkungen in meinem ersten Aufsatz verweisen.

Herr Höfler hat schon vor Jahren mit zahlreichen Versuchspersonen ähnliche Schätzungen angestellt wie wir, und hat denselben Durchschnittswert für den Mond erhalten [2]).

Herr v. Kries sieht die Himmelskörper wieder in gleicher Größenordnung [3]). Er weist selber auf die „Unsinnigkeit einer solchen Schätzung" und das „auffällige Mißverhältnis" zur Winkelgröße und Entfernung hin, bemerkt aber ausdrücklich, daß die Himmelskörper „ich weiß nicht, ob von allen, aber jedenfalls von sehr vielen Personen direkt in einer ganz bestimmten absoluten Größe wahrgenommen werden", und bemerkt über die Frage der scheinbaren Vergrößerung des Mondes am Horizont, daß ihm diese absoluten Größeneindrücke „als vorzugsweise merkwürdig und als der notwendige Ausgangspunkt aller speziellen Erklärungsversuche" erscheinen.

11.

Im 18. Jahrhundert haben Gelehrte sogar Teller und Schuhe noch als himmlische Maße benutzt. Lichtenberg klagt: „Sie können nicht glauben, was die Schriften so gar mancher Physiker von diesem Fehler wimmeln". Dieser wissenschaftliche „Fehler" reicht aber bis in unsere Zeit. Er findet sich in dem nicht ganz verschwundenen Zollmaß für den Betrag einer Verfinsterung von Sonne oder Mond. Der

1) R. v. Sterneck, Der Sehraum auf Grund der Erfahrung, Leipzig, Barth. 1907.

2) A. Höfler, Didaktik der Himmelskunde, Leipzig, Teubner. 1913, S. 195. Seine Ausführungen in den Atti del V. congresso internazionale di psicologia tenuto in Roma 1905, S. 188 waren mir leider nicht zugänglich.

3) J. v. Kries, im Handbuch der Physiol. Optik von H. v. Helmholtz, 3. Aufl. 1910, 3. Bd., herausgeg. von v. Kries, Zusätze S. 492f.

Durchmesser des Mondes oder der Sonne wird in 12 Zoll geteilt: 12 Zoll sind ein Fuß, 30 cm, der aufgehende Tellermond, die Tellersonne. In J. G. F. Bohnenbergers Astronomie von 1811 ist der Zoll für Sonnen- und Mondfinsternis noch das „gewöhnliche" Maß. Rückwärts weist dieser Fuß-„Fehler" bis ins Altertum. Die Sonne Homers, die auch uns noch lächelt, ist dieselbe fußgroße Sonne. Aetios[1]) (100 n. Chr.) berichtet von Heraklit (500 v. Chr.), dieser meine, die Sonne sei so groß, wie sie aussehe, nämlich einen Fuß groß, euros podos anthropeiou. Zwischen beiden steht Epikur mit derselben scheinbaren Größe (... phainetai), dem Epikur folgt Lukrez: Das Rad der Sonne ist nicht wesentlich größer, als es aussieht,

Nec nimio solis major rota nec minor ardor
esse potest, nostris quam sensibus esse videtur,

ähnlich der Mond und die Sterne[2]).

Mit Vorbehalt möchte ich ein anderes Maß ähnlich aus ursprünglicher Größenanschauung herleiten, unseren Winkelgrad. Die Sonne legt im Tierkreis an einem Tage rund einen Winkelgrad zurück, oder rund das Doppelte ihres eigenen scheinbaren Durchmessers. Also im Maße Heraklits und Lukrez' zwei Fuß. Das lateinische Wort gradus ist aber eigentlich ein Längenmaß und bezeichnet einen einfachen Schritt, $2^1/_2$ Fuß. Die Sonne macht danach täglich am Himmelsgewölbe einen Schritt; der ganze Tierkreis, rund um den Himmel herum, mißt 360 Schritte.

Fest steht, daß die Babylonier und die Assyrer solche Maße hatten[3]). Dem König wird keilschriftlich mitgeteilt, wieviel Zoll der Tagesbogen der Sonne sich ändert. Die Annäherung des Saturns an die Venus, der Ort von Planeten am Himmel überhaupt wird angegeben in Elle und Zoll, in Zoll die Finsternisse gemessen (700 v. Chr.).

12.

Verläßt man die Kreise der Wissenschaft und sucht Zeugnisse für das allgemeine Empfinden früherer Zeiten, so mehren sich die Belege, ohne doch wesentlich unschärfer zu werden.

Gauß weist das Teller- und Wagenrad-Schätzen den Nichtastronomen zu. Damit räumt er ein, daß seine Zeitgenossen den Mond so sehen. Ähnlich Euler „das Volk". (Übrigens nimmt Euler sich selber nur aus bezüglich des Wissens, nicht bezüglich des Scheins; „le peuple s'imagine que la lune est égale à un fromage de Suisse"; etwas später legt er Philosophen die Worte in den Mund: Wir sehen die Sonne nicht größer als eine Waschschüssel, da schließt er dem Zusammenhang nach sowohl seine hohe Briefempfängerin wie sich selber ein.)

Märchen, Sagen, religiöse Vorstellungen spiegeln das Bild, das Jahrhunderten vor Augen stand.

Die Söhne der Sonne, die Herrscher von Peru, bildeten ihre Mutter bzw. ihren Vater als flammenumgebenes menschliches Gesicht. Der letzte Inka Atahualpa sah als Unglückszeichen kurz vor seinem Tode einen Kometen von der Dicke eines Mannes (1533[1])). Das Mittelalter glaubt die Kometen als Lanzen, Schwerter, Zuchtruten Gottes. Den Regenbogen tragen Engel in Schüsseln. Engel usw. erscheinen am Himmel. Durch die Wolken stürmt Wodans Roß, jagen die Walküren, bei der Götterdämmerung frißt der Fenriswolf den Mond.

Australische Märchen erzählen, der Mond sei ein an den Himmel geworfenes Emu-Ei. Ein Eskimo-Märchen erklärt die dunklen Flecke auf dem Mond dadurch, daß die Sonne dem Mond das Gesicht mit Lampenruß geschwärzt habe[2]).

Das Altertum kennt die Sagen von Helden, die an den Himmel versetzt wurden. Die Maße passen wieder; „Herkules", „Orion" u. a. sind Riesen, sowie man sich Riesen denkt, z. B. Orion von Rigel bis Bellatrix im Meridian 3 Mann hoch. Auch anderes paßt, der große Himmelswagen ist ein großer Wagen, u. a. m. Anderes nicht, das ist kein Wunder, bei manchen Sternbildern, wie der Krone, mag der Formeindruck zwingend gewirkt haben, manche sind auch Verlegenheitsschöpfungen, wie der Krebs. Am besten passen immer Sonne und Mond. Thessalische Hexen ziehen den kopfgroßen Vollmond an einer Kette herab[3]). Die Mond-

1) „Plutarch", Varia Scripta, Editio Tauchnitiana, Leipzig, Tauchnitz, 1873, Bd. 5, S. 265 ff. Herrn Oberschulrat Dr. Brandes in Wolfenbüttel bin ich für freundlichen Nachweis dieser Stelle und für mehrfache weitere Hilfen bei literarischen und sprachlichen Fragen zu besonderem Danke verpflichtet.

2) Lukrez, De rerum natura, herausgegeben von C. Lachmann, Berlin 1850, S. 175 f. (Buch 5, Vers 564 ff.). Die Gleichsetzung von scheinbarer und wirklicher Größe erklärt sich aus Lukrez' Lichttheorie.

3) C. Bezold, Astronomie, Himmelsschau und Astrallehre bei den Babyloniern. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Phil.-hist. Klasse, 1911, 2. Abhandlung. Herr Geheimrat v. Kries in Freiburg hatte die Güte, mich auf diese Schrift aufmerksam zu machen.

1) Alexander v. Humboldt, Ansichten der Natur, Stuttgart und Augsburg 1860, 2. Bd., S. 274.

2) M. B. Weinstein, Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Leipzig, Teubner 1913, 49, 62.

3) Vgl. hier und im folgenden W. H. Roscher, Ausführliches Lexikon der griechischen und römischen Mythologie, 12. Lieferung S. 1994, 35. Lieferung S. 3119, 36.

göttin Selene trägt auf dem Kopfe den hörnerartigen, gelegentlich auch den vollen Mond. Ebenso Helios, wenn sie nicht heiligenscheinartig seinen Kopf umstrahlt, die Sonne. Von ägyptischen Gottheiten, Tefnut, besonders Amon-Re, sind die Bilder mit der Sonnenscheibe auf dem Kopf allgemein bekannt. Oft sieht man auch die Sonnenscheibe eingerahmt von den aufgeblähten Vorderkörpern zweier ägyptischen Brillenschlangen (Uräusschlangen, Naja haje).

„Siehe, es geht eine kleine Wolke auf aus dem Meere, wie eines Mannes Hand", 1. Kön. 18,

Aus vorgeschichtlicher Zeit kennen wir Sonnenscheiben aus Metall[1]). So die Sonnenscheibe von Trundholm auf Seeland, aus der Bronzezeit, sie mißt 24 cm.

13.

Die Beispiele ließen sich leicht vervielfachen, ebenso aus der Dichtung verschiedenster Zeiten und Völker, Reisebeschreibungen u. a. m. Ich nenne außer der „Sonnenblume", Helianthus L., nur die in Poesie und Prosa sehr beliebte „Sichel" des Mondes, eine Sichel ist 22 cm groß. Zahlen gewinnt man nochmals aus Landschaftsbildern, die den Mond enthalten.

Das allgemein Kennzeichnende ist hier wieder, daß der Mond, die Sonne usw. meist nicht sehwinkeltreu abgebildet wird, sondern viel größer.

Natürlich muß man die Bilder, um das entscheiden zu können, aus der richtigen Entfernung betrachten. Ein perspektivisches Landschaftsbild entsteht aus der wirklichen Landschaft, indem der Maler die räumlich verteilten Dinge auf eine Fläche, die Zeichenfläche, überträgt. Die Verhältnisse sind daher genau die gleichen wie oben unter 2 bei flächenhaftem Sehen. Nur daß die Entfernung der Zeichenfläche nicht notwendig gerade die obige „Greifentfernung" ist. Sie ist es nur dann, wenn der Zeichner die mit dem Stifte wie oben freihändig abgegriffenen Maße in gleicher Größe auf das Zeichenblatt hinübernimmt. Wählt er die Maße größer, so wird die Entfernung, aus der man das Bild betrachten muß (Augendistanz, Sehweite), größer, verkleinert er die Maße, so verkleinert sich entsprechend die Sehweite der Zeichnung. Nach einer alten Malerregel beträgt die Sehweite eines Bildes das $1\frac{1}{2}$ fache seiner größten Ausdehnung; manchmal kann man sie aus schrägrechten Fluchtlinien von Gebäuden u. dgl. genau ermitteln. In allen Fällen ist die Bild-Sehweite diejenige Entfernung vom Auge, in der das Bild die wirkliche Landschaft Zug für Zug abdecken kann.

Bei einer Bildweite von 25 cm müßte demnach der Mond $2\frac{1}{4}$ mm breit gezeichnet werden (Fig. 3). Er ist eben innerhalb seines festgegebenen Sehwinkels von $\frac{1}{2}^0$ (vgl. Fig. 2) auf eine Bildfläche herangerückt, die sich 25 cm von dem Auge des Beschauers befindet. Dies $2\frac{1}{4}$ mm breite Scheibchen (Fig. 3) deckt auf 25 cm Augenentfernung den Mond ab.

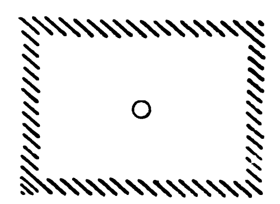


Fig. 3.

Es kommt vor, daß ein Maler den Mond wirklich so perspektivisch richtig zeichnet. Dann wirkt er auf alle unbefangenen Beschauer viel zu klein. Am schlagendsten zeigt sich das, wenn man den Mond photographiert. Fig. 4 und 5 (auf Tafeln III u. IV) zeigen Landschaften im Format 13×18, die Bildsehweite beträgt 18 cm (Brennweite des Objektivs), also der photographierte Mond bzw. die mit Blendglas photographierte Sonne 1,6 bis 1,7 mm im Durchmesser, wie in den Photographien ersichtlich (in den oberen, dunklen Rand eingetragen). Dies ist der perspektivisch richtige, sehwinkeltreue Mond oder Sonne, bei einer Bildsehweite von 18 cm. Selbst wer weiß, daß er so richtig ist, empfindet ihn, dem natürlichen Eindruck hingegeben, zu klein.

In dieselben Photographien hatte vorher ein Künstler nach seinem Empfinden Mond und Sonne eingezeichnet. Wie zu erwarten, ganz bedeutend viel größer. Vom perspektivischen Standpunkt „zu groß", nach dem natürlichen Empfinden „richtig" (vgl. Fig. 4 und 5, unter bzw. neben den photographierten Scheibchen[1])).

So groß zeichnen die Maler in ihren Gemälden Mond und Sonne in der Regel. Hun-

Lieferung S. 3137, 66/67. Lieferung S. 1137 u. 1155. Leipzig, Teubner, 1887, 1897, 1913. Herr Prof. Müller in Wolfenbüttel hatte die Freundlichkeit, mir diese Quelle zu erschließen, Herr Pastor Meyer in Semmenstedt, die nachfolgende Bibelstelle aus dem hebräischen Urtext getreu zu übersetzen und die Richtigkeit des wiedergegebenen (Lutherschen) Textes zu bestätigen.

1) Diese und viele andere Belege danke ich der gütigen Unterstützung durch Herrn Geheimrat Geitel in Wolfenbüttel.

1) Herr Kunstmaler Stegmann (Dresden und Wolfenbüttel) hat mir in eine große Anzahl von Photographien Sonne oder Mond eingezeichnet und mir freundlichst erlaubt, diese beiden, in bekannter künstlerischer Freiheit astronomisch nicht ganz unanfechtbaren, aber besonders vielseitigen Beispiele wiederzugeben.

dertfache Belege lassen sich leicht zusammenbringen, von niederster (gewisse Ansichtskarten) bis zu höchster Kunst (z. B. Dürer, Raffael, Rethel, Böhle, Richter, Schwind).

Bei vielen Bildern hat man auch ein unmittelbares Maß. Befinden sich Menschen im Vordergrund, so malt der Künstler den Mond so groß oder etwas größer wie ihren Kopf. Ein menschlicher Kopf mißt etwa 15×25 cm.

14.

Noch mehr Beweise anhäufen zu wollen, hieße die Geduld des Lesers ermüden[1]). Der Tellermond ist bewiesen.

Gewiß, er lebt nur in der Seele. Und das ist vielleicht der innere Grund, weshalb ihn die physikalische Wissenschaft bisher verschmäht. Aber die Physik hat eben Stellen, wo sie an dem Seelischen nicht vorübergehen kann. Grenzgebiete, wo beide stetig zusammenhängen. Wenn alte, immer wieder belebte Träume sich erfüllen sollten[2]), wäre ja überdies alles Leben, also auch alle Seele Physik — Zukunftsphysik!

Auch die heutige Physik wird dasjenige Gastrecht, welches sie der Harmonie der Töne, der Mischung und dem Gegensatze der Farben einräumt, dem Tellermond gewähren müssen. Und mit ihm demjenigen großen Gesamtbild, von dem er den ersten, aufdringlich greifbaren Einzelzug darstellt, dem Sehraum.

1) Über himmlische Bewegungen vgl. einen späteren Aufsatz.

2) Vgl. A. Einstein, Ansprache zu M. Plancks sechzigstem Geburtstag, Karlsruhe 1918, S. 30.

Wolfenbüttel (Technische Hochschule Braunschweig), im September 1918.

(Eingegangen 6. Oktober 1918.)

Tagesereignisse.

Ein Institut für Kolloidforschung wurde zu Frankfurt a. M. aus den Mitteln der „Neubürger-Stiftung" errichtet und kürzlich in Betrieb genommen. Es befindet sich im Theodor Stern-Haus der Universität. Zum Leiter wurde Professor Dr. Bechhold ernannt.

Schon Paul Ehrlich erkannte die Bedeutung der Kolloidforschung. Seiner weitblickenden Initiative ist die Begründung des Instituts zu verdanken. Es soll eine Verbindung schaffen zwischen der reinen Wissenschaft und der Praxis. Die Kolloidforschung ist ein Zweig der physikalischen Chemie und bildet die Brücke zwischen der Welt der Organismen und der anorganischen Materie.

Die angewandte Kolloidforschung spaltet sich in zwei Richtungen: Die medizinisch-biologische ist dazu berufen, unser Wissen vom Organismus zu fördern und diese Erkenntnis nutzbar zu machen. Die andere will den „Kolloidindustrien" zur Seite stehen, die ihr Material meist aus der organisierten Materie beziehen (Gummi, Faserstoffe usw. usw.).

Das neue Institut ist das erste seiner Art und füllt eine wesentliche Lücke in den wissenschaftlichen Instituten Deutschlands aus.

Personalien.

Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Göttingen Dr. Paul Scherrer für Physik (mit einer Probevorlesung über „Zerstreuung von Licht- und Röntgenstrahlen durch Materie").

Ernannt: Der Assistent am Laboratorium für technische Physik an der Technischen Hochschule München Dr. Ing. Friedrich Noell zum Syndikus dieser Hochschule, der Privatdozent für organische und anorganische Chemie an der Universität Wien Dr. Franz Faltis zum a. o. Professor für Chemie an der Universität Graz, der Privatdozent an der Landwirtschaftlichen Akademie Bonn-Poppelsdorf Regierungslandmesser Dr. Paul Samel zum ord. Professor der Geodäsie und angewandten Mathematik ebendaselbst (als Nachfolger des im Kriege gefallenen Professor Georg Hillmer), der Privatdozent an der Universität Gießen Dr. Albert Peppler zum a. o. Professor der Meteorologie ebendaselbst, das Mitglied der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt Professor Dr. Eduard Grüneisen zum Geh. Reg.-Rat und Direktor der 2. Abteilung, die ständigen Mitarbeiter Dr. Erich Giebe und Dr. H. Schering zu Professoren und Mitgliedern, die Assistenten Dr. Wilh. Steinhaus und Dipl.-Ing. Vieweg zu ständigen Mitarbeitern der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin.

Berufen: Der ord. Professor der pharmazeutischen Chemie an der Universität Breslau Geh. Regierungsrat Dr. Johannes Gadamer in gleicher Eigenschaft an die Universität Marburg.

Verliehen: Dem a. o. Professor der allgemeinen und physikalischen Chemie an der Universität Graz Dr. Robert Kremann Titel und Charakter als ord. Professor.

Vom Lehramt zurück: Der a. o. Professor für Physikalische Chemie und Elektrochemie an der Technischen Hochschule Braunschweig Dr. Herbert Freundlich.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der pharmazeutischen Chemie an der Universität Marburg. Geh. Regierungsrat Professor Dr. Ernst Schmidt, der ord. Honorarprofessor der Chemie an der Universität Heidelberg Dr. Paul Jannasch.

Gestorben: Der frühere Direktor der Technischen Staatslehranstalten in Chemnitz Geh. Hofrat Professor Rudolf Berndt.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

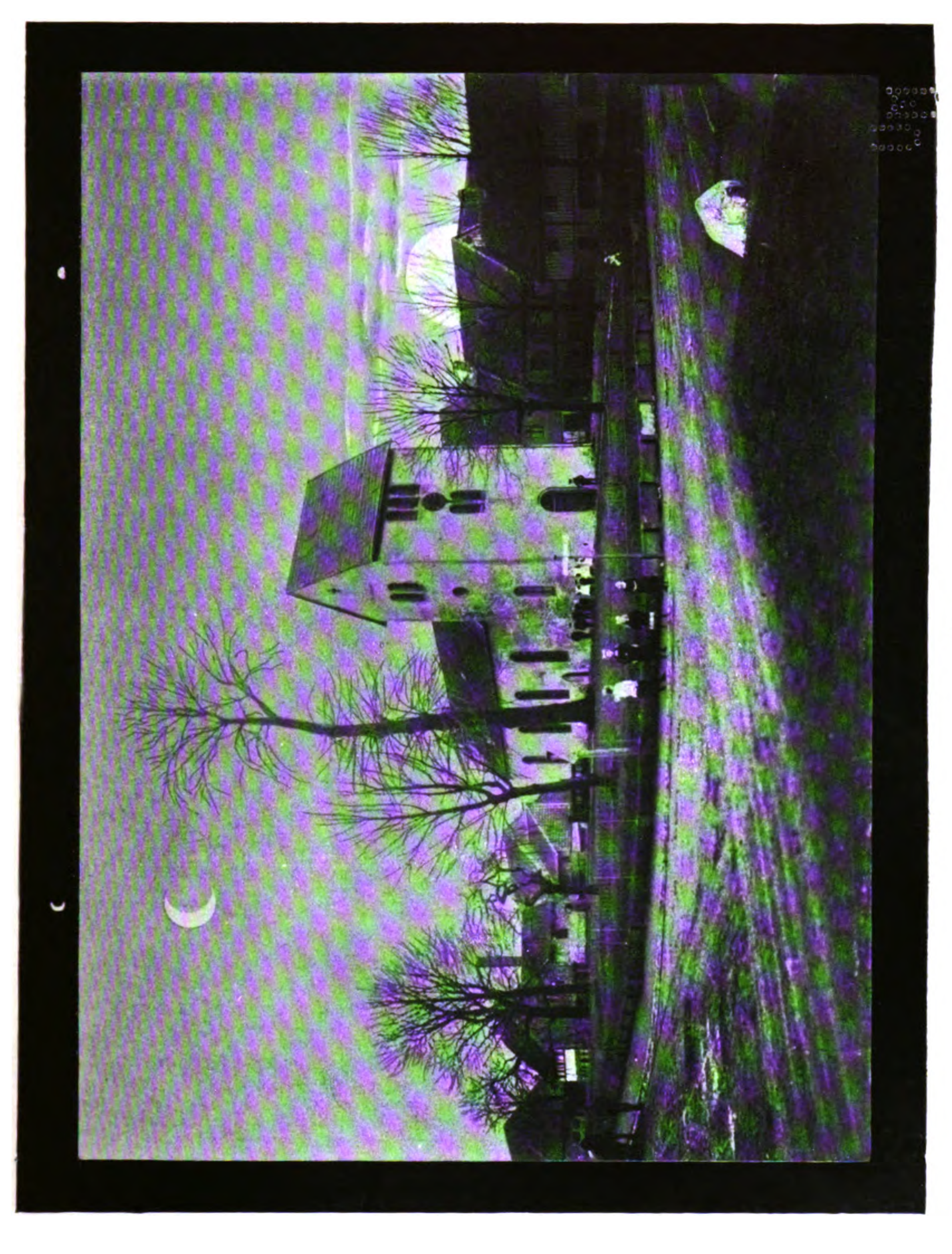


Fig. 4.

H. Witte, Über den Sehraum. III.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

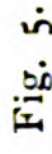
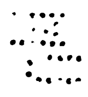
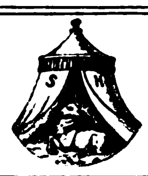


Fig. 5.



Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und H. Th. Simon



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 40 Mark, im Ausland 45 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 60 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstraße 2.

No. 6. | 15. März 1919. No. 538. | 20. Jahrgang.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen; B. = Besprechungen.)



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 6. 15. März 1919. 20. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 8 am 27. März 1919.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Erklärung der Röntgenspektren und die Konstitution der Atome.

Von L. Vegard.

II. Teil.

Wiedervereinigung von Sekundärkreisen aus.

§ 4. In den ersten Arbeiten (I—III), wo ich mich auf die Hypothese der Rekombination von Sekundärkreisen aus gestützt habe, ist weiter angenommen, daß die Wiedervereinigung gegen einen zerstörten Ring stattfindet, als ob die äußeren Elektronenringe nicht vorhanden wären. Diese Annahme ist ganz zulässig, so lange nicht Elektronenringe zwischen dem Sekundärkreis und dem zerbrochenen Ringe sich befinden. Das trifft aber nicht allgemein zu. So muß man für die Bildung der K_β-Linie annehmen, daß das rekombinierende Elektron auf dem Wege den L-Ring passiert.

Aus dem Ausdruck für die Radien (Gl. 2) kann man schließen, daß ein Sekundärkreis mit der Quantenzahl τ außerhalb derjenigen Primärkreise liegt, für welche

$$n < \tau$$

und innerhalb derjenigen, für welche

$$n > \tau$$

ist.

Der Sekundärkreis mit der Quantenzahl τ liegt in der Nähe derjenigen Primärsysteme, für welche $n = \tau$ ist. Wir können allgemein annehmen, daß der Sekundärkreis unter den Kreisen gleicher Quantenzahl den kleinsten Radius besitzt.

Sind zwischen dem Sekundärkreis und dem zerbrochenen Ring andere Ringe vorhanden, so wäre es sehr schwer, auf Grundlage der erwähnten früheren Annahmen, bestimmte Vorstellungen über den Emissionsprozeß zu bilden. Den sekundären Stabilitätskreisen wäre kaum eine Realität beizulegen.

Wir können aber aus dieser Schwierigkeit gelangen, wenn wir gerade wie bei der Wiedervereinigung von Primärkreisen folgendes annehmen.

1. Durch den Erregungsprozeß, der unter Entfernung eines Elektrons von einem Ringe stattfindet, werden die Impulsmomente der äußeren Ringe nicht geändert.

2. Die Energieänderungen der Elektronenringe, welche das Elektron auf dem „Emissionswege" passiert, werden in das emittierte Energiequantum eintreten.

Unter diesen Voraussetzungen werden die Frequenzen im allgemeinen durch die folgende Formel gegeben:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\nu}{R}\right)_i^k &= V(n_i, p_i, q_i) - V(n_i, p_i, q_i - 1) \\ &+ \sum_{l=i+1}^{l=k-1} [V(n_l, p_l, q_l) - V(n_l, p_l - 1, q_l)] \\ &- V(\tau, p_k - 1, 1).\end{aligned} \quad (14)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (10), so sehen wir, daß erstere aus der zweiten auf Grund der Substitution:

$$n_k = \tau, \quad q_k = 1$$

folgt.

Der Übergang von der Wiedervereinigung von Primärkreisen aus zu der Annahme einer Wiedervereinigung von Sekundärkreisen aus hat nur eine Änderung der Anzahl Elektronen im äußeren Elektronenkreise von q_k zu 1 zur Folge.

Wie wir aber gesehen haben, übt eine solche Änderung nur einen geringen Einfluß auf die Frequenz aus, und wir können zugleich schließen, daß die Annahme einer Wiedervereinigung von Sekundärkreisen aus auf dieselbe Konstitution der Ringsysteme führen werde, wie sie unter Benutzung der Gleichungen (10) und (11) bestimmt wurde.

Nimmt man an, daß jede Quantenzahl einem einzigen Ringe entspricht, so hat die in Tabelle II angegebene Konstitution der *K*-, *L*- und *M*-Ringe noch Geltung.

Man sieht unmittelbar, daß die Annahme der Wiedervereinigung von Sekundärkreisen aus in der letzten Fassung für die Hauptlinie der drei Strahlengattungen (*K*, *L*, *M*) zu denselben Frequenzen führt, als wir sie mit Hilfe der ursprünglichen Form der Hypothese hergeleitet haben. Dagegen gibt die neue Form der Hypothese ganz andere und viel bessere Werte für die höheren Glieder der Serie.

Wie die Linien nach dieser Auffassung entstehen, zeigt Fig. 3. Die Primärkreise sind

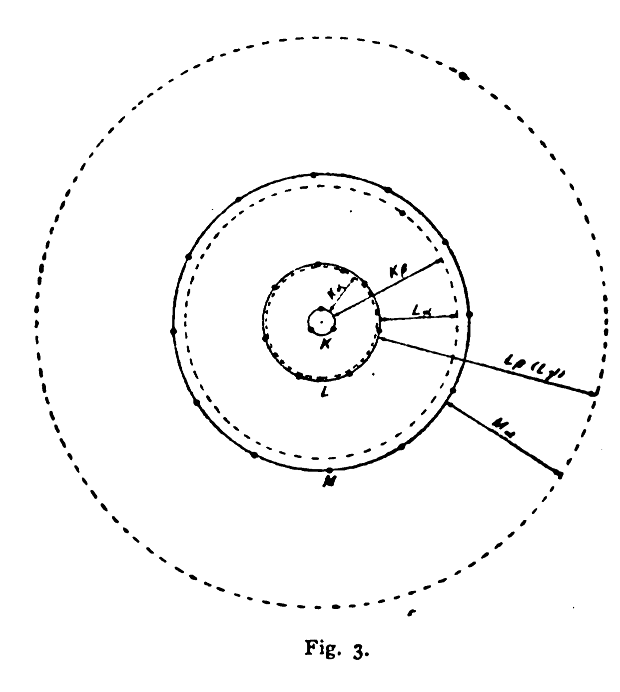


Fig. 3.

voll ausgezogen, die Sekundärkreise sind punktiert. Die Kreise sind nach dem in der folgenden Tabelle IV für das Element *Th* berechneten Werte der Radien aufgezeichnet.

Tabelle IV.

Radius der primären und sekundären Elektronenkreise des Thoriums.

Primärkreise				Sekundärkreise		
Bezeichnung	n	q	a_p cm	Erzeugte Linien	τ	a_s cm
K	1	3	$0{,}5912 \cdot 10^{-10}$	$K\alpha$	2	$2{,}4031 \cdot 10^{-10}$
L	2	7	2,4969 „	$K\beta$, $L\alpha$	3	5,8742 „
M	3	12	6,3430 „	$M\alpha$, $L\beta$, $K\gamma$	4	12,259 „

Eine Zusammenfassung von beobachteten und berechneten Frequenzen der Linien K_α, K_β, L_α, L_β, M_α [1]) ist in Tabelle V gegeben.

Tabelle V.

$K\alpha$			$K\beta$		
Nr.	$\left(\frac{\nu}{R}\right)_{beob.}$	$\left(\frac{\nu}{R}\right)_{ber.}$	Nr.	$\left(\frac{\nu}{R}\right)_{beob.}$	$\left(\frac{\nu}{R}\right)_{ber.}$
15	147,7	146,4	15	156,9	149,7
20	271,6	272,4	20	295,8	286,6
25	435,4	437,3	25	479,1	469,2
30	635,9	641,5	30	704,2	698,4
35	880,4	885,6	35	980,9	975,3
40	1156	1171,0	40	1293	1301,1
45	1482	1499	45	1666	1677,1
50	1871	1877	50	2109	2105
55	2290	2297	55	2559	2588
60	2761	2777	60	3121	3124
$L\alpha$			$L\beta$		
30	73,8	67,9	50	287,3	289,8
35	108,6	102,8	60	448,0	457,8
40	149,8	144,8	70	644	665,0
45	198,3	193,9	80	874,5	914,1
50	253,5	250,5	90	1143	1205
55	315,2	314,0			
60	384,6	384,9	$M\alpha$		
65	461,8	463,4			
70	545,6	549,5	79	156,1	156,4
80	734,9	745,5	82	171,8	174,2
90	952,2	972,5	90	220,2	225,3
			92	233,4	239,2

Aus der Tabelle V ist ersichtlich, daß auch die Annahme einer Wiedervereinigung von Sekundärkreisen aus eine sehr gute Übereinstimmung gibt.

Ein Vergleich mit der Tabelle III zeigt, daß es kaum möglich ist, den Grad der

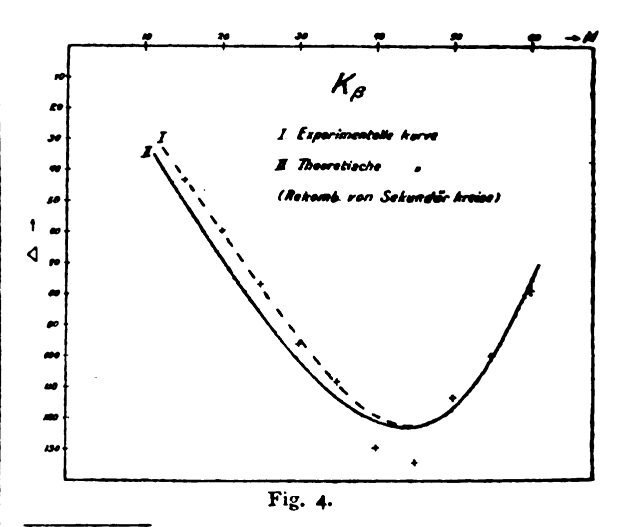


Fig. 4.

1) Die Berechnung der $K\gamma$-Frequenzen ist noch nicht ausgeführt. Die Linie entsteht doch unzweifelhaft durch Rekombination von dem dritten Sekundärkreis ($\tau = 4$) nach dem zerstörten *K*-Kreis.

zahlenmäßigen Übereinstimmung zur Entscheidung zwischen den beiden Hypothesen heranzuziehen.

Wir haben aber gesehen, daß die Erklärung von K_β unter der Annahme einer Wiedervereinigung zwischen Primärkreisen mit großen Schwierigkeiten verbunden war. Aus Fig. 4, welche die Δ-Kurve für K_β unter der Voraussetzung von Sekundärkreisen darstellt, sehen wir indessen sofort, daß in diesem Falle die theoretische Kurve sich dem Verlauf der experimentellen sehr gut anschließt. Wir werden auch gleich sehen, daß es möglich ist, ein zweites Kriterium aufzustellen, welches eine Entscheidung der Frage gestattet.

Die beiden Hypothesen im Lichte der Kosselschen Relationen.

§ 5. Wir haben schon erwähnt, daß die unter der Annahme einer Wiedervereinigung zwischen Primärkreisen aufgestellte Formel (10) die Kosselschen Relationen identisch erfüllt. In der Tat finden wir aber, daß die Kosselschen Relationen durch die beobachteten Frequenzen nur mit einer gewissen Annäherung erfüllt sind. Die Abweichung werden wir mit d bezeichnen, wo z. B. für die Linien K_α, K_β, L_α:

$$d = \left(\frac{\nu}{R}\right)_{K_\alpha} + \left(\frac{\nu}{R}\right)_{L_\alpha} - \left(\frac{\nu}{R}\right)_{K_\beta} . \qquad (15)$$

Bilden wir aus der Gleichung (14) den Wert für die Abweichung d, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} d &= \left(\frac{\nu}{R}\right)_i^j + \left(\frac{\nu}{R}\right)_j^k - \left(\frac{\nu}{R}\right)_i^k \\ &= V(n_j, p_j - 1, q_j) - V(n_j, p_j, q_j - 1) \\ &\quad V(n_j, p_j - 1, 1). \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Bei Heranziehung von Sekundärkreisen wird also die Abweichung d nicht verschwinden.

Für die Linien K_α, K_β, L_α, die nur von den sicher bestimmten ersten zwei Kreisen abhängen, erhält man aus Formel (15) mit Hilfe der in Tabelle V angegebenen Frequenzen die in Tabelle VI gegebenen Werte für die Abweichung d:

Tabelle VI.

Nr.	$d_{\text{beob.}}$	$d_{\text{ber.}}$
30	+ 5,5	+11,0
40	+12,8	+14,8
50	+23,6	+22,5
60	+44,6	+37,9

Aus der Tabelle VI ergibt sich das außerordentlich wichtige Resultat, daß die beobachteten und berechneten Werte für die Abweichung d sowohl in bezug auf Zeichen als absolute Größe wohl innerhalb der Fehlergrenze übereinstimmen.

Man könnte sich auch in bezug auf den Emissionsvorgang eine dritte Möglichkeit denken, die gewissermaßen als eine Zwischenstufe zwischen den beiden anderen zu betrachten ist. Es wäre möglich, daß das entfernte Elektron nicht durch ein Elektron des äußeren Ringes ersetzt wird, daß aber das rekombinierende Elektron in einen der äußeren Primärkreise eintritt. Man sieht sofort ein, daß eine solche Annahme auf eine Frequenzformel führt, die aus (10) oder (11) hervorgeht, wenn wir q_k mit $q_k + 1$ vertauschen. Wie wir gesehen haben, wird dadurch nur eine kleine Änderung der Frequenz verursacht; die modifizierte Hypothese führt zu derselben Konstitution der Elektronsysteme der Atome und gibt gerade so gute zahlenmäßige Übereinstimmung, wie die früheren beiden Hypothesen.

In bezug auf die Kosselschen Relationen hat die letzte Form der Hypothese gegenüber der Annahme von der Wiedervereinigung zwischen Primärkreisen den Vorteil, daß die Abweichung d nicht identisch verschwindet. Die Größe d wird aber allzu gering, um die Beobachtungen zu befriedigen.

Es muß demnach angenommen werden, daß die Wiedervereinigung von selbständigen Primärkreisen stattfindet.

Die Frequenz der Absorptionskanten.

§ 6. Die Absorption eines gewissen Bandes entsteht, wenn die Energiequanten der einfallenden Strahlen eine gewisse Grenze E überschreiten; und die Frequenz der Absorptionskante wird dann:

$$\nu_A = \frac{E}{h}.$$

Um die Größe E zu berechnen, müssen wir gewisse Annahmen über den Absorptionsprozeß machen.

Die Energie des absorbierten Quantums wird gebraucht, um ein Elektron aus dem betreffenden Ringe fortzuschaffen. Die Absorption ist gleichzeitig eine Erregung für diejenigen homogenen Strahlen, welche durch Rekombination zu dem zerstörten Ring entstehen.

Es fragt sich jetzt, wieweit es für die Absorption notwendig ist, das Elektron außerhalb des ganzen Ringsystems des Atoms zu treiben, oder ob man es nur in einen äußeren sekundären Stabilitätskreis mit der für diesen Kreis charakteristischen Energie bringen darf.

Nach der letzteren Annahme muß man ebensoviele Absorptionskanten wie Emissions-

linien erwarten. Das ist aber nicht mit der Erfahrung in Übereinstimmung, so daß wir dazu geführt werden, die erste Möglichkeit anzunehmen.

Wenn das Elektron hinausgetrieben wird, werden die Winkelmomente der äußeren Ringe unverändert gehalten und dadurch ändert sich die Energie dieser Ringe. Diese Energieänderung könnte entweder ausstrahlen oder für die Bewegung des Elektrons nutzbar sein. Letztere Anschauung würde bedeuten, daß das Austreiben des Elektrons in dieser Beziehung ein reversibler Vorgang ist. Auf dem Wege des Elektrons aus dem Elektronensystem werden sich die Winkelmomente automatisch unverändert halten, und dieser Drang zur Unveränderlichkeit der Momente, welche eine Grundeigenschaft der Atome bildet, ist mit einer konservativen Kraft identisch, welche auf das Elektron wirkend nach außen gerichtet ist.

Wenn indessen während des Austreibens des Elektrons keine Energie als Strahlung verloren geht, muß die Absorptionsenergie E gleich derjenigen Energie sein, welche während der Wiedervereinigung zu dem zerstörten Kreis von einem außerhalb der Wirkungssphäre des Atoms liegenden Sekundärkreis ausgestrahlt wird.

Nennen wir die Frequenz, welche $\tau = \infty$ entspricht ν_∞, so bekommt man:

$$h\nu_A = E = h\nu_\infty$$
$$\nu^A = \nu_\infty .$$

Setzen wir in Gleichung (14) $\tau = \infty$, so bekommt man:

$$\frac{\nu_A}{R} = V(n_i, p_i, q_i) - V(n_i, p_i, q_i - 1) + \sum_{l=i+1}^{l=m} [V(n_l, p_l, q_l) - V(n_l, p_l - 1, q_l)], \quad (17)$$

m bedeutet die totale Anzahl von Elektronenringen des betreffenden Elements.

Die Berechnung von ν_A erfordert die Kenntnis der sämtlichen Elektronenringe des Elements. Mit Sicherheit kennen wir nur die K- und L-Ringe, denn die Berechnung der M-Ringe stützt sich auf eine verhältnismäßig geringe Anzahl von Beobachtungen.

Um die Richtigkeit der Formel (17) zu prüfen, darf man noch am ehesten die K-Absorptionskonstante für kleine Atomzahlen heranziehen. Denn in diesem Falle kennen wir diejenigen Ringe, welche den größten Einfluß auf die Frequenz ausüben.

Die kleinste Atomzahl, für welche Bestimmungen von den Absorptionskanten vorliegen, ist 26 (Fe). Wagner[1]) gibt für Fe und Ni die folgenden Wellenlängen der K-Absorption:

Fe (26) $\lambda_A = 1{,}769 \; 10^{-8}$ cm
Ni (28) $\lambda_A = 1{,}502$ „ .

Aus dem periodischen Charakter der Elemente können wir, wie ich in den Abhandlungen II und III gezeigt habe, auf die Konstitution der äußeren Systeme schließen. Aus solchen Betrachtungen bin ich für die beiden Elemente auf die in Tabelle VII gegebene Konstitution geführt worden.

Tabelle VII.

Ring	1	2	3	4
Quantenzahl	1	2	3	4
Anzahl Elektronen (Fe) .	3	7	8	8
„ „ (Ni) .	3	7	8	10
p	0	3	10	18

Die auf Grund dieser Konstitution mit Hilfe von Gl. (17) berechneten Werte von ν_A zusammen mit den beobachteten Frequenzen sind in Tabelle VIII gegeben.

Tabelle VIII.

N	$\left(\frac{\nu_A}{R}\right)_{\text{ber.}}$	$\left(\frac{\nu_A}{R}\right)_{\text{beob.}}$	P
Fe 26	513,4	518,0	0,88
Ni 28	605,1	606,7	0,26

Die Zahlen sind für die Veränderlichkeit der Masse mit der Geschwindigkeit korrigiert. P ist der prozentische Fehler.

Wir sehen, daß die Übereinstimmung eine außerordentlich gute ist, und die Abweichungen wohl innerhalb der Grenze des Beobachtungsfehlers liegen.

In ähnlicher Weise entstehen die beiden L-Absorptionsbanden durch Entfernung eines Elektrons aus dem kreisförmigen und dem elliptischen Zustand des L-Systems. Hierdurch erklärt sich einfach die Beziehung:

$$\nu_{L_{A_2}} - \nu_{L_{A_1}} = \nu_{L_{\alpha_1}} - \nu_{L_\alpha} = \nu_{L_{\beta_1}} - \nu_{L_\beta} .$$

Auf Grundlage unserer Hypothese der wachsenden Quantenzahlen und mit den ergänzenden Annahmen betreffs des Erregungs- und Emissionsmechanismus ist es uns gelungen, die Absorptions- und Emissionserscheinungen im Lichte einer allgemeinen Theorie zu sehen. Diese Theorie gibt selbst bis in die Einzelheiten eine sehr genaue Übereinstimmung mit der Erfahrung und es ist kaum mehr möglich, daran zu zweifeln, daß die zugrunde liegende Voraussetzung auch der Wirklichkeit entspricht.

1) E. Wagner, diese Zeitschr. 18, 436, 1917.

Tabelle IX.

Quantenzahl d. Oberflächenringe: Entweder	oder	Anzahl Elektronen im Oberflächenring: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	*Li*	*Be*	*Bo*	*C*	*N*	*O*	*Fl*	*Ne*		
2	3	*Na*	*Mg*	*Al*	*Si*	*P*	*S*	*Cl*	*Ar*		
3	4	*K*	*Ca*	*Sc*	*Ti*	*Va*	*Cr*	*Mn*	*Fe*	*Co*	*Ni*
		Cu	*Zn*	*Ga*	*Ge*	*As*	*Se*	*Br*	*Kr*		
4	5	*Rb*	*Sr*	Y	*Zr*	*Nb*	*Mo*	—	*Ru*	*Ru*	*P*
		Ag	*Cd*	*In*	*Sn*	*Sb*	*Te*	*J*	*Xe*		
5?	6?	*Cs*	*Ba*	*La*	*Ce* (seltene Erden)	*Ta*	*W*	—	*Os*	*Ir*	*Pt*
		Au	*Hg*	*Tl*	*Pb*	*Bi*	*Po*	—	*Em*		
?	?	—	*Ra*	—	*Th*	—	*U*	—			

Allgemeine Bemerkungen über die Konstitution der Atome.

§ 7. Die in Tabelle II angegebene Konstitution der drei inneren Ringe und besonders die Konstitution des M-Ringes würde das in Abhandlung II und III angegebene allgemeine Konstitutionsschema ein wenig ändern.

Allerdings müssen wir auf Grund der chemischen Verwandtschaftsverhältnisse die früher angegebenen Elektronenzahlen der Oberflächenringe beibehalten. Sollen wir von diesem Oberflächensysteme aus zu einem M-Ringe von 12 Elektronen gelangen, so müssen wir annehmen, daß der M-Ring zuerst als ein Ring mit 8 Elektronen gebildet ist, der aber irgendwo Elektronen aufnimmt, bis er schließlich 12 Elektronen erhält. Obwohl der Atombau ein derartiger ist, daß ein Ring, einmal gebildet, eine ausgeprägte Tendenz hat sich mit steigender Atomzahl unverändert zu halten, so gibt es möglicherweise einige Ausnahmen dieser Regel. Es können ziemlich eingreifende Änderungen stattfinden, die darin bestehen, daß die einmal gebildeten Ringe mehrere Elektronen aufnehmen.

Die Möglichkeit solcher Umlagerungen mit Einsenken von Elektronen, habe ich in meinen ersten Arbeiten (II und III) erwähnt. So habe ich angenommen, daß der K-Ring mit drei Elektronen bei der Versenkung eines Elektrons bei dem Element Ne gebildet wird.

Und weiter habe ich die seltenen Erden durch einen Versenkungsprozeß erklärt.

Was den L-Ring betrifft, so kann man ihn mit den jetzt bekannten L-Linien nur bis $N = 30$ (Zn) verfolgen.

Wir haben aber gesehen, daß auch die K-Linie von der Anzahl der Elektronen des L-Ringes abhängig ist, und die K_β-Kurve $\nu = f(N)$ zeigt keinen Sprung, der auf eine Änderung des L-Ringes deuten könnte. Da man die K_β-Linie bis $N = 12$ verfolgen kann, dürfte der L-Ring gerade von Anfang an sich unverändert halten.

Den M-Ring kann man mit Hilfe der M-Strahlung nur bis $N = 79$ verfolgen. Aus der L-Kurve ist es aber wahrscheinlich, daß er sich bis $N = 41$ (Nb) unverändert hält. Es darf auch bemerkt werden, daß wenn man 2 drei-quantige Ringe annehmen würde, der einmal gebildete drei-quantige Ring mit 8 Elektronen sich mit wachsenden Atomzahlen unverändert hält. Vielleicht wird eine Ausdehnung des Beobachtungsmaterials sichere Schlüsse über die Konstitution des M-Ringes gestatten.

Unabhängig von der Möglichkeit eines Versenkungsprozesses, kann man die Konstitution der Oberflächensysteme auf Grund der bekannten ersten Periode (He—Ne) mit Hilfe der Verwandtschaftsverhältnisse angeben. Berücksichtigt man die Variation der Elektropositivität, des elektrischen Leitvermögens und des Atomvolumens, so werden wir auf die in Tabelle IX gegebene Konstitution der Oberflächensysteme geführt.

Durch die Werte der Quantenzahl (n) und der Elektronenzahl (q) des Oberflächensystems lassen sich die Eigenschaften und Verwandtschaftsbeziehungen für die meisten Elemente charakterisieren. Jedoch läßt das Konstitutionsschema gewisse Beziehungen ungeklärt. So kommt die Sonderstellung der Edelgase und die Verschiedenheit des Elements Mn von den Halogenen in der Tabelle IX nicht zum Ausdruck.

(Eingegangen 15. November 1918.)



Über den Sehraum.

Von Hans Witte.

Vierte Mitteilung: Scheinbare Größe und scheinbare Vergrößerung des Mondes.

1.

Im vorigen Aufsatz[1]) habe ich dargelegt, daß die meisten Menschen den Mond so groß wie einen Teller sehen (durchschnittlich 20 cm).

Ich schließe einige Gedanken an, die wieder aus den 1916 gemeinsam mit Herrn E. Laqueur[2]) angestellten Überlegungen stammen.

2.

Wir gebrauchen den Tellermond zur vollständigen Lösung der alten Frage: Warum sieht der Mond usw. am Horizont größer aus als im Zenit? Wir benötigen die scheinbare Größe, um die scheinbare Vergrößerung erschöpfend beschreiben und erklären zu können. Denn darüber kann kaum ein Zweifel bestehen: Die beiden Erlebnisse hängen zusammen.

„Diese absoluten Größeneindrücke sind es nun doch wohl, die auch den Gegenstand der vielumstrittenen Täuschung bilden[3])".

Die Täuschung: Heute abend sieht der Mond dreimal so groß aus wie gestern um Mitternacht, heißt: Gestern um Mitternacht, hoch am Himmel, sah er wie ein Camembertkäse aus (10 cm), heute abend geht er auf wie ein Eierkuchen (30 cm).

3.

Zum mindesten gilt das für diejenigen 99 Proz. aller Menschen, die den Tellermond sehen, oder richtiger, die wissen, daß sie ihn sehen. Man kann aber, gerade im Hinblick auf die scheinbare Vergrößerung, sehr wohl die Frage aufwerfen, ob diejenigen, die den Tellermond nicht zu sehen glauben, ihn nicht eigentlich doch sehen.

4.

Der Prüfstein ist, ob diese Leute die scheinbare Vergrößerung des Mondes sehen.

Wer den Mond am Horizonte größer, im Zenit kleiner sieht, muß doch irgendein Maß für die scheinbare Mondgröße in sich tragen. Es fragt sich zunächst: Ist dies Maß ein Größenmaß, ist es ein Winkelmaß?

Daß es ein Winkelmaß sei, also ein reines Winkelmaß für den Sehwinkel des Mondes, ist schon aus allgemeinen Gründen unwahrscheinlich. Denn ein reines Winkelmaß für einen Sehwinkel, dessen Schenkel ja nur gedachte Linien sind, gibt es, soweit bisher festgestellt, in unserem Empfinden nicht.

Sollte jemand trotzdem behaupten, er sähe den reinen Sehwinkel des Mondes, so muß man sich an diejenige Grundtatsache erinnern, die alle Erklärungen der scheinbaren Mondvergrößerung trägt: daß das Netzhautbild des Mondes, der Mond-Sehwinkel, unverändert bleibt. Der Sehwinkel ist praktisch am Horizont ebenso groß wie im Zenit[1]). Wer also den reinen Sehwinkel sieht, darf den Mond grundsätzlich nicht am Horizont größer, im Zenit kleiner sehen. Aber die Mondvergrößerung am Horizont sieht, soweit bis heute bekannt, jeder[2]), auch die Gegner des Tellermonds. Demnach ist ihr Größenmaß kein Winkel, sondern eine Flächen- oder Strecken-Größe.

Nun bliebe noch möglich, daß ihr Größenmaß nicht fest, sondern veränderlich sei[3]). Aber dann stünde nichts im Wege, daß sie gestern den Zenitmond so groß wie ein Karussell und heute so groß wie Afrika, und morgen den Horizontmond so groß wie einen Pfennig und übermorgen so groß wie einen Stecknadelknopf sähen. Wie können sie dann sehen und behaupten: der Horizontmond erscheint größer als der Mond im Zenit?

5.

Aus diesem Widerspruch scheint bestimmt zu folgen, daß die restlichen 1 Proz. der Menschheit ebenfalls ein festes Größenmaß für den Mond usw. in sich tragen. Vielleicht ist es sogar unser Tellermond, sie wissen es nur nicht. Solche Selbsttäuschungen sind, wie bekannt, nicht ausgeschlossen.

Allerdings muß man, wo die Seele hineinspielt, mit Folgerungen vorsichtig sein. Da eröffnen sich gelegentlich unerwartete Auswege. Vielleicht stellt sich bei ganz besonderen Ausnahmebegabungen, wenn sie in diesem Augenblick den Zenitmond 30 m groß sehen, von selber gleichzeitig ein Erinnerungsbild des Horizontmonds von 90 m ein? und wenn sie eine Sekunde später denselben Zenitmond 90 m groß sehen, ein Erinnerungsbild des Horizontmonds von 270 m Größe? Und so fort? — Sollte sich auf solche oder ähnliche Weise der Widerspruch lösen

1) H. Witte, diese Zeitschrift **20**, 114, 1919.

2) Vgl. diese Zeitschr. **19**. 151, 1918.

3) J. v. Kries, in den Zusätzen zu der von ihm herausgegebenen 3. Auflage von H. v. Helmholtz' Physiologischer Optik, 3. Bd., Hamburg u. Leipzig, Leopold Voß, 1910, S. 493.

1) Nämlich 31′ 8″.

2) L'astronome s'y trompe comme le paysan le plus ignorant, Euler, Briefe an eine deutsche Prinzessin usw. Bd. 3, 313; London 1775.

3) Indem sie den Mond innerhalb seines festen Sehwinkels in jedem Augenblick auf beliebige willkürliche Entfernungen verlegten, vgl. in der vorigen Mitteilung § 4 und Fig. 2.



lassen, so müßte man für solche Fälle eine andere Schlußfolgerung ziehen.

Es gibt farbenblinde, es gibt durchaus unmusikalische Menschen. So könnte es auch vereinzelte Ausnahmemenschen geben, die dergestalt wirklich kein festes Mondmaß besäßen. Solche Menschen wären dann — der nächste Aufsatz wird den Ausdruck rechtfertigen — teilweise oder ganz „sehraumblind“[1]).

1) Es ist eine naturgesetzliche Folge, daß solche Menschen von dem Tellermond reden wie ein Blinder von der Farbe. In dieser Lage scheint sich der Verfasser des soeben erschienenen, inhaltsreichen, ersten zusammenfassenden Buches über Himmelsgewölbe und Gestirnsvergrößerungen zu befinden (A. Müller, Die Referenzflächen des Himmels und der Gestirne, Braunschweig, Vieweg 1918) — wobei ich dahingestellt lassen muß, wie in diesem Falle der erwähnte Widerspruch mit dem Sehen der Vergrößerung zu beseitigen ist. Der Schreiber greift den Tellermond scharf an. Herrn v. Sternecks Teller-Maße (man vgl. für das weitere meine dritte Mitteilung) sind ihm das mißgedeutete Ergebnis einer „zufällig entstandenen Assoziation“, wenn man nicht gar an „eigenartige, von den normalen sehr abweichende psychische Verhältnisse“ glauben wolle. Herrn v. Kries als „Psychologen“ wirft er wegen des Tellermonds mangelnde psychologische Selbstbesinnung vor und meint, derselbe sei dem festen Größeneindruck bei Sonne und Mond „zwangsmäßig verfallen“. Der Verfasser des Buches konnte nicht wissen, daß er damit fast der ganzen Menschheit seit den ältesten Zeiten das Urteil spricht, sie sei nicht normal und litte an Zwangsvorstellungen.

Wolfenbüttel (Technische Hochschule Braunschweig), den 1. Oktober 1918.

(Eingegangen 6. Oktober 1918.)

Über das Protactinium und die Lebensdauer des Actiniums.

Von Otto Hahn und Lise Meitner.

In einer in dieser Zeitschrift[1]) erschienenen Mitteilung wurde über die Auffindung eines neuen radioaktiven Elementes berichtet, das sich einwandfrei als die lange gesuchte Muttersubstanz des Actiniums charakterisieren ließ. Das neue Element, ein höheres Homologes des Tantals, sendet α-Strahlen von 3,14 cm Reichweite aus und seine Halbwertszeit liegt zwischen 1200 und 180000 Jahren. Die Entstehung des Actiniums aus dem ursprünglich Actinium freien Element wurde bewiesen durch die Aufnahme der zeitlichen Anstiegskurve der α-Aktivität, sowie durch die Messung der mit wachsender Zeit linear zunehmenden Menge an Emanation und aktivem Niederschlag.

Für das neue Element wurde der Name Protactinium gewählt.

1) O. Hahn u. L. Meitner, diese Zeitschr. 19, 208 bis 218, 1918.

Eine chemische Reindarstellung des Protactiniums hatten wir noch nicht versucht, sondern es nur nach Reinigung von allen anderen radioaktiven Elementen an Erdsäuren konzentriert. Das stärkste Präparat wog 73 mg und zeigte eine 100 mal so große α-Aktivität wie die gleiche Menge Uran I. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß nur etwa 8 Proz. der Uranatome eines Uranminerals sich in Protactinium verwandeln, während die übrigen 92 Proz. in die Ionium-Radiumreihe übergehen, ergibt sich, daß das in den 73 mg enthaltene Protactinium mit der mehr als 1000 fachen Menge Uran eines beliebigen Uranminerals im Gleichgewicht steht. Nach den oben angegebenen Grenzen für die Lebensdauer muß aber das Protactinium mindestens 24000 mal stärker aktiv sein als die gleiche Gewichtsmenge Uran I; daher können die 73 mg unseres Präparates an Gewicht nur sehr wenig Protactinium enthalten und stellen chemisch wohl hauptsächlich ein Gemisch aus Niob- und Tantalsäure dar.

Nach dem Erscheinen unserer Arbeit erhielten wir Kenntnis von einer Veröffentlichung von Soddy und Cranston[1]), die sich ebenfalls mit der Muttersubstanz des Actiniums befaßt. Ausgehend von der Isotopie der hypothetischen Muttersubstanz mit UrX_2 arbeiteten die Verfasser zunächst eine Methode zur Herstellung von UrX_2 aus und versuchten dann mit Hilfe dieser Methode — Sublimation der Chloride — die Muttersubstanz des Actiniums aus Pechblende zu gewinnen. Von drei auf diese Weise erhaltenen Präparaten zeigte eines eine allmähliche Zunahme der Actiniumemanation, mußte also die Muttersubstanz des Actiniums enthalten. Das Präparat, das aus 470 g Pechblende stammte, wog 2,45 g und zeigte nach Verlauf von 2,5 Jahren eine Emanationsmenge, die der Gleichgewichtsmenge Actinium in 0,25 g Pechblende entsprach. Unter der Voraussetzung, daß die Verfasser die gesamte in 470 g Pechblende enthaltene Menge der Muttersubstanz des Actiniums abgeschieden haben, berechnen sie die mittlere Lebensdauer des Actiniums zu rund 5000 Jahren, was einer Halbwertszeit von 3460 Jahren entspricht.

Daß dieser von Soddy und Cranston selbst mit einem gewissen Vorbehalt gegebene Wert nicht einmal der Größenordnung nach richtig sein kann, dafür sprechen nun mehrere Gründe.

Frau Curie[2]) hatte im Jahre 1911 auf Grund von Abklingungsmessungen die Halbwertszeit des

1) F. Soddy u. J. A. Cranston, Proc. Roy. Soc. A. 94, 384—404. 1918.
2) Mme Curie, Le Radium 8, 353, 1911.

Actiniums auf etwa 30 Jahre geschätzt. Wir haben in unserer Arbeit über das Protactinium diesen Wert der Größenordnung nach bestätigt, und darauf hingewiesen, daß Giesel[1]) auch in seinen stärksten Actiniumpräparaten keine Spektrallinien aufgefunden hatte, was ebenfalls für eine kurze Lebensdauer spricht.

Der Zweck der vorliegenden Mitteilung ist eine Überprüfung der Halbwertszeit des Actiniums und die darauf gegründete Erklärung für den abweichenden Befund von Soddy und Cranston.

Die Feststellung der Lebensdauer wurde nach zwei verschiedenen Methoden ausgeführt, und zwar einerseits aus den Anstiegskurven von ursprünglich reinem Protactinium, andererseits durch Abklingungsmessungen.

1. Anstiegskurven.

Legt man, wie wir es taten, die Messung der α-Aktivität zugrunde, so gelten folgende Verhältnisse:

Protactinium selbst gibt α-Strahlen ab; von den nachfolgenden Produkten senden Radioactinium, Actinium X, Emanation, AcA und AcC α-Strahlen aus. Da die Lebensdauer aller dieser Produkte sehr klein gegen die des Actiniums ist, so kann man ihre Entstehung aus dem Protactinium nach etwa 3 Monaten als gleichzeitig mit dem Actinium erfolgend ansehen. Da ferner Protactinium jedenfalls für die Dauer der Messungen als konstant betrachtet werden kann, so wird die Anstiegskurve lediglich durch die Zerfallskonstante λ des Actiniums bestimmt. Bezeichnet also I_0 die α-Aktivität des Protactiniums, I_∞ die von Actinium plus den Folgeprodukten im Gleichgewicht herrührende, so gilt für die tatsächlich gemessene Aktivität I_t zur Zeit t die Gleichung:

$$I_t = I_0 + I_\infty (1 - e^{-\lambda t}).$$

Würden die α-Strahlen aller Produkte gleich stark ionisieren und vollständig ausgenutzt werden, so würde die Aktivität von Actinium plus seinen Folgeprodukten nach Erreichung des radioaktiven Gleichgewichts 5 mal stärker sein als die vom Protactinium allein herrührende Aktivität, d. h. I_∞ wäre $5 \times I_0$, die Gesamtaktivität also $6 \times I_0$.

In Wirklichkeit aber sind die Reichweiten verschieden und das verwendete α-Elektroskop gestattete außerdem keine vollständige Ausnutzung der Reichweiten. Der Plattenabstand des Kondensators betrug nämlich 4,3 cm. Da mit Ausnahme des Protactiniums alle α-Strahler der Actiniumreihe gleiche oder größere Reichweiten als 4,3 cm besitzen, so wird die Reichweite der α-Strahlen des Protactiniums von 3,5 cm voll ausgenützt und von den fünf anderen Produkten nur die Wegstrecke von 4,3 cm, alles auf Zimmertemperatur und normalen Luftdruck bezogen.

Der Zusammenhang zwischen der erzeugten Ionenzahl k und Reichweite R ist durch die Gleichung gegeben:

$$k = k_0 \cdot R^{2/3},$$

wobei k_0 nach Meyer und v. Schweidler den Wert $6{,}76 \cdot 10^4$ besitzt.

Die von Protactinium erzeugte Ionenzahl beträgt danach $k_0 \cdot 3{,}5^{2/3} = 1{,}56 \cdot 10^5$. Für die fünf Folgeprodukte ist die Gesamtzahl der erzeugten Ionen $5 \times k_0 \cdot 4{,}3^{2/3} = 8{,}95 \cdot 10^5$. Dieser Berechnung liegt die nicht ganz zutreffende Voraussetzung zugrunde, daß die α-Strahlen längs ihres Weges gleichmäßig ionisieren; doch dürfte der dadurch bedingte Fehler nur klein sein.

Es muß danach $I_0 : I_\infty = 1{,}56 : 8{,}95 = 1 : 5{,}74$ sein. Natürlich kann diese Berechnung von $I_0 : I_\infty$ nur für dünne Schichten der strahlenden Substanz gelten. Bei dickeren Schichten werden die weniger durchdringenden α-Strahlen des Protactiniums gegenüber den durchdringenderen der Folgeprodukte stärker in der Schicht absorbiert, also wird I_∞ im Verhältnis zu I_0 größer ausfallen.

Die obengenannte Gleichung hat nach dem eben Gesagten die Form

$$I_t = I_0 + 5{,}74\, I_0 (1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}).$$

Für Werte von t, die klein gegen die Halbwertszeit des Actiniums sind, geht die Gleichung in die Form über:

$$I_t = I_0 + 5{,}74\, I_0 \cdot \lambda t;$$

d. i. aber die Gleichung einer Geraden, also gilt

$$\frac{dI_t}{dt} = 5{,}74\, I_0 \cdot \lambda = \frac{I_{t_2} - I_{t_1}}{t_2 - t_1},$$

wobei I_{t_1}, bzw. I_{t_2} die zu den Zeiten t_1 und t_2 gemessenen Aktivitäten bedeuten.

Daher ist

$$\lambda = \frac{I_{t_2} - I_{t_1}}{t_2 - t_1} \cdot \frac{1}{5{,}74\, I_0}$$

und die Halbwertszeit

$$T = \frac{\log 2}{\log e} \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

In der Fig. 1 sind eine Anzahl Anstiegskurven wiedergegeben, die unter den der vorstehenden Gleichung zugrunde gelegten Bedingungen aufgenommen worden sind. Als Abszissen sind die Zeiten in Tagen, als Ordinaten die Aktivitäten in willkürlichem Maß aufgetragen.

Die Kurven zeigen, von anfänglichen Abwei-

1) F. Giesel, Ber. d. D. Chem. Ges. 37, 1696, 1904.

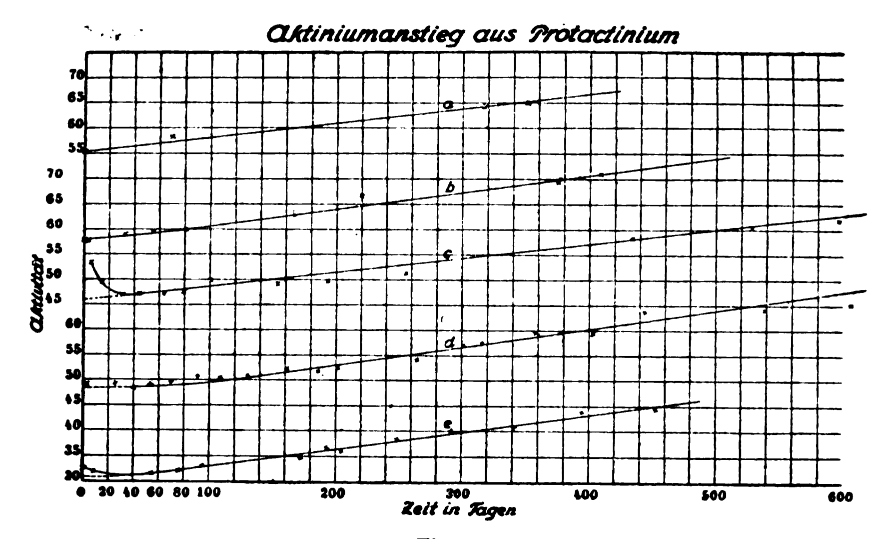


Fig. 1.

chungen abgesehen, einen geradlinigen Verlauf. Diese Abweichungen sind einerseits dadurch bedingt, daß in den ersten Wochen das nachgebildete Actinium noch nicht im Gleichgewicht mit Radioactinium und Actinium X ist; außerdem aber sind bei einzelnen Präparaten auch geringe Beimengungen anderer radioaktiver Substanzen vorhanden gewesen, die eine anfängliche Aktivitätsabnahme bedingen. Bei Kurve c rührt dieselbe von zugesetztem $Ur\,X$ her, bei Kurve e augenscheinlich von einer Spur mitgerissenem Polonium. Bei diesen Kurven mußte die von Protactinium allein herrührende Anfangsaktivität durch Extrapolation bestimmt werden.

Die Zerfallskonstante λ und Halbwertszeit T des Actiniums wurden nun aus den Kurven mittels der oben angegebenen Gleichung berechnet.

Die Rechnung soll hier für eine der Kurven, beispielsweise Kurve d, im einzelnen ausgeführt werden.

$$I_0 = 48{,}5, \text{ daher } I_\infty = 277,$$
$$I_{405} = 57, \; I_{140} = 49,$$

daher

$$\lambda\,(\text{Jahre})^{-1} = \frac{57-49}{\frac{405-140}{365}} \cdot \frac{1}{277} = 0{,}0396\,(\text{Jahre})^{-1}$$

und daher $T = 17{,}5$ Jahre.

In der nachstehenden Tabelle sind die aus den einzelnen Kurven erhaltenen λ- und T-Werte zusammengestellt.

Kurve	λ (Jahre)$^{-1}$	Halbwertszeit in Jahren
a	0,0341	20,2 Jahre
b	0,0353	19,6 „
c	0,0422	16,4 „
d	0,0396	17,5 „
e	0,0698	10,0 „

Die Übereinstimmung in den Halbwertszeiten ist scheinbar wenig befriedigend. Sie erklärt sich aber ohne weiteres aus dem schon erwähnten Einfluß der Schichtdicken, und zwar folgendermaßen:

Die Präparate a und b bestehen aus sehr dünnen, auf Aluminiumbleche aufgestrichenen Schichten von rund 2 mg Gewicht; c und d sind geringe Niederschläge auf Filtern, die schon etwas ungünstigere Schichten darstellen; Präparat e ist eine ziemlich dicke Schicht, in der die α-Strahlen des Protactiniums wegen ihrer kleineren Reichweite natürlich stärker absorbiert werden als die schnelleren α-Strahlen der folgenden Produkte. Dadurch wird, wie schon angegeben, eine schnellere relative Zunahme der α-Aktivität und somit eine kürzere Lebensdauer des Actiniums vorgetäuscht. Wie groß der Einfluß der Schichtdicke ist, zeigt die Zunahme eines in praktisch unendlich dicker Schicht (1,0 g) vorliegenden Präparates, dessen Anstiegskurve hier nicht wiedergegeben wurde.

Während beispielsweise die Aktivität des Präparates b, das 2,1 mg wiegt, im Verlauf von $^3/_4$ Jahren um 12 Proz. zugenommen hat, ist die Aktivität des 1 g-Präparates um ungefähr 40 Proz. ihres Wertes gestiegen.

Die größten für die Halbwertszeit des Actiniums erhaltenen Werte sind daher die zuverlässigsten.

Einen Unsicherheitsfaktor bei allen Messungen von nicht luftdicht abgeschlossenen Actiniumpräparaten bildet die Emanation, die je nach den Witterungsverhältnissen in verschiedenem Prozentsatz entweicht, worauf auch Soddy und Cranston[1]) hingewiesen haben. Je mehr Acti-

1) l. c.

niumemanation entweicht, umso langsamer erfolgt die Zunahme der α-Aktivität und umso größer wird die aus den Kurven berechnete Lebensdauer. Aus der Übereinstimmung der für dünne Schichten erhaltenen T-Werte mit den aus direkten Abklingungskurven gefundenen, die weiter unten gegeben werden sollen, läßt sich der Schluß ziehen, daß die Präparate bisher keine beträchtlichen Emanationsverluste erlitten haben. Bei stärkeren Actiniumpräparaten haben aber auch wir große Schwankungen der Aktivität, offenbar infolge wechselnder Abgabe an Emanation, beobachtet. Vielleicht bedingt dieser Umstand auch in unseren Kurven *a* und *b* das Herausfallen der letzten Punkte. Das würde sich dann dahin erklären lassen, daß die jeweils vorhandene Substanzmenge (in unserem Falle etwa 2 mg) eine gewisse Menge Emanation festzuhalten vermag, und in dem Maße als sich mehr Emanation entwickelt, auch ein größerer Prozentsatz zu entweichen beginnt.

2. Abklingungskurven.

In unserer ersten Mitteilung über das Protactinium haben wir eine über 6 Jahre aufgenommene Abklingungskurve des Actiniums wiedergegeben und uns damals begnügt, den Curieschen Wert der Größenordnung nach zu bestätigen. Wir haben inzwischen diese Messungen fortgeführt. Das Resultat zeigt Fig. 2.

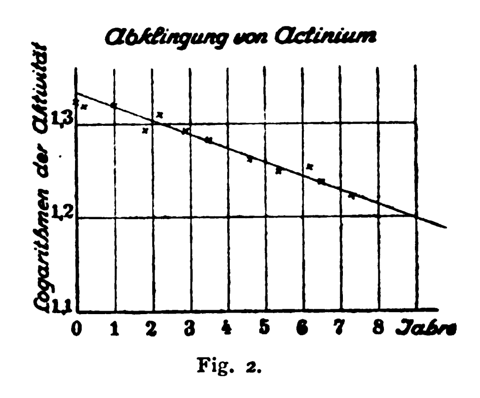


Fig. 2.

Ausgehend von der oben gefundenen Halbwertszeit von rund 20 Jahren haben wir durch die gemessenen Punkte eine Gerade gelegt, deren Neigung dieser Halbwertszeit entspricht. Man erkennt, daß sich die Punkte befriedigend dieser Geraden anschließen.

Auch die in der früheren Arbeit erwähnten sehr reinen Actiniumpräparate, die erst seit kürzerer Zeit in Untersuchung sind, zeigen bisher Halbwertszeiten zwischen 21 und 18 Jahren.

Nach zwei unabhängigen Methoden ergibt sich sonach die Halbwertszeit des Actiniums zu rund 20 Jahren. Dieser Wert dürfte innerhalb 10 Proz. richtig sein.

Soddy und Cranston haben, wie eingangs erwähnt, eine Halbwertszeit von ganz anderer Größenordnung berechnet. Daraus läßt sich folgern, daß die Voraussetzungen, unter denen sie ihre Berechnung angestellt hatten, nicht zutreffend waren. Die Verfasser mußten nämlich eine Annahme darüber machen, welchen Prozentsatz der Muttersubstanz des Actiniums sie aus der verarbeiteten Pechblende gewonnen hatten und sie führten ihre Berechnung unter der Annahme durch, daß die Abtrennung quantitativ erfolgt wäre.

Da der so für die Lebensdauer des Actiniums erhaltene Wert mehr als 150 mal zu groß ist, so folgt daraus, daß die Methode von Soddy und Cranston kaum mehr als $^1/_2$ Proz. Ausbeute ergeben hatte.

Es darf vielleicht erwähnt werden, daß es nach dem in unserer früheren Mitteilung beschriebenen Verfahren ohne Schwierigkeit gelingt, Protactinium aus ca. 2 g Pechblende herzustellen und als solches zu charakterisieren. Die absoluten Ausbeuten sind aber noch nicht sichergestellt, da nicht feststeht, welcher Prozentsatz Protactinium in dem in Salpetersäure unlöslichen Teil der Pechblende — unserem eigentlichen Ausgangsmaterial — enthalten ist. Die Ausbeute aus diesem Ausgangsmaterial ist fast quantitativ.

Zusammenfassung.

Die Halbwertszeit des Actiniums wurde nach zwei verschiedenen voneinander unabhängigen Methoden bestimmt. Erstens aus der Nachbildung des Actiniums in ursprünglich Actinium freien Protactiniumpräparaten und zweitens aus direkten Abklingungsmessungen. Es ergab sich in befriedigender Übereinstimmung der Wert von 20 Jahren mit einer wahrscheinlichen Fehlermöglichkeit von 10 Proz.

Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie.

(Eingegangen 28. Dezember 1918.)

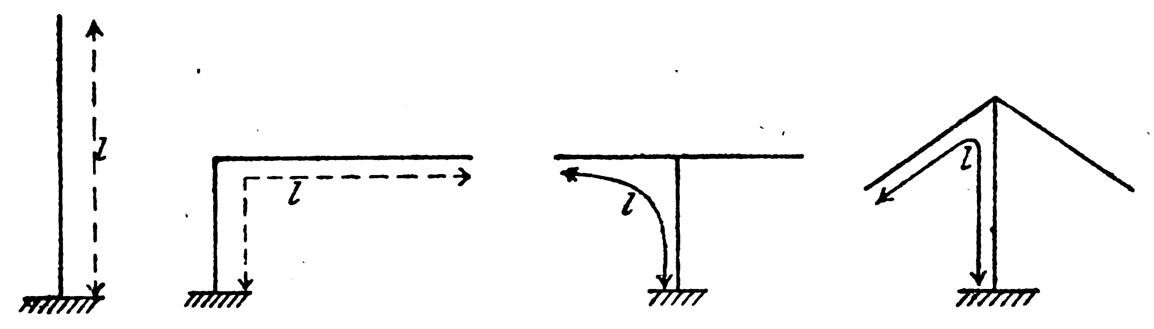
Über die Bestimmung der Eigenschwingung von Antennen.

(Mitteilung aus dem Laboratorium der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie.)

Von A. Meißner.

In der Technik ergibt sich vielfach die Notwendigkeit, die Eigenschwingung einer Antenne im voraus zu bestimmen. Howe hat





hierfür eine Methode angegeben. Sie beruht auf der Berechnung der wechselseitigen Selbstinduktion bzw. Kapazität der einzelnen Antennenelemente gegeneinander; das Verfahren ist für die Praxis zu umständlich und zeitraubend; außerdem sind die Resultate keineswegs genau. Für den geraden Draht ist die Berechnung der Eigenschwingung verhältnismäßig einfach, sie ergibt sich als Funktion der Drahtlänge zu

$$\lambda_0 = 4l.$$

Es zeigt sich nun, daß man auch für verhältnismäßig komplizierte Antennengebilde ganz einfache empirische Beziehungen der Eigenschwingung zu den Längenabmessungen der Antenne aufstellen und die Eigenschwingung ähnlich wie bei geradem Draht zu $\lambda_0 = 4l$ hier in der Form

$$\lambda_0 = k \cdot l$$

darstellen kann, und zwar ist dann l die größte in dem Gebilde auftretende Längendimension. In der Figur sind die hier maßgebenden Längen l für die hauptsächlichsten Antennenformen: gerader Draht, Γ, T und Schirmantenne, eingezeichnet. In der Größe l ist selbstverständlich immer die Zuführung mit inbegriffen.

Der Faktor k ist nun größer, je größer bei gleicher Antennenkapazität das Verhältnis der Antennenkapazität zur Antennenselbstinduktion und je großflächiger die Antenne ist.

Im nachfolgenden sind die Werte der Größe $\lambda_0 = kl$ für die verschiedenen Antennenformen zusammengestellt:

Für den geraden Draht galt $\lambda_0 = 4{,}1\,l$

neigt er sich mehr zu Boden, d. h. wird die Kapazität größer, so gilt $\lambda_0 = 4{,}2\,l$

ist der Draht 1 m über dem Boden, so gilt $\lambda_0 = 5\,l$

wird die Antenne breiter, z. B. für eine Antenne mit einer Breite $= \frac{l}{2}$ $\lambda_0 = 5-7\,l$

z. B. alte Γ-Antenne Nauen $\lambda_0 = 5{,}5\,l$

für eine schmale T-Antenne, z. B. Schiff gilt $\lambda_0 = 4{,}5-5\,l$

für breite T, z. B. jetzige T-Antenne, Nauen $\lambda_0 = 5{,}8\,l$

für noch größere Breite z. B. Breite $= l$, Höhe $= \frac{l}{2} - \frac{l}{3}$, $\lambda_0 = 9-10\,l$

für eine Schirmantenne je nach Drahtzahl $\lambda_0 = 6-8\,l$

bei sehr großer Drahtzahl und geringere Höhe $h < \frac{l}{3}$ $\lambda_0 = 8-10\,l$

(Eingegangen 3. Januar 1919.)

Zur Theorie der Tribolumineszenz.

Von A. Imhof.

H. Schmidt hat in dieser Zeitschrift **19**, 399, 1918, Richtlinien für eine Theorie der Tribolumineszenz gegeben und bei der Gelegenheit Einwände gegen meine früher dargelegten Anschauungen über diesen Gegenstand erhoben. Verschiedene Stellen aus meinen Arbeiten müssen dem Verfasser entgangen sein, denn andernfalls hätte er manches nicht als Widerspruch empfinden können.

H. Schmidt ist nicht befriedigt von meiner Darstellung des Erregungsvorganges. Tatsächlich habe ich über die Erregung in einen „aktiven" Zustand wenig gesagt, weil dieser Punkt noch allzusehr im Dunkeln liegt. Im wesentlichen habe ich festgestellt, daß die nachher tribolumineszierende Substanz nach der Auskristallisation, auch ohne Lichteinwirkung, bereits erregt erscheint[1]). Hier ist eine gewisse Lücke, die ich aber in Kauf genommen habe, weil die Theorie den Tatsachen gut entspricht.

1) Eine Stütze bilden in dieser Beziehung Experimente von Ed. Becquerel, welche ich auf S. 376 meiner Arbeit „Über das Wesen der Tribolumineszenz" (diese Zeitschr. **18**, 374, 1917) erwähnte. Danach würde eine Erregung zur Thermolumineszenz durch Auskristallisation stattfinden. Dies gründlich zu untersuchen, wäre entschieden von Interesse; ich habe dazu leider nicht mehr Zeit gefunden.

Ferner sagt Schmidt auf S. 399, daß notwendig Sulfide oder Selenide in phosphoreszierenden Substanzen enthalten sein müssen, während die Mehrzahl der triboluminleszierenden Substanzen anderen Stoffklassen angehören. Dem ist nicht so. Es gibt eine große Zahl von Phosphoren, welche die genannten Substanzen nicht enthalten, z. B. Flußspat, Willemit, manche Chininsalze und andere organische Salze. Viele ganz besonders stark und lang phosphoreszierende Stoffe zeigen auch besonders starke und permanente Triboluminleszenz.

Auf derselben Seite findet Schmidt, meine Theorie verlange bei steigender Temperatur eine steigende Intensität der Triboluminleszenz. Durch Erhöhung der Temperatur muß durchaus nicht zunächst eine Erhöhung der Lichtintensität eintreten, sondern nur eine zeitliche Verkürzung des aktiven Zustandes. Dies ist tatsächlich der Fall. Die molekularen Bewegungen infolge der Brucherschütterungen werden kaum erhöht durch Erwärmung des betreffenden Stoffes, sondern wegen der geringeren Härte eher vermindert. Wegen H. Schmidts Bemerkungen über den Flußspat (S. 399 und 400 oben) verweise ich auf S. 377 meiner Arbeit[1]).

Im weiteren bekräftigt Schmidt seine Widerlegungen, indem er keine Einwirkung von rotem Licht auf die Triboluminleszenzfähigkeit feststellt. An *Zn S* wird gewiß nichts zu bemerken sein, außer man würde das Experiment über sehr lange Zeiten machen. Denn auch Erwärmung bewirkt keine nennenswerte Veränderung während kurzer Zeit (man müßte hoch erhitzen können). Interessant wäre das Studium der roten Beleuchtung auf temporäre Tribophosphoren. Ich würde eine Verkürzung der Abklingungszeit erwarten.

Sicher hat auch die von Schmidt dargelegte Theorie viel für sich. Ihr Urheber vertritt die Ansicht, daß sich wie bei Flüssigkeiten, so auch bei Kristallen, elektrische Doppelschichten ausbilden können, und daß die beim Zerbrechen auftretenden freien Ladungen sich durch Funken ausgleichen. Die Funken erregen alsdann die Momentanbanden der Phosphoreszenz. Gegen Entladungen, welche die Phosphoreszenz erregen können, hege ich allerdings starke Bedenken. Ich habe nämlich an *Zn S*-Körnern von wenigen μ im Durchmesser beim Zerdrücken noch deutliche Triboluminleszenz bemerkt. Selbständige Ionenströmungen sind in Luftspalten, die in solchen Körnern bestehen können, kaum denkbar; während sich darüber, ob solche Entladungen eine dem Auge wahrnehmbare Lumineszenz hervorrufen würden, streiten ließe.

Zürich, den 27. Dezember 1918.

(Eingegangen 6. Januar 1919.)

1) „Über das Wesen der Triboluminleszenz", diese Zeitschr. 18, 374, 1917.

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Bestätigung der Bohrschen Atomtheorie im optischen Spektrum durch Untersuchungen der unelastischen Zusammenstöße langsamer Elektronen mit Gasmolekülen.

Von J. Franck und G. Hertz*).

In einer Reihe von bis Mitte 1914 ausgeführten Arbeiten, die in einem Referat über Kinetik der Elektronen in dieser Zeitschrift zusammengefaßt sind[1]), haben wir zeigen können, daß in einatomigen Gasen ohne Elektronenaffinität, d. h. also in Edelgasen und Metalldämpfen, Elektronen bei Zusammenstößen mit den Atomen völlig elastisch reflektiert werden, bis sie eine gewisse Mindestgeschwindigkeit erlangt haben. Haben sie diese kritische Geschwindigkeit erreicht, so können sie beim Zusammenstoß ihre gesamte Energie verlieren. In Helium, Neon und Quecksilberdampf konnten wir ferner nachweisen, daß diese Energieschwelle übereinstimmt mit derjenigen, bei der wir eine Ionisation als Folge der Elektronenstöße im Gase beobachten konnten, und wir schlossen daher, daß diese von den stoßenden Elektronen an die Atome quantenmäßig übertragene Energie zur Ionisierung derselben verwandt würde. Einen Zusammenhang zwischen der Ionisierungsspannung und dem Energiequantum hatten Stark*) und wir schon lange vermutet, beim

*) Das Literaturverzeichnis befindet sich am Ende der Arbeit, S. 143.

*) J. Stark, diese Zeitschr. 9, 85, 1908. Im übrigen sei hier auf den Bericht, den J. Stark im Jahrbuch der Radioaktivität u. Elektronik 13, 395, 1916 gegeben hat, hingewiesen. Z. T. beschäftigt sich J. Stark naturgemäß mit der Darstellung derselben Probleme. Ein näheres Eingehen auf Starks z. T. ganz anders geartete Überlegungen ist hier nicht vorgesehen, da unsere Darstellung sich nur mit dem Zusammenhang der Ionisierung des nicht angeregten Atoms mit der Bohrschen Atomtheorie beschäftigt. Den gleichen Standpunkt nehmen wir hier auch gegenüber den wichtigen Arbeiten J. Starks über die Träger der Spektren chemischer Elemente ein, die in einem Bericht im Jahrbuch der Radioaktivität und Elek-

Quecksilberdampf ergab sich die Möglichkeit ihn direkt experimentell zu beweisen. Setzten wir die übertragbaren Mindestenergien gleich $h\nu$, so war von den bis dahin untersuchten Gasen nur bei Quecksilberdampf, wo die Energie von $4{,}9 \pm 0{,}1$ Voltstrahlen übertragen wurde, im erreichbaren Ultraviolett nachzuforschen, ob die der so berechneten Frequenz ν entsprechende Lichtstrahlung ausgesandt würde. In der Tat ist das der Fall. Rechnung und Experiment ergaben das alleinige Auftreten von Lichtstrahlung der Linie 2536 Å. Durch diese Arbeiten war es bewiesen, daß die kinetische Energie stoßender Elektronen zur Anregung von Elektronensprüngen äußerer Elektronen im Atom unter dem Energieverbrauch von $h\nu$ verwandt wird. Die zunächst auftretende Frage war die, wie die Energieübertragung stattfindet, wenn die Elektronen eine den Betrag $h\nu$ übersteigende kinetische Energie besitzen. Sie ist beantwortet worden durch eine bei Lenard durch Åkeson[2]) ausgeführte Experimentaluntersuchung. Aus ihr geht eindeutig hervor, daß dann der Betrag $h\nu$ abgegeben werden kann, während das stoßende Elektron den Restbetrag als kinetische Energie behält. Z. B. wurde beim Quecksilber ein Energieverlust der Elektronen von 5 Volt gefunden. Auf weitere Resultate dieser Arbeit kommen wir nachher zurück. Bei dieser Sachlage lag es nahe, die Bohrsche Atomtheorie auf diese Weise zu prüfen. Wendet man jedoch die gemachten Erfahrungen auf die Bohrsche Atomtheorie an, so sieht man, daß folgende Diskrepanzen bestehen. Ionisierung des normalen, nicht angeregten Atoms soll nach Bohr[3]) dann eintreten, wenn ein Elektron aus der äußersten im normalen Atom vorkommenden Quantenbahn ins Unendliche geworfen wird. Optisch ausgedrückt heißt das, die Ionisation findet statt bei Zuführung der Energie $h\nu_\infty$, wo ν_∞ die ultraviolette Grenzfrequenz der Absorptionsserie des nicht erregten Gases darstellt. Die Emission dieser Frequenz tritt dann ein, wenn das Elektron aus dem Unendlichen unmittelbar in seine ursprüngliche Quantenbahn zurückspringt. Beim Quecksilber ist die Linie 2536 Å, jedoch nicht die ultraviolette Grenzfrequenz, sondern vielmehr die langwelligste Linie, bei der im Quecksilberdampf bei Zimmertemperatur Absorption auftritt. Nach Paschens[4]) Arbeiten ist sie das erste rote Glied der Serie $1{,}5\,S - mp_2$ mit der ultravioletten Grenze $1{,}5\,S$ entsprechend 1187,98 Å. Die eigentliche Ionisierungsspannung müßte also bei $h\nu_{(1188)}$ $\sim$ 10,4 Volt liegen, wogegen bei 4,9 Volt nur der Sprung auf die nächste Quantenbahn mit Rückkehr unter Emission der Linie 2536 Å auftreten dürfte. Gerade so liegt es beim Helium. Hier haben wir $20{,}5 \pm 0{,}5$ Volt als ersten unelastischen Stoß und gleichzeitig als Ionisierungsspannung gemessen. Auch hier ist nach dem Bohrschen Atommodell ein Energieimpuls von 21 Volt nötig, um den ersten Sprung, also die erste rote Linie der weit im Ultravioletten verlaufenden Serie (die der Lyman-Serie des Wasserstoffs entspricht), anzuregen, während erst bei 28 Volt entsprechend der ultravioletten Grenze der Serie Ionisation eintreten dürfte. Eine ähnliche Diskrepanz wie bei Helium und Quecksilberdampf besteht bei Wasserstoff, worauf weiter unten bei Besprechung der Resultate an mehratomigen Gasen eingegangen wird. Bohr und später van der Bijl[5]) haben darauf hingewiesen, daß vielleicht die beobachtete Ionisation sekundären Ursprungs sei, da durch die entstehende ultraviolette Strahlung an den Elektroden ein lichtelektrischer Effekt hervorgerufen werden könnte. Dieser Einwand hat sich, wie weiter unten ausgeführt wird, bei Quecksilberdampf als berechtigt erwiesen. Bei Helium und Neon dagegen haben wir durch Aufnahme von Stromspannungskurven gezeigt, daß die Quellen der neu gebildeten Elektronen im Gase, und zwar in unmittelbarer Nähe derjenigen Stellen liegen, an denen die primären Elektronen ihre unelastischen Stöße erleiden, so daß der Photoeffekt an den Elektroden zur Erklärung dieser Erscheinung nicht ausreicht. Im übrigen aber war es vom Standpunkt der Stoßionisationstheorie durchaus unerklärlich, wie in Edelgasen und Metalldämpfen bei mehreren Atmosphären Druck und kleinem Potentialgefälle die Elektronen die zur Ionisierung nötige Energie gewinnen sollten, wenn in die große Reihe elastischer Zusammenstöße, die ein Elektron erleidet, bis es unter vielfacher Reflexion die Ionisierungsspannung durchfallen hat, sich vor Erreichung der Ionisierungsspannung unelastische Stöße einschieben. Dieser letzte Grund bewog uns, vorläufig an der Identität der Ionisierungsarbeit mit dem kleinsten durch Elektronenstoß an normale Atome übertragbaren Energiequant festzuhalten. Die Lösung der Schwierigkeiten behielten wir weiteren Experimenten in anderen Edelgasen und Metall-

tronik **14**, 139, 1917 zusammengefaßt sind. Auch dort handelt es sich zum allergrößten Teil um die Zuordnung der Serien zu ionisierten Molekülen; nur wo dort nicht ionisierte Moleküle behandelt werden, liegen z. T. Berührungspunkte vor, auf die wir weiter unten zurückkommen. Schließlich sei hier auch auf Lenards bekannte Arbeiten über die Lichtemission metalldampfhaltiger Flammen und über den Lichtbogen, die Becker im Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik **13**, 139, 1916 zusammenfaßt, hingewiesen. Auch dort wird natürlich öfters das vorliegende Problem von einer ganz andern Seite her beleuchtet.

dämpfen vor. In der seitdem verflossenen Zeit, die uns eigenes Experimentieren nicht gestattete, ist das Gebiet hauptsächlich von amerikanischen Physikern ausgebaut und erweitert worden, mit dem Ergebnis, daß die Bohrsche Atomtheorie sich auch hier gerade so glänzend bestätigt wie bei den Röntgenspektren und den Untersuchungen über die Feinstruktur der *He*-Linien.

I. Metalldämpfe.

1. Quecksilber, Zink, Kadmium. Wir haben oben erwähnt, daß die im normalen Atom durch Elektronenstöße anregbare Serie (bzw. Serien) mit den Absorptionsserien identisch sein müßten. Dieselbe Folgerung hat unseres Wissens zuerst J. Stark[6]) gezogen bei seinen Untersuchungen über die Zuordnung der Serien durch den Dopplereffekt von Kanalstrahlen. Im Quecksilberdampf von Zimmertemperatur sind das die Linien 2536 Å und 1849 Å, im Zinkdampf die Linien 3075,99 Å und 2139,3 Å, und im Kadmium die Linien 3260 Å und 2288 Å[7]). Die Spektren von Quecksilberdampf, Zink und Kadmium sind nach Paschen ganz analog gebaut. Die Linien 2536 Å, 3075,99 Å und 2139,3 Å sind gedeutet in Paschens Terminologie als $1,5\,S - 2p_2$, d. h. als erste rote Glieder der Serie $1,5\,S - mp_2$, mit der Grenze $1,5\,S$. Die Grenzen sind für Quecksilber 1188 Å, für Zink 1320 und für Kadmium 1378,69 Å. Die Linien 1849 Å, 2139 Å und 2288 Å sind die roten Anfangsglieder der Serie $1,5\,S - mP$ mit denselben ultravioletten Grenzen $1,5\,S$. Nach der Bohrschen Atomtheorie heißt das, beide Serien werden ausgesandt beim Zurückspringen von Elektronen auf dieselbe Grundbahn. Wenn diese Grundbahn die äußerste ist, die im unerregten Atom vorkommt, so entspricht sie dem, was man in der kinetischen Theorie als Atomquerschnitt bezeichnet, und langwelligere Absorptionslinien sollten ohne Anregung des Atoms dann nicht zu beobachten sein. Nach der Bohrschen Theorie muß man infolgedessen erwarten, daß jede Linie dieser beiden Serien $1,5\,S - mp_2$ und $1,5\,S - mP$ sich durch eine quantenhafte Übertragung der entsprechenden Energie durch Elektronenstoß und das Auftreten der entsprechenden Strahlung nachweisen läßt. Bei der der Grenze der Serie entsprechenden Energie sollten die ganzen Serien auftreten, wenn man Wiedervereinigung zuläßt oder überhaupt keine Strahlung, wenn man durch Anwendung von Feldern die Wiedervereinigung hindert. Experimentell läßt es sich nicht durchführen, im Gase nur Elektronen gegebener kleiner Geschwindigkeit zu haben, vielmehr hat man alle Geschwindigkeiten bis zu einer gegebenen oberen Grenze, daher muß dann bei wachsender Geschwindigkeit der Elektronen eine Linie nach der anderen hinzukommen bis zur Seriengrenze. Zwei Möglichkeiten der Untersuchung stehen nun offen, die wir im folgenden mit Methode I und Methode II bezeichnen wollen. Bei Methode I beschleunigt man die Elektronen in so dichtem Gase und bei so kleinen Feldstärken, daß sie, wie oben ausgeführt, nur unter vielfachen elastischen Zusammenstößen ihre Energie gewinnen können. Auf einem freien Wege durchfallen sie also nur eine äußerst kleine Potentialdifferenz. Infolgedessen können sie nur eine kinetische Energie gewinnen, die sich nur sehr wenig von der ersten übertragbaren Energieschwelle unterscheidet. Dabei ist es ganz gleichgültig, ob dieser Energiesprung oft oder weniger oft vorkommt, da sehr viele Zusammenstöße nur einem kleinen Energiezuwachs entsprechen. Man kann also auf diese Art nur den ersten möglichen Elektronensprung zu finden erwarten, diesen aber mit großer Sicherheit. Bei Methode II beschleunigt man die Elektronen auf einem freien Wege, d. h. man läßt sie die beschleunigende Spannung ohne Zusammenstöße frei durchfallen und läßt sie dann z. B. durch ein Drahtnetz in das Gas eintreten. Auf diese Weise kann man alle Geschwindigkeiten der Elektronen (bis zum Eintreten einer selbständigen Entladung) erzeugen, also auch alle Sprünge beobachten. Man findet aber, da man im wesentlichen nur die ersten Zusammenstöße der Elektronen mit den Molekülen ausnutzen kann, natürlich nur die oft vorkommenden Sprünge und übersieht die selten vorkommenden.

Wir wollen nun sehen, wie weit die Experimente mit den Forderungen der Theorie übereinstimmen. Mac Lennan[8]) hat mit einer Reihe von Mitarbeitern die Anregung von Licht im Quecksilber-, Zink- und Kadmiumdampf nach Methode I untersucht. Er bestätigt im Quecksilberdampf unser Resultat, daß oberhalb 5 Volt bis zum Einsetzen des Lichtbogens nur die Linie 2536 Å zu erhalten ist. Im Zink- und Kadmiumdampf treten, wie zu erwarten war, nur die entsprechenden Linien 3075 Å bzw. 3260 Å auf, und zwar mit Klemmenspannungen oberhalb 4 Volt. Die genauen Energiesprünge wurden nicht gemessen, sondern in Analogie zu unseren Erfahrungen mit dem Quecksilberdampf nach der Quantentheorie berechnet. Es ergibt sich:

	λ	Volt
Hg	2536,7	4,9
Zn	3075,99	3,96
Cd	3260,17	3,74.

Eine umfassendere Wiederholung unserer Versuche mit Quecksilberdampf nahm dann Tate[9]) vor, insofern er außer der Lichterregung auch noch den beim unelastischen Stoß übertragenen Energiebetrag bestimmte. Er findet Emission der Linie 2536 bei 4,9 ± 0,3 Volt, was in Übereinstimmung mit unserem Wert ist. Da er offenbar niedrigere Drucke verwandt hat als wir, so ist die Genauigkeit seiner Bestimmung geringer als unsere (0,3 Volt gegen 0,1 Volt). Dagegen beobachtet er auf diese Weise das erste Mal eine Andeutung eines zweiten Energiesprunges. Er geht deshalb dazu über, eine Stromspannungskurve im Quecksilberdampf aufzunehmen zwischen einem Glühdraht als Kathode und einer gewöhnlichen Metallanode, und zwar wie das Resultat zeigt, bei so tiefen Dampfdrucken, daß die Anordnung der Methode II entspricht. Es ergibt sich so eine Kurve, bei welcher bei 4,9 Volt kein Knick beobachtet wird, wohl aber ein deutlicher Knick bei 10 ± 0,3 Volt. Dieser Wert stimmt gut überein mit dem aus $h\nu_\infty$ der Absorptionsserie berechneten. Denn aus Paschens Wert 1188 Å für die Grenze dieser Serien ergibt sich als theoretischer Wert für die Ionisierungsspannung 10,3 Volt. Goucher[10]), der mit ähnlicher Apparatur, aber nach Methode I die Stromspannungskurve maß, erhielt infolgedessen nur den Knick bei 4,9 Volt. Nach Methode II bestimmte Goucher ferner das erste Auftreten der Ionisation im Quecksilberdampf mit der Lenardschen Anordnung in der von v. Baeyer[11]) angegebenen und von uns benutzten Form und fand ebenfalls die erste Ionisation bei 4,9 Volt. Das gleiche fanden Newman[12]) und Pawlow[13]).

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß Mac Lennan mit seinen Schülern auch Quecksilber, Zink und Kadmium im Bunsenbrenner untersucht hat. Er fand wiederum als einzige Linien die oben erwähnten, jedoch bei Kadmium bei stärkem Brennen auch 2288,79 Å, welche sich, wie oben erwähnt, auch im Absorptionsspektrum des Kadmiumdampfes findet. Eine weitere Untersuchung beschäftigt sich mit der durch Einbringen dieser Metalle in die Flamme hervorgerufenen Ionisation. Die Resultate sind verschieden für die verschiedenen Metalle, kommen aber hier nicht in Betracht, da nicht zu ersehen ist, inwieweit es sich bei der Flamme um unangeregte Metallatome handelt*).

*) Viel direktere Schlüsse als durch die Untersuchung der Leitfähigkeit der Flamme lassen sich unseres Ermessens nach der von Lenard angegebenen Methode der Untersuchung der Ablenkung leuchtender Teile der Flamme durch elektrische Felder machen (siehe den in der Anmerkung auf S. 133 zitierten Bericht von Becker).

Einen wesentlichen Fortschritt brachte dann die Arbeit von Bergen, Davis und Goucher[14]) im August 1917. Sie haben durch einen sinnreichen und einfachen Kunstgriff die Lenardsche Anordnung zur Messung der Ionisierungsspannung so ausgestaltet, daß man zwischen photoelektrisch an den Elektroden erzeugter Ionisation und wirklicher Stoßionisation unterscheiden kann. Gearbeitet wurde mit Methode II in dem oben angegebenen Sinne. Das Prinzip der Lenardschen Anordnung ist kurz folgendes: Elektronen werden auf einem freien Wege bis zu bekannten Geschwindigkeiten beschleunigt und durch ein Drahtnetz in einen Raum hineingeschossen, in welchem sie durch ein Gegenfeld abgebremst und zur Umkehr gezwungen werden, ehe sie die Anfangselektrode erreichen. Ladungen, und zwar positive Aufladungen der Auffangselektrode können dann erst auftreten, wenn die Elektronen auf ihrer Bahn zwischen Drahtnetz und Auffangsplatte Moleküle ionisieren, da die so gebildeten positiven Ionen durch das Feld getrieben zur Auffangplatte wandern. So kann man das Grenzpotential bestimmen, bei dem zuerst Ionisation auftritt, und das war auch die Methode, mit welcher wir zuerst zu sauberen Messungen gelangten. Läßt man von der Ionisierungsspannung an die Geschwindigkeit der Primärelektronen weiter wachsen, so kann man feststellen, ob die so erhaltene Stromspannungskurve stetig weiter ansteigt oder Knicke hat. Knicke sprechen dann entweder für eine Verunreinigung mit höherer Ionisierungsspannung im untersuchten Gase (siehe unsere Messungen an Helium) oder für eine zweite, dritte usw. Ionisierungsstufe des untersuchten Gases. Hierbei ist nun nicht berücksichtigt, wie Bohr und van der Bijl mit Recht hervorgehoben haben, daß die Elektronen auch Licht erzeugen können, welches auf die Auffangsplatte photoelektrisch wirkt. Diese verliert dann von einer gegebenen Geschwindigkeit der Primärelektronen an negative Ladung, d. h. sie ladet sich positiv auf, und jedes Neuauftauchen von lichtelektrisch wirksamen Linien gibt einen Knick in der Kurve der positiven Aufladung. Ob lichtelektrisch wirksame Strahlung oder Stoßionisation vorliegt, kann man nach Bergens, Davis' und Gouchers Vorgang unterscheiden, indem man vor der Auffangelektrode noch ein zweites Drahtnetz anbringt. Verbindet man dies mit der Auffangplatte direkt, so hat man die alte Anordnung. Schaltet man aber zwischen das neue Netz und den Auffänger ein schwaches Feld ein, das die lichtelektrisch am Auffänger ausgelösten Elektronen zurückbiegt, nicht aber genügt, um die positiven Ionen, die zwischen

erstem und zweitem Drahtnetz eine starke Beschleunigung erfahren haben, zurückzuhalten, so bekommt man bis zum Eintritt der wahren Stoßionisation nur die photoelektrisch am Drahtnetz ausgelösten Elektronen auf den Auffänger; man erhält also negative Anfladung mit Knicken in der Kurve bei jedem Auftauchen einer neuen, lichtelektrisch wirksamen Linie. Beim Eintritt der wahren Ionisation geht dann die Kurve steil durch die Abszissenlinie hindurch zu positiven Aufladungen. Die reine Strahlungskurve, auch über das Potential hinaus, bei dem Ionisation einsetzt, kann man messen mit entsprechend hohen Gegenfeldern, welche auch die schnellen positiven Ionen zur Umkehr bringen. So gelang es Bergen, Davis und Goucher zu zeigen, daß bei 4,9 Volt nur Strahlung auftritt, die natürlich der Linie 2536 Å zuzuschreiben ist. Bei 6,7 Volt wurde ein ruckweises Ansteigen der Strahlungskurve gefunden, ebenfalls ohne Auftreten von Stoßionisation. Berechnet man aus diesem Knick durch Benutzung der $h\nu$-Beziehung die Frequenz des ausgesandten Lichtes, so kommt man zur Linie 1849 Å, deren Auftreten nach obigem zu erwarten war. Bei 10,2 Volt tritt wahre Stoßionisation ohne neue Strahlung ein, also bei dem theoretisch erwarteten Wert, der sich aus der Grenzfrequenz der beiden Serien berechnet, von denen 2536 Å und 1849 Å je die ersten roten Glieder sind. Daß bei 10,2 Volt keine neue Strahlung auftritt, ist ebenfalls im Einklang mit der Theorie, da in den starken Feldern eine Wiedervereinigung und damit eine verstärkte Emission der Serienstrahlung ausgeschlossen war. Es wäre gut, wenn das Auftreten von 1849 Å auch spektroskopisch nachgewiesen würde, aber am Resultate dieser sauber ausgeführten Arbeit besteht wohl kein Zweifel. Zu erwähnen sind dann noch zwei weitere Bestätigungen dieses Wertes der Ionisierungsspannung der Quecksilberatome. Hughes und Dixon[15]) erhielten 10,2 Volt und Bishop[16]) 10,27 Volt. Die Autoren arbeiteten nach der unveränderten Lenardschen Anordnung, also mit der Methode II. Die unterhalb 10,3 liegenden, durch Photoeffekt bedingten Anfladungen sind in diesen Arbeiten nicht beobachtet, da anscheinend die Empfindlichkeit der Anordnung nicht genügte, um sie nachzuweisen. In Übereinstimmung mit diesem neuen Werte der Ionisierungsspannung ist ferner die kurzwellige Grenze der Emission im Quecksilberdampf, die von Richardson und Bazzoni[17]) festgestellt wurde. Ihr Verfahren war dabei, in einem Quarzrohrsystem in einem Teile der Anordnung eine Entladung in Quecksilberdampf zu erzeugen und in einem anderen, damit direkt verbundenen die größte Anfangsgeschwindigkeit der durch das Licht der Entladung ausgelösten Elektronen zu untersuchen. Aus der Einsteinschen Gleichung $h\nu - P = V$, wo P die Austrittsarbeit aus dem betreffenden Metall bedeutet, wird die kurzwellige Grenze berechnet. Wegen der Absorption im Gase selbst mußte bei tiefen Drucken gearbeitet werden. Die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen wurde bestimmt durch Ausmessung der Kreise, in welche ihre Bahnen durch bekannte Magnetfelder umgebogen wurden. Im Quecksilberdampf ergab sich als kurzwellige Grenze des Spektrums ein Wert zwischen 1200 und 1000 Å, der mit dem zu erwartenden Wert 1188 Å (den die Verfasser anscheinend nicht kannten) im Einklang ist.

Für Zink und Kadmium liegen neuere direkte Messungen aus dem Juli 1918 von Tate und Foote[18]) vor. Leider war es uns bisher nicht möglich, die Originalarbeiten einzusehen. Soweit aus einem Bericht aus dem Chemischen Zentralblatt ersichtlich ist, haben die Verfasser die gleiche Anordnung wie Bergen, Davis und Goucher für ihre Untersuchung gewählt. Die Resultate sind vollkommen in Übereinstimmung mit den obigen Daten. Im Kadmium ist die erste Energieschwelle bei 3,88 Volt erreicht, was der Linie 3260,17 Å entspricht; die Ionisierungsspannung wurde zu 8,92 Volt bestimmt, während aus $1{,}5\,S \sim 1378{,}69$ Å sich 8,95 Volt berechnet. Im Zink liegt die erste Stufe bei 4,1 Volt, entsprechend 3075,99 Å und die Ionisierungsspannung bei 9,5 Volt, während die Berechnung aus $1{,}5\,S \sim 1319{,}95$ Å 9,3 Volt ergeben würde.

Bestehen bleibt die oben erwähnte Schwierigkeit, einzusehen, wie in dichtem Metalldampf ein Lichtbogen bestehen kann, wenn z. B. im Quecksilberdampf vor Erreichung der Ionisierungsspannung bei 10,3 Volt die unelastischen Stöße schon bei 4,9 Volt die Energie aufnehmen. Diese Schwierigkeit war es ja gerade, die uns zur Annahme von 4,9 Volt als Ionisierungsspannung veranlaßte. Auch diese Frage ist viel diskutiert und bearbeitet worden. Mac Lennan fand bei seinen oben erwähnten Versuchen, bei denen er als Elektronenquelle einen gewöhnlichen Glühdraht verwandte, Zündspannungen des Lichtbogens in Quecksilber-, Zink- und Kadmiumdampf zwischen 12 und 15 Volt. Diese Spannungen sah er ursprünglich als zweite Ionisierungsstufe, später als wahre, nur roh bestimmte Ionisierungsspannung an, da sie angenähert mit den aus den Endgliedern der Serien berechneten übereinstimmen. Millikan[19]) dagegen, der sehr kräftige Glühdrähte mit hoher Glut, also sehr starke Elektronenemission verwandte, fand, daß der Lichtbogen schon bei 5 Volt einsetzt. Sein Schüler Hebb[20]) hat sogar schon bei 3 Volt einen Lichtbogen er-

halten, gibt aber gleichzeitig an, daß die Anfangsgeschwindigkeit der von einer Wehneltkathode ausgehenden Elektronen über 2,3 Volt betragen habe. Mac Lennan, der dann die Versuche wiederholte, kam zum gleichen Ergebnis wie Millikan, so daß das Resultat feststeht, daß im Quecksilberdampf bei 5 Volt ein Lichtbogen brennt, wenn man einen kräftigen Elektronenstrom in das Gas schickt. Dies ist übrigens durchaus in Übereinstimmung mit einer älteren Arbeit über den Quecksilberlichtbogen von J. Stark, T. Retschinsky und A. Schaposchnikoff[21]) die als Anodenfall 5 Volt fanden und diesen Anodenfall mit der Ionisierungsspannung identisch erklärten. Beseitigt man den Kathodenfall durch kräftige Elektronenemission, so bleibt bei dem nicht in Betracht kommenden Gefälle in dem kurzen Bogen selbst nur der Anodenfall übrig. Ferner hat Hebb eben vor dem Einsetzen des Lichtbogens, d. h. also bei Elektronengeschwindigkeiten von 4,9 Volt bei besonders starkem Elektronenstrom eine Andeutung der Serie 3125 Å, 2652 Å, 2482 Å (mit der Grenze 2234 Å) auf seiner Photographie erhalten neben der äußerst kräftigen Emission der Linie 2536 Å. Es ist das Verdienst von van der Bijl[22]), gezeigt zu haben, daß diese Tatsachen nicht nur mit dem obigen in Einklang zu bringen sind, sondern vielmehr eine direkte Folgerung der Bohrschen Theorie darstellen. Bisher haben wir nur von den unerregten Atomen, d. h. solchen, deren äußerste Quantenbahn dem normalen Atom zukommt, gesprochen. Wird aber ein Atom durch einen 4,9 Voltstrahl getroffen, so springt das Elektron auf die nächste Bahn; wird es nun wieder getroffen, ehe es unter Ausstrahlung der Linie 2536 Å zurückgefallen ist, so kann es in die nächste Bahn springen usf., bis es die zur Ionisierung nötige Energie von 10,3 Volt gewonnen hat. Van der Bijl weist darauf hin, daß nach der Kosselschen Frequenzbedingung, die identisch ist mit der Rydberg-Schusterschen Regel, für die Grenzen der Serien

$$\nu_{\infty_n} = \nu_{d_n} + \nu_{\omega_{n+1}}$$

die den ersten folgenden Sprünge immer weniger Energie verbrauchen. Auf diese Weise kann dann neben der zum Lichtbogen notwendigen Ionisation auch die Emission aller röteren und violetteren Linien als 2536 Å eintreten*). Interessant ist die Frage, ob auf diese Weise die zur Ionisation führende Spannung noch unter 4,9 Volt sinken kann; van der Bijl hält das für möglich. Wir sehen jedoch nicht, wie ohne dauernde Anregung des 4,9 Voltstoßes das Atom aus seinem Normalzustande herauskommen kann. Es gibt nur die Möglichkeit, daß die Quantenbahnen und mit ihnen auch der erste Elektronensprung sich unter Einwirkung der Zusammenstöße selbst verändern. Das scheint geschlossen aus der starken Verbreiterung der Absorptionslinie 2536 Å mit wachsendem Druck in gewissen Grenzen möglich. Die Änderung kann nicht sehr groß sein, sollte sich aber doch nachweisen lassen. Wir hoffen durch Untersuchung dieses Punktes zu der Frage, ob die optische Absorption kontinuierlich oder quantenhaft erfolgt, einen Beitrag liefern zu können.

Auf die von Hebb vor Eintreten des Lichtbogens beobachteten schwachen Linien möchten wir noch besonders hinweisen. Millikan selbst hat erwähnt, daß die Grenze dieser Serie 2234 Å sich nach der Rydberg-Schusterschen Regel aus der Seriengrenze $1{,}5\,S \sim 1188$ Å und der Linie 2536 Å errechnet, da

$$\frac{1}{1188} - \frac{1}{2536} = \frac{1}{x} \text{ für } x \text{ den Wert } x = 2234$$

ergibt. Nach der Bohrschen Theorie heißt das aber nichts anderes, als daß die durch einen 4,9 Voltsprung sich ergebende neue Quantenbahn die Ausgangsbahn ist für die obige Serie. Interessant wäre es, aus den Experimenten auszurechnen, ob die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Atom im erregten Zustand ein zweites oder drittes Mal von Elektronen getroffen wird, groß genug ist, um diese Deutung zu rechtfertigen, wenn man als mittlere Lebensdauer eines erregten Atoms (d. h. als mittlere Zeit zwischen Energieaufnahme und -abgabe) den von Stern und Vollmer neuerdings abgeleiteten Wert von 10^{-8} sec einsetzt*). Leider genügen jedoch die aus Hebbs Arbeit ersichtlichen Daten noch nicht zur Ausführung der Rechnung. Eine genauere Untersuchung des Intensitätsverhältnisses von der Linie 2536 Å zur mit ihr gekoppelten Serie unter gleichzeitiger Messung der Geschwindigkeitsverteilung der erregenden Elektronen würde wichtige Schlüsse ergeben können. Eine derartige Untersuchung ist von uns geplant. Hierher gehört auch offenbar die Deutung der Versuche von Rau[23]), Gehrcke u. Seeliger[23]) u. Holm[23]). Wenn z. B. Rau das Auftreten der Linie 4358 Å im Quecksilberdampf bei 8 Volt, also unterhalb der Ionisierungsspannung beobachtet, so handelt es sich ebenfalls nicht um einen Elementarprozeß am

*) Diese aus der Bohrschen Theorie sich ergebende Vorstellung berührt sich mit der älteren Starkschen Auffassung der partiellen Ionisierung, wie sie z. B. nach Starks Theorie durch Fluoreszenzerregung hervorgerufen werden soll (Ann. d. Phys. 41, 728, 1913).

*) Die betreffende Arbeit wird demnächst in dieser Zeitschrift erscheinen. Wir entnehmen dieses Resultat aus dem Manuskript, das uns die beiden Herren freundlicherweise zur Einsicht überlassen haben.

normalen Atom, sondern andere Sprünge von einer Quantenbahn zur andern müssen an demselben Atom vorausgegangen sein. Verständlich ist hiernach auch, warum gerade im Hochdrucklichtbogen des Quecksilberdampfes die von Rubens und von Baeyer aufgefundene äußerst langwellige Strahlung von 0,3 mm Wellenlänge auftritt. Damit der dieser Frequenz entsprechende Elektronenpunkt häufig genug vorkommen kann, muß eine so große Zahl von Atomen mit anormal weit draußen liegenden Quantenbahnen vorhanden sein, wie sie besonders im Quecksilberlichtbogen mit seinen intensiven Ionisations- und Wiedervereinigungsprozessen vorkommt. Bogen anderer schwerer Metalle und auch Bogen in Edelgasen sollten ähnlich langwellige Strahlung ergeben.

Ein weiterer Einwand ist ferner von Mac Lennan auf Grund von Absorptionsmessungen seines Mitarbeites Dearle[24]) erhoben worden. Dearle fand im Quecksilberdampf von Zimmertemperatur eine sehr schwache, aber deutlich nachweisbare Absorption im ultraroten Gebiete bei $\lambda = 1{,}014\ \mu$; im Zinkdampf bei entsprechendem Dampfdruck eine Absorption bei $1{,}10554\ \mu$ und im Kadmium eine Absorption bei $1{,}039517\ \mu$. Da diese Linien den Serien $2{,}5\,S - nP$ angehören, mit den Grenzen bei 4937 Å, 5007 Å und 5201 Å, so hält es Mac Lennan trotz der oben beschriebenen Experimente für möglich, daß die diesen Grenzen entsprechenden Ionisierungsspannungen von 2,51 Volt, 2,48 Volt und 2,39 Volt die wahren seien. Diese Möglichkeit wird man nach unseren obigen Ausführungen für sehr unwahrscheinlich erachten müssen. Völlig widerlegt wird sie durch die nach Methode I ausgeführten Arbeiten, die mit Sicherheit die den Ionisierungsspannungen und auch die den ersten roten Absorptionslinien entsprechenden Energieverluste von ca. 1 Volt hätten ergeben müssen. Unseres Ermessens wird sich auch diese Schwierigkeit auf ähnlicher Grundlage wie die oben erwähnte lösen lassen. Einen starken Anhalt sehen wir im folgenden: Die erwähnten Absorptionslinien gehören außer zur oben genannten Serie noch zur zweiten Nebenserie, und zwar sind sie hier die Glieder $2P - 2S$. Die Grenze dieser Serie liegt bei 3321 Å. Zu ihr gelangt man nach dem Rydberg-Schusterschen Gesetz aus der Grenze der Hauptserie weniger der Frequenz des ersten Gliedes der Hauptserie. So ist z. B. beim Quecksilber

$$\frac{1}{1188} - \frac{1}{1849} = \frac{1}{3321}.$$

Es muß sich also um eine Absorption von durch Licht der Linie 1849 Å angeregten Quecksilberatomen handeln. Betrachtet man auf diese Möglichkeit hin Dearles Anordnung, so zeigt sich, daß Dearle mit unzerlegtem Licht gearbeitet hat. Das gesamte Licht des Nernstbrenners ging durch das aus Quarz hergestellte Absorptionsgefäß hindurch. Bei der sehr starken Absorption der Linie 1849 Å wird man daher annehmen dürfen, daß die Energie dieser Frequenz des kontinuierlichen Spektrums genügt hat, um die gekoppelte ultrarote Absorption anzuregen. Wir sind zurzeit mit dem Versuch, dies nachzuweisen, beschäftigt.

2. Erdalkalimetalle.

a) Magnesium. Das Absorptionsspektrum des nicht erregten Magnesiumdampfes unterscheidet sich von denen des Quecksilbers, Zinks und Kadmiums dadurch, daß nur die Anfangsglieder der Einfach-Linien-Serien $= 1{,}5\,S - nP$ beobachtet worden sind. Es fehlen also Linien, die der Linie 2536 Å im Quecksilber entsprechen. Die ersten beiden Glieder der Einfach-Linien-Serie sind nach Lorenser[25]) die Linien 2852,22 Å und 2026,46 Å. Die Grenze der Serie ist $1{,}5\,S \sim 1621{,}7$ Å. Nach Methode I beobachtete Mac Lennan naturgemäß nur die Anregung der Linie 2852,22 Å durch Elektronenstöße von ca. 5 Volt an bis zum Einsetzen des Lichtbogens. Die $h\nu$-Beziehung läßt den ersten unelastischen Stoß bei 4,28 Volt erwarten. Aus der Grenze 1621,7 Å berechnet sich dann die Ionisierungsspannung zu 7,5 Volt. Man darf hieraus schließen, daß auch beim Magnesium die Serie der Einfach-Linien die für die Ionisation des normalen Atoms wesentliche ist. Die Linie 2852 Å scheint in noch stärkerem Maße wie die Quecksilberlinie 2536 Å zur Verbreiterung zu neigen. Man wird also auch an ihr wiederum untersuchen können, inwiefern einer verbreiterten Linie eine Änderung des Quantensprunges entspricht.

b) Barium, Strontium, Kalzium. Nimmt man nach den beschriebenen Experimenten es als erwiesen an, daß die Grenze der Einfach-Linien-Serie für alle in derselben Kolumne des periodischen Systems stehenden Elemente die für die Ionisation wesentliche ist, so kann man mit Mac Lennan auch für die übrigen Erdalkalimetalle aus dem bekannten Spektrum die Ionisisierungsspannung berechnen. So erhält man für

	λ_∞ entspr. $\nu = 1{,}5\,S$	Ionis.-Spannung
Barium	2408,0 Å	5,15 Volt
Strontium	2177,5 „	5,7 „
Kalzium	2028,2 „	6,12 „

Mac Lennan selbst diskutiert wegen der oben erwähnten Resultate, die Dearle bei der

Absorption von Quecksilber-, Zink- und Kadmiumdampf erhalten hat, die Möglichkeit, daß auch $\nu_\infty = 2,5\ S$ die Seriengrenze ist, aus der sich die Ionisierungsspannung berechnet. Hierauf gehen wir wegen der oben erwähnten Gegengründe nicht näher ein.

3. Alkalimetalle.

Bei den Alkalimetallen tritt in der Emission bekanntlich nur das vollständige System der Dupletts auf. Die Hauptserie ist auch diejenige, die sich als Absorptionsserie in großer Vollkommenheit [Wood[26]) hat 48 Glieder beobachtet] zeigt. Man wird naturgemäß also diese Dupletthauptserie als die mit der Ionisierungsspannung des unerregten Atoms verbundene ansehen müssen. Zu derselben Anschauung gelangte auch Lenard, welcher auf Grund von Beobachtungen in Flammen die Hauptserien der Alkalimetalle den ungeladenen Atomen zuordnete. Man darf unserer Meinung nach auch nicht an dieser Anschauung irre werden durch das ungeheuer komplizierte übrige Absorptions- und Fluoreszenzspektrum des Natriumdampfes, das bis ins Ultrarote hineinreicht. Denn, was — wie oben erwähnt — für die Absorptionsspektra von Quecksilber, Zink und Kadmium gilt, nämlich, daß man bei Untersuchung der Absorption mit zerlegtem Licht arbeiten muß, um nicht erregte Atome zu bekommen, gilt in wesentlich verstärktem Maße für die Alkalimetalle, bei denen der primär angeregte Sprung im gelben oder gar roten Gebiet liegt. Im Gegenteil dürften z. B. aus der von Wood gefundenen Anregung der D-Linien durch kurzwelliges Licht und ähnlichen anderen Beobachtungen besonders interessante Bestätigungen der Bohrschen Theorie sich ergeben. Auch vor chemischen Einflüssen muß man sich naturgemäß bei diesen leicht reagierenden Substanzen sehr hüten; so hat z. B. schon Dunoyer[27]) bei Wiederholung der Woodschen Versuche über die Resonanzspektra des Natriums gefunden, daß bei Vermeidung von verunreinigenden Gasen vom Resonanzspektrum nur die Resonanz der D-Linie übrig bleibt. Füchtbauer, Hoffmann u. Schell[28]) haben bekanntlich in schöner Weise bei ihrer Untersuchung der Dämpfung der Absorptionslinien der Alkalimetalle diesen Bedingungen genügt. Eine Durchmusterung des Spektrums mit zerlegtem Licht auf Absorption durch die Dämpfe der Alkalimetalle mit allen Vorsichtsmaßregeln ist uns nicht bekannt. Sie dürfte, wenn die Hauptserie für die Ionisierungsspannung der nicht erregten Atome in Frage kommt, Absorption erst von den roten Grenzen der Hauptserien an zeigen.

Auch auf die am Ende der Serien sich anschließende kontinuierliche Absorption sei hier hingewiesen, auf deren wichtigen Zusammenhang mit der Quantentheorie in Analogie zu den Absorptionsbanden der K-Strahlen Debye[29]) besonders aufmerksam gemacht hat. Für die Untersuchung der Energieübertragung durch Elektronenstöße würde dem optischen Verhalten analog zu folgern sein, daß oberhalb der Ionisierungspannung alle möglichen Werte der kinetischen Energie in einem Elementarprozeß aufgenommen werden. Das läßt sich experimentell durchaus prüfen.

Direkte Messungen der Ionisierungsspannung liegen von Tate und Foote vor. Sie sind in derselben Arbeit beschrieben, wie die Messung der Ionisierungsspannung von Zink und Kadmium. Für Natrium finden sie nach dem oben zitierten Referat als ersten Sprung 2,12 Volt, entsprechend 5893 Å (D-Linie) und die Ionisierungsspannung bei 5,13 Volt, was genau mit dem Wert übereinstimmt, der sich aus der Grenze der Hauptserie 2413 Å berechnet. Beim Kalium finden sie den ersten Sprung bei 1,55 Volt, entsprechend 7685 Å (der bekannten roten K-Linie), und die Ionisierungsspannung bei 4,1 Volt, während sich aus der Grenze 2865 Å ein Wert von 4,3 Volt berechnet. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß Wood spektroskopisch die untere Grenze der Elektronengeschwindigkeit, mit welcher die D-Linien angeregt werden, zu ermitteln gesucht hat. Er findet noch unter 1 Volt Klemmenspannung zwischen Glühdraht und Anode das Auftreten der D-Linien. Nähere Angaben über die Anfangsgeschwindigkeit und die Zahl der emittierten Elektronen sind aus der Arbeit nicht ersichtlich, so daß dieses Resultat uns noch nicht gegen das von Tate und Foote gefundene zu sprechen scheint. In einer im hiesigen Institut in Vorbereitung befindlichen Arbeit soll hierauf näher eingegangen werden.

Für Rubidium und Cäsium liegen noch keine direkten Messungen vor. Man kann vorläufig die Werte ausrechnen aus den Grenzen der Hauptserien dieser Metalle. Es ergibt sich für

	λ_∞	Ionis. Spannung
Cäsium	= 3184 Å	3,9 Volt
Rubidium	2968 „	4,1 „
Lithium	2299,7 „	5,3 „ .

Zu bemerken ist hierbei, daß ein einfacher Zusammenhang mit den Frequenzen des selektiven Photoeffekts von Pohl und Pringsheim[30]) offenbar nicht besteht.

II. Edelgase.

Bei den Edelgasen ist die experimentelle

Untersuchung nicht wesentlich über unsere Resultate hinausgekommen, trotz einer Anzahl hierüber ausgeführter Untersuchungen. Über das Absorptionsspektrum der nicht erregten Edelgase scheint nur die völlige Durchsichtigkeit des unerregten Gases bis ins äußerste Ultraviolett bekannt zu sein. Von größtem Interesse ist das Helium, da es ja das einzige Element ist, von dem man sagen kann, daß wir seinen Aufbau mit großer Wahrscheinlichkeit gut kennen. Nach Bohr muß der erste Sprung des Elektrons aus der ersten Quantenbahn bei 21 Volt liegen, die Serie des unerregten Atoms also als langwelligstes rotes Glied eine Linie von ungefähr 590 Å haben. Die Grenze der Serie sollte bei 420 Å liegen, entsprechend der Ionisierungsspannung von 29 Volt. Wir hatten den ersten unelastischen Stoß bei 20,5 ± 0,5 Volt gefunden, ihn aber im Gegensatz zu obigem mit der Ionisierungsspannung identifiziert. Nach denselben drei verschiedenen Methoden sind Pawlow, Bazzoni[31]) und Benade[32]) zu einem Resultat gekommen, das mit unserem völlig übereinstimmt. Man wird nun analoge Schlüsse, wie bei den Metalldämpfen ziehen müssen, um aus dieser Schwierigkeit herauszukommen. Vor allen Dingen ist es nötig, nach Methode II die Strahlen höherer Geschwindigkeit zu untersuchen, um die Abtrennungsarbeit des ersten und des zweiten Elektrons zu finden. Hiermit sind wir beschäftigt. Mit der Deutung der bisherigen Experimente durch Photoeffekt an den Elektroden wird man nicht einfach auskommen, da die nach Methode II gewonnenen Stromspannungskurven schwerlich so zu deuten sind. Man muß vielmehr das Auftreten einer Ionisation im Gase annehmen. Aber auch diese wird sicherlich sekundär durch das äußerst kurzwellige Licht bedingt sein. Natürlich kann dieses nicht die Heliumatome, wohl aber Verunreinigungen ionisieren, die nie vollkommen auszuschließen sind und deren Ionisierungsspannungen sämtlich unter 20 Volt liegen. Über Neon und Argon, bei denen nach unseren Messungen der erste unelastische Stoß bei 16 bzw. bei 12 Volt liegt, liegen keine neuen Erfahrungen vor.

Richardson und Bazzoni haben für Helium nach dem oben angeführten Verfahren die ultraviolette Grenze der Lichtemission untersucht und finden sie zwischen 470 Å und 420 Å, worin sie mit Recht eine gute Bestätigung der Bohrschen Theorie sehen. Ein besonders schönes Beispiel für Absorption von angeregten Gasen bieten die bekannten Untersuchungen von Paschen[33]), über die Resonanz ionisierten Heliums bei $\lambda = 1{,}083\ \mu$.

III. Mehratomige Gase.

Bei den mehratomigen Gasen ist die Untersuchung noch lange nicht so weit gediehen wie bei den einatomigen. Das liegt hauptsächlich an den hierbei auftretenden experimentellen Schwierigkeiten. Gearbeitet kann nur werden mit der Methode II, da die Zusammenstöße von Elektronen aller Geschwindigkeiten nicht völlig elastisch sind. Wir haben früher zeigen können, daß unterhalb der Geschwindigkeit, bei der eine solche quantenmäßige Energieübertragung einsetzt, wie sie hier besprochen wurde, Zusammenstöße mit Energieverlust, sogenannte halbelastische Zusammenstöße stattfinden. Der bei ihnen eintretende mittlere Energieverlust ist um so größer, je größer die Elektronenaffinität des betreffenden Gases ist. Diese Größe, die man am besten als die Dissoziationsarbeit definiert, die am negativen Ion zu leisten ist, um es in ein neutrales Molekül und ein freies Elektron zu spalten, hat sich bisher leider noch nicht sauber messen lassen. Hinzu kommen chemische Prozesse, die durch Elektronenstöße angeregt werden können. Inwieweit diese quantenhaft durch Elektronenstöße, etwa vergleichbar der Photochemie, angeregt werden, steht noch dahin und dürfte interessant sein zu untersuchen. Wir halten es für nicht unmöglich, daß einige von Åkeson in der oben zitierten Arbeit gefundene quantenhafte Energieverluste von Elektronen im mehratomigen Gase, die zu den Ionisierungsspannungen anscheinend in keiner Verbindung stehen, etwas hiermit zu tun haben. Für das hier besprochene Gebiet bedeuten diese Eigenschaften der mehratomigen Gase Komplikationen. Es kommen dann ferner noch Schwierigkeiten hinzu, die in der Bildung von elektrischen Doppelschichten auf den Elektroden bestehen. Offenbar werden diese durch Bildung negativer Molekülionen, die sich auf den Metallen absetzen, bedingt oder zum mindesten begünstigt. Sie hängen also mit der erwähnten Elektronenaffinität zusammen. Diese Doppelschichten machen es schwer, mit Elektronen bekannter Geschwindigkeit zu arbeiten. Erfreulicherweise besitzt der Wasserstoff, der fürs erste interessanteste Vertreter der zweiatomigen Gase, eine sehr geringe Elektronenaffinität, so daß bei ihm am ehesten saubere Messungen durchzuführen sind.

1. Wasserstoff.

Das Atommodell des Wasserstoffs ist nach Bohr vollkommen bekannt. Der erste Sprung der Lymanserie berechnet sich aus der Formel

$$h\nu = h \cdot K \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right),$$

wo $K = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ ist, zu 10,2 Volt, die Ionisierungsspannung des Atoms zu $h \cdot K \sim 13{,}6$ Volt. Die Messungen lassen sich natürlich nur mit H_2-Molekülen durchführen. Nimmt man hier das Atommodell von Bohr-Debye an, so ergeben sich für die Ionisierungsspannung mehrere Möglichkeiten. Entweder wird bei der Ionisation dem Molekül ein Elektron weggenommen und das zweite läuft allein auf seiner Quantenbahn senkrecht zur Verbindungslinie der Atomkerne herum, dann ergeben sich 17,9 Volt. Diese Möglichkeit lehnt Bohr selbst ab, weil das so gebildete Molekülion instabil sei. Er zieht vor, Ionisation unter gleichzeitiger Dissoziation anzunehmen, also ein freies Elektron, ein positives Atomion und ein neutrales Atom. Hierzu ist ein Energieaufwand von 16,3 Volt erforderlich. Die Differenz zwischen dieser Ionisierungsspannung und der des Atoms, also $16{,}3 - 13{,}6 = 2{,}7$ Volt, müßte der Dissoziationsarbeit entsprechen, während sich aus der Wärmetönung über 3,5 Volt ergeben würden.

Der von uns nach der Lenardschen Methode gefundene Wert von 11 Volt für den Beginn der Ionisation ist nach der gleichen Methode von Mayer[34]), Bishop, Goucher, Bergen, Davis und Goucher bestätigt worden und stimmt auch überein mit der von Lenard selbst als erste Bestimmung der Ionisierungsspannung überhaupt gefundenen 11 Voltgrenze, die Lenard[35]) damals als für alle Gase maßgebend ansah. Bishop findet eine zweite verstärkte Ionisation bei 15,7 Volt. Am wichtigsten ist wieder die Arbeit von Bergen, Davis und Goucher, die nach ihrer oben beschriebenen Methode Photoeffekt und Stoßionisation trennen. Sie erhalten:

Stoßionisation und Strahlung bei 11 Volt
Strahlung . . . . „ 13,6 „
Ionisation . . . . „ 15,8 „ .

Man wird in dem sowohl von Bishop wie von Bergen, Davis und Goucher gefundenen Werte von 15,7 und 15,8 Volt eine Stütze der Auffassung sehen, daß Ionisation und Dissoziation des Moleküls als Effekt des Elektronenstoßes gemeinschaftlich auftreten. Zu erwarten wäre dann möglicherweise, daß bei 2,7 Volt Dissoziation allein durch Elektronenstöße einträte. Dies ist aber unwahrscheinlich, da Wasserstoff bis unterhalb 200 Å keine Absorption zeigt. Untersucht werden muß diese Frage jedenfalls. Der Wert von 13,6 Volt, bei dem Strahlung beobachtet wurde, stimmt zwar mit der Ionisierungsspannung des Atoms gut überein, ist aber beim Molekül unverständlich. Was nun den 11 Voltwert betrifft, so macht das Auftreten von Strahlung und Ionisation zusammen es wahrscheinlich, daß es sich nicht um einen reinen Effekt handelt. Zu bedenken ist, daß bei 10,2 Volt die Ionisation von Quecksilberdampf einsetzt, die besonders kräftig ist. Quecksilberdampf ist bei Bergen, Davis und Goucher sicher nicht völlig vermieden, da sie in demselben Rohr vorher mit Quecksilberdampf gearbeitet hatten. Bei uns und den anderen Autoren kann wieder der durch die Strahlung hervorgerufene Photoeffekt die beobachteten Aufladungen erklären. Das Auftreten der Strahlung bei 11 Volt stimmt angenähert zahlenmäßig mit dem ersten Sprung der Lymanserie des Atoms überein. Zu bedenken ist aber wieder, daß mit Molekülen gearbeitet wird.

Bei Untersuchungen über den lichtelektrischen Effekt in Gasen hat Lenard[36]) gezeigt, daß Absorption des Wasserstoffs unterhalb 1400 Å einsetzt, was von Lyman[37]), der den Wert auch unterhalb 1300 Å angibt, bestätigt wurde. Bei Licht dieser Wellenlängen fand Lenard gar keinen lichtelektrischen Effekt und Palmer[38]) nur unsichere Andeutungen eines solchen Effekts. Man wird diese Absorption unterhalb 1300 Å wiederum mit der durch das erste Glied der Lymanserie bedingten, identifizieren müssen, und aus Lenards Resultat eine weitere Stütze der Anschauung herleiten, daß hier keine wahre Stoßionisierung eintreten kann.

Klar sind somit die Verhältnisse beim Wasserstoffe keineswegs. Herzfeld[39]) versucht, aus der Ionisierungsspannung des Wasserstoffs Schlüsse zu ziehen auf die im Atom vorkommenden Elektronenbahnen. Er will einen Beitrag zu der Frage liefern, ob alle möglichen Elektronenbahnen vorkommen und nur die Sprünge zwischen den Bohrschen Bahnen Ausstrahlung ergeben, oder ob nur die Bohrschen Bahnen überhaupt vorkommen. Aus dem Werte von 11 Volt, dem einzigen, der damals bekannt war, schließt er, daß die Elektronen sich vermutlich in allen Bahnen zwischen den Bohrschen Bahnen 1 und 2 bewegen, da der berechnete Mittelwert aus den Ionisierungsspannungen für Bahn 1 und 2 mit 11 Volt übereinstimmt. Dieser Schluß ist nach obigem nicht zulässig.

Auf die Arbeiten, in denen J. Stark sich mit der Emission der Spektra des Wasserstoffs beschäftigt, soll hier wiederum nur hingewiesen werden. Der größte Teil bezieht sich auf ionisierte Moleküle, also auf ein hier nicht behandeltes Problem. Was die Zuordnung der kontinuierlichen Emission zum in der Wiedervereinigung begriffenen Wasserstoff und die daraus abgeleiteten Schlüsse gegen die Bohrsche Theorie betrifft, so hoffen wir, daß sie sich gerade so wie die übrigen kontinuierlichen

Spektren von Zink, Kadmium, Quecksilber und den Alkalimetallen, die Stark erwähnt, analog den kontinuierlichen Röntgenspektren nach Debye (s. o.) deuten lassen werden.

2. Sauerstoff, Stickstoff.

Alle weiter zu besprechenden Untersuchungen der Ionisierungsspannung sind mit dem möglichen Fehler behaftet, daß vielleicht die Grenze der Anregung der Lichtemission statt der Ionisierungsspannung bestimmt worden ist, da durchweg nur der Beginn der positiven Aufladung nach der Lenardschen Methode festgestellt worden ist. Im allgemeinen gut übereinstimmende, mehrfach gemessene Werte liegen bei Sauerstoff und Stickstoff vor, wie aus folgender Tabelle ersichtlich

	Franck u. Hertz	F. Mayer	Hughes u. Dixon
Stickstoff	7,5	11,8	7,7 Volt
Sauerstoff	9	9,5	9,2 „

	Goucher	Bishop
Stickstoff	7,4	7,5 Volt
Sauerstoff	—	9 „

Für Sauerstoff liegen auch Messungen des lichtelektrischen Effekts vor. Nach Lenard setzt er ein bei Wellenlängen zwischen 1800 und 1200 Å, von diesen sieht Lyman die wirksamen in Wellenlänge um 1300 Å, die, wie beide Autoren finden, auch stark absorbiert werden. Die $h\nu$-Beziehung für 1300 Å würde für Sauerstoff den Wert der Ionisierungsspannung 9,6 Volt ergeben.

3. Die übrigen untersuchten Gase.

Die für die sonst noch untersuchten Gase erhaltenen Werte der Ionisierungsspannung mögen aus der folgenden Tabelle ersehen werden.

	F. Mayer	Hughes und Dixon	Bishop
NO	—	9,3 Volt	7,5 Volt
CO	14,5 Volt	7,2 „	—
CO_2	12,5 „	10,0 „	—
Cl_2	—	8,2 „	—
Br_2	—	10,0 „	—
HCl	—	9,5 „	—
CH_4	13,5 „	9,5 „	—
C_2H_2	—	9,9 „	—
C_2H_4	—	9,9 „	—
C_2H_6	—	10,0 „	—

Soweit sie mehrfach gemessen sind, ist keine Übereinstimmung erzielt, daraus mag man die Schwierigkeit ersehen, die oben genannten Fehlerquellen zu vermeiden. Man wird hier nur weiterkommen, wenn man den Energieverlust der stoßenden Elektronen, Strahlung und Stoßionisation einzeln untersucht und die Beziehung zum Spektrum aufsucht, und das ist besonders bei den komplizierten Bandenspektren, um die es sich hier meistens handelt, nicht einfach. Eine Möglichkeit zur Deutung der Bandenspektren der mehratomigen Gase, vor allem der Verbindungen, sei hier mit allem Vorbehalt kurz erwähnt. Der eine von uns hat in Gemeinschaft mit Wood zeigen können, daß das Resonanzlinienspektrum der Jodfluoreszenz durch Zusammenstöße der Jodmoleküle mit anderen Atomen in ein Bandenspektrum überführt wird. Man kann diese Tatsache, wie es Stern und Vollmer in ihrer oben erwähnten Arbeit tun, durch die Annahme deuten, daß die für die Linienemission in Frage kommenden Quantenbahnen durch den Stoß der Atome (oder wie wir es lieber deuten möchten, durch den Stark-Effekt der Atomfelder) mehr oder weniger, je nach Art des Zusammenstoßes verändert werden. Nimmt man das an, so hat man einen ganz ähnlichen Einfluß auf die Quantenbahnen in den Atomen der Verbindungen durch die Nähe der anderen Atome des Moleküls zu erwarten. Auch dieser Einfluß muß verschieden stark sein, je nach dem Zustand des Moleküls, d. h je nach den Quantenbahnen, in welchen die Atome selbst um einander kreisen, und hieraus würde sich dann die ungeheure Zahl der Frequenzen des Bandenspektrums erklären. Ob man bei Verbindungen nach dieser Auffassung überhaupt eine so scharfe Ionisierungsspannung erhalten kann, wie bei einatomigen Gasen, möchten wir offen lassen. Bemerkenswert ist es jedenfalls in Hinsicht hierauf, daß J. Franck und E. v. Bahr eine scharfe Ionisierungsspannung für den Stoß durch positive Ionen nicht finden konnten. Durch diese Auffassung soll nicht etwa die Schwarzschildsche[40]) Deutung der Banden als bedingt durch die Drehung mehratomiger Moleküle (in Analogie zu Bjerrum) widerlegt werden, sondern zu diesem Effekt wird der erwähnte wesentlich hinzukommen.

Zusammenfassende Bemerkungen.

Verallgemeinern wir die mit dem Prinzip des unelastischen Zusammenstoßes langsamer Elektronen mit Gasmolekülen bisher schon gewonnenen Ergebnisse, so wird man folgende, die Bohrsche Theorie bestätigenden Sätze zum großen Teile als schon bewiesen, zum anderen als der experimentellen Untersuchung nach dieser Methode zugänglich bezeichnen dürfen:

1. Jeder einer optischen Absorptions- und Emissionslinie entsprechende Sprung, also jeder Sprung eines den äußeren Quantenbahnen

des Atoms angehörenden Elektrons von einer Quantenbahn auf die andere kann bewirkt werden durch den Stoß eines freien Elektrons, bei welchem dasselbe eine Einbuße seiner kinetischen Energie um den Betrag $h\nu$ erleidet.

2. Welche Sprünge auftreten, hängt ab vom Erregungszustande des getroffenen Atoms.

3. Beim normalen, nicht erregten Atom sind die möglichen Sprünge identisch mit denen, welche die Absorptionsserie des unerregten Atoms ergeben.

4. Die ultravioletten Grenzfrequenzen der Serien multipliziert mit dem Wirkungsquantum h ergeben die Ionisierungsarbeiten der Atome; die Ionisierungsarbeit des unerregten Atoms ergibt sich aus der Grenzfrequenz der Absorptionsserie des unerregten Atoms.

5. Die Untersuchung der unelastischen Zusammenstöße und der durch sie bedingten Lichtemission ergibt ein neues Mittel zur Zuordnung von Linien zu Serien und zur Feststellung ihrer Koppelung miteinander. Die Seriengrenzen werden der direkten Beobachtung zugänglich.

6. Die weitgehende Analogie der optischen Absorption mit der quantenmäßigen Energieabgabe durch stoßende Elektronen spricht für die erste Plancksche Hypothese der quantenmäßigen Ahsorption.

Literaturverzeichnis*).

1) J. Franck u. G. Hertz, diese Zeitschr. 17, 409 bis 416 u. 430—440, 1916. Weitere Literaturangaben siehe ebendort.
2) N. Åkeson, Sitzungsber. Heidelb. Akad. math.-nat. Kl. Abt. A. 1914. 21. Abh. und Åkeson, Lunds Årsskrift. N. F. Åfd. 2. Bd. 12, Nr. 11, 1916.
3) N. Bohr, Phil. Mag. 26, 1, 476, 857, 1913; 27, 506, 1914; 29, 332, 1915; 30, 394, 1915.
4) F. Paschen, Ann. d. Phys. 42, 840, 1913. Weitere Literaturangaben der einschlägigen Arbeiten von F. Paschen, siehe ebendort sowie bei B. Dunz, Die Seriengesetze der Linienspektra. Leipzig. S. Hirzel. 1911.
5) K. J. van der Bijl, Phys. Rev. 9, 173, 1917.
6) J. Stark, Jahrb. d. Rad. u. El. 14, 139, 1917; weitere Literaturangaben siehe ebendort.
7) Literatur bei J. Stark, loc. cit.; ferner Wood u. Guthrie, Astr. Phys. Journ. 39, 211, 1909; J. C. Mc Lennan u. C. Edwards, Phil. Mag. 30, 695, 1915.
8) J. C. Mc Lennan u. Henderson, Proc. Roy. Soc. London 91, 485, 1915; 92, 305, 1916; 93, 574, 1916; J. C. Mc Lennan u. A. Thomson, Proc. Roy. Soc. London 92, 584, 1916; J. C. Mc Lennan u. Key, Proc. Roy. Soc. London 92, 591, 1916; J. C. Mc Lennan, Phys. Rev. 10, 84, 1917.
9) J. T. Tate, Phys. Rev. 7, 686, 1916; 10, 77, 1917.
10) F. S. Goucher, Phys. Rev. 8, 561, 1916.
11) v. Baeyer, Verh. d. D. Phys. Ges. 10, 96, 1908.
12) Newman, Phil. Mag. 28, 753, 1914.
13) Pawlow, Proc. Roy. Soc. 90, 398, 1914.
14) Bergen, Davis u. F. S. Goucher, Phys. Rev. 10, 84, 1917.
15) Hughes u. Dixon, Phys. Rev. 10, 495, 1917.
16) F. M. Bishop, Phys. Rev. 10, 244, 1917.
17) Richardson u. Bazzoni, Phil. Mag. 34, 285, 1917.
18) J. Tate u. Foote, Phil. Mag., Juli 1918.
19) R. A. Millikan, Phys. Rev. 9, 378, 1917.
20) T. C. Hebb, Phys. Rev. 9, 371, 1917.
21) J. Stark, T. Retschinsky u. A. Schaposchnikoff, Ann. d. Phys. 18, 213, 1905.
22) K. J. van der Bijl, Phys. Rev. 10, 546, 1917.
23) Literaturnachweise siehe unter 1).
24) R. C. Dearle, Proc. Roy. Soc. London 92, 608, 1916.
25) Lorenser, Dissertation. Tübingen.
26) R. W. Wood, diese Zeitschr. 10, 88 u. 258, 1909.
27) Dunoyer, Le Rad. 9, 177, 218, 1912.
28) Füchtbauer u. Schell, diese Zeitschr. 14, 1164, 1913; Füchtbauer u. Hoffmann, diese Zeitschr. 14, 1168, 1913.
29) P. Debye, diese Zeitschr. 18, 428, 1917.
30) R. Pohl u. P. Pringsheim, Die lichtelektrischen Erscheinungen. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1914.
31) Bazzoni, Phil. Mag. 32, 566, 1916.
32) J. M. Benade, Phys. Rev. 10, 77, 1917.
33) F. Paschen, Ann. d. Phys. 45, 625, 1914.
34) F. Mayer, Ann. d. Phys. (4) 45, 1, 1914.
35) P. Lenard, Ann. d. Phys. (4) 8, 149, 1903.
36) P. Lenard u. C. Ramsauer, I., II., u. V. Teil. Über die Wirkung sehr kurzw. Lichtes auf Gase. Heidelb. Ber. Nr. 28 u. 31, 1910; Nr. 24, 1911.
37) Th. Lyman, Nature 91, 371. 1913.
38) F. Palmer, Phys. Rev. 32, 1, 1911.
39) K. F. Herzfeld, diese Zeitschr. 18, 389, 1917.
40) Schwarzschild, Berl. Ber. 564, 1916.

*) Um das Literaturverzeichnis nicht unnötig lang werden zu lassen, wird nur auf die hauptsächlichsten Arbeiten verwiesen, aus denen sich die weitere Literatur entnehmen läßt.

Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie; Physikalisches Institut der Universität Berlin.

Berlin, Dezember 1918.

(Eingegangen 7. Januar 1919.)

BESPRECHUNGEN.

A. Defant, Wetter und Wettervorhersage. gr. 8°. VI u. 290 S. m. 142 Abb. u. 1 Karte. Leipzig u. Wien, Franz Deuticke. 1918. M. 15.— u. 20 Proz. Teuerungszuschlag.

Die vorliegende Schrift bietet eine sehr zu begrüßende Ergänzung zu den zahlreichen Darstellungen der beobachtenden Meteorologie, sowie zu den Handbüchern der theoretischen Meteorologie, indem die in diesen gewonnenen praktischen bzw. theoretischen Ergebnisse hier im Hinblick auf die Aufgabe der Vorhersage der künftigen Witterung dargelegt und ausgewertet werden. Die Kenntnis der allgemeinsten Grundbegriffe der praktischen Meteorologie wird dabei vorausgesetzt.

In einem ausführlichen ersten Teile werden die

meteorologischen Theorien, soweit sie der Wettervorhersage nutzbar zu machen sind, besonders nach dieser Richtung hin behandelt. Auf die Durchführung reichlichen Beispielmaterials ist großer Wert gelegt, und zahlreiche Kärtchen unterstützen den Gedankengang. Leider sind einige der Kärtchen stärker verkleinert, als es auf dem Papier unserer Tage zweckmäßig erscheint. Bei dem außerordentlichen Werte, welchen man dem Zustande der höheren Schichten der Atmosphäre neuerdings zuschreibt, und namentlich infolge der Kriegsverhältnisse in den letzten Jahren, welche die horizontale Verteilung der Beobachtungsstationen stark einschränkte, beimessen mußte, wäre vielleicht hier eine eingehendere Behandlung der Temperaturschichtungen in der freien Atmosphäre zu wünschen gewesen, als es im Rahmen einer Anmerkung geschehen konnte. Die Wichtigkeit der Erkenntnis des Zustandes der höheren Luftschichten für die Wettervorhersage wird in einem späteren Kapitel auch durchaus anerkannt in dem Hinweis, daß den hierauf gerichteten Beobachtungen die Zukunft der Meteorologie gehöre, welcher Ansicht wohl allgemein beigestimmt werden dürfte.

Der zweite Teil, welcher die Wettervorhersage selbst und die ihr dienenden Regeln und Erfahrungssätze behandelt, beginnt mit einer sehr klaren Darlegung der Problemstellung. Neben der ausführlich besprochenen synoptischen Methode der Beurteilung des Witterungscharakters und der Prognosenstellung, welche in den vergangenen Jahrzehnten alleinige wissenschaftliche Berechtigung beanspruchte, werden auch die neueren Bestrebungen berücksichtigt, die den lokalen Beobachtungsresultaten auf statistischer Grundlage, allein oder in Verbindung mit synoptischen Überlegungen, ihre Bedeutung für die Prognosenstellung über Gebiete beschränkten Umfanges zuweisen. In diesem Zusammenhange wird besonders auf das Fehlen hinreichend vorgearbeiteter und wissenschaftlich gesichteter Grundlagen für die Voraussage lokaler Witterungsverhältnisse hingewiesen, indem sich die bisherigen wissenschaftlichen meteorologischen Untersuchungen fast nur auf die allgemeinen Beziehungen erstreckt haben. Zwei an Hand vollständigen Kartenmateriales nach synoptischer Methode durchgeführte Wettervorhersagen für die verschiedenen Gebiete Mitteleuropas verdeutlichen die vorgetragenen Gesichtspunkte. Eine recht sorgfältige Behandlung erfährt auch die weite Kreise in verschiedenen Beziehungen interessierende Frage über die Übereinstimmung der vorausgesagten Witterung mit der tatsächlich eintretenden und über die Methoden zur zahlenmäßigen Berechnung der erzielten Treffer. Mit einigen Abschnitten über den Witterungscharakter der einzelnen Monate und seine Verknüpfung über ausgedehnte Gebiete der Erdoberfläche leitet der Verfasser zu den Versuchen über, das Wetter auf längere Zeit voraus wenigstens in allgemeinen Umrissen zu charakterisieren, denen von volkswirtschaftlichem Standpunkte bereits heute beträchtliches Interesse zuzuschreiben ist, und stellt zum Schlusse noch das Wenige zusammen, was bisher über kürzere und längere Witterungsperioden bekannt ist.

Das Buch dürfte allen denjenigen, die — besonders auch für Lehrzwecke — einen Überblick über die der praktischen Wettervorhersage im weitesten Sinne dienenden Erfahrungen gewinnen möchten, von Interesse und Nutzen sein. R. Ambronn.

Personalien.

Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.).

Habilitiert: An der Universität Tübingen Dr. Ernst Weitz (bisher in Straßburg) für Chemie, an der Tierärztlichen Hochschule Dresden Apotheker Dr. Paul Manicke für Rohstoffchemie, an der Universität Göttingen Dr. Schmeidler für reine Mathematik, an der Universität Leipzig Dr. Friedrich Levi für Mathematik.

Ernannt: Der Privatdozent der Chemie an der Universität Breslau Dr. Walter Herz zum ord. Honorarprofessor daselbst, der ord. Professor an der Technischen Hochschule Aachen Geh. Reg.-Rat Dr. Otto Grotrian zum ord. Honorarprofessor an der gleichen Hochschule, der a. o. Professor der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Stuttgart Immanuel Herrmann zum Minister des Kriegswesens in Württemberg, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Straßburg Geh. Hofrat Dr. Friedrich Schur in gleicher Eigenschaft an der Universität Breslau, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Zürich Dr. William D. Treadwell zum Professor für analytische Chemie daselbst, der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Wilhelm Steinkopf zum etatsmäßigen a. o. Professor für Chemie an der Technischen Hochschule Dresden, der Professor an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn Dr. Heinrich Tietze zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen.

Verliehen: Dem Verwaltungsassistent am Chemischen Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Karl Pfeiffer der Titel Professor, dem a. o. Professor der Mathematik an der Universität Wien Dr. Alfred Tauber Titel und Charakter eines ord. Professors.

Berufen: Der a. o. Professor an der Universität Greifswald Dr. Max Scholtz zum ord. Professor für Pharmazeutische Chemie an der Universität Breslau.

Gestorben: Der Erfinder des Rotations-Kupfer-Tiefdruckes Dr. Eduard Mertens, der frühere ord. Professor der Geographie und Ethnologie an der Universität Straßburg und Leiter der Hauptstation für Erdbebenforschung daselbst Dr. Georg Gerland, der a. o. Professor der analytischen Chemie an der Universität Jena Hofrat Dr. Ludwig Wolff, der ord. Professor der medizinischen und physiologischen Chemie an der Universität Lund Dr. Ivar Christian Bang, der ord. Professor für höhere Mathematik an der Militärtechnischen Akademie und Dozent an der Technischen Hochschule Berlin Geh. Reg.-Rat Dr. Otto Dziobek.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und **H. Th. Simon**



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 40 Mark, im Ausland 45 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 60 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.
Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstraße 2.

No. 7. | 1. April 1919. No. 539. | 20. Jahrgang.

Inhaltsverzeichnis:

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 7. 1. April 1919. 20. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 9 am 10. April 1919.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über ein Verfahren zur Bestimmung der spezifischen Leitfähigkeit des Erdbodens.

Mitteilung aus dem Laboratorium der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie m. b. H. (Telefunken).

Von M. Abraham, H. Rausch von Traubenberg und J. Pusch.

I.

Die Kenntnis der spezifischen Leitfähigkeit σ des Bodens ist für die Erdungsanlagen von Antennen von großer Bedeutung. Ihre Bestimmung muß unter solchen Bedingungen erfolgen, wie sie tatsächlich in der Praxis vorhanden sind.

Da die Erdungsmittel meistens in eingegrabenen Drähten bestehen, die 30 bis 50 cm tief unter dem Boden liegen, muß die spezifische Leitfähigkeit auch für solche Stellen des Bodens gemessen werden. Das Herausnehmen kleiner Bodenproben und deren Messung in besonderen Versuchsgefäßen erscheint keineswegs einwandfrei.

Die theoretische Durchrechnung der im Folgenden beschriebenen Versuche vereinfacht sich erheblich unter der Annahme, daß der Erdboden als guter Leiter in dem Sinne anzusehen ist, daß der Verschiebungsstrom gegen den Leitungsstrom vernachlässigt werden kann.

Man setze

$\eta = 2c\sigma\lambda$,
$c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec,
$\sigma =$ Leitfähigkeit in elm. Maß,
$\lambda =$ Wellenlänge in cm.

Wird nun eine aus zwei parallelen Drähten von vernachlässigtem kleinen Widerstande bestehende Leitung in den Halbleiter (Erde) eingegraben (Lecher-System) und an ihren Beginn eine Wechselspannung gelegt, welche mit einem ungedämpften Röhrensender erzeugt wird, so geht der Strom in jeder Querschnittsebene ($x =$ const) von einem Draht durch die Erde zum anderen über.

Dringt also die Wechselspannung in der Leitung bis zur Tiefe x vor, so ist der gesamte reziproke Widerstand der Erde proportional σx; das Vordringen des Wechselfeldes längs der Leitung erfolgt ähnlich wie das Eindringen des Wechselstromes in einem Metalldraht (skin-effect), in einer gedämpften Welle. Die Abnahme der Amplitude befolgt ein Exponentialgesetz

$$i = i_0 e^{-\beta x};$$

hierbei wird β falls man die Dielektrizitätskonstante ε gegen η vernachlässigt (Verschiebungsstrom klein gegen Leitungsstrom)

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\eta}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{c\sigma}{\lambda}}. \tag{I}$$

Die räumliche Dämpfung ist demnach um so größer, je größer die Leitfähigkeit σ und je kleiner die Wellenlänge λ ist.

Die Strecke, auf welcher die Amplitude auf $\frac{1}{e} = \frac{1}{2,72}$ sinkt, ist gegeben durch

$$x = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{\sigma c}}. \tag{II}$$

Wir nehmen an, daß die Leitung mindestens diese Länge hat, so daß die Welle sich totläuft.

Die vorstehende Formel II liefert uns bei bekanntem λ nach Messung der Stromverteilung auf den Drähten alle Daten, um σ zu ermitteln

$$\sigma = \frac{1}{4\pi^2 x^2}\frac{\lambda}{c}. \tag{III}$$

2.

Bei den praktischen Messungen wurde so verfahren, daß ein Erddraht auf Stellen, die 2,5, 5,10 m vom Anregungspunkt entfernt waren, durch Ausgraben bloßgelegt wurde. Ein Hitzdraht-Ampèremeter von geringem Widerstand wurde in den aufgeschnittenen Erddraht mit kurzen Zuleitungen direkt eingeschaltet; die Meßreihe I wurde mit einem Instrument von 4,5 Ω, die Meßreihen II und III mit einem von 0,35 Ohm inneren Widerstand aufgenommen. Der Strom wurde dann als Funktion der Entfernung von der Anregungsstelle graphisch aufgetragen und die Entfernung x, für welche $i = i_0/e$ wird aus diesen Kurven ermittelt. Die Berechnung von σ erfolgte nach Formel (III).

Meßreihe I.

Wiesenboden, gefroren.
Meß-Ampèremeter 4,5 Ω.

Wellenlänge m	Entfernung vom Erregungspunkt	Strom im Erddraht Amp.	Spezifische Leitfähigkeit σ in elm. Maß
280	0 2,5 5 10	0,25 0,13 0,075 0,025	$1,3 \cdot 10^{-13}$
540	0 2,5 5 10	0,28 0,168 0,115 0,075	$1,17 \cdot 10^{-13}$
700	0 2,5 5 10	0,255 0,16 0,115 0,075	$1,18 \cdot 10^{-13}$
880	0 2,5 5 10	0,21 0,142 0,105 0,065	$1,14 \cdot 10^{-13}$

Bei dieser Meßreihe ergibt sich σ annähernd unabhängig von λ.

Meßreihe II.

Sehr feuchter Boden.
Meß-Ampèremeter 0,35 Ω.

Wellenlänge m	Entfernung vom Erregungspunkt	Strom im Erddraht Amp.	Spezifische Leitfähigkeit σ
660	0 2,5 5 10	1,15 0,775 0,58 0,36	$8,6 \cdot 10^{-14}$
900	0 2,5 5 10	1,15 0,84 0,66 0,425	$7,4 \cdot 10^{-14}$
1130	0 2,5 5 10	1,15 0,85 0,68 0,47	$6,5 \cdot 10^{-14}$

σ ist geringer wie bei Meßreihe I und zeigt auch eine gewisse Abhängigkeit von λ.

Meßreihe III.

Feuchter Boden.
Meß-Ampèremeter 0,35 Ω.

Wellenlänge m	Entfernung v. Erregungspunkt	Strom im Erddraht Amp.	Spez. Leitfähigkeit	Widerstand R_0 Ω	σ berechnet aus R_0
610	0 2,5 5 10 15	0,875 0,58 0,44 0,25 0,10	$8,1 \cdot 10^{-14}$	36,5	$8,1 \cdot 10^{-14}$
920	0 2,5 5 10 15	1,19 0,85 0,64 0,43 0,26	$8,0 \cdot 10^{-14}$	31	$7,5 \cdot 10^{-14}$
1170	0 2,5 5 10 15	1,10 0,82 0,66 0,45 0,30	$7,7 \cdot 10^{-14}$	27	$7,8 \cdot 10^{-14}$

Wie die graphische Auswertung der Resultate zeigt, ist der Exponent β nicht konstant, der Strom nimmt also nicht als reine „e-Funktion" mit der Entfernung vom Erregungspunkt längs des Erddrahtes ab, wie es die Theorie verlangt. Zur Berechnung von σ wurde ein mittleres β ($i = i_0/e$) benutzt. Da hierdurch eine gewisse Unsicherheit in das ganze Meßverfahren kommt, wurde σ noch nach einer anderen Methode bestimmt.

3.

Dieses zweite Meßverfahren zur Ermittlung von σ beruht auf folgender Überlegung:

Wir denken uns wieder das eingegrabene Leitersystem. Zwischen Strom und Spannung an der Erregungsstelle besteht die Beziehung:

$$V = R_0 I + L_0 \frac{dI}{dt}. \qquad \text{(IV)}$$

Die Faktoren R_0 und L_0, welche die mit dem Strom gleichphasige und phasenverschobene Komponente der Spannung bedingen, können wir als Gesamtwiderstand und Gesamtselbstinduktion der eingegrabenen Leitung bezeichnen. Die Theorie ergibt dafür die folgenden Werte:

$$\left.\begin{aligned} R_0 &= \frac{\omega \cdot L\alpha}{\alpha^2 \cdot \beta^2}, \\ L_0 &= \frac{\beta L}{\alpha^2 + \beta^2}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(V)}$$

L ist dabei die Selbstinduktion in Luft pro cm Drahtlänge

$$L = 4 \ln\left(\frac{h}{\varrho}\right), \quad \text{(VI)}$$

h Abstand, ϱ Radius der Drähte in cm. Frequenz

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}.$$

Falls man den Verschiebungsstrom nicht gegen den Leitungsstrom vernachlässigt, wird

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}}{2}},$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}}{2}}.$$

für $\eta >> \varepsilon$ wird $\alpha = \beta = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\eta}{2}}$ und

$$R_0 = \frac{\omega L}{2\beta} = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{\sigma}} \frac{\ln\left(\frac{h}{\varrho}\right)}{\sqrt{\lambda}}, \quad \text{(VII a)}$$

$$\sigma = \frac{4c\left\{\ln\left(\frac{h}{\varrho}\right)\right\}^2}{R_0^2 \lambda}. \quad \text{(VII b)}$$

Der Widerstand R_0 ist der Gesamtwiderstand des Halbleiters (Erde) zwischen beiden Drähten, er wurde ebenso wie ein Antennenwiderstand durch Zuschalten eines bekannten Widerstandes bei den einzelnen Wellenlängen gemessen. Die theoretischen Überlegungen sind wie die früheren für den Fall abgeleitet, daß die Drähte sich in einem Halbleiter von unendlicher Ausdehnung befinden. Die Tatsache, daß sie nur 30 cm tief im Boden eingegraben sind, dürfte jedoch die erhaltenen Resultate nicht wesentlich beeinflussen, da die Energievorgänge sich in der unmittelbaren Umgebung der Drähte abspielen; der Drahtwiderstand selbst wurde wie schon gesagt, überall vernachlässigt.

Die Formel (VII a) verlangt, daß R_0 umgekehrt proportional zu $\sqrt{\lambda}$ wird.

Wie die Tabelle IV zeigt, ist dies bei den praktischen Messungen recht gut erfüllt.

Nach der Formel (VII b) wurde die Leitfähigkeit σ berechnet. Die erhaltenen Werte befinden sich in der letzten Spalte der Meßreihe III; sie stimmen so gut mit den aus der Stromverteilung längs des Drahtes ermittelten

Tabelle IV.

λ	$\sqrt{\lambda}$	R_0	$R_0\sqrt{\lambda}$
610	24,6	36,5	900
920	30,2	31	940
1170	34,2	27	920

Werten überein, daß die Verwendung eines „mittleren“ β berechtigt und die σ-Werte einigermaßen sichergestellt erscheinen, trotzdem die Stromabnahme nicht durch eine reine Exponentialfunktion dargestellt wird. Die beobachtete Variation von R mit $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ bestätigt die Annahme der Theorie, daß der Verschiebungsstrom gegen den Leitungsstrom beim untersuchten Boden zu vernachlässigen ist.

(Eingegangen 16. Januar 1919.)

Zur Theorie der Drahtwellen in einem leitenden Medium.

Von M. Abraham.

Man denke sich eine aus zwei parallelen Drähten bestehende Leitung in ein unbegrenztes Medium (von der Dielektrizitätskonstante ε, der Leitfähigkeit σ, der Permeabilität μ) eingebettet. Die Lösungen der Feldgleichungen, welche längs der Drähte fortschreitenden elektromagnetischen Wellen entsprechen, ergeben sich in ganz entsprechender Weise, wie für den Fall eines isolierenden Mediums[1]). Die transversalen Feldkomponenten sind durch die Gleichungen miteinander verknüpft[2]).

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_y &= -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_z &= +\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}, \\ -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} &= +\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die longitudinalen Komponenten $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{H}_x$ sind gleich Null gesetzt; damit ist vorausgesetzt, daß der Widerstand der Drähte zu vernachlässigen ist.

Aus (1) und (2) ergibt sich für jede der magnetischen Feldkomponenten $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$, und somit auch für die, durch die erste Haupt-

1) Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität, Bd. I, § 72.

2) Vgl. l. c. Gleichung 214a, c. In (1) ist indessen der Leitungsstrom im Medium berücksichtigt.

gleichung mit ihnen verknüpfte, Stromstärke J in den Drähten die Telegraphengleichung:

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial J}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}. \qquad (3)$$

Die nämliche Gleichung folgt aus (1, 2) für die elektrischen Feldkomponenten $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$, mithin auch für die Spannung Φ zwischen den Drähten; sie gilt übrigens auch[1]) für den Fall ebener homogener Wellen in dem leitenden Medium.

Wir lösen sie durch den komplexen Ausdruck

$$J = J_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{ikx}, \qquad (4)$$

wo

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \qquad (5)$$

die Frequenz der (ungedämpften) Schwingungen, λ die Wellenlänge in Luft bedeutet. Einsetzen von (4) in (3) ergibt

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon\mu + \frac{4\pi\sigma\mu}{\omega}i\right),$$

oder auch

$$k^2 = \frac{\omega^2\mu}{c^2}(\varepsilon + \eta i), \qquad (6)$$

mit

$$\eta = \frac{4\pi\sigma}{\omega} = \frac{2\sigma\lambda}{c}. \qquad (6a)$$

Messen wir die Leitfähigkeit des Mediums elektromagnetisch (σ_m), so lautet (6a):

$$\eta = 2c\sigma_m\lambda. \qquad (6b)$$

Der reelle und imaginäre Teil im Ausdruck (6) von k^2 rühren vom Verschiebungsstrom und vom Leitungsstrom her. Setzen wir nun

$$k = \alpha + \beta i, \qquad (7)$$

mithin

$$k^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i,$$

so folgt aus (6)

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\cdot\varepsilon,$$

$$2\alpha\beta = \frac{\omega^2}{c^2}\cdot\eta,$$

und daher

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\cdot\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}.$$

Man erhält daraus

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}}{2}}, \qquad (7a)$$

$$\beta = \frac{\omega}{c}\cdot\sqrt{\frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}}{2}}. \qquad (7b)$$

1) l. c. Gleichung 206g § 69.

Ist $\varepsilon << \eta$, d. h. der Verschiebungsstrom gegen den Leitungsstrom zu vernachlässigen, so wird[1])

$$\alpha = \beta = \frac{\omega}{c}\cdot\sqrt{\frac{\eta}{2}} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\eta}{2}}. \qquad (7c)$$

Gemäß (7) schreibt sich der komplexe Ausdruck (4) für die Stromstärke:

$$J = J_0 \cdot c^{-\beta x} \cdot e^{i(\alpha x - \omega t)}. \qquad (8)$$

Wie man hieraus ersieht, gibt β die räumliche Dämpfung der längs der Leitung fortschreitenden Wellen an, $\frac{\omega}{\alpha}$ ihre Geschwindigkeit; demnach ist ihre Wellenlänge im leitenden Medium:

$$\lambda' = \frac{2\pi}{\alpha} = \lambda\sqrt{\frac{2}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}}}. \qquad (8a)$$

Gleichung (8) stellt eine in Richtung der positiven x-Achse fortschreitende Welle dar; sie wird nur dann dem wirklichen Vorgang entsprechen, wenn die Leitung so lang ist, daß die Wellen sich wegen der räumlichen Dämpfung auf ihr totlaufen; sonst sind die am Ende der Drähte zurückgeworfenen Wellen in Betracht zu ziehen.

Durch die Stromstärken $\pm J$ ist auch für den betreffenden Querschnitt der Paralleldrähte, der Induktionsfluß Ψ zwischen ihnen bestimmt[2]):

$$\Psi = \frac{1}{c}\cdot LJ; \qquad (9)$$

für L, die auf die Längeneinheit der Drähte bezogene Selbstinduktion der Paralleldrähte, gilt die Formel[3]):

$$L = 4\mu \ln\left(\frac{h}{\varrho}\right) \qquad (10)$$

h Abstand, ϱ Radius der Drähte, es ist $\varrho << h$ angenommen.

Nun besteht zwischen dem Induktionsfluß Ψ und der Spannung Φ die allgemeine Beziehung, welche unmittelbar aus dem Induktionsgesetz, d. h. aus der Gleichung (2) folgt[4]):

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}. \qquad (11)$$

Nach (9) ist also

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{1}{c}L\frac{\partial J}{\partial t}. \qquad (11a)$$

Wie oben erwähnt wurde, gilt auch für die Spannung Φ die Telegraphengleichung (3); sie

1) Das ist Gleichung I der vorigen Mitteilung.
2) l. c. Gleichung 216d in § 72.
3) l. c. Gleichung 220f in § 74. Für $\mu = 1$ folgt Gleichung VI der vorigen Mitteilung.
4) l. c. Gleichung 217b, § 72.

ist durch den, Gleichung (4) entsprechenden, komplexen Ausdruck zu lösen:

$$\Phi = \Phi_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{ikx}. \qquad (12)$$

Aus (11a), (12) und (4) folgt nun

$$\Phi_0 = \frac{\omega L}{kc^2} \cdot J_0, \qquad (13)$$

eine Beziehung, die sich gemäß (7) schreiben läßt:

$$\Phi_0 = \frac{\omega L(\alpha - \beta i)}{c^2(\alpha^2 + \beta^2)} \cdot J_0. \qquad (13a)$$

Dabei stellen

$$\Phi_0 e^{-i\omega t} \text{ und } J_0 e^{-i\omega t}$$

Spannung und Strom an der Erregungsstelle ($x = 0$) dar. Demgemäß sind die, magnetisch gemessenen, Werte des Widerstandes R_0 und Selbstinduktion L_0 der gesamten Leitung definiert durch

$$\Phi_0 = \frac{1}{c^2}(R_0 - i\omega L_0) J_0. \qquad (14)$$

Aus (13a) erhält man für diese Größen schließlich die Formeln[1]):

$$R_0 = \frac{\omega L \alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad (14a)$$

$$L_0 = \frac{L\beta}{\alpha^2 + \beta^2}. \qquad (14b)$$

Dabei ist L durch Gleichung (10) bestimmt.

1) Das sind die Gleichungen V der vorigen Mitteilung.

(Eingegangen 9. Januar 1919.)

Über die Phasenverhältnisse beim Audion mit Rückkoppelung.

Von W. Brandt.

Der Vorgang der Rückkoppelung ist bekanntlich der folgende. Durch eine Wechselspannung zwischen Gitter und Glühkathode werden im Anodenkreis Schwingungen erzeugt. Diese Schwingungen erregen nun mit Hilfe irgendeiner Koppelung neuerdings eine Wechselspannung zwischen Gitter und Kathode, welche sich der ursprünglich vorhandenen überlagert, ihre Amplitude vergrößert, dadurch wieder die Schwingungen im Anodenkreis verstärkt usw. Nun ist es offenbar nicht gleichgültig, ob die ursprüngliche Wechselspannung und die durch Rückkoppelung erzeugte in Phase oder ob sie gegeneinander verschoben sind. Wenn sie in Phase sind, wird die Amplitude der resultierenden Schwingung am größten sein; dieser Fall ist der günstigste. Der ungünstigste Fall tritt ein, wenn sie um 180° gegeneinander verschoben sind. Dann werden sich die Amplituden subtrahieren, und es wird statt der Verstärkung eine Schwächung eintreten, bzw. bei der Verwendung des Audions als Generator werden Schwingungen überhaupt nicht zustande kommen. Für jede andere Phasenverschiebung wird eine ihr entsprechende Verstärkung oder Schwächung eintreten, welche zwischen diesen beiden Extremen liegt. Der Zweck der im folgenden beschriebenen Versuche war nicht, die einzelnen Ursachen einer solchen Phasenverschiebung zu trennen und quantitativ zu bestimmen, sondern zu zeigen, daß sie auftritt und stets die verstärkende Wirkung der Rückkoppelung mehr oder weniger beeinträchtigt. Es sei nur auf die Umstände hingewiesen, die eine Phasenverschiebung bedingen.

Zunächst die Verhältnisse im Innern der Röhre. Die Vorgänge im Audion und die Rolle, die die Trägheit der Entladung dabei spielt, sind noch nicht genügend geklärt, um voraussagen zu lassen, ob die Wechselspannung zwischen Gitter und Kathode und die dadurch erzeugten Schwingungen im Anodenkreis in Phase sind oder nicht. Während Lindemann und Hupka bei Versuchen mit der Liebenröhre bei 50 ∾ Wechselstrom durch oszillographische Aufnahme unter Umständen eine beträchtliche Phasenverschiebung feststellen konnten, scheinen bei Röhren mit höherem Vakuum die Trägheitswirkungen geringer zu sein. Ferner die Art der Rückkoppelung. Durch diese ist die Phase der Schwingungen im Anodenkreis zu der durch die Rückkoppelung erzeugten EMK im Gitterkreise bestimmt. Weiteres durch die Verhältnisse im Gitterkreise selbst. Dieser stellt einen Schwingungskreis, bestehend aus Selbstinduktion, Kapazität und parallel zu dieser geschaltetem Widerstand, der durch den Ionisierungszustand zwischen Glühkathode und Gitter gegeben ist, dar. Durch diese Größe ist wieder die Phase zwischen der erzeugten EMK und der am Gitter auftretenden Spannung bestimmt.

Bei den Versuchen verwendete ich eine Vorrichtung, welche gestattet, die Phase der durch Rückkoppelung erzeugten Spannung willkürlich zu verändern. Dies ist in der folgenden Anordnung erzielt (Fig. 1). Der Anodenkreis ist an 440 Volt angeschlossen. Im Schwingungskreis, der durch die Selbstinduktionen L und L_1 und die Kapazität C_1 gebildet wird, liegt die Spule S_1. Mit diesem Kreis ist durch die Koppelung M ein zweiter Schwingungskreis gekoppelt, der in Resonanz mit ihm ist, und in dem die Spule S_2 liegt, die rechtwinklig zu S_1 steht. Da die Ströme in den beiden Kreisen um 90°

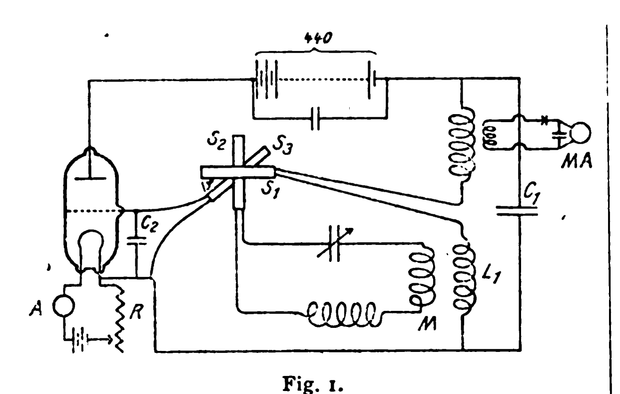


Fig. 1.

verschoben sind, entsteht innerhalb der beiden Spulen ein Drehfeld. In den beiden Spulen ist eine dritte, S_3 drehbar angeordnet, deren Enden einerseits am Gitter, andererseits an der Kathode liegen. Infolge des Drehfeldes entsteht in S_3 eine Wechselspannung, deren Phase von der Stellung der Spule S_3 abhängig ist. Dies stellt eine Rückkoppelungsvorrichtung dar, deren Phase beliebig veränderlich ist. Der Heizstrom für den Glühfaden ist durch den Widerstand R regulierbar und am Ampèremeter A ablesbar. Der Schwingungskreis LL_1C_1 ist ferner mit einem Detektorkreis gekoppelt, in dem das Strommeßinstrument MA liegt.

In Fig. 2 sind die Verdrehungswinkel φ der Spule S_3 als Abszissen und die zugehörigen Aus-

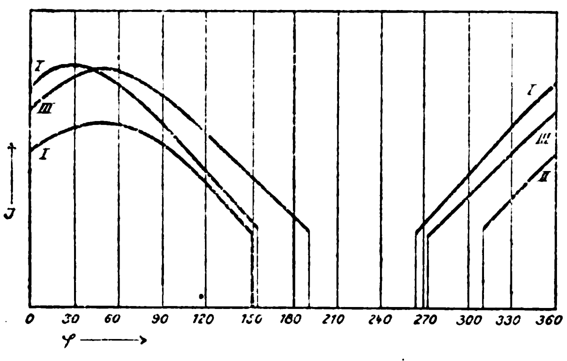


Fig. 2.

schläge des Instruments MA als Ordinaten aufgetragen. Der erste Versuch, dessen Verlauf die Kurve I darstellt, wurde bei einer Heizstromstärke von 2,4 Ampère gemacht. Bei Verdrehung von S_3 von der Parallelstellung zu S_1 angefangen, stieg der Ausschlag zunächst, bis er bei einem Winkel von etwa 30° sein Maximum erreichte. Hierauf fiel er wieder, bis die Schwingungen plötzlich aufhörten. Bei weiterer Verdrehung setzten sie wieder ein und die Ausschläge stiegen wieder.

Die Kurve II stellt den Verlauf bei einer Heizstromstärke von nur 2,2 Ampère dar. Hier ist das Maximum noch weiter verschoben. Da gegen früher bloß die Verhältnisse im Innern der Röhre geändert wurden, nämlich durch schwächeres Glühen der Kathode, so zeigt dieser Versuch, daß der Ionisierungszustand des Audions zweifellos einen Einfluß auf die Phase der durch Rückkoppelung erzeugten Spannung ausübt. In diesem Falle scheint der Grund der zu sein, daß infolge größerer Trägheit der Entladung eine größere Phasenverschiebung zwischen Gitterspannung und dadurch erzeugten Schwingungen im Anodenkreis eingetreten ist.

Die dritte Kurve III, wurde bei einer Heizstromstärke von 2,4 Ampère, jedoch mit einer Spule S_3 von geringerer Windungszahl und mit größerer Kapazität C_2 aufgenommen. Auch hier ist das Maximum weiter verschoben, es bedingt also auch die geringere Gitterspannung eine größere Phasenverschiebung.

Zur Orientierung über die Verhältnisse bei Niederfrequenz wurde eine Reihe von Versuchen mit 50 ∾ Wechselstrom angestellt. Hier war das Audion nicht als Generator, sondern als Verstärker mit Rückkoppelung geschaltet. Statt der bei Hochfrequenz verwendeten Rückkoppelungsvorrichtung der Fig. 1 wurde ein kleiner Drehtransformator verwendet, der ebenfalls gestattet, die Phase der erzeugten Wechselspannung zu verändern. Der Kondensator C_2 wurde weggelassen. Die Kurven der Fig. 3, die bei

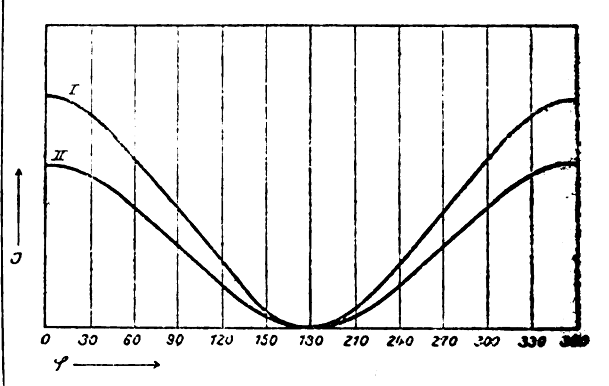


Fig. 3.

dieser Anordnung aufgenommen wurden, zeigen jedoch, daß das Maximum der Verstärkung stets mit der Phasengleichheit der durch Rückkoppelung erzeugten Spannung und des Anodenstroms zusammenfällt, woraus auf Phasengleichheit zwischen ursprünglicher Gitterspannung und Anodenstrom geschlossen werden muß. Kurve I ist mit einer Heizstromstärke von 2,4, Kurve II mit einer solchen von 2,2 Ampère aufgenommen, die Lage des Maximums ist bei beiden dieselbe. Bei Niederfrequenz ist also ein Einfluß des Ionisie-

rungzustandes nicht zu konstatieren, erst bei Hochfrequenz macht sich ein solcher geltend.

Das Ergebnis der Versuche ist also qualitativ das folgende: Bei Hochfrequenz ist die durch gewöhnliche Rückkoppelung erzeugte Wechselspannung in den meisten Fällen nicht in der günstigsten Phase, was die verstärkende Wirkung der Rückkoppelung beeinträchtigt. Diese Phasenverschiebung läßt sich jedoch durch die angegebene Vorrichtung korrigieren.

Wien, im Dezember 1918.

(Eingegangen 3. Januar 1919.)

Eine Methode zur Messung der Sicht.

Von A. Wigand.

(Mit Tafel V.)

Die Bestimmung der Sicht geschieht bisher in der Meteorologie sowie bei der Schiffahrt und Luftfahrt durch Schätzung nach dem Augenschein, indem man die Entfernung angibt, bis zu der ein Ziel noch eben erkennbar ist.

Ein quantitatives Meßverfahren hat sich trotz des dringenden Bedürfnisses, das dafür besteht, bis jetzt nicht eingeführt. Vorschläge und Versuche dazu sind zwar gemacht worden. Man dachte daran, die Messung der Lichtabsorption in der Luft zu verwenden, wobei jedoch das Sichtproblem nicht vollständig erfaßt wird.

Solche Versuche[1]) sind zur Messung der Durchsichtigkeit (Transmission oder Transparenz) der Luft bereits von Saussure (1789), Schlagintweit (1848) und Beer (1854) nach der diaphanometrischen Methode angestellt worden, indem die Erkennbarkeit schwarzer Kreisflächen auf weißen Tafeln in ihrer Abhängigkeit von der Entfernung bestimmt wurde. Auch die Photometrierung der Helligkeit weißer Flächen zur Messung der Durchsichtigkeit der Luft für kleine Entfernungen durch Wild, für große Entfernungen durch Oddone und bei Nebel durch Haecker[2]) ist hier zu erwähnen. Ferner benutzten R. Seeliger und Schlechtriem bei militärischen Versuchen Sichtbarkeitstafeln mit geeigneten, in der geometrischen Form, Helligkeit und Färbung abgestuften Figuren, nach deren Erkennbarkeit die verschiedenen Grade der Sicht beurteilt wurden; auch versuchten sie, den komplexen Begriff der Sichtigkeit zu analysieren und mathematisch auszudrücken.

1) A. Winkelmann, Handbuch der Physik, 2. Aufl., 6. Band, 1906, S. 553; J. M. Pernter und F. M. Exner, Meteorologische Optik, 1910, S. 657.

2) G. Haecker, Diss. Kiel 1905; Meteorolog. Zeitschr. 22, 343, 1905.

Ein allgemein brauchbares Verfahren, ein zugleich einfaches und hinreichend genaues Meßgerät zur quantitativen Sichtbestimmung liegt jedoch noch nicht vor. Daher sind auch die Gesetzmäßigkeiten, nach denen die Sicht zustandekommt und sich ändert, noch wenig erforscht.

Um hier Abhilfe zu schaffen, wurde nach meinen Angaben von der Firma B. Halle Nachf., Steglitz, der „Sichtmesser" konstruiert.

Beschreibung des Sichtmessers (Fig. 1[1])).

Ein Satz von Filtergläsern mit linear abgestufter Trübung ist in einer drehbaren Scheibe so angeordnet, daß die einzelnen Filter revolverartig vor das Auge gebracht werden können. Die Filter sind entsprechend dem Grade ihrer Trübung mit 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 beziffert und für grobe Einstellung bestimmt. Ein weiteres Filter mit dem Trübungsgrad 1 zur feineren Einstellung ist auf einer kleineren, zweiten drehbaren Scheibe so angebracht, daß es zu dem jeweils vor dem beobachtenden Auge befindlichen, geradzahligen Filter hinzugefügt werden kann. Dadurch ist die Einstellung jeder ganzzahligen Filterzahl zwischen 0 und 15 möglich.

Die Beobachtung wird einäugig ausgeführt. Je nachdem, ob der Beobachter besser rechts- oder linksäugig arbeitet, kann er den Sichtmesser für seinen Gebrauch leicht verstellen. Eine der Gesichtsform angepaßte Maske verhindert den Eintritt störenden Seitenlichtes und schaltet das nicht beobachtende Auge mühelos aus.

Ein Handgriff befindet sich unten an dem Instrument.

Ausführung der Beobachtungen.

Das Verfahren der Bestimmung der Sicht mit dem Sichtmesser ist eine Nullmethode. Der Grundgedanke bei der Messung ist der, daß zu der jeweils vorhandenen, in der Güte der Sicht zum Ausdruck kommenden Trübung der Luft eine künstliche Trübung in dem Maße hinzugefügt wird, daß ein ins Auge gefaßtes Ziel gerade eben nicht mehr erkennbar wird. Dabei sind unter „Trübung der Luft" alle die Faktoren zusammengefaßt, die zwar physikalisch und physiologisch sehr verschiedene Natur haben, aber gemeinsam jene optische Wirkung hervorbringen, die man als „Sicht" bezeichnet.

Zur Ausführung einer Beobachtung hält man den Sichtmesser am Handgriff dicht

1) Die Figur befindet sich auf Tafel V.



vor das Gesicht, bringt das Ziel in die Mitte des Gesichtsfeldes und dreht mit der freien Hand zunächst die größere Scheibe bis zum Verschwinden des Zieles. Dann geht man wieder um eine geradzahlige Filterstufe herunter und schaltet zur feineren Einstellung das Filter 1 auf der kleineren Scheibe vor. Je nachdem, ob das Ziel dann noch erkennbar ist oder nicht, hat man als Ergebnis der Messung die nächst höhere gerade Zahl oder die eingestellte gerade Zahl plus 1 als Filterzahl zu nehmen.

Bei Sonnenschein muß man durch Beschattung (nötigenfalls mit der freien Hand) vermeiden, daß die Filter von den Sonnenstrahlen getroffen werden, da sich sonst ihr Trübungsgrad wesentlich erhöht.

Als Ziel wird für horizontale Sichtmessungen am Boden ein erhöhtes Objekt im Gelände genommen, das sich deutlich vom Horizont abhebt (z. B. Turm, Haus, Schornstein, Baum, Bergspitze). Die günstigste Größe des Zieles ist 0,2—0,5° Höhe und Breite. Will man bei sehr guter Sicht ein weit entferntes, kleines Ziel benutzen, so empfiehlt sich die Verwendung eines Fernglases zwischen Auge und Sichtmesser. Die Seehöhe des Zieles soll von der des Beobachters nicht erheblich abweichen. Die Entfernung soll auf mindestens 3 Proz. genau bekannt sein. Für die meisten vorkommenden Fälle wird es bei einer Beobachtungsstelle in der Regel genügen, wenn man zwei Ziele mit Entfernungen von etwa 0,1 km (für Nebel) und 3—5 km (für Dunst) hat; durch eine größere Anzahl von Zielen in verschiedener Entfernung läßt sich die Genauigkeit erhöhen. Die Ziele liegen zweckmäßig nach Norden. Für ihre Auswahl ist zu berücksichtigen, daß die Dunst- und Nebelverhältnisse auf der Strecke normal sein müssen. Findet auf der Strecke zum Ziel lokale Dunst- oder Nebelbildung statt (Eisenbahn, Fabrik, Stadt, Wasserflächen, nasse Wiesen), so ist das Ziel ungeeignet. Auch darf die Strecke nicht ungleichmäßig beleuchtet sein (bei teilweiser Bewölkung). Zur Messung nimmt man das entfernteste, bei der herrschenden Sicht noch erkennbare Ziel.

Für die Messung der vertikalen Sicht vom Boden aus benutzt man als Ziel einen Ballon oder ein Flugzeug mit bekannter Entfernung und Seehöhe. Wird vom Ballon oder Flugzeug aus mit dem Sichtmesser beobachtet, so legt man als Ziel ein genügend großes weißes Tuch mit schwarzem Kreuz auf dem Boden aus.

Wenn Fehlsichtigkeit des Auges mit Brille oder Fernglasokular so korrigiert wird, daß man das Ziel deutlich sieht, so ist die Einstellung des Sichtmessers unabhängig vom Wechsel der Versuchsperson. Bei Zwischenschaltung eines Fernglases zwischen Auge und Sichtmesser ergibt sich dieselbe Einstellung wie ohne Fernglas. Beobachtung mit dem Fernglas zwischen Sichtmesser und Ziel ist zu vermeiden, da man alsdann eine andere Einstellung erhält als ohne Fernglas.

Die Konstanz der Sicht ist wegen zeitlicher Schwankungen und örtlicher Verschiedenheiten nicht beträchtlich. Die Einteilung des gesamten Meßbereichs von dichtestem Nebel bis zu klarster Luft in fünfzehn ganzzahlige Filterstufen ist zur Erzielung der größten Meßgenauigkeit vollkommen ausreichend. Bei mehrmaliger Einstellung kurz hintereinander auf dasselbe Ziel erreicht man eine Genauigkeit von $\pm 0,5$ Einheiten der Filterskala.

Theorie.

Man versteht unter dem üblichen Begriffe „Sicht“ die Erkennbarkeit mehr oder weniger entfernter Objekte.

Um zu einer physikalischen Analyse des Begriffes der Sicht und zu einer scharfen Definition zu gelangen, unterscheiden wir zunächst zwischen mechanischer, thermischer und optischer Trübung der Luft.

Die mechanische Trübung der Luft ist bestimmt durch Anzahl, Größe, Natur, Aggregatzustand und Form der luftfremden Teilchen (Staub, Dunst- und Nebeltröpfchen, Eiskristalle).

Die thermische Lufttrübung entsteht durch ungleichmäßige Erwärmung der Luft, besonders in der Nähe des Erdbodens, und äußert sich in örtlich-zeitlichen Schwankungen der Luftdichte („thermische Schlierenbildung“).

Die optische Trübung der Luft kommt in der Güte der Sicht zum Ausdruck; für sie sind zunächst die mechanische und thermische Trübung, sodann noch einige weitere physikalische und physiologisch-optische Faktoren maßgebend. Je geringer die optische Trübung, desto besser die Erkennbarkeit eines Zieles, desto besser also die Sicht.

Die optische Trübung der Luft entsteht durch folgende Wirkungen, die wir als Elemente der Sicht bezeichnen können:

1. Mechanische Trübung der Luft. Sie äußert sich optisch durch Lichtabsorption und Lichtzerstreuung.

   a) Lichtabsorption. Nach Maßgabe der mechanischen Trübung der Luft wird ein Teil des vom Ziele kommenden Lichtes auf seinem Wege zum Beobachter absorbiert, das Ziel durch die

luftfremden Körperchen teilweise abgedeckt. Die Absorption verändert Helligkeits- und Farbunterschiede des Zieles gegen seinen Hintergrund.

b) Lichtzerstreuung. Durch diffuse Reflexion, Brechung und Beugung zerstreuen die luftfremden Teilchen nach dem Grade der mechanischen Lufttrübung das auf sie treffende Licht und schwächen dadurch einerseits das vom Ziele ausgehende Licht (teilweise Abdeckung), während sie andererseits eine Eigenhelligkeit der Luft vor dem Ziele erzeugen („Dämmerungsstrahlen"). Die Zerstreuung gleicht Helligkeitsunterschiede aus und verändert Farbunterschiede. Von einer gewissen Eigenhelligkeit der Luft an ist der Helligkeitsunterschied des Zieles gegen seinen Hintergrund nicht mehr wahrnehmbar.

2. Thermische Trübung der Luft. Durch Schlierenbildung verschieden temperierter Luftmassen wird die geradlinige Fortpflanzung der Lichtstrahlen gestört, da die Luft infolge der Dichteschwankungen auch in bezug auf ihr Lichtbrechungsvermögen inhomogen ist. Die Schlierenbildung auf der Strecke zwischen Ziel und Beobachter beeinträchtigt die Erkennbarkeit der Form des Zieles und gleicht durch Lichtzerstreuung Helligkeits- und Farbunterschiede aus.

3. Wind. Schwankungen der Dichte und damit des Lichtbrechungsvermögens der Luft werden auch vom Winde erzeugt, zunächst allgemein infolge inhomogener Windstruktur, aber auch durch Wirbelbildung an Hindernissen und durch Bildung von Randwirbeln an der Grenze verschiedener Strömungen. „Windschlieren" können optisch trübend wirken wie thermische Schlieren.

4. Feuchtigkeit. Bei der Mischung von trockener und feuchter Luft entstehen „Feuchtigkeitsschlieren", die ebenso wie thermische Schlieren eine optische Lufttrübung erzeugen können.

5. Beleuchtung. Für die optische Wirkung der mechanischen und Schlierentrübung der Luft ist die Richtung, Stärke und Farbe der Beleuchtung des Zieles und der Luftstrecke zwischen Ziel und Beobachter mitbestimmend. Bei unveränderter mechanischer und Schlierentrübung bewirkt die Variation dieser Beleuchtungsfaktoren beträchtliche Veränderungen der optischen Trübung und damit der Sicht. Im Sonnenschein zeigt die Sicht für verschiedene Blickrichtungen große Unterschiede, auch im Vergleich zur Sicht bei bedecktem Himmel mit gleichmäßiger, diffuser Beleuchtung. Tiefstehende Sonne mit schwachem, langwelligem Licht ergibt andere Sichtwerte als hochstehende Sonne mit stärkerer, kurzwelligerer Beleuchtung.

6. Physiologisch-optische Wirkungen. Die veränderliche Empfindlichkeit des Auges und seine Adaptation bei Verschiedenheiten der Beleuchtungsstärke und des Helligkeitsunterschiedes zwischen Ziel und Hintergrund beeinflußt vermutlich die Sicht, unabhängig von den übrigen Sichtelementen. Durch Blendung kann eine merkliche Sichtveränderung entstehen. Die individuelle Verschiedenheit der Augen bei Beobachterwechsel scheint für den Einfluß der physiologisch-optischen Faktoren auf die Sicht nicht wesentlich zu sein; dies ist jedoch, besonders hinsichtlich der Sehschärfe noch näher zu untersuchen.

Ob die Aufzählung dieser Elemente der Sicht vollständig ist, mag noch dahingestellt bleiben. Jedenfalls sollen in den Begriff der Sicht alle diejenigen Faktoren einbezogen werden, von denen die Sicht nach dem üblichen Gebrauch des Wortes abhängig ist. Dazu gehört nicht die Entfernung zwischen Ziel und Beobachter. Diese ist vielmehr bei den Beobachtungen durch Reduktion auf die Einheit der Entfernung auszuschalten.

Bei der Augenuntersuchung trennt der Ophthalmologe seit langem Licht-, Farben- und Formsinn. Demgemäß kann man auch bei der Analyse des Sichtbegriffes verfahren. Seeliger und Schlechtriem trennten die „Kontrastsichtigkeit", bei der es sich um den Helligkeits- und Farbengegensatz des Zieles gegen seine Umgebung handelt, von der „Formsichtigkeit", die sich auf die Umrisse des Zieles bezieht, und entwarfen nach diesem Gesichtspunkte die Figuren ihrer Sichtigkeitstafeln. Im Interesse der Einfachheit der Meßmethode können wir hier von dieser Unterscheidung absehen, da die Formsichtigkeit für die Gesamtsicht wahrscheinlich nur eine verhältnismäßig geringe Rolle spielt. —

Bei der Methode des Sichtmessers steigert man die natürliche Trübung der Luft durch Hinzufügung der künstlichen Filtertrübung bis zum Verschwinden des Zieles. Die optische Trübung der Mattfilter kommt zwar nicht genau in derselben Weise wie die optische Lufttrübung zustande, enthält jedoch wie diese als wesentlichste Faktoren die Absorption und Zerstreuung des Lichtes durch die trübenden Körnchen der mattierten Glasoberfläche, was sich in teilweiser Abdeckung des Zieles und Aufhellung des Zwischenmediums äußert. Die Erfahrung zeigt, daß die beim Sichtmesser verwendeten Mattfilter zur Sichtbestimmung durchaus geeignet sind, da die Art ihrer Trü-

bung (Körnchenzahl, Körnchengröße, Grauton) den natürlichen Verhältnissen der Lufttrübung angepaßt ist. Die Anzahl der Körnchen auf dem cm^2 ist von der Größenordnung 10^6.

Bei der Herstellung des abgestuften Filtersatzes wird die Steigerung des Trübungsgrades der einzelnen Filter von Stufe 1 auf 2 durch Steigerung der Körnchenzahl und -größe, bei den übrigen geradzahligen Stufen durch Hinzufügung je eines Filters vom Trübungsgrad der Stufe 2 erreicht. Die optische Trübung der Mattfilter ist angenähert proportional der Anzahl der aufeinandergelegten, gleichgetrübten Einzelfilter. Diese Mattfilter beeinflussen also das Licht in anderer Weise als Farbfilter, da sich bei mehreren hintereinander geschalteten Mattfiltern sowohl der Betrag der Abdeckung des Zieles, wie auch die diffuse Aufhellung der einzelnen Filter addieren. Eine nähere Untersuchung dieser Eigenschaft steht noch aus.

Der Trübungsgrad der einzelnen Mattfilter wird bei ihrer Herstellung von der Firma durch Vergleich mit Normalfiltern so bemessen, daß keine merklichen Abweichungen von den ganzzahligen Werten der Filterzahlen auftreten und der Trübungsgrad bei sämtlichen Instrumenten übereinstimmt. Dies wird außerdem vom Verfasser geprüft. Ferner ist durch das Herstellungsverfahren auch die Einhaltung der besonderen Art der Trübung, sowie ihre Gleichmäßigkeit und Unveränderlichkeit gewährleistet. —

Zur Berechnung der Sicht aus der Beobachtung mit dem Sichtmesser und der Entfernung des Zieles machen wir folgenden Ansatz: Es sei

l die Entfernung des Zieles in Kilometern;

a der optische Trübungsgrad des auf Verschwinden des Zieles in der Entfernung l eingestellten Filters („Filterzahl");

a_m der Wert von a für beste Sicht, unabhängig von l.

Dann ist:

$(a_m - a)$ der optische Trübungsgrad der Luft für die Entfernung l, ausgedrückt in Graden der Filterskala;

$\frac{a_m - a}{l}$ der optische Trübungsgrad der Luft für $l = 1$ km.

Die Sicht S sei definiert als der reziproke Wert des optischen Trübungsgrades der Luft für $l = 1$ km:

$$S = \frac{l}{a_m - a}.$$

Nach diesem Ansatz müssen sich bei unveränderter Sicht für verschiedene Entfernungen l konstante Werte für S ergeben, was durch zahlreiche Versuche bestätigt ist.

Wenn man annimmt, daß sich die Größe a (optischer Trübungsgrad eines Filters) als Verhältnis zweier Lichtintensitäten darstellen läßt, was noch zu untersuchen ist, dann sind a und a_m dimensionslose Zahlen, und S hat die Dimension einer Länge. „Sicht" ist diejenige Entfernung in Kilometer, auf welcher der optische Trübungsgrad der Luft gleich dem optischen Trübungsgrad 1 der Filterskala des Sichtmessers ist.

Der optische Trübungsgrad der Einheit der Filterskala ist willkürlich gleich 1 gesetzt. Die Größe a_m (Filterzahl für beste Sicht) ist eine durch den einmal gewählten Trübungsgrad des Einheitsfilters gegebene Konstante und hat den Wert

$$a_m = 14{,}3.$$

Sie wird bestimmt, indem man bei zahlreichen verschiedenen Sichtgraden (Dunst und Nebel) und räumlich gleichmäßiger Sichtverteilung jedesmal für zwei Ziele mit den Entfernungen l_1 und l_2 die zugehörigen Werte a_1 und a_2 mißt. Da für jedes Wertepaar a_1 und a_2 ein bestimmter S-Wert gilt, so ist für die Berechnung von a_m:

$$S = \frac{l_1}{a_m - a_1} = \frac{l_2}{a_m - a_2}.$$

Daraus:

$$a_m = \frac{l_1 a_2 - l_2 a_1}{l_1 - l_2}.$$

Die einzelnen, nur wenig voneinander abweichenden Werte von a_m werden dann zu einem Mittel vereinigt.

Zur Vermeidung von Rechnungen ist eine Fluchtlinientafel (Fig. 2) beigegeben, aus der zu den zusammengehörigen, beobachteten Werten von l und a sofort der Sichtwert S entnommen werden kann. Zu diesem Zwecke legt man durch die Punkte für l und a auf den betreffenden Punktreihen ein Lineal oder einen gespannten, dünnen Faden und liest im Schnittpunkte mit der S-Punktreihe den zugehörigen Sichtwert ab. Die verschiedenen Bezifferungen der Punktreihen für l und S gehören nach der Bezeichnung (1), (2), (3) zusammen derart, daß (1) bei schlechter, (2) bei mittlerer, (3) bei guter Sicht benutzt wird.

Die Beziehung zwischen S, l und a gilt bei Tage für bedeckten Himmel. Für Sonnenschein ist sie bei Verwendung mehrerer, verschieden entfernter Ziele nur dann brauchbar, wenn diese Ziele nahezu in gleicher Richtung liegen, da die Sicht abhängig ist von der Beleuchtungsrichtung. Der Verlauf dieser

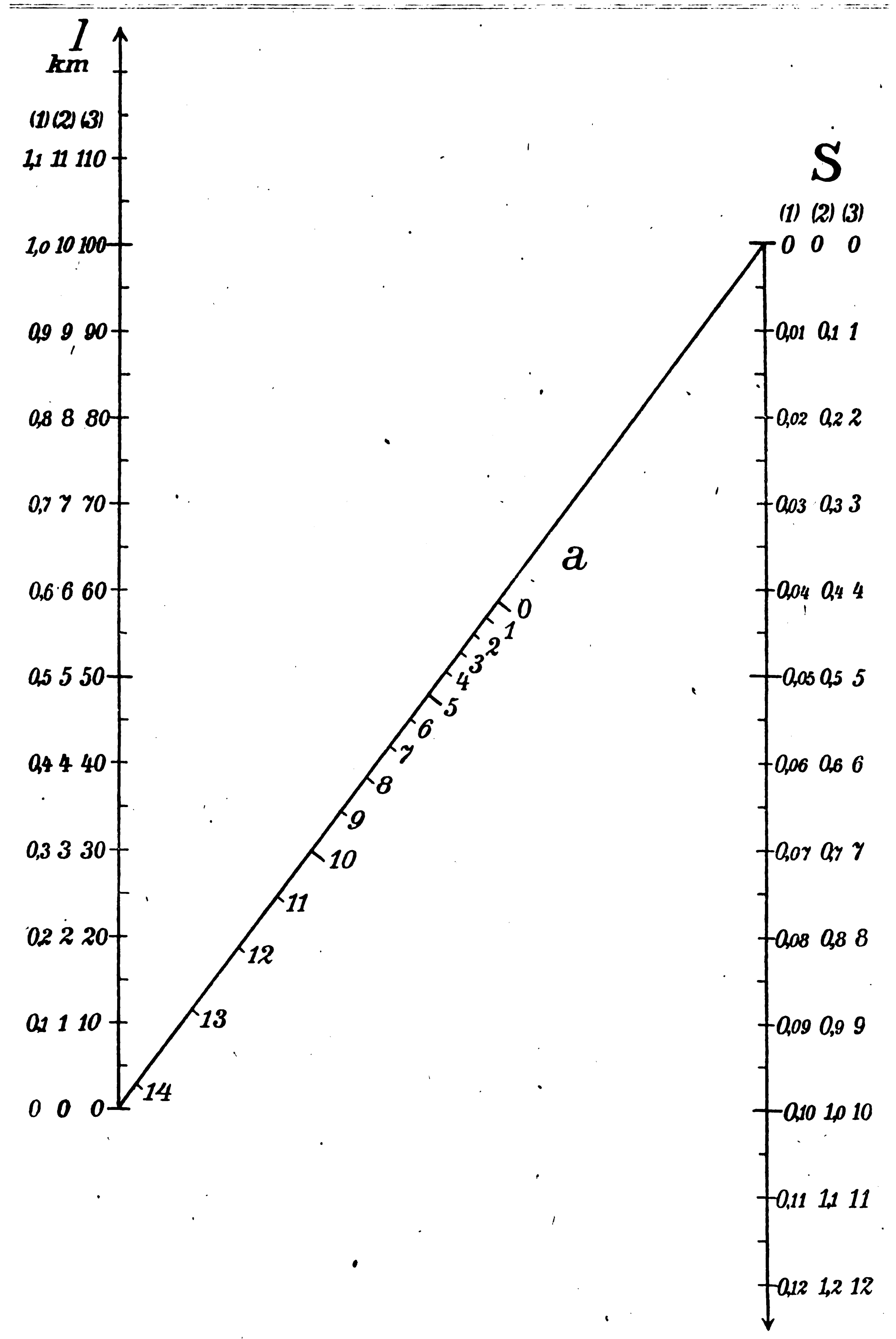

l
km
(1) (2) (3)
1,1 11 110
1,0 10 100
0,9 9 90
0,8 8 80
0,7 7 70
0,6 6 60
0,5 5 50
0,4 4 40
0,3 3 30
0,2 2 20
0,1 1 10
0 0 0
S
(1) (2) (3)
0 0 0
0,01 0,1 1
0,02 0,2 2
0,03 0,3 3
0,04 0,4 4
0,05 0,5 5
0,06 0,6 6
0,07 0,7 7
0,08 0,8 8
0,09 0,9 9
0,10 1,0 10
0,11 1,1 11
0,12 1,2 12
a
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

Fig. 2.

Abhängigkeit ist noch nicht näher untersucht. Bei Sonnenschein muß man daher zu dem Werte von S die Richtung, in der die Sicht gemessen wird, angeben.

Anschluß an gebräuchliche Sichtskalen (Sichtweite).

Beim Preußischen Meteorologischen Institut[1]) wird durch Schätzung der Sicht die Dichte des Nebels nach der Sichtweite in dreiteiliger Skala angegeben:

$\equiv^0$ Gegenstände von mehr als 1000 m Entfernung sichtbar,
$\equiv^1$ Gegenstände bis 1000 m Entfernung sichtbar,
$\equiv^2$ „ „ 100 „ „ „ .

Für die Schätzung der Dichte des Dunstes (∞^0, ∞^1, ∞^2) sind jedoch bestimmte Sichtweiten nicht vorgeschrieben. $\equiv^0$ und ∞^2 werden häufig identisch gesetzt.

Die dreiteilige Nebelskala des Meteorologischen Instituts läßt sich folgendermaßen durch die Sichtskala des Sichtmessers ausdrücken: „Sichtweite" ist nach dem üblichen Sinne des Wortes diejenige Entfernung, in der das Ziel gerade noch erkennbar ist. Um das Ziel zum Verschwinden zu bringen, wird man alsdann mit dem Sichtmesser den Wert $a = 1$ einstellen. In die Formel

$$S = \frac{l}{a_m - a}$$

ist daher $a = 1$ und für l die Sichtweite in km einzusetzen. Man erhält dann:

$$\equiv^0 (\infty^2) \quad S > 0{,}075$$
$$\equiv^1 \quad S = 0{,}075$$
$$\equiv^2 \quad S = 0{,}0075.$$

Etwas abweichend von dieser Definition, jedoch ohne praktische Bedeutung des Unterschieds, wird die Sichtweite mitunter gleich der Entfernung für Verschwinden des Zieles gesetzt (z. B. G. Haecker, Diss. Kiel 1905; Meteorol. Zeitschr. **22**, 343, 1905).

Eine andere, auf Schätzung beruhende, zehnteilige Sichtskala ist bei Heer und Marine gebräuchlich. Zur Beobachtung und Verschlüsselung der Sicht nach dieser Skala für telegraphische Wettermeldungen gilt die nachstehende Vorschrift. Die Skala läßt sich in derselben Weise wie die Nebelskala des Meteorologischen Instituts in die Sichtskala des Sichtmessers überführen.

Schlüsselziffer	Benennung	Sichtweite	Sichtwert S
0	sehr sichtig	weiter als 40 km	$> 3{,}0$
1	sichtig (gewöhnliche Sicht)	zwischen 20 und 40 km	zwischen 1,5 und 3,0
2	etwas diesig	„ 10 „ 20 „	„ 0,75 „ 1,5
3	diesig	„ 4 „ 10 „	„ 0,30 „ 0,75
4	stark diesig (Dunst)	„ 1 „ 4 „	„ 0,075 „ 0,30
5	Bodennebel (in der Höhe sichtig)	—	—
6	Nebel in Auflösung	—	—
7	nebelig	zwischen 200 und 1000 m	zwischen 0,015 und 0,075
8	dichter Nebel	unter 200 m	$< 0{,}015$
9	wechselnde Sicht (bei Dunkelheit nicht angebbar	—	—

Zu einer scharfen Unterscheidung zwischen Dunst und Nebel ist im Zweifelsfalle die Kenntnis der Luftfeuchtigkeit erforderlich. Nur bei hoher relativer Feuchtigkeit wird man eine Lufttrübung als Nebel ansprechen dürfen. Optisch liegt die Grenze zwischen Dunst und Nebel etwa beim Sichtwert $S = 0{,}1$, entsprechend einer Sichtweite von 1,3 km.

Die Sichtskala des Sichtmessers erstreckt sich für Nebel von $S = 0$ bis etwa $S = 0{,}1$, für Dunst von etwa $S = 0{,}1$ bis etwa $S = 3{,}0$. Dem Werte $S = 3{,}0$ entspricht eine Sichtweite von 40 km. Bei größerer Sichtweite wird man die Luft als dunstfrei bezeichnen.

1) Anleitung zur Anstellung und Berechnung meteorologischer Beobachtungen, herausgegeben vom Kgl. Preuß. Met. Inst., 2. Aufl., I, 1904, S. 37; W. Köppen, Meteorol. Zeitschr. **34**, 209, 1917.

Zur Verschlüsselung der Sichtskala des Sichtmessers sind, wenn die größere Meßgenauigkeit gegenüber der Sichtschätzung ausgenutzt werden soll, zweistellige Zahlen einzuführen. Man teilt dazu auf der S-Skala eine Anzahl Stufen von geeigneter Größe ab.

Beobachtungsergebnisse.

Zur Veranschaulichung der Methode seien im folgenden einige Messungsergebnisse mitgeteilt.

Die lokale Sichtverteilung nach Entfernung und Richtung wird durch ungleichmäßige Beleuchtung und verschiedenartige Geländebeschaffenheit wesentlich mitbestimmt. Größere Unterschiede der gleichzeitigen S-Werte bei Verwendung verschiedener Ziele erklären sich nachweislich stets entweder durch Beleuchtungsunter-

Tabelle I. Versuche bei Dunst, Reihe 1.

Warte: Charlottenburg, Ahornallee 27, 2. Stock, mittleres Südfenster, Seehöhe 60 m.
Ziele: 1. Wasserturm Fichtenberg, Steglitz, Seehöhe 70 m, Richtung SSO, $l = 6,2$ km.
2. Turm Realgymnasium, Schmargendorf, „ 70 „, „ SSO, $l = 3,3$ „.
3. Turm Lunapark, Halensee, „ 50 „, „ SSO, $l = 1,8$ „.

Zeit	*a* für Ziel 1	*a* für Ziel 2	*a* für Ziel 3	*S* für Ziel 1	*S* für Ziel 2	*S* für Ziel 3	Wetter
19.9.18.							
10 *a* 0	9	11	—	1,2	1,0	—	$\odot^{1}$, AStr 2/10.
5	10	12	—	1,4	1,4	—	$\odot^{2}$, AStr 2/10.
4 *p* 25	10, 10 } 10	11, 12 } 11,5	—	1,4	1,2	—	keine $\odot$, AStr.
5 *p* 45	11, 11 } 11	12, 12 } 12	—	1,9	1,4	—	$\odot^{1-2}$, AStr 5/10.
20.9.18.							
3 *p* 40	12	13	—	2,7	2,5	—	$\odot^{2}$, ACu 1/10.
4 *p* 30	12	13	—	2,7	2,5	—	keine $\odot$, Str.
21.9.18.							
8 *a* 45	10, 10 } 10	12, 12 } 12	—	1,5	1,4	—	$\odot^{0}$, AStr.
11 *a* 10	12, 12 } 12	13, 14, 13 } 13,3	—	2,7	3,3	—	keine $\odot$, AStr, Str 5/10.
12 *p* 15	10	12		1,5	1,4	—	Str.
1 *p* 55	11, 12 } 11,5	13, 13 } 13	—	2,3	2,5	—	Ni.
22.9.18.							
9 *a* 20	12, 12 } 12	13, 13 } 13	—	2,7	2,5	—	$\odot^{2}$, Ci.
2 *p* 5	12, 12 } 12	13, 13 } 13	—	2,7	2,5	—	$\odot^{0-1}$, CiStr.
25.9.18.							
8 *a* 40	—	7, 7 } 7	10, 10 } 10	—	0,45	0,42	$\odot^{2}$, Ci.
9 *a* 10	5	9, 9 } 9	10, 11 } 10,5	0,70	0,60	0,48	„ „.
25	8	11	12	1,0	1,0	0,80	$\odot^{2}$, CiStr.
11 *a* 15	12	13	—	2,7	2,5	—	$\odot^{2}$, einzelne Cu.
3.10.18.							
9 *a* 5	4, 5 } 4,5	10, 9 } 9,5	—	0,65	0,70	—	$\odot^{2}$.
15	5, 6 } 5,5	9, 10 } 9,5	—	0,70	0,70	—	„.
50	9, 8, 9 } 8,7	11, 11, 11 } 11	—	1,1	1,0	—	„.
11 *a* 50	12, 13, 12 } 12,3	13, 13, 13 } 13	—	3,1	2,5	—	$\odot^{2}$, einzelne CiCu und Cu.
12 *p* 50	12, 12 } 12	13, 13 } 13	—	2,7	2,5	—	$\odot^{2}$, CiStr, einzelne Cu.
4 *p* 35	10, 11 } 10,5	12, 12 } 12	—	1,6	1,4	—	„ „ „ „
4.10.18.							
11 *a* 25	—	0	6	—	0,23	0,22	keine $\odot$, Str.
12 *p* 20	—	4, 5 } 4,5	9, 10 } 9,5	—	0,34	0,37	$\odot^{0}$, Str.
30	—	6, 7 } 6,5	10, 11 } 10,5	—	0,42	0,48	„ „.
45	—	7, 6, 7 } 6,7	9, 11, 10 } 10	—	0,43	0,42	keine $\odot$, Str.
55	0, 1 } 0,5	8, 7 } 7,5	11, 10 } 10,5	0,46	0,48	0,48	„ „ „.
25.10.18.							
10 *a* 45, 55, 11 *a* 0	1, 2, 2 } 1,7	9, 7, 9 } 8,3	11, 10, 11 } 10,7	0,50	0,55	0,51	keine $\odot$, Str.
30	1	9	11	0,48	0,60	0,55	$\odot^{0-1}$, Str an Dichte schnell wechselnd.
50	0, 1 } 0,5	7, 9 } 8	11, 12 } 11,5	0,46	0,52	0,64	(wie oben)
12 *p* 10	3	9	11	0,56	0,60	0,55	$\odot^{1-2}$, StrCu 3/4.

Tabelle II. Versuche bei Dunst, Reihe 2.

Warte: Windmühlenberg westlich Saalow bei Mellen (Militärbahn), Seehöhe 60 m.
Ziele: 1. Wasserturm Bahnhof Rehagen-Klausdorf, Seehöhe 50 m, Richtung SzO, $l = 3{,}6$ km.
2. Windmühle südlich Gadsdorf, „ 60 „, „ WzS, $l = 3{,}2$ „.
3. „ Dergischow, „ 60 „, „ NO, $l = 2{,}8$ „.
4. „ Mellen (im Vordergrunde feuchte Wiesen), Seehöhe 50 m, Richtung OSO, $l = 2{,}4$ km.
5. „ östlich Gadsdorf, Seehöhe 60 m, Richtung WzS, $l = 2{,}3$ km.

Zeit	*a* für Ziel 1	2	3	4	5	*S* für Ziel 1	2	3	4	5	Wetter
26.11.18.											
9 *a* 10	—	—	4, 4 } 4	5, 5 } 5	6, 6 } 6	—	—	0,27	0,26	0,27	keine ⊙, Str.
25	—	—	4	5	5	—	—	0,27	0,26	0,25	„ „ „
45	—	—	5	—	7	—	—	0,30	—	0,31	„ „ „, zeitweise leichter Graupelfall.
10 *a* 5	—	—	6, 5 } 5,5	5, 6 } 5,5	8	—	—	0,32	0,27	0,36	keine ⊙, Str.
20	—	—	7, 8 } 7,5	6, 6 } 6	8, 8 } 8	—	—	0,41	0,29	0,36	„ „ „
11 *a* 40	—	4, 5 } 4,5	9	8	9	—	0,36	0,53	0,38	0,43	„ „ „ } zeitw. leichter Graupelfall.
50	5	4	8	7	8	0,39	0,31	0,44	0,33	0,36	„ „ „
12 0	7, 6 } 6,5	4, 4 } 4	7, 7 } 7	7, 7 } 7	9, 8 } 8,5	0,46	0,31	0,38	0,33	0,39	„ „ „
1 *p* 15	5, 6, 6 } 5,7	2, 3, 2 } 2,3	8, 7 } 7,5	7	7, 8 } 7,5	0,42	0,27	0,41	0,33	0,34	„ „ „
40	6, 6 } 6	3, 4 } 3,5	7, 7 } 7	7	9, 9 } 9	0,43	0,29	0,38	0,33	0,43	„ „ „
3 *p* 20	6, 6 } 6	4	8	7	8	0,43	0,31	0,44	0,33	0,36	„ „, Str dünn, in Auflösung.
25	5, 5 } 5	4	7	7	8	0,39	0,31	0,38	0,33	0,38	keine ⊙, Str, am SW-Horizont gelber Lichtstreifen, Horiz. im W dunkler als im O (Tief aus W herannahend).
30	5	5, 5, 5 } 5	7	—	9, 9, 10 } 9,7	0,39	0,34	0,38	—	0,50	⊙¹, Str in Auflösung, heller W-Horizont.

schiede der Strecken bei teilweiser Bewölkung oder durch ungleichmäßige Verteilung von Dunst und Nebel im Gelände (Schwadenbildung). Die Genauigkeit der Messung selbst ist weit größer, als es nach solchen Beobachtungen den Anschein hat. Je kleiner der eingestellte a-Wert, desto größer die Meßgenauigkeit. Man wählt daher zweckmäßig ein möglichst weit entferntes Ziel. Mit der Einstellung $a = 14$ ist die Sicht höchstens der Größenordnung nach sicher bestimmbar.

Es seien noch zwei Beispiele für gute Sicht mitgeteilt, die ich bei Freiballonfahrten vor der Konstruktion des Sichtmessers beobachtete:

1. Am 14. 1. 1912 vormittags 11^h war von Langenweddingen südwestlich Magdeburg aus das Brockenhaus (Seehöhe 1140 m) deutlich zu sehen. Der Ballon war über einer Dunstschicht, deren Grenze 480 m hoch lag, in einer Inversion, in 540 m Seehöhe. In Ballon- bis Brockenhöhe betrug die Kondensationskernzahl 740 bis 130 im cm^3, die Temperatur -8 bis 0^0 C, die relative Feuchtigkeit 60 bis 26 Proz. Entfernung des Zieles 70 km, Richtung WSW, ⊙², Beleuchtungswinkel etwa 90^0. Der entsprechende Sichtwert ist $S > 5$.

2. Am 5. 1. 1913 vormittags $11^h\ 15^m$ war der Brockengipfel (Seehöhe 1140 m) in einer dunstfreien Luftschicht zwischen zwei Dunstschichten von 10 km westlich Belzig aus sichtbar. Die Ballonhöhe betrug 2500 m. Die Grenze der unteren Dunstschicht lag in 935 m Seehöhe; die obere Dunstschicht lag in 1300 m Seehöhe und war von sehr geringer Mächtigkeit. In Brocken- bis Ballonhöhe war die Temperatur 5 bis 0^0 C, die relative Feuchtigkeit 60 bis 18 Proz. Die Kondensationskernzahl betrug über der unteren Dunstschicht etwa 1000, in der oberen etwa 10000 im cm^3. Entfernung des Zieles 130 km, Richtung WSW, ⊙², Beleuchtungswinkel etwa 90^0. Der entsprechende Sichtwert ist $S > 10$.

Sichtwerte wie der des ersten Beispiels sind nicht selten. Auch vom Boden aus kann man häufig, besonders wenn man auf Bergen die Bodendunstschicht unter sich hat, auf 70 bis 90 km Entfernung sehen.

Tabelle III. Versuche bei Nebel.

Warte: Charlottenburg, Ahornallee 27, 2. Stock, mittleres Südfenster, Seehöhe 60 m.
Ziele: 1. Hausgiebel, Richtung SW, $l = 0{,}32$ km.
2. „ „ SW, $l = 0{,}19$ „ .
3. Hausschornstein „ SW, $l = 0{,}09$ „ .

Zeit	a für Ziel 1	a für Ziel 2	a für Ziel 3	S für Ziel 1	S für Ziel 2	S für Ziel 3	Wetter
21.11.18.							
12 p 30	11, 12 } 11,5	12, 12 } 12	—	0,11	0,083	—	Str, Nebeldichte ungleichmäßig.
29.11.18.							
9 a 5	10, 10 } 10	12, 12 } 12	13, 13 } 13	0,074	0,083	0,07	Str.
25	10	12	13	0,074	0,083	0,07	„
45	11	12	13	0,098	0,083	0,07	„
10 a 40	10	12	13	0,074	0,083	0,07	„
11 a 55	11	12	14	0,098	0,083	(0,3)	„
12 p 15	11	13	14	0,098	0,15	(0,3)	„
1 p 0	12	13	14	0,14	0,15	(0,3)	„
1.12.18.							
10 a 5	0	1	10	0,022	0,014	0,021	Str, Nebeldichte schwankend (Schwaden).
30	0	0, 1 } 0,5	9, 10 } 9,5	0,022	0,014	0,019	Str, Nebeldichte schwankend (Schwaden).
55	0	3, 4 } 3,5	11	0,022	0,017	0,027	Str, Nebeldichte schwankend (Schwaden).
11 a 10	3, 3 } 3	7, 6 } 6,5	11, 12 } 11,5	0,028	0,024	0,032	„
25	4	7	12	0,031	0,026	0,039	„
35	9	11	13	0,060	0,058	0,07	„
40	11	12	14	0,098	0,083	(0,3)	„
12 0	8	11	13	0,051	0,058	0,07	„, Nebeldichte schwankend
10	4	8	12	0,031	0,030	0,039	„ „ „
15	6	10	13	0,039	0,044	0,07	„ „ „
1 p 0	9	12	14	0,060	0,083	(0,3)	„ „ „
40	11, 12 } 11,5	13, 13 } 13	14, 14 } 14	0,11	0,15	(0,3)	„

Sichtprobleme.

Die Gesetzmäßigkeiten für die Entstehung der verschiedenen Sichtgrade sind noch kaum untersucht, da es bei der üblichen Schätzungsmethode an einer zuverlässigen, einheitlichen Grundlage fehlte. Daher war auch eine Sichtvorhersage bisher nicht möglich. Im Sichtmesser liegt ein bequemes und hinreichend genaues Meßinstrument zur quantitativen Sichtbestimmung vor, so daß nunmehr die Zusammenhänge zwischen der Sicht und den meteorologischen und optischen Faktoren näher untersucht werden können. Solche Untersuchungen sind in Angriff genommen, bedürfen jedoch vielseitiger Erweiterung und Ergänzung durch andere Beobachter nach einheitlichem Plane.

Gemäß unserer Analyse des Sichtbegriffes handelt es sich um die Beziehung der Sicht zu folgenden Faktoren:

1. Lichtabsorption der Luft (Transmissionskoeffizient, Transparenzkoeffizient).
2. Lichtzerstreuung der Luft (Aufhellung).
3. Kondensationskernzahl, Staubgehalt, Anzahl und Größe der Nebeltröpfchen (oder Nebelkristalle), Temperatur, Feuchtigkeit, Wind (nach Richtung, Geschwindigkeit und Struktur) in der Luftschicht am Boden und Änderung dieser Elemente in der Vertikalen.
4. Erwärmung des Bodens und der anliegenden Luftschicht durch die Sonnenstrahlung und Abkühlung durch Ausstrahlung.
5. Richtung, Stärke und Farbe der Beleuchtung.
6. Physiologisch-optische Einflüsse.

Kennt man die Gesetze, nach denen die Sicht von den wesentlichen unter diesen Faktoren abhängt, so wird man in der Lage sein, im Anschluß an die allgemeine Wetterlage Sichtvorhersagen zu geben.

Auch die bereits bekannten Beziehungen zwischen der Sicht und den luftelektrischen Elementen sind von Interesse und näherer Untersuchung wert.

Schließlich sei noch eines für die Luftfahrt besonders wichtigen Sichtproblems gedacht, der vertikalen Sicht. Man wird sie sowohl vom Boden, als auch vom Luftfahrzeug aus messen können. Eine kurze Anweisung zur Verwendung des Sichtmessers hierfür findet sich in dem Abschnitt „Ausführung der Beobach-

tungen". Nähere Erfahrungen liegen jedoch noch nicht vor.

Halle a. S., im Januar 1919, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 21. Januar 1919.)

Das molekulare elektrische Feld in Gasen.

Von P. Debye.

Bekanntlich hat J. Stark die Verbreiterung von Spektrallinien durch Druck zurückgeführt auf die Wirkung der elektrischen Molekularfelder, welche an den Linien Änderungen ihrer Schwingungszahl im Sinne des von ihm entdeckten Effektes zustande bringen sollen. Es ist keine Frage, daß diese Erklärungsweise so viele Vorzüge vor der älteren Lorentzschen hat, daß an ihrer Richtigkeit nicht gezweifelt zu werden braucht. Von diesem Gesichtspunkt aus ist es nun interessant, die Frage zu stellen nach der Größe der elektrischen Felder, welche wir in Gasen zu erwarten haben. Eine ausführliche Bearbeitung dieses Gegenstands wurde auf meine Veranlassung hin von Herrn J. Holtsmark unternommen. Über die Resultate derselben berichtet er nachstehend in einer kurzen Mitteilung. Selbst möchte ich an dieser Stelle einige Dimensionsbetrachtungen geben, welche in mir die Überzeugung festigten, daß die Starksche Erklärung zu Recht besteht und man bei einer quantitativen Ausarbeitung der Theorie die Möglichkeit bekommen würde, aus Messungen über Linienverbreiterung auf die gegenseitige Lage der Ladungen im Molekül zu schließen.

§ 1. Sind z-Ladungen e_k $(k = 1 \ldots z)$ im Molekül vorhanden und sind ihre Abstände von einem Aufpunkte P gleich r_k, so ist das elektrische Potential des Moleküls

$$\varphi = \sum \frac{e_k}{r_k}.$$

Die Koordinaten des Aufpunktes seien x, y, z, die der n-Ladungen x_k, y_k, z_k, dann ist

$$\frac{1}{r_k} = \left[(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2\right]^{-1/2}.$$

Mit Rücksicht darauf, daß die Abstände im Molekül für gewöhnlich als klein vorausgesetzt werden können, gegen den Abstand Aufpunkt-Nullpunkt des Koordinatensystems r (vorausgesetzt, daß letzterer im Innern des Moleküls gewählt wird), entwickeln wir den Ausdruck für $1/r_k$ nach Potenzen der kleinen Größen x_k, y_k, z_k, und erhalten

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{\Sigma e_k}{r} &+ \frac{1}{r^2}\left\{\frac{x}{r}\Sigma e_k x_k + \frac{y}{r}\Sigma e_k y_k + \frac{z}{r}\Sigma e_k z_k\right\} \\ &- \frac{1}{r^3}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{x^2}{r^2}\right)\Sigma e_k x_k^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{y^2}{r^2}\right)\Sigma e_k y_k^2\right. \\ &+ \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{z^2}{r^2}\right)\Sigma e_k z_k^2 - 3\frac{xy}{r^2}\Sigma e_k x_k y_k \\ &\left. - 3\frac{zy}{r^2}\Sigma e_k y_k z_k - 3\frac{zx}{r^2}\Sigma e_k z_k x_k\right\} + \cdots \quad (1)\end{aligned}$$

Hat das Molekül eine Ladung, so ist das erste Glied dieses Ausdrucks maßgebend.

Ist die Gesamtladung Null, so kann das zweite Glied in Betracht kommen, nämlich dann, wenn der Schwerpunkt der positiven Ladungen nicht mit dem Schwerpunkt der negativen übereinstimmt. Wir sagen dann, das Mokül hat ein elektrisches Moment m, dessen Komponenten sich berechnen zu

$$m_x = \Sigma e_k x_k, \quad m_y = \Sigma e_k y_k, \quad m_z = \Sigma e_k z_k.$$

Daß es viele Moleküle gibt, welche ein solches Moment haben, wurde noch neuerdings von Jona[1]), in experimenteller Verfolgung einer älteren Arbeit meinerseits, festgestellt. (Beispiele: Wasser, Alkohol, Ammoniak, Schwefeldioxyd, Kohlensäure, usw.)

Es gibt aber auch Moleküle, bei denen die beiden oben genannten Schwerpunkte zusammenfallen (dazu gehören zweiatomige Gase mit gleichen Atomen wie etwa O_2, N_2, H_2, usw.). Ist das der Fall, dann kommt wesentlich das dritte Glied unseres Ausdrucks in Frage. Das Molekül ist dann charakterisiert durch seine „elektrischen Trägheitsmomente"

$$\Theta_{11} = \Sigma e_k x_k^2, \quad \Theta_{22} = \Sigma e_k y_k^2, \quad \Theta_{33} = \Sigma e_k z_k^2,$$
$$\Theta_{12} = \Sigma e_k x_k y_k, \quad \Theta_{23} = \Sigma e_k y_k z_k, \quad \Theta_{31} = \Sigma e_k z_k x_k,$$

von denen im allgemeinen die sechs angegebenen in Frage kommen. Bekanntlich kann man indessen das Koordinatensystem im Molekül so drehen, das nur drei Hauptträgheitsmomente

$$\Theta_{11} = \Sigma e_k x_k^2, \quad \Theta_{22} = \Sigma e_k y_k^2, \quad \Theta_{33} = \Sigma e_k z_k^2$$

vorhanden sind und die anderen verschwinden[2]).

Es handelt sich nun wesentlich um die Frage, wie groß sind im Mittel die Ladungen, Momente oder Trägheitsmomente der Moleküle?

Die Ladung eines Elektrons beträgt abgerundet $5{,}10^{-10}$ $g^{1/2}$ $cm^{3/2}$ sec^{-1} (im elektrostatischen Maßsystem), der Radius eines Moleküls ist von der Größenordnung 10^{-8} cm. Wir werden deshalb nicht weit fehlgehen, wenn wir:

---

1) Diese Zeitschr. **20**, 14, 1919.

2) Von dem Falle, daß in einem Molekül die gegenseitige Neutralisierung der Ladungen so weit geht, daß in (1) erst ein viertes Glied von Null verschieden ist, sehen wir hier ab. Damit soll aber über die Möglichkeit eines solchen Falles kein Urteil gefällt sein.

a) die Ladung eines geladenen Moleküls (Ion) zu $5{,}10^{-10}$ $g^{1/2}$ $cm^{3/2}$ sec^{-1} annehmen,

b) bei einem ungeladenen Molekül, welches ein Moment trägt, dieses zu $5{,}10^{-18}$ $g^{1/2}$ $cm^{5/2}$ sec^{-1} ansetzen,

c) wenn das elektrische Moment auch verschwindet, ein elektrisches Trägheitsmoment zu $5{,}10^{-26}$ $g^{1/2}$ $cm^{7/2}$ sec^{-1} berechnen.

Tatsächlich hat die Jonasche Arbeit gezeigt, daß die wirklichen Momente von der angegebenen Größenordnung sind, während die im Zusammenhang mit den Bohrschen Hypothesen entworfenen Molekülbilder die Größenordnung des unter c) genannten Wertes bestätigen.

§ 2. Die elektrische Feldstärke, welche in Gasen durch Übereinanderlagerung aller Molekularfelder entsteht, wird fortwährend schwanken sowohl nach Größe wie nach Richtung; die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Feldstärke, deren Komponenten X, Y, Z, einen Wertebereich $X, Y, Z, X+dX, Y+dY, Z+dZ$ ausfüllen, kann berechnet werden. Die Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit bildet den wesentlichen Inhalt der nachfolgenden Holtsmarkschen Arbeit.

Um den mittleren Wert, welcher für die Feldstärke F zu erwarten steht, abzuschätzen, kann man von folgender Dimensionsbetrachtung Gebrauch machen. Im elektrostatischen Maßsystem hat die Feldstärke F die Dimension $g^{1/2}$ $cm^{-1/2}$ sec^{-1}. Beschränken wir uns zunächst auf den Fall der Ionen, so sind die einzigen Größen[1]), aus denen F berechnet werden soll: die Ladung e des Ions von der Dimension $g^{1/2}$ $cm^{3/2}$ sec^{-1} und die Zahl der Gasmoleküle im cm^3: n. Letztere Zahl beträgt bekanntlich für ein Gas unter Atmosphärendruck $27 \cdot 10^{18}$ und hat die Dimension cm^{-3}. Aus diesen beiden Größen läßt sich eine Feldstärke nur zusammensetzen in der Kombination $en^{2/3}$. Deshalb erwarten wir, daß in einem Gase von einer Atmosphäre Druck, in dem alle Moleküle die Ladung e tragen würden, eine Feldstärke vorhanden sein muß, von dem ungefähren Betrage

$$F_1 = en^{2/3}. \qquad (2)$$

Sind die Moleküle ungeladen, aber tragen Momente, dann findet man durch die entsprechende Überlegung für die Feldstärke den Betrag

$$F_2 = mn. \qquad (2')$$

Sind schließlich auch die Momente Null und nur elektrische Trägheitsmomente vorhanden, dann ist der zu erwartende Betrag der Feldstärke

$$F_3 = \Theta n^{4/3}. \qquad (2'')$$

Wir setzen nun in den Formeln (2), (2'), (2''), die oben für e, m, Θ und n angegebenen Werte ein und finden zunächst das Resultat in elekrostatischen Einheiten. Durch Multiplikation mit 300 wird dasselbe dann in Volt/cm umgerechnet. So erhalten wir

$$\begin{cases} F_1 = 4500 \text{ el.-st. E.} = 1350000 \text{ Volt/cm}, \\ F_2 = 135 \quad " \quad = 40500 \quad " \\ F_3 = 4 \quad " \quad = 1200 \quad " \end{cases}$$

Würde der Fall vorkommen, daß in einem Gase von einer Atmosphäre Druck alle Moleküle mit einer Einheitsladung versehen wären, so würde in denselben eine Feldstärke von dem ungeheuren Betrage $1{,}3 \cdot 10^6$ Volt/cm zu erwarten stehen. Bekanntlich liegt allerdings dieser Fall nie vor, aber auch wenn nur ein pro Mille der Moleküle Ionen sind, so hat die Feldstärke immerhin noch den sehr hohen Wert von $1{,}3 \cdot 10^4$ Volt/cm.

In einem Gase wie NH_3 oder SO_2 usw. haben die Moleküle wirklich elektrische Momente von der oben angegebenen Größenordnung. In einem solchen Gase ist also bei Atmosphärendruck im Mittel ein Feld vorhanden von der Größenordnung $4{,}10^4$ Volt/cm. In Stickstoff oder Sauerstoff hat das zu erwartende Feld den Betrag $1{,}2 \cdot 10^3$ Volt/cm.

Es ist klar, daß die eben errechneten Feldstärken vollständig genügen, um, wie Stark das will, eine Theorie der Verbreiterung der Spektrallinien auf den Stark-Effekt aufzubauen. Andererseits dürfte es von besonderem Interesse sein, bei Substanzen mit bekanntem Stark-Effekt aus der beobachteten Verbreiterung der Spektrallinien in Emission oder Absorption, bei Zusatz eines fremden Gases, mit Hilfe der Theorie Rückschlüsse auf die elektrischen Konstanten der zugesetzten Moleküle zu ziehen. Eine qualitative Prüfung der Theorie könnte zunächst anschließen an die durch die Potenzen von n in (2), (2') und (2'') ausgedrückte Abhängigkeit von der Dichte, welche demnach nur in einem Momentengase direkte Proportionalität von Verbreiterung und Dichte erwarten läßt, so lange wenigstens die Aufspaltung im Stark-Effekt der elektrischen Feldstärke proportional gesetzt werden kann.

Göttingen, Physikal. Institut.

(Eingegangen 28. Februar 1919.)

1) Welchen Einfluß die endliche Ausdehnung der Moleküle hat, bleibt hier außer Betracht, vielmehr wird so getan, als ob die Moleküle sich gegenseitig durchdringen könnten.



Über die Verbreiterung von Spektrallinien.

Von J. Holtsmark.

§ 1. Die Verbreiterung der Spektrallinien durch Druck wird bekanntlich nach H. A. Lorentz[1]) mit Hilfe der durch Zusammenstöße des emittierenden Atoms mit anderen Atomen oder Molekülen verursachten Störungen erklärt. Die ausgesandten Wellenzüge werden nach dieser Theorie bei jedem Zusammenstoß abgebrochen, wodurch eine Verteilung der monochromatischen Frequenz über einen Frequenzbereich bewirkt wird. Füchtbauer und Hoffmann[2]) haben diese Theorie einer Prüfung unterzogen, indem sie die Breiten von *Cs*- und *Na*-Linien im Stickstoff bei hohem Druck maßen. Es ergab sich, daß die Breite der Linien experimentell viel größer herauskam als theoretisch.

Nach der neueren Auffassung der Lichtemissionen als quantenhaft sinkt die Wahrscheinlichkeit der Lorentzschen Erklärungsweise auch deshalb, weil es nunmehr ganz unwahrscheinlich wird, daß die Emission von schwingenden Elektronen herrührt.

Gleich nach seiner Entdeckung des Stark-Effekts wies Stark[3]) darauf hin, daß die Verbreiterung von Spektrallinien durch die Einwirkung der elektrischen Felder der benachbarten Atome verursacht sein könnte, und er führte eine Reihe von Tatsachen an, welche diese Auffassung unterstützten, ohne sie jedoch rechnerisch zu verfolgen.

Im folgenden möchte ich zeigen, wie man eine Theorie der Verbreiterung auf dieser Grundlage aufstellen kann, und daß dieselbe in quantitativer Übereinstimmung mit der Erfahrung steht. Dabei stellt sich auch heraus, daß es möglich ist, aus Messungen der Verbreiterung Schlüsse auf gewisse Konstanten des Atoms (Moleküls) zu ziehen, die bis jetzt der Messung nicht zugänglich waren. Wir werden dabei sowohl die Verbreiterung durch Druck als die Verbreiterung durch Ionisation (kondensierter Funken) behandeln können, und es wird unsere Hauptaufgabe sein, die Abhängigkeit der Verbreiterung von der Dichte und Art der umgebenden Molekülen bzw. Ionen zu berechnen. Außerdem werden wir auch die Verbreiterung direkt mit den Konstanten des Stark-Effektes in Beziehung bringen, und verhältnismäßig rohe, aber für unsere Zwecke völlig ausreichende Angaben über die Intensitätsverteilung in der verbreiterten Linie machen können.

Wir bringen im folgenden nur einen Auszug der Theorie mit einigen Anwendungen, die ausführliche Bearbeitung wird in einer demnächst erscheinenden Abhandlung in den Annalen gegeben werden.

§ 2. Das emittierende Atom, welches wir mit der Nummer 0 versehen wollen, sei von einer großen Zahl anderer störender Atome (oder Moleküle bzw. Ionen) umgeben, letztere bezeichnen wir mit den Nummern $1-N$, allgemein n. Die Atome $1-N$ sollen unter sich gleich sein, können aber von dem Atom 0 verschieden sein. Im Falle der Füchtbauerschen Versuche wäre z. B. das Atom 0 das lichtabsorbierende *Cs*-Atom, während die Stickstoffatome den Atomen $1-N$ entsprechen würden.

Die umgebenden Atome erzeugen an der Stelle des Atoms 0 ein elektrisches Feld gleich der Summe der Felder sämtlicher Atome. Wegen der ständigen Bewegung der Atome wechselt das Feld fortwährend, wir erhalten also keine einheitliche Aufspaltung der emittierten Linie durch den Stark-Effekt, sondern nur eine Verbreiterung. Wir sind offenbar imstande diese Verbreiterung anzugeben, sobald wir die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Feldstärke herrscht, als Funktion dieser Feldstärke kennen. Auf die Richtung derselben braucht keine Rücksicht genommen zu werden. Der erste Teil unserer Aufgabe ist also die, die Wahrscheinlichkeit einer resultierenden Feldstärke F_0 als Funktion von F_0 zu finden.

Die Feldstärke F_0 am Ort der Atome 0 setzt sich zusammen aus den von sämtlichen N-Atomen erzeugten Feldstärken. Die Komponenten der letzteren seien für das n-te Atom in einem festen Koordinatensystem X_n, Y_n, Z_n, dann sind die Komponenten von F_0 gegeben durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= \sum_1^N X_n, \\ Y_0 &= \sum_1^N Y_n, \\ Z_0 &= \sum_1^N Z_n \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

und wir suchen die Wahrscheinlichkeit, daß

$$\left.\begin{array}{llll} X_0 & \text{zwischen } X_0 & \text{und } X_0 + dX_0 \\ Y_0 & \quad " \quad Y_0 & \quad " \quad Y_0 + dY_0 \\ Z_0 & \quad " \quad Z_0 & \quad " \quad Z_0 + dZ_0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

liegen. Die X_n, Y_n, Z_n hängen nun von einer Anzahl Koordinaten ab, nämlich von den ν

1) H. A. Lorentz, Amsterd. Proc. 25. Jan. 1906.
2) Chr. Füchtbauer u. W. Hoffmann, Ann. d. Phys. 43, 96, 1914.
3) J. Stark, Elektrische Spektralanalyse chem. Atome. Leipzig, S. Hirzel. 1914.

Koordinaten $x_1, x_2, \ldots x_\nu$, welche die Lage des n-ten Atoms in bezug auf den Mittelpunkt des nullten Atoms charakterisieren.

Jede Komponente unserer resultierenden Feldstärke F_0 hängt also von $N\nu$-Koordinaten ab, nämlich von den $N\nu$-Koordinaten sämtlicher N-Atome. Die Werte dieser Koordinaten wollen wir durch Punkte in den $N\nu$-dimensionalen Raum

$$x_{11} \cdots x_{\nu 1},\ x_{12} \cdots x_{\nu 2},\ x_{1N} \cdots x_{\nu N}$$

darstellen. Diese Punkte werden nach irgendeinem Wahrscheinlichkeitsgesetz in dem Raum verteilt sein. Zu jeder Kombination

$$x_{11} \cdots x_{\nu 1},\ x_{12} \cdots x_{\nu 2},\ x_{1N} \cdots x_{\nu N}$$

ist die Feldstärke X_0, Y_0, Z_0 durch die Gleichung (1) gegeben, indem die X_n, Y_n, Z_n als Funktionen von $x_{1n}, x_{2n} \cdots x_{\nu n}$ zu denken sind.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Koordinaten $x_{1n} \cdots x_{\nu n}$ einem Bereiche $dx_{1n} \cdots dx_{\nu n}$ angehören, kann geschrieben werden

$$\sigma_n\, dx_{1n}\, dx_{2n} \cdots dx_{\nu n}, \tag{1a}$$

wo σ_n eine Funktion von $x_{1n} \cdots x_{\nu n}$ sein kann.

Die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Kombination von sämtlichen $N\nu$-Koordinaten wird durch das Produkt sämtlicher Ausdrücke von der Form (1a) gegeben sein, also gleich werden:

$$\sigma_1 \cdots \sigma_N\, dx_{11}\, dx_{12} \cdots dx_{1\nu}\, dx_{21} \cdots dx_{N\nu}. \tag{1c}$$

Jede solche Kombination ergibt einen bestimmten Wert von X_0 und ebenfalls bestimmte Werte von Y_0 und Z_0 nach (1).

In gewissen Teilen des $N\nu$-dimensionalen Raumes werden also die Gleichungen (2) bei vorgegebenen Werten von X_0, Y_0, Z_0 erfüllt sein, in den übrigen Teilen nicht. Wir erhalten die Wahrscheinlichkeit für das Erfülltsein von (2), indem wir das Verhältnis bilden zwischen der Summe aller für (2) günstigen Volumenelemente, jedes mit der spezifischen Wahrscheinlichkeit dieses Elementes nach (1b) multipliziert und der analogen Summe aller Volumenelemente überhaupt, jedes ebenfalls mit derselben spezifischen Wahrscheinlichkeit multipliziert. Oder die gesuchte Wahrscheinlichkeit für (2) wird[1])

$$W(X_0, Y_0, Z_0) = \frac{1}{V_N} \int \cdots \int \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_N\, dx_{11} \cdots dx_{\nu N}, \tag{3}$$

wo das Integral nur über die für (2) günstigen Teile des $N\nu$-dimensionalen Raumes zu erstrecken ist und V_N die Bedeutung hat

$$V_N = \int \cdots \int \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_N\, dx_{11} \cdots dx_{\nu N}, \tag{4}$$

über den ganzen Raum integriert.

1) Die Funktion $W(X_0, Y_0, Z_0)$ ist in üblicher Weise so definiert, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Komponenten der resultierenden Feldstärke dem Wertebereich $X_0, Y_0, Z_0, X_0 + dX_0, Y_0 + dY_0, Z_0 + dZ_0$ angehören, gleich $W(X_0, Y_0, Z_0)\, dX_0\, dY_0\, dZ_0$ ist.

§ 3. Die Berechnung des Integrals (3) geschieht, indem man dasselbe durch Multiplikation mit einem passenden Dirichletschen Faktor in ein Integral über den ganzen Raum verwandelt, in Anlehnung an eine von A. A. Markoff[1]) angegebene Methode, die auch von v. Laue[2]) angewendet wurde.

Solche Faktoren sind die Dirichletschen Integrale

$$\left.\begin{aligned} H(X) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha \xi}{\xi}\, e^{i\delta\xi}\, d\xi, \\ H(Y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \beta \eta}{\eta}\, e^{i\varepsilon\eta}, \\ H(Z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \gamma \zeta}{\zeta}\, e^{i\varkappa\zeta}\, d\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wenn abkürzend

$$\begin{aligned} \alpha &= \tfrac{1}{2} dX_0, & \delta &= \sum_1^N X_n (x_{1n} \cdots x_{\nu n}) - X_0, \\ \beta &= \tfrac{1}{2} dY_0, & \varepsilon &= \sum_1^N Y_n (x_{1n} \cdots x_{\nu n}) - Y_0, \\ \gamma &= \tfrac{1}{2} dZ_0, & \varkappa &= \sum_1^N Z_n (x_{1n} \cdots x_{\nu n}) - Z_0 \end{aligned} \tag{6}$$

gesetzt wird.

Diese Integrale (5) sind bzw. gleich 1 oder 0, je nachdem die Beziehungen

$$-\alpha < \delta < \alpha, \quad -\beta < \varepsilon < \beta, \quad -\gamma < \varkappa < \gamma$$

gelten, oder nicht, was nach (6) mit (2) identisch ist.

Ich unterdrücke die weitere Rechnung bis auf das Resultat. Das Integral (3) ist mit den Größen (5) zu multiplizieren, wegen der Gleichheit aller N-Atome läßt sich das Produkt unter dem Integralzeichen in (3) und (4) als eine N-te Potenz schreiben und man erhält:

$$W(X_0 Y_0 Z_0) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, d\eta\, d\zeta\, e^{-i(X_0\xi + Y_0\eta + Z_0\zeta)} \cdot \frac{1}{V^N} \left[\int_\nu \cdots \int e^{i(X\xi + Y\eta + Z\zeta)}\, \sigma\, dx_1\, dx_1 \cdots dx_\nu \right]^N. \tag{7}$$

Dabei ist abkürzend

$$V = \int \cdots \int \sigma\, dx_1 \cdots dx_\nu$$

gesetzt, wobei die Koordinaten $x_1 \cdots x_\nu$ eines störenden Moleküls ihren ganzen Wertbereich zu durchlaufen haben.

Infolge des besonderen Verhaltens von X, Y, Z ist die Rechnung hier nicht in derselben

1) A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von Liebmann, Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1912. § 16 u. 33.

2) M. v. Laue, Ann. d. Phys. 47, 853, 1915.

Weise durchzuführen, wie das von Markoff und v. Laue geschehen ist. Tatsächlich sind in unserem Falle die bei jener Rechnung auftretenden quadratischen Mittelwerte von X, Y, Z unendlich groß. Damit steht in unmittelbarem Zusammenhang, daß für die Wahrscheinlichkeit W nicht wie sonst eine verallgemeinerte Gaußsche Wahrscheinlichkeitsfunktion resultiert.

Von der Art des störenden Moleküls hängt die Form der Ausdrücke für die Feldstärkekomponenten X, Y, Z ab; die Rechnung wurde deshalb gesondert durchgeführt für:

1. Geladene Ionen,
2. Dipole,
3. Axensymmetrische Quadrupole.

Der Fall 1 tritt ein, wenn die Verbreiterung durch große Stromdichte hervorgebracht wird, z. B. im kondensierten Funken, den Fall 2 haben wir, wenn z. B. Kohlensäure als verbreiterndes Gas vorhanden ist. Der Fall 3 endlich tritt ein, wenn Stickstoff oder ähnliche symmetrisch gebaute Atome, die keine Dipole besitzen, verbreiternd wirken. Unsymmetrische Quadrupole wurden nicht in Betracht gezogen, weil dieser Fall relativ selten vorkommt, während die Rechnung dann wesentlich komplizierter werden würde.

Für jeden der drei Fälle wurde nun der in (7) vorkommende Exponent $X\xi + Y\eta + Z\zeta$, welcher auch als skalares Produkt eines willkürlichen Vektors $\mathfrak{S}$ mit der Feldstärke F geschrieben werden kann, berechnet und in die Integrale eingeführt. Die Integration läßt sich im zweiten Falle (Dipole) in geschlossener Form ausführen (eine Zahlenkonstante wird durch graphische Integration bestimmt). In den zwei anderen Fällen können Reihenentwicklungen angegeben werden. Ich lasse die Rechnung beim Ion in gekürzter Form folgen, die zwei anderen Fälle werden in den Annalen genau behandelt werden.

§ 4. Setzt man das in (7) vorkommende Integral

$$\frac{1}{V}\int\cdots\int e^{i(X\xi+Y\eta+Z\zeta)}\,\sigma\,dx_1\cdots dx_\nu$$

abkürzend gleich I, so hat man nach der obigen Bemerkung über die Darstellung des Exponenten als skalares Produkt

$$I=\frac{1}{V}\int\cdots\int e^{i(\mathfrak{S}\mathfrak{F})}\,\sigma\,dx_1\cdots dx_\nu. \tag{8}$$

Beim Ion ist

$$\mathfrak{F}=\frac{\varepsilon}{r^2}\frac{\mathfrak{r}}{r},$$

wenn ε die Ladung des Ions, $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor vom Ion als Mittelpunkt ausgehend und r dessen Absolutwert bedeutet. Nennt man noch ϱ den Absolutsbetrag von $\mathfrak{S}$, so daß

$$\varrho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

und bezeichnet mit ϑ den Winkel zwischen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{F}$, so gilt für das Ion

$$I=\frac{1}{V}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}\int\limits_{r=0}^{r=R} e^{i\varepsilon\frac{\varrho\cos\vartheta}{r^2}}\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Dabei ist neben ϑ als Polabstand noch die „geographische Länge" φ eingeführt um die Richtung im Raum festzulegen. Die Integration nach r wird ausgeführt von $r=0$ bis $r=R$; wir verfahren also so, als ob das Gas eine Kugel vom großen Radius R ausfüllen würde und werden offenbar nur den Grenzwert von I für große Werte von R benötigen. Das Volumen V hat den Wert

$$V=\frac{4\pi}{3}R^3.$$

Es empfiehlt sich mit Rücksicht auf jenen Grenzübergang zuerst die Integration nach r vorzunehmen. Setzt man abkürzend

$$u=\varepsilon\frac{\varrho\cos\vartheta}{r^2},$$

so wird

$$I=\frac{3}{8\pi}\iint d\Omega\,\alpha^{3/2}\int\limits_{\alpha}^{\infty}e^{iu}u^{-5/2}\,du,$$

wenn

$$\alpha=\varepsilon\frac{\varrho\cos\vartheta}{R^2}$$

gesetzt wird und das durch $\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$ dargestellte Flächenelement der Einheitskugel $d\Omega$ genannt wird. Die untere Grenze α ist in der Grenze für große Volumina verschwindend klein; das Integral nach u wird deshalb nach steigenden Potenzen von α entwickelt und ergibt

$$\tfrac{3}{2}\alpha^{3/2}\int\limits_{\alpha}^{\infty}e^{iu}u^{-5/2}\,du=1+3i\alpha-$$
$$-2\sqrt{\pi}\,e^{+i\frac{\pi}{4}}\alpha^{3/2}+\tfrac{3}{2}\alpha^2+\cdots.$$

Damit wird

$$I=\frac{1}{4\pi}\iint d\Omega\,[1+3i\alpha-$$
$$-2\sqrt{\pi}\,e^{+i\frac{\pi}{4}}\alpha^{3/2}+\tfrac{3}{2}\alpha^2+\cdots].$$

Die zur Berechnung von I nunmehr nach der angegebenen Formel noch nötige Mittelbildung über die Einheitskugel, führt beim Gliede $3i\alpha$ zum Werte 0; das erste in Betracht kommende Glied ist also das dritte in der eckigen Klammer. Setzt man die Reihenentwicklung nicht weiter fort, so erhält man nach ausgeführter Integration

$$I=1-\frac{2}{5}\sqrt{2\pi}\,\frac{\varepsilon^{3/2}\varrho^{3/2}}{R^3}+\cdots. \tag{8'}$$

Alle folgenden Glieder würden höhere Potenzen von $1/R$ im Nenner haben und können also für $\lim R = \infty$ weggelassen werden.

Nach Vorschrift der Formel (7) haben wir I zur Potenz N zu erheben, wobei N die Gesamtzahl aller Moleküle bedeutet und somit einen sehr großen numerischen Wert hat. Führt man noch neben der Gesamtzahl N die Zahl n der Moleküle pro cm³ ein, so kann nach (8') die gesuchte Potenz folgendermaßen berechnet werden

$$I^N = \left[1 - \frac{2}{5}\sqrt{2\pi}\,\frac{\varepsilon^{3/2}\varrho^{3/2}}{R^3}\right]^N =$$

$$= \left[1 - \frac{8\pi}{15}\sqrt{2\pi}\,\frac{n\,\varepsilon^{3/2}\varrho^{3/2}}{N}\right]^N =$$

$$= e^{-\frac{8\pi}{15}\sqrt{2\pi}\, n\, \varepsilon^{3/2}\varrho^{3/2}}.$$

Nach Einsetzung von Zahlenwerten erhält man also für das

1. Ion $\qquad I^N = e^{-4{,}21\,\varepsilon^{3/2}\varrho^{3/2}}$.

Beim Dipol und dem axensymmetrischen Quadrupol wird die Rechnung umständlicher, weil die Feldstärke $\mathfrak{F}$ in komplizierterer Weise von den Raumkoordinaten abhängt. Die Integration über diese Koordinaten wurde graphisch ausgeführt. Es ergeben sich dann für I^N die Werte

2. Dipol $\qquad I^N = e^{-4{,}54\,n\,m\,\varrho}$,

wo m das Moment des Dipols bedeutet

3. Axensymmetrischer Quadrupol

$$I^N = e^{-11{,}49\,n\,\triangle^{3/4}\varrho^{3/4}}.$$

Hier müssen über die Bedeutung von $\triangle$, der Konstanten des Quadrupols noch ein paar Worte gesagt werden.

Denken wir uns, das Atom bestehe aus einer Anzahl von Ladungen e_s die um die z-Achse symmetrisch verteilt sind, und zwar so, daß kein Dipolmoment entsteht. Wenn dann die Lagen der Ladungen durch die Koordinaten $x_s\,y_s\,z_s$ gegeben sind, so können wir die „elektrischen Trägheitsmomente" bilden

$$\Sigma e_s x_s^2 = \Theta_1, \quad \Sigma e_s y_s^2 = \Theta_2, \quad \Sigma e_s z_s^2 = \Theta_3.$$

Wegen der Symmetrie ist $\Theta_1 = \Theta_2$. Die genauere Untersuchung zeigt, daß für uns nur die Differenz $\Theta_3 - \Theta_2$ maßgebend ist, diese haben wir mit $\triangle$ bezeichnet

$$\triangle = \Theta_3 - \Theta_2 = \Sigma e_s z_s^2 - \Sigma e_s x_s^2.$$

§ 5. Zur Berechnung von $W(x_0 y_0 z_0)$ sind nun nach (7) die Werte von I^N in den Ausdruck für W einzusetzen.[1] Das in W auftretende Integral nach ξ, η, ζ wird durch Einführung von Polarkoordinaten $\varrho, \vartheta, \varphi$ (wo ϑ und φ andere sind als die obigen) auf eine solche Form gebracht, daß die Integration in Reihen möglich ist. Eine längere Rechnung ergibt im Fall 1 (Ion) für $W(x_0 y_0 z_0)$ die Reihenentwickelungen

$$W(F_0)\,dF_0 = \frac{4}{3\pi}\beta^2 d\beta\,[1 - 0{,}4628\,\beta^2 +$$
$$+ 0{,}1227\,\beta^4 - 0{,}02325\,\beta^6 + \cdots]$$

und

$$W(F_0)\,dF_0 = \frac{d\beta}{\pi\beta^{5/2}} \cdot 2{,}350$$
$$\left[1 + 5{,}106\frac{1}{\beta^{3/2}} - 7{,}4375\frac{1}{\beta^3} + 0 \cdot \frac{1}{\beta^{9/2}} + \cdots\right]$$

Die letztere ist semikonvergent, β hat die Bedeutung: Verhältnis der Feldstärke F_0 zu einer von Gas und Dichte abhängigen „Normalfeldstärke" F_n. Beim Ion wird

1. Ion $\qquad F_n = 2{,}61 \cdot n^{2/3} \cdot \varepsilon, \qquad (9)$

ε ist die Ladung des Ions, n die Zahl der Ionen pro Volumeinheit und

$$\beta = \frac{F_0}{F_n}.$$

Die zwei angegebenen Reihen gelten für bzw. kleine und große Feldstärken, die von ihnen dargestellte Kurve ist in der Fig. 1 gezeichnet. Für kleine und große Feldstärken ist die Wahrscheinlichkeit gering, das Maximum der Wahrscheinlichkeit liegt bei einer mittleren Feldstärke, die etwa gleich $1{,}25\,F_n$ ist. Maßgebend für die Kurve und somit auch für die unten zu berechnende Verbreiterung ist somit die „Normalfeldstärke" F_n, welche nach (9) berechnet werden kann.

Bevor wir weitergehen, gebe ich noch die entsprechenden Formeln für den Dipol und den axensymmetrischen Quadrupol.

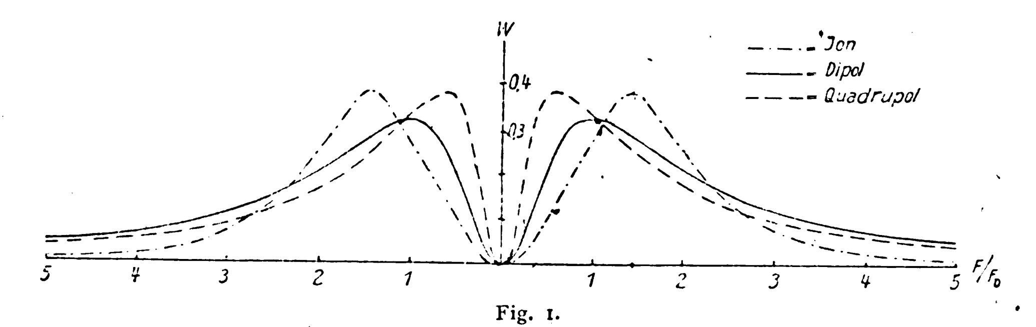


Fig. 1.

Im Falle des Dipols läßt sich das Integral in geschlossener Form auswerten, es wird

$$W(F_0)\,dF_0 = \frac{4}{\pi}\,\frac{\beta^2\,d\beta}{(1+\beta^2)^2}$$

und die Normalfeldstärke ist in diesem Falle

2. Dipol $\qquad F_n = 4{,}54\,n\,m, \qquad$ (9′)

m ist das Moment des Dipols, n die Anzahl Moleküle pro cm³.

Beim Quadrupol mußte wieder auf die Reihenentwicklung zurückgegriffen werden, es ergaben sich die Reihen

$$W(F_0)\,dF_0 = \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{\pi}\,\beta^2\,d\beta\,[1-2{,}44\,\beta^2 + 11{,}25\,\beta^4 - 72\,\beta^6 + \cdots]$$

und

$$W(F_0)\,dF_0 = \frac{d\beta}{\beta^{7/4}}\cdot 0{,}805\left[1-0{,}730\,\frac{1}{\beta^{3/4}} - 0{,}328\,\frac{1}{\beta^{3/2}} + 0{,}621\,\frac{1}{\beta^{9/4}} - 0{,}163\,\frac{1}{\beta^3}\right],$$

welche für kleine bzw. große Werte von $\beta = F_0/F_n$ zu benutzen sind. Die Normalfeldstärke F_n wird für ein aus Quadrupolmolekülen bestehendes Gas definiert durch die Gleichung:

3. Axensymmetrischer Quadrupol

$$F_n = 26{,}0\,n^{4/3}\,\triangle. \qquad (9'')$$

Die Kurven für $W(F_0)$ in den zwei letzten Fällen sind ebenfalls in der Fig. 1 gezeichnet. Sie sind in ihrem qualitativen Verlauf alle gleich. Das Maximum liegt beim Dipol näher am Anfang wie beim Ion und beim Quadrupol noch näher.

§ 6. Das Zustandekommen der Verbreiterung haben wir uns nunmehr folgendermaßen vorzustellen. In jedem Augenblick existiert am Ort des emittierenden oder absorbierenden Atoms ein bestimmtes von den übrigen Atomen bzw. Molekülen herrührendes Feld, welches im Laufe der Zeit fortwährend wechselt. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Feld im gegebenen Moment gerade einen Wert zwischen F und $F+dF$ hat (wir lassen im folgenden den Index 0 an der Feldstärke weg, da er nunmehr überflüssig ist), bezeichnen wir mit $W(F)\,dF$. Dieses Feld F bewirkt, daß die emittierte Linie nicht einfach, sondern dem Stark-Effekt gemäß aufgespalten wird. Nennen wir die Intensitätsverteilung in der aufgespaltenen Linie

$$I_{F,\nu}\,d\nu = I(F,\nu)\,d\nu,$$

dann bezeichnet I die Intensität in irgendeinem relativen Maß bei der Schwingungszahl ν und der Feldstärke F. Wenn wir diese Intensitätsverteilung mit $W(F)\,dF$ multiplizieren und über alle F integrieren, erhalten wir die Intensitätsverteilung in der verbreiterten Linie

$$I_\nu\,d\nu = d\nu\int_0^\infty I(F,\nu)\,W(F)\,dF.$$

Im allgemeinen Falle ist nun $I(F,\nu)$ eine sehr komplizierte Funktion von ν und F. Auf Grund eines genauen Beobachtungsmaterials könnte man die obige Integration graphisch ausführen, es wäre allerdings eine mühsame und kaum lohnende Arbeit. Wir können aber zu einer vorerst vollkommen genügenden Darstellung gelangen, wenn wir die genaue Intensitätsverteilung im Stark-Effekt durch eine ganz einfache ersetzen, die etwa als einen Mittelwert der richtigen anzusehen ist. Dadurch wird das Integral leicht, eventuell graphisch auswertbar. Die einfachste Annahme, die auch sehr gut zu den Beobachtungen paßt, ist die, daß die Linie durch den Stark-Effekt in ein breites Band ausgezogen wird, in dem die Intensität überall dieselbe sein soll, während sie an den Enden scharf zu Null herabfällt. Die gesamte Lichtmenge wollen wir uns bei allen Feldstärken unverändert denken. Daß dies berechtigt ist, sieht man sofort aus den Figuren von Stark[1]), jedoch ist es möglich, daß man bei einer genaueren Untersuchung eine Änderung der Gesamtintensität mit der Feldstärke annehmen muß. Eine einfache Rechnung, die hier weggelassen werden soll, ergibt dann für I_ν das Integral

$$I_\nu = \int_\infty^{F'} \frac{f}{\gamma F}\,W(F)\,dF,$$

hier ist f eine Konstante, die das Maß für die Intensität gibt, während γ den Proportionalitätsfaktor des Stark-Effekts darstellt. Ist die maximale Aufspaltung bei der Feldstärke F gleich $2\,\nu_m$, so ist

$$\gamma = \frac{2\,\nu_m}{F}.$$

Obige Formel ergibt mit Einsetzung der früher gegebenen Ausdrücke für $W(F)$ und mit Zuhilfenahme von graphischer Integration Kurven, wie in Fig. 2, aus denen die Halbwertsbreiten folgen

$$\left.\begin{aligned} &1.\ \text{Ion:} && 2\,\nu_h = 3{,}25\,\gamma\,n^{2/3}\,\varepsilon\\ &2.\ \text{Dipol:} && 2\,\nu_h = 4{,}54\,\gamma\,n\,m\\ &3.\ \text{Quadrupol:} && 2\,\nu_h = 17{,}2\,\gamma\,n^{4/3}\,\triangle. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Wir sind hier zu einem wichtigen Resultat gelangt, daß wir folgendermaßen ausdrücken können:

Wenn die störenden Atome (oder Moleküle) Ionen sind, so ist die Halb-

1) Vgl. J. Stark, l. c., Aufspaltung von H_α, H_β, H_γ, H_δ.

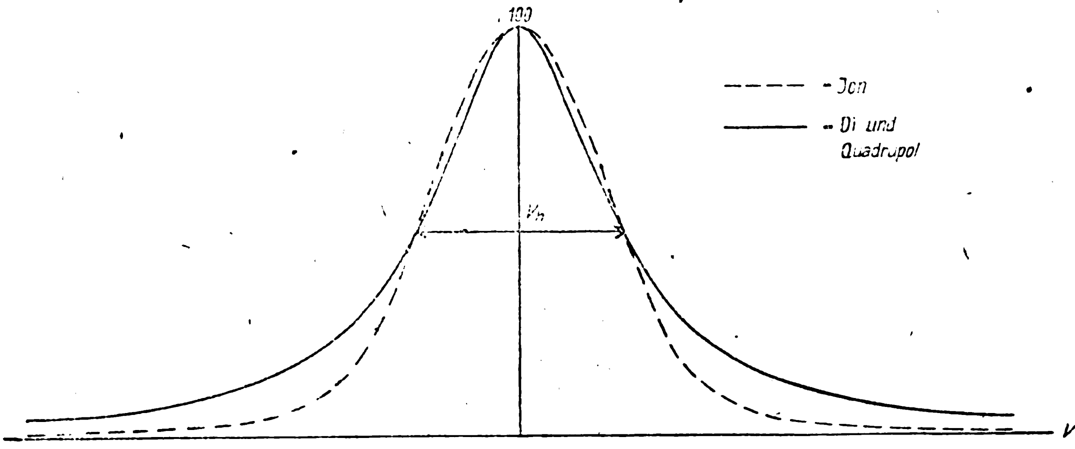


Fig. 2.

wertsbreite proportional zur $^2/_3$ Potenz ihrer Dichte, sind die störenden Moleküle Dipole, so ist die Breite proportional der Dichte selbst, und wenn sie Quadrupole sind, so ist die Breite proportional der $^4/_3$ Potenz ihrer Dichte.

Die Breite ist proportional mit γ, d. h. der Aufspaltung durch den Stark-Effekt für die Einheit der Feldstärke.

Diese Gleichungen geben uns die Möglichkeit, die Theorie an der Erfahrung zu prüfen. Einerseits wollen wir sie dazu benutzen, um die Verbreiterung in dazu geeigneten Fällen auszurechnen, andererseits um aus der gemessenen Verbreiterung Schlüsse auf das störende Molekül zu ziehen.

§ 7. Die sehr zahlreichen Versuche über Verbreiterung und Verschiebung durch Druck (letztere ist wohl als Wirkung eines unsymmetrischen Stark-Effektes aufzufassen) sind für unsere Zwecke meist nicht verwertbar, da nicht darauf geachtet wurde, daß nur Ionen oder nur Gasdruck verbreiternd wirken konnte. Wo beide in merklicher Menge vorhanden sind, läßt sich wenig entscheiden. Ich habe aber die Versuche von Füchtbauer und Hoffmann[1]) berechnet; in diesen Versuchen war nämlich die Art und Dichte der verbreiternden Moleküle genau bestimmt. Es wurde die Breite von *Cs*-Linien im Stickstoff bei hohem Druck (2 Atm.) gemessen. Leider ist der Stark-Effekt nicht bekannt für die gemessene *Cs*-Linie λ 4555 Å.-E. Stark[2]) gibt aber für die entsprechende *Li*-Linie λ 6104 Å.-E. an, daß eine sichere Aufspaltung in „kleinem" Abstand vorhanden war. Dasselbe ist bei der ebenfalls entsprechenden *Na*-Linie λ 5890 Å.-E. der Fall. Wir dürfen demnach die Aufspaltung unter Berücksichtigung der Dispersion des von Stark verwendeten Spektrographen zu etwa 0,3 Å.-E. in einem Felde von 40000 Volt/cm schätzen. Diese Schätzung ist natürlich eine rohe, aber für die Größenordnung wohl eine genügend genaue. Es berechnet sich dann aus unseren Formeln und der Versuchsdaten von Füchtbauer und Hoffmann die Quadrupolkonstante des Stickstoffmoleküls zu

$$\Theta_3 - \Theta_2 = \triangle = 8{,}6 \cdot 10^{-26} \text{ el.-st. E.}$$

Um diese Zahl mit bekannten in Beziehung zu bringen, habe ich das Stickstoffmodell von Sommerfeld[1]) angenommen: zwei Kerne mit je 4 Elektronen in kleinem Abstand, ein um die Verbindungslinie der zwei Kerne rotierender Kreisring von 6 Elektronen. Sommerfeld berechnet für den halben Ringdurchmesser

$$a = 0{,}60 \cdot 10^{-8} \text{ cm},$$

während aus dem oben gefundenen Wert von $\triangle$ für diesen Radius

$$a = 0{,}587 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

folgt.

Es braucht wohl nicht gesagt zu werden, daß die Übereinstimmung nur zufällig so genau ist wegen der rohen Schätzung des Stark-Effekts. Es scheint mir aber, daß hiermit wohl gezeigt ist, daß die Theorie die richtige Größenordnung für die Breite liefert.

Auf Wasserstoff läßt sich die Theorie wegen der genauen Kenntnis des Stark-Effekts wohl anwenden.

Das Wasserstoffmolekül ist wieder ein axensymmetrischer Quadrupol. Aus dem Bohr-Debyeschen Modell[2]) berechnet sich

1) Chr. Füchtbauer u. W. Hoffmann, Ann. d. Phys. **43**, 96, 1914.
2) J. Stark, l. c.

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **53**, 497, 1917.
2) P. Debye, Münchn. Ber. Math.-phys. Kl. 1915. S. 1.

$$\triangle = \Theta_3 - \Theta_2 = 2{,}0 \cdot 10^{-20} \text{ el.-st. E.},$$

mit $a = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm.

Aus den Angaben von Stark[1]) entnehmen wir die folgenden Konstanten. Eine Aufspaltung von 1 Å.-E. wird bewirkt durch die Feldstärken

bei H_α 15 el.-st. E.
H_β 11 „
H_γ 8 „
H_δ 5,5 „

Damit berechnen sich die folgenden Breiten bei normaler Dichte und Zimmertemperatur

H_α 1,8 Å.-E.
H_β 2,4 „
H_γ 3,3 „
H_δ 4,7 „

Im Lichtbogen wurden bis zu zehnmal größere Breiten gefunden, ohne Zweifel wegen der großen Ionenkonzentration.

Bei geringeren Drucken liegen ältere Messungen vor von Michelson[2]), die interferometrisch gemacht sind. In der folgenden Tabelle gebe ich seine Zahlen und daneben die aus der skizzierten Theorie berechneten zum Vergleich an.

Tabelle.

Druck (cm)	Halbw.-Breite in Å.-E.	Ber. Halbw.-Breite
20	0,2	0,30
9	0,128	0,11
7,1	0,116	0,08
4,7	0,095	0,04
2,3	0,071	0,016
1,3	0,056	0,007
0,9	0,053	0,004
0,5	0,050	—
0,3	0,040	—

Die Übereinstimmung ist eine recht gute, besonders ist es bemerkenswert, daß die Michelsonschen Zahlen nach unten zu eben dort konstant werden (und in die Doppler-Effektverbreiterung übergehen), wo die Stark-Effektverbreiterung unmerklich wird. Michelson gibt selbst an, daß seine Zahlen wahrscheinlich bei den größten Drucken etwas zu niedrig sein dürften, wegen der von der theoretisch angesetzten, abweichenden Intensitätsverteilung der Linie.

Ich gebe keine weiteren Beispiele an, da die Beobachtungen, wie oben gesagt, zum größten Teil schlecht verwertbar sind. Man dürfte wohl aber aus den mitgeteilten Zahlen ersehen, daß die Theorie mindestens die richtige Größenordnung des Effekts wiedergibt. Es müssen weitere Versuche, die nunmehr zweckentsprechend anzulegen wären, darüber entscheiden, ob sie vollständig ist, oder ob noch andere bisher unbekannte Ursachen der Verbreiterung mit hereinspielen.

Die Bearbeitung wurde auf Veranlassung von Prof. Debye unternommen und im Göttinger Physikalischen Institut durchgeführt.

Kristiania, den 6. Februar 1919.

(Eingegangen 28. Februar 1919.)

1) J. Stark, l. c.
2) A. Michelson, Phil. Mag. (5) **34**, 289, 1892.

Tagesereignisse.

Gründung eines Verbandes deutscher Radio-Ingenieure. In Berlin fand kürzlich ein Zusammenschluß der führenden Techniker aus dem Gebiete der drahtlosen Telegraphie zu einem großen wissenschaftlichen Verbande statt, der aber auch wirtschaftliche Zwecke verfolgen soll. Die drahtlose Telegraphie hat eine große Zukunft, wie die Erfahrungen des Krieges bewiesen haben. Die gegenwärtig in Berlin stattfindende Telefunkenausstellung zeigt, wie mannigfach die Aufgaben der drahtlosen Telegraphie und drahtlosen Telephonie auf allen Gebieten sind. Die drahtlose Technik wird in kurzer Zeit in fast allen Wirtschaftsfragen vollwertig vertreten werden müssen; der neu gegründete „Verband deutscher Radio-Ingenieure" e. V. (Geschäftsstelle: Berlin-Steglitz, Göttinger Straße 7), soll der Wahrung der Interessen dieser neuen Technik auf wissenschaftlichem und wirtschaftlichem Gebiete dienen. Die Vertretung des Verbandes in der Reichs-Funk-Kommission ist bereits in die Wege geleitet. Die Arbeit hat in allen Ausschüssen begonnen. RD.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Göttingen Fräulein Dr. Emmy Noether für Mathematik.

Ernannt: Der Privatdozent für Chemie an der Universität Wien Dr. Anton Kailan zum a.o. Professor ebendaselbst.

Verliehen: Dem Privatdozent für organische Chemie an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Hugo Bauer Titel und Rang als a.o. Professor.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Wirkl. Geheimer Rat Dr. Karl Engler.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

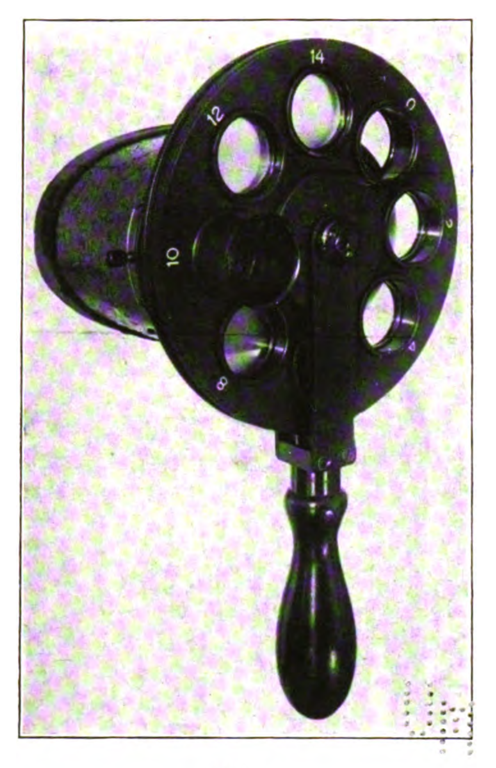


Fig. 1.

A. Wigand, Eine Methode zur Messung der Sicht.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und H. Th. Simon



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 40 Mark, im Ausland 45 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 60 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstraße 2.

No. 8. 15. April 1919. No. 540. 20. Jahrgang.

Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechungen.)



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 8. 15. April 1919. Redaktionsschluß für No. 10 am 24. April 1919. 20. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Vollständige Spektraldiagramme von Kristallen.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von H. Seemann.

Die vollständigen Spektraldiagramme, die bei Aufnahme des *Pt*-Spektrums einer mittelharten Röntgenröhre an einer Steinsalzspaltfläche (Kubusfläche) entstehen, zeigt Tafel VI, an Kandiszucker und Kaliumplatincyanür Tafel VII. Letztere beiden, sowie Nr. 1 auf Tafel VI, sind so aufgenommen worden, daß der einfallende ebene Strahlenfächer senkrecht zur Oberfläche und parallel einer Kante der Kristalle verlief; Nr. 2 auf Tafel VI derart, daß der Strahlenfächer senkrecht zur reflektierenden Oberfläche, aber schief gegen die natürlichen Kristallkanten (Hauptsymmetrieachse) lag.

Als Hauptspektrum gilt dasjenige, das an der zur Oberfläche parallel laufenden Strukturfläche reflektiert ist. Es ist auf den Tafeln das horizontale (parallel den Druckzeilen), das bei Steinsalz weitaus das hellste ist, da die Kubusfläche am dichtesten mit *Na*- und *Cl*-Atomen besetzt ist. Sein besonderes Kennzeichen ist, daß es bei Drehung des Kristalls in seiner reflektierenden Oberfläche unverändert stehen bleibt. Ferner ist es das einzige, das der Spektrographenformel

$$n \cdot \lambda = 2 d \cdot \sin \alpha \qquad (1)$$

entspricht.

Die andern „Nebenspektren" lassen sich nicht nach dieser Formel derart ausmessen, daß bei der Bestimmung des Sinus der Abstand der Spektrallinie vom Nullpunkt des Spektrums eingesetzt wird, da sie nicht längs der Achse der Hyperbelschar liegen, von denen ihre Linien Bogenstücke darstellen[1]) (vgl. unten). Die Linien liegen daher schief zur Richtung ihrer Nebenspektren und ihr geometrischer Abstand ist umso größer als der Abstand nach Formel (1), je mehr die Nebenspektren gegen das Hauptspektrum geneigt sind. Beides gilt daher am meisten für die senkrecht nach oben und unten verlaufenden Nebenspektren der Rhombendodekaederflächen (011) des Steinsalzes, die unter 45° gegen die Oberfläche geneigt sind. Sie werden bei der Aufstellung des Kristalls, wie sie bei Nr. 1 von Tafel VI war, streifend über die Kubusoberfläche reflektiert und markieren so auf dem Photogramm die Spurlinie der reflektierenden Kristalloberfläche.

Die Aufnahmen sind nach der Schneidenmethode mit größeren Kristallplatten gemacht worden. Die mehr als 45° gegen die Oberfläche geneigten Strukturflächen reflektierten ihre Spektren demnach in das Innere der Kristalle hinein, wo sie praktisch total absorbiert wurden. Wäre die auf S. 55[1]) beschriebene Fenstermethode bei Fortfall der Blende *B* (Fig. 1) dort und bei schmaler Ausblendung des einfallenden Strahlenfächers parallel der Zeichenebene benutzt worden, so wären sämtliche Nebenspektren erschienen, die freilich bei Steinsalz nur das Spiegelbild der auf den Tafeln vorhandenen sein würden. Die beiden Hauptspektren beiderseits des Nullpunktes würden dann allerdings vom direkt einfallenden Licht vollständig überlagert werden.

Die reflektierenden Strukturflächen der Nebenspektren.

Die Lage der Strukturflächen des Steinsalzes, die auf Tafel VI je ein Spektrum von merklicher Helligkeit entworfen haben, ist aus Fig. 1 ersichtlich. Diese soll ein Profil der zur Zeichenebene senkrechten Gitterreihen, die parallel einer Hauptsymmetrieachse (Würfelkante) des Steinsalzes laufen, darstellen. Die Kreise bedeuten demnach nicht Atome, sondern Spurpunkte der Gitterreihen. Letztere bestehen aus abwechselnden *Na*- und *Cl*-Atomen. Sämtliche

1) H. Seemann, Ann. d. Phys. 53, 467, 1917. (Fig. 1.)

1) W. Friedrich u. H. Seemann, diese Zeitschr. 20, 55, 1919.

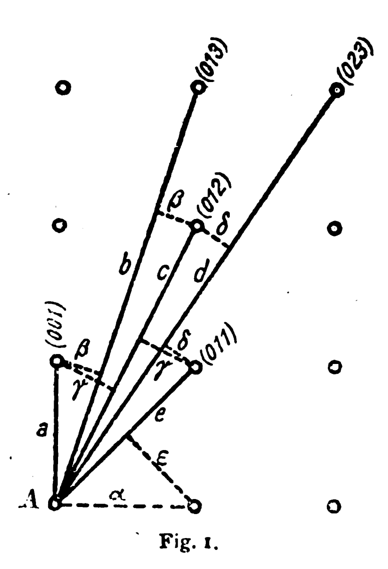


Fig. 1.

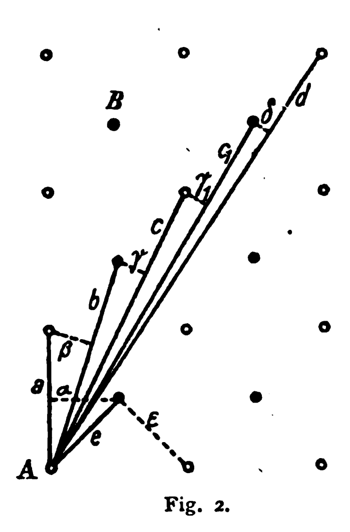


Fig. 2.

Strukturflächen, die der zur Zeichenebene senkrechten Zone angehören, sind daher halb aus *Na*- und halb aus *Cl*-Atomen zusammengesetzt.

Die Dichte der Besetzung der fraglichen Gitterebenen ist umgekehrt proportional dem linearen Abstand der nächstbenachbarten senkrecht zur Zeichenebene stehenden Gitterreihen in der Gitterebene, wie es in Fig. 1 durch Verbindungslinien a, b, c, d, e von der Gitterreihe A aus in Richtung der Flächen (001), (013), (012), (023) und (011) und ihrer symmetrisch gelegenen Flächen zum Ausdruck gebracht ist. Die Dichte der Besetzung der Gitterebenen verhält sich also einfach umgekehrt wie die Länge der Linien, die von einem herausgegriffenen Spurpunkt A aus nach den in den Gitterebenenrichtungen nächstbenachbarten Spurpunkten gezogen werden können.

Die Dichte der Besetzung des Kristalls mit Gitterebenen der genannten Strukturflächen ist umgekehrt proportional den Abständen der den gezeichneten Verbindungslinien nächstbenachbarten Spurpunkten. Diese Abstände sind die Gitterkonstanten mit Bezug auf die Interferenzreflexion. Sie sind gleichfalls ausgezeichnet und mit bzw. α, β, γ, δ, ε bezeichnet.

Da die räumliche Atomdichte von der Gruppierung unabhängig ist, so muß das Produkt aus Atomdichte innerhalb einer Gitterebene, d. i. die Besetzungsdichte, mal Gitterebenendichte im Volumen für alle Strukturflächen, d. h. für alle Gruppierungs- oder Zählungsrichtungen, konstant sein. Oder reziprok geometrisch ausgedrückt: Das Produkt aus dem Abstand zweier benachbarter Gitterreihen innerhalb einer Gitterebene und dem Abstand dieser Gitterebene von der nächstparallelen (Gitterkonstante) ist für alle Strukturflächen, d. h. für jede Gruppierung der Kristallatome in parallelen Ebenen konstant, und zwar für den Fall der Fig. 1 (einfach kubischer Kristall) gleich dem Quadrat des kleinsten zwischen zwei Gitterreihen im Kristall vorkommenden Abstandes. Es ist also

$$a \cdot \alpha = b \cdot \beta = c \cdot \gamma = d \cdot \delta = e\,\varepsilon = a^2. \quad (2)$$

Dies gilt rein geometrisch für alle regulären Raumgitter beliebiger Atomarten. In Fig. 2 ist z. B. ein Gitter gezeichnet, das mitten zwischen den Gitterreihen der Fig. 1 bei gleicher Gitterkonstante a wie dort noch weitere parallele Gitterreihen enthält, deren Spurpunkte durch Vollkreise gekennzeichnet sind. Sie mögen Zwischenreihen genannt werden. Solche sind z. B. bei Wolfram und Diamant vorhanden, bei denen sie gleich dicht mit Atomen besetzt sind wie die Hauptreihen. Die Abstände der Gitterreihen und Gitterebenen sind in gleicher Weise eingetragen wie in Fig 1. Die Kantenlänge a des Elementarwürfels ist ebenso groß gewählt wie in Fig. 1. Dann ist b halb so groß, c und d ebenso groß und e halb so groß. Außerdem tritt noch eine Gitterebene längs c_1 auf mit der Gitterkonstanten γ_1 sowie die nicht eingezeichnete Fläche (015) längs der Verbindung von A nach B. Diese Flächen (035) und (015) sind zwar beim einfach kubischen Gitter (Steinsalz) auch vorhanden, aber nur halb so dicht mit Atomreihen besetzt als im Falle der Fig. 2. Ihre Spektren würden also erst bei sehr langen Expositionszeiten erscheinen. Die Helligkeit dieser Spektren in Fig. 2 würde, falls das Gitter der Fig. 2 aus lauter gleichartigen Atomen bestände, wie es bei Diamanten und Wolfram der Fall ist, zwischen der der Spektren (012) und (023), c bzw. d, liegen. Diese Tatsache allein würde für einen gleichatomigen Kristall

genügen, um seinen Gitterbau entsprechend Fig. 2 zu kennzeichnen.

Aber auch die gemessenen Gitterkonstantenverhältnisse gemäß Formel (2) wären andere. Während für Fig. 1 gilt:

$$a:b:c:d:e = 1:\sqrt{10}:\sqrt{5}:\sqrt{13}:\sqrt{2} \quad (2a)$$

und

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta:\varepsilon = \frac{1}{1}:\frac{1}{\sqrt{10}}:\frac{1}{\sqrt{5}}:\frac{1}{\sqrt{13}}:\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2b)$$

ist nach Fig. 2:

$$a:b:c:c_1:d:e = 1:\tfrac{1}{2}\sqrt{10}:\sqrt{5}:\tfrac{1}{2}\sqrt{34}:\sqrt{13}:\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad (3a)$$

$$\alpha:\beta:\gamma:\gamma_1:\delta:\varepsilon = \tfrac{1}{2}:\frac{1}{\sqrt{10}}:\frac{1}{2\sqrt{5}}:\frac{1}{\sqrt{34}}:\frac{1}{2\sqrt{13}}:\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3b)$$

$$a\cdot\alpha = b\cdot\beta = c\cdot\gamma = c_1\cdot\gamma_1 = d\cdot\delta = e\cdot\varepsilon = \frac{a^2}{2}. \quad (3)$$

Gitterebenen mit noch weiteren Atomreihenabständen kommen wegen ihrer geringen Reflexionsfähigkeit praktisch kaum in Frage. Schon bei den Tafelaufnahmen ist das (001)-Spektrum so viel stärker geschwärzt, als die schwächsten der übrigen, daß es beim Kopieren zum Positiv unter Benutzung einer Maske viermal länger exponiert werden mußte, um die erste Ordnung des Hauptspektrums noch einigermaßen erkennbar zu machen.

Wenn die Zwischenreihen aus unter sich gleichen Atomen anderer Art als die der Hauptreihen bestehen, so gelten obige Verhältnisse der Helligkeit und Gitterebenenabstände nur bedingt. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Dichte der Besetzung der Zwischenreihen mit Atomen dieselbe oder ein Vielfaches der Hauptreihen ist. Ersteres gilt z. B. für Zinkblende (ZnS), letzteres für Flußspat ($CaFl_2$), bei dem die Zwischenreihen doppelt soviel Fluoratome enthalten als die Hauptreihen Ca-Atome. In beiden Fällen würden die (035) und (015)-Spektren nur dann eine Helligkeit besitzen, die zwischen der der (012) und (023)-Spektren (Fläche c und d) läge, wenn die beugende Kraft der Zwischenreihen nur wenig verschieden von der der Hauptreihen wäre. Dies träfe für den ersteren Fall nur zu, wenn die beiden fraglichen Atomarten nahe gleich schwer wären, was bei Zn und S nicht der Fall ist, für den zweiten Fall, wenn je zwei oder mehr Atome der Zwischenreihen zusammengenommen annähernd so stark beugten wie je ein Atom der Hauptreihen.

Auch die spektral wirksamen der Gleichung (1) genügenden Gitterkonstanten entsprächen nur unter diesen eben genannten Bedingungen bei erhöhter Übereinstimmungsgenauigkeit den in der Fig. 2 und Gleichung (3b) angegebenen. Sind die genannten Bedingungen nicht genügend genau erfüllt, so kann zwischen benachbarten Netzebenen z. B. der Flächen (001), (012) und (023), deren Gitterebenen abwechselnd nur aus Zwischenreihen oder Hauptreihen bestehen, keine Interferenz gemäß Gleichung (1) zustande kommen, da die von beiden abgebeugten Wellen verschiedene Amplitude besitzen und sich daher in keiner Richtung auslöschen oder summieren können. Die genannten Strukturflächen interferieren vielmehr so, als ob zwei Gitterebenensysteme ineinander geschaltet wären, von denen eins nur aus Haupt-, das andere nur aus Zwischenreihen zusammengesetzt ist. Ihre Gitterkonstanten sind daher nicht die der Gleichung (3b) nach Fig. 2, sondern die der Gleichung (2b) nach Fig. 1, also doppelt so groß.

Die Richtung der Nebenspektren.

Das Zustandekommen der Nebenspektren bei der Stellung des einfallenden Strahlenfächers, wie sie bei der Aufnahme Nr. 1 auf Tafel VI und Nr. 3 und 4 auf Tafel VII gewählt war, nämlich senkrecht zur reflektierenden Oberfläche und parallel einer natürlichen Kristallisationskante dieser Spaltfläche (Hauptsymmetrieachse), ist aus Fig. 3 ersichtlich. Der kubische Kristall $ABCDEFG$ ist derart gegen Bestrahlung abgeblendet, daß nur das punktförmige Stückchen S von Strahlen getroffen werden kann, die innerhalb der Einfallsebene $OQMN$ verlaufen. Es soll zunächst verfolgt werden, wohin der einfallende Strahl OS von den durch die Ebenen $ABED$, $KHSM$ und $LISM$ ihrer Richtung nach angedeuteten Strukturflächen auf die Projektionsebene $QRDM$ reflektiert wird.

$OQMN$ sei rechteckig, $MS = NS$. Dann gelangt der an der Kubusfläche $ABED$ reflektierte Strahl nach Q. Die andern durch $KHSM$ und $LISM$ gekennzeichneten Strukturflächen, deren Gitterebenen auf der bestrahlten Oberfläche des Stückchens S treppenförmig zutage treten, reflektieren den Strahl OS nach den Punkten V bzw. U hin, die auf dem geraden Grundkreis eines Kegels liegen, dessen Achse SM und dessen Erzeugende SQ oder das verlängerte OS ist. Rein geometrisch betrachtet, handelt es sich um eine gewöhnliche Spiegelung, über die man sich Rechenschaft gibt, indem man die Einfallslote auf die verschiedenen Flächen nach S hin fällt. Die Einfallsebenen der Flächen $KHSM$ und $LISM$ sind durch diese

Lote und jeden nach S gelangenden Strahl gegeben. Sie schneiden den genannten Kegel in je einem Hauptschnitt. Die Ebene $OQMN$ ist Einfallsebene in doppeltem Sinne. Sie ist die optische Einfallsebene der Kubusfläche und gleichzeitig diejenige Ebene, innerhalb deren andere nach S hin einfallende Strahlen verlaufen. Diese andern Strahlen gehören in bezug auf die Spiegelebenen $KHSM$ und $LISM$ andern optischen Einfallsebenen an, als der Strahl OS.

Der ganze Strahlengang ist bekannt von den Laue-Friedrichschen Diagrammen. Der Unterschied ist nur der, daß dort nur ein einfallender Strahl OS betrachtet wird und zur Wirkung kommt, während hier ein ganzer Fächer solcher Strahlen innerhalb $OQMN$ behandelt werden soll. Außerdem ist dort der Kristall so dünn in Richtung SM, daß diejenigen reflektierten Strahlen, die im vorliegenden Falle in den großen Kristall hinein reflektiert und dort völlig absorbiert werden, in derselben Stärke austreten, wie die andern gleicher Wellenlänge.

Bei den vorliegenden Aufnahmen ist der einfallende Strahl OS nach Art der Braggschen Aufnahmen in Ebene $OQMN$ um S gedreht worden. Das entstehende Diagramm wird dann nicht durch Flecke gebildet, deren jeder ein kleiner Teil eines besonderen Spektrums ist, sondern alle diese Spektren sind ganz oder zum Teil erschienen. Geometrisch gesprochen, sind die Flecke auf P durch die Bewegung von OS radial nach M hin auseinandergezogen worden. Diese Bewegung findet so statt, daß die reflektierten Strahlen SQ, SV, SO in den Ebenen SQM, SVM, SUM bleiben, die Punkte Q, V, U demnach auf den Radien MQ, MV, MU des Kegelgrundkreises, wobei ihre Abstände von M immer einander gleich bleiben. Q, V, U liegen für alle Richtungen des einfallenden Strahles auf konzentrischen Kreisen. Die reflektierten Strahlen selbst liegen für jede Einfallsrichtung mit SO auf demselben Doppelkegel, der durch den Hauptschnitt $DEAB$ halbiert wird. Alle diese Kegel haben die gemeinsame Spitze S und die gemeinsame Achse MN. Die reflektierenden Ebenen sind Hauptschnitte dieser Kegel, auf denen die Einfallsebenen der Strahlen senkrecht stehen. Zwei Schnittlinien dieser Einfallsebenen mit dem Doppelkegelmantel sind der einfallende und reflektierte Strahl. Der einfallende ist allen Einfallsebenen gemeinsam.

Die Lage der Punkte Q, V, U zu den reflektierenden Ebenen ist eine sehr einfache. Es sind nämlich

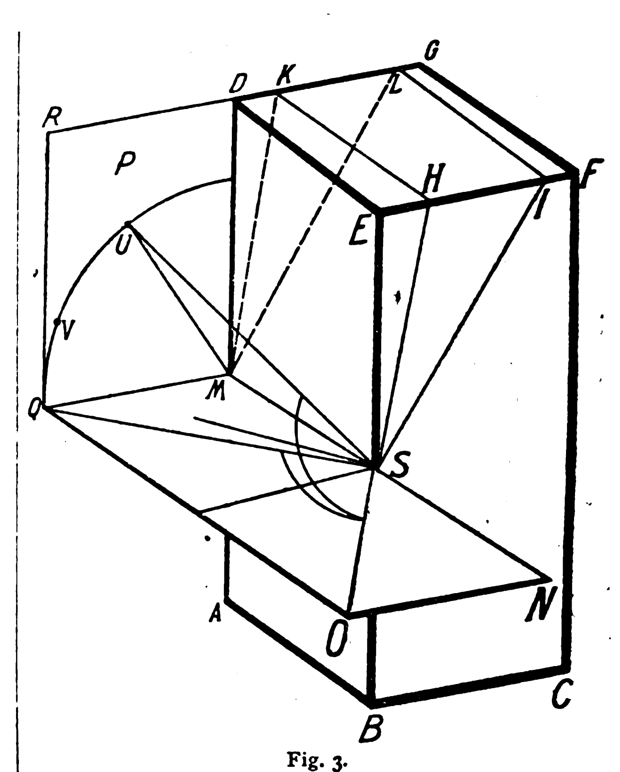


Fig. 3.

$$\sphericalangle QMV = 2 \sphericalangle ESH = 2\,\varepsilon_1$$
$$\sphericalangle QMU = 2 \sphericalangle ESI = 2\,\varepsilon_2 \qquad (4)$$

wie mittels der in S auf die Ebenen $KHSM$ und $LISM$ gefällten Lote leicht bewiesen werden kann.

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn der Flächenneigungswinkel $\varepsilon = 45^0$ ist. Der reflektierte Strahl bewegt sich dann streifend über die Kristalloberfläche und entwirft ein Spektrum in der Richtung MD.

Es soll jetzt noch der allgemeinere Fall kurz beschrieben werden, wenn die Einfallsebene $OQMN$ nicht parallel der durch die Richtung SM definierten Hauptsymmetrieachse liegt. Fig. 4 und Nr. 2 der Tafel VI zeigt eine solche schiefe Stellung, in der der Kristall hinten hochgekippt ist. Die gemeinsame Schnittlinie der zu betrachtenden reflektierenden Gitterebenen trifft die Projektionsfläche P jetzt in M'. Das Hauptspektrum liegt noch unverändert längs QM und hat wie oben seinen Nullpunkt bei M. Die Nebenspektren, von denen in Fig. 4 nur eins, UX, gezeichnet ist, sind parallel nach links verschoben worden. Der Nullpunkt des Spektrums XU liegt bei X. Er wird von dem streifend über die Gitterebene L_1LISX nach X gelangenden Strahl O_0S entworfen. Der Strahl NS wird an der genannten Ebene nach Z reflektiert. Da das vom Kristall ausgeblendete Stückchen S bei der Aufnahme Nr. 2 von Tafel VI wie auch bei den drei andern mitten in der reflektierenden Oberfläche gelegen hat, hätten

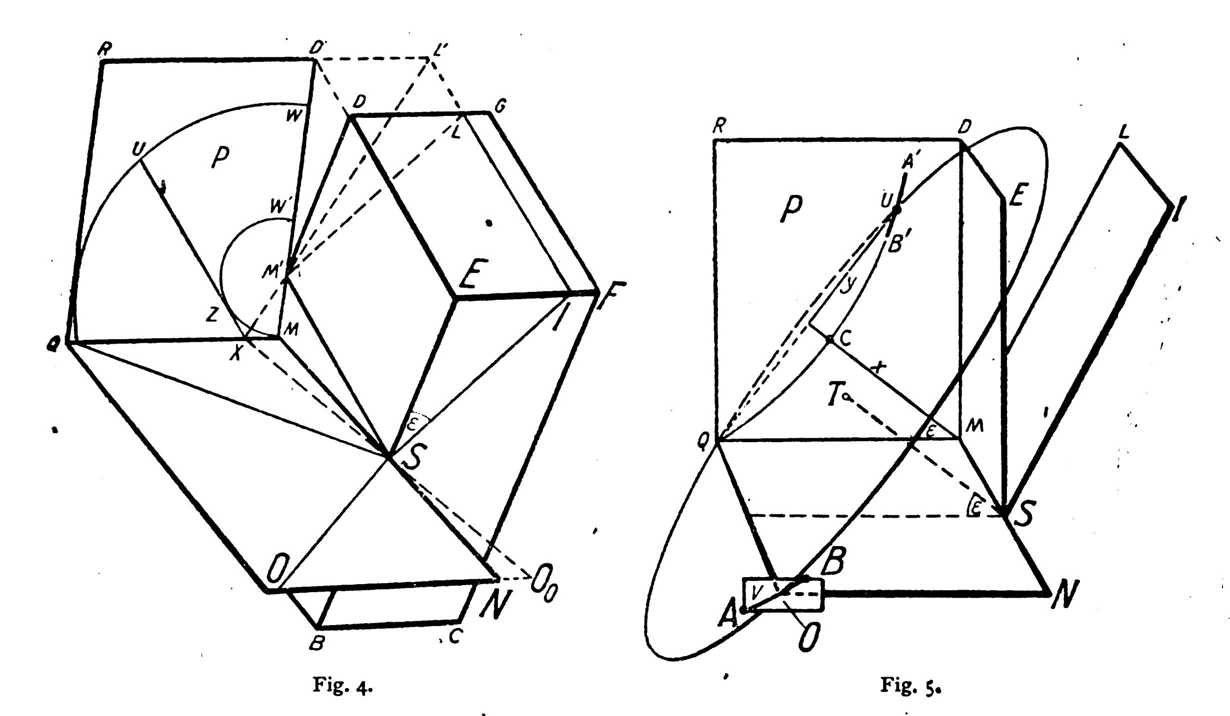


Fig. 4. Fig. 5.

die einfallenden Strahlen der Richtungen OS bis O_0X nicht mehr in genügender Stärke durchdringen können, um das Spektralgebiet zwischen X und Z noch zu entwerfen. Tatsächlich reichten aber sämtliche Nebenspektren nicht weiter ins kurzwellige Gebiet hinein als bis zu diesen Z-Punkten. Diese Punkte sind die Berührungspunkte der Spektren bzw. der Mittellinien der praktisch endlich breiten Spektren mit der Ellipse $W'ZM$, die den Schnitt des Kreiskegels $SW'ZM$ mit der Projektionsebene P bildet. Der Kegel ist durch die Rotation von SM um SM' als Achse entstanden zu denken. Sämtliche Strahlen, die durch Reflexion des Strahls NS an den sich in $M'S$ schneidenden Gitterebenen entstanden sind, liegen auf dem Mantel dieses Kegels. Alle Spektren der gekennzeichneten Gitterebenen bzw. Strukturflächen umhüllen die Schnittellipse $W'ZM$. Auf der Tafel VI Nr. 2 ist zu erkennen, daß die Nebenspektren, die nicht so stark exponiert waren, als die der andern Aufnahmen, eine halbkreisförmige Fläche umhüllen. Auch die Zucker- und Kaliumlithiumplatincyanürkristalle haben nicht genau in der Lage der Fig. 3 gestanden. Ihre Spektren treffen gleichfalls nicht genau in einem Punkte zusammen.

Der axiale Abstand der Linien in den Nebenspektren vom Nullpunkt.

Die Berechnung der axialen Abstände der Linien der Nebenspektren von ihrem Nullpunkt, die spektroskopische Auswertung der Nebenspektren, ist für die spezielle Anordnung der Fig. 3 und der Nr. 1 von Tafel VI sowie Nr. 3 und 4 der Tafel VII aus Fig. 5 ersichtlich. Der Übersichtlichkeit halber ist hier nicht der ganze Kristallumriß, sondern nur die Oberfläche $DESM$ und die um den Winkel ε gegen diese geneigte Gitterebene $LISM$ gezeichnet. Aus demselben Grunde sind die ein- und ausfallenden Strahlenpaare OS und SU, AS und SA', BS und SB' nicht eingetragen. Der Strahl OS von der strahlenden Fläche V, die der Einfachheit halber parallel P liegen möge, wird von der Fläche $LISM$ von S nach U reflektiert. OS und SU sind Seitenlinien desjenigen Kreiskegels, dessen Achse TS auf $LISM$ senkrecht steht und demnach gegen $QRSM$ die Neigung ε hat[1]). Sie begrenzen einen Hauptschnitt des Kegels. Hat der Kegel den halben Öffnungswinkel φ_2, so ist der Neigungswinkel α, d. i. der Reflexionswinkel derjenigen Wellenlänge des Strahles OS, die unter dem Winkel α reflektiert wird, gegen die Ebene $LISM$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}.$$

Alle längs des Kegelmantels nach S einfallenden Strahlen der gleichen Wellenlänge werden in derselben Weise reflektiert. Die von der Schnittkurve AB (Hyperbelbogen) des Kegels mit der strahlenden Fläche V nach S einfallenden Strahlen entwerfen demnach auf P einen Hyperbelbogen $A'B'$, der die Spektrallinie der

1) Vgl. l. c.

reflektierten Wellenlänge darstellt. Im speziellen Falle der Fig. 5 ist $A'B'$ und AB spiegelbildlich gleich.

Das Nebenspektrum, dem $A'B'$ angehört, erstreckt sich, wie Fig. 3 zeigt, von M nach U. Der Abstand MU ist jedoch nicht der der Spektrographenformel (1) entsprechende, sondern der Abstand CM des Scheitels C der Schnitthyperbel vom Mittelpunkt der Hyperbel, d. i. die Halbachse a. Die Achse MC dieser Hyperbel ist die Orthogonalprojektion der Kegelachse ST auf P. Es ist

$$\sphericalangle QMC = \sphericalangle UMC = \varepsilon.$$

Der Reflexionswinkel α berechnet sich daher aus dem gemessenen y und x des Punktes U der Hyperbel und dem Abstand $SM = b$ der Hyperbel in folgender Weise. Aus der Figur ist zu ersehen, daß

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{SM}{CM} = \frac{b}{a},$$

also

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}}.$$

Die Gleichung der Hyperbel lautet

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 + y^2}{x^2},$$

also ist

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2 + y^2}{x^2}}}. \tag{5}$$

Die Spektrographenformel der Nebenspektren für die Anordnung der Fig. 5, unabhängig von der Form und Neigung der Strahlenquelle V lautet daher

$$n \cdot \lambda = \frac{2d}{\sqrt{1 + \frac{b^2 + y^2}{x^2}}}. \tag{6}$$

Im Hauptspektrum ist $y = 0$. Das Gitterkonstantenverhältnis der zu zwei verschiedenen Nebenspektren gehörigen Strukturflächen ist daher

$$d : d_1 = \sqrt{1 + \frac{b^2 + y^2}{x^2}} : \sqrt{1 + \frac{b^2 + y_1^2}{x_1^2}}, \tag{7}$$

wo x, y und x_1 und y_1 die Koordinaten zweier spektral identischen Linien gleicher Ordnung in den beiden Spektren sind, bezogen auf die Halbierungslinien als X-Achsen der Winkel zwischen den Nebenspektren einerseits und dem Hauptspektrum andererseits.

Für die schiefe Anordnung der Fig. 4 (Nr. 2 der Tafel VI) und schiefe Lage der Projektionsebene ist die Berechnung wesentlich komplizierter. Sie wird in der angekündigten ausführlichen Arbeit gebracht werden.

Alle beschriebenen geometrischen Verhältnisse gelten für alle spektroskopischen Methoden mit Ausnahme der von Debye und Scherrer[1]). Maßgebend für die Größe und Form der Spektraldiagramme ist nur der Abstand des Spaltes von der Projektionsebene und deren Neigung gegen die reflektierenden Strukturflächen. Eine Parallelverschiebung der letzteren in beliebiger Richtung ändert an den Spektren geometrisch nichts (vgl. l. c.).

Übersicht.

Die beschriebenen Spektraldiagramme sind eine Kombination der Laue-Friedrichschen Punktdiagramme mit den Braggschen Einzelspektren an (mindestens drei) verschiedenen Strukturflächen. Sie liefern mit je einer Aufnahme von höchstens zwei verschiedenen Zonen, z. B. Reflexion an der Kubus- und Oktaederfläche nach Fig. 3, ein eindeutiges Bild der Kristallstruktur in größter Vollständigkeit, indem sie ermöglichen, die Neigung der dichtest besetzten Flächen gegen die Projektionsfläche unmittelbar abzulesen, die Verhältnisse der optisch wirksamen Gitterkonstante dieser Flächen durch einfache Ausmessung und Rechnung zu finden und außerdem noch durch zuverlässige Messung der relativen Helligkeit der einzelnen Spektren die relative Dichte der Besetzung als neues Kriterium heranzuziehen.

Daß die Erforschung der Struktur komplizierter Kristalle selbst mit dem beschriebenen Verfahren nicht leicht ist, zeigt Tafel VII. Dort sind hier und da auch Linien zu erkennen, deren Neigung beweist, daß sie Spektren von Strukturflächen angehören, die nicht zu der Zone der andern gehören, z. B. bei der Zuckeraufnahme oben rechts. Die Nullpunkte dieser schiefen Spektren stoßen nicht im Schnittpunkt der andern zusammen.

Für die gewöhnliche Spektroskopie ergeben sich aus den Aufnahmen folgende wichtige Vorsichtsmaßregeln:

Macht man die strahlende Fläche V zu breit in der Richtung senkrecht zur Einfallsebene $OQMN$, so werden, wie aus dem Vorherigen ersichtlich, die Spektren zu breit, d. h. die Linien zu lang, so daß sich die Spektren in der Nähe des Nullpunktes überlagern. Dies ist für spektroskopische Zwecke, wenigstens wenn es sich um Erforschung des kurzwelligen Gebietes handelt, natürlich unbedingt zu vermeiden. Bei den Aufnahmen der Tafeln war V nur etwa 2 mm hoch, wobei allerdings der Abstand OS kürzer war als die Länge der reflektierten Strahlen bis P. Trotzdem berühren sich die

1) Diese Zeitschr. 17, 277, 1916.

Nebenspektren schon nahezu. Bei der Kaliumplatincyanüraufnahme überdecken sie sich bereits derart, daß eine sichere Analyse nicht möglich ist.

Würzburg, Physikalisches Institut. Dezember 1918.

(Eingegangen 3. Januar 1919.)

Zur Erforschung der Atmosphäre bei unsichtigem Wetter.

Von Heinrich Löwy.

Die Kenntnis des Windes in der freien Atmosphäre hat, abgesehen von ihrem unmittelbaren Interesse für den Flieger und Artilleristen, große Wichtigkeit für die Wetterprognose. Leider versagt die übliche Methode des Pilotballons bei stark bewölktem oder nebligem Wetter, was zur Folge hat, daß der Übergang zu heiterem Wetter sich leicht der Vorhersage entzieht.

Es liegt nahe, die Lösung der Aufgabe auf akustischem Wege zu versuchen. Der Pilotballon wird mit einer Vorrichtung ausgerüstet, die in bestimmten Zeitintervallen, etwa jede Minute, automatisch ein Schallsignal auslöst. Ein Beobachter auf dem Erdboden notiert die Verspätungen T_1, T_2, T_3, . . ., mit denen die nach der 1., 2., 3., . . . Minute ausgelösten Signale eintreffen. Die vom Ballon zurückgelegte Bahn wird durch das folgende Approximationsverfahren bestimmt:

Sei A_0 (Fig. 1) die Stelle am Erdboden, wo der Ballon aufgelassen wird, B_0 der Standort des Beobachters. Eine Minute nach dem Auflassen wird das erste Signal ausgelöst und mit

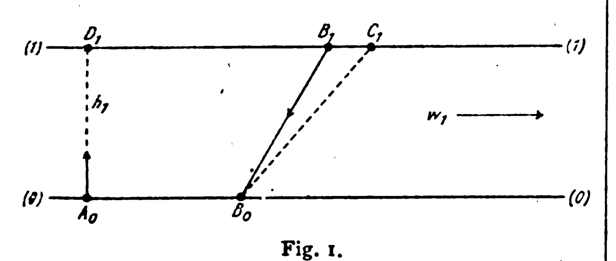


Fig. 1.

der Verspätung T_1 sec in B_0 wahrgenommen. In dieser Zeit hat der Schall im mitbewegten System eine Strecke von der Länge $vT_1 = B_0C_1$ zurückgelegt, wenn v die Schallgeschwindigkeit bedeutet. Um das Wesentliche der Methode besser hervortreten zu lassen, betrachten wir zunächst den Fall, daß die Richtung des Windes bekannt und nur seine Stärke sich mit der Höhe ändert. Die Linie (1, 1) markiert die als bekannt vorausgesetzte Höhe h_1, die der Ballon in der ersten Minute erreicht. C_1 ist die Stelle, wo er sich beim Eintreffen des Signals in B_0 befinden würde, falls er sich nach Abgabe des Signals mit der der Luftschicht zwischen (0, 0) und (1, 1) entsprechenden Geschwindigkeit w_1 nur horizontal weiter bewegen würde, d. h.

$$D_1C_1 = w_1(60 + T_1).$$

Wir kennen also die Geschwindigkeit w_1 der ersten Luftschicht und auch die Lage B_1 des Ballons in der ersten Minute, wenn wir

$$B_1C_1 = w_1T_1$$

setzen. B_1B_0 ist der vom Schall im ruhenden System zurückgelegte Weg.

Sei T_2 die Verspätung, mit der das in der 2. Minute abgegebene Signal in B_0 (Fig. 2) eintrifft. Man zerlege nun versuchsweise T_2 in

$$T_2 = t_1 + t_2,$$

wo t_1 die Zeit ist, welche das Signal zum Durchlaufen der unteren Schicht braucht, t_2 die entsprechende Zeit für die obere Luftschicht. Dann ist $vt_1 = B_0C_1$ die Länge des Weges, welche der Schall durch die untere Schicht zurücklegt, B_1 die Stelle, wo das von oben kommende Signal die Trennungsebene (1, 1) passiert, wenn $B_1C_1 = w_1t_1$ gesetzt wird. Die Punkte B_1 und C_1 spielen bei der Konstruktion dieselbe Rolle wie die gleichnamigen Punkte in Fig. 1, dürfen aber nicht mit diesen verwechselt werden. Nun trage man von B_1 die Strecke $vt_2 = B_1C_2$ auf. (2, 2) bedeutet die in der 2. Minute erreichte Höhenlage. A_1 ist der als bekannt anzusehende Ort des Ballons in der

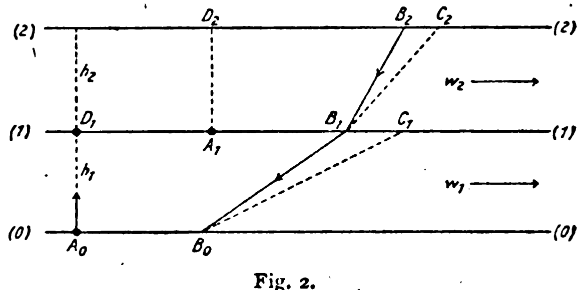


Fig. 2.

ersten Minute, nämlich $D_1A_1 = 60\,w_1$. Aus

$$D_2C_2 = w_2(60 + t_2)$$

bestimmt sich w_2, und aus $w_2t_2 = B_2C_2$ der Ort B_2 des Ballons in der zweiten Minute. Der Streckenzug $B_2B_1B_0$ ist der Schallweg im ruhenden System. Durch Ausprobieren ist nun jene Zerlegung $T_2 = t_1 + t_2$ zu finden, welche einen mit den Strömungskonstanten der beiden Schichten verträglichen Wert des Brechungsverhält-

nisses ergibt. Das hier in Betracht kommende Brechungsgesetz ist, wie Prof. Philipp Frank (Prag) mir mitteilt, von R. Emden in einer Abhandlung „Über abnorme Hörbarkeit" (Münchn. Sitz.-Ber. 1916, S. 113 ff.) abgeleitet worden und lautet:

$$\sin\beta = \sin\alpha + \frac{w}{v},$$

falls die Relativgeschwindigkeit w der Winde in zwei benachbarten Schichten klein ist gegen die Schallgeschwindigkeit v.

Im allgemeinen Fall, wo zwei Unbekannte, nämlich Größe und Richtung der Windgeschwindigkeit, zu bestimmen sind, müssen für jede Schicht zwei Verspätungszeiten gemessen werden. Die beiden Beobachter seien etwa in den Punkten B_0 und B_0' (Fig. 3) postiert, A_0 sei wieder die Stelle, wo der Ballon hochgelassen wird. Die mit Pfeil versehene Gerade deutet die Rich-

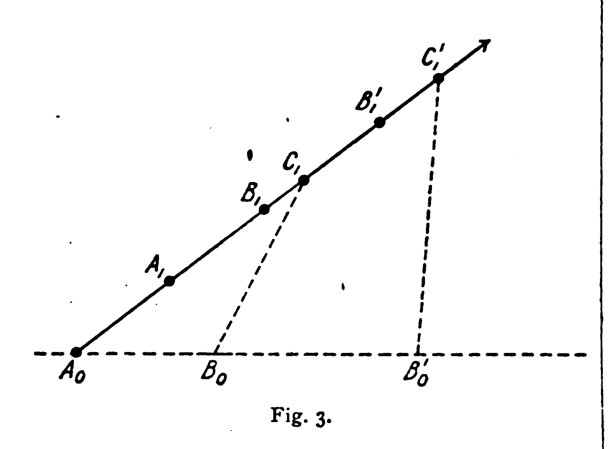


Fig. 3.

tung der Windgeschwindigkeit in der untersten Schicht an. Sei T_1 bzw. T_1' die Verspätung, mit der das in der ersten Minute abgegebene Schallsignal in B_0 bzw. B_0' wahrgenommen wird. Der Schall hat im mitbewegten System eine Strecke vT_1 bzw. vT_1' zurückgelegt, deren Projektion auf die Erdoberfläche gleich

$$\left.\begin{aligned} B_0C_1 &= \sqrt{(vT_1)^2 - h_1^2} \\ \text{bzw.}\quad B_0'C_1' &= \sqrt{(vT_1')^2 - h_1^2} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ist, wenn h_1 die in der ersten Minute erreichte Höhe ist. C_1 bzw. C_1' sind die Projektionen der Orte, wo sich der Ballon beim Eintreffen des Signals in B_0 bzw. B_0' befände, falls auch oben dieselbe Geschwindigkeit herrschen würde, d. h. es ist

$$\left.\begin{aligned} A_0C_1 &= w_1(60 + T_1), \\ A_0C_1' &= w_1(60 + T_1'), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

wenn w_1 die Windgeschwindigkeit der ersten Schicht ist. Unser Problem reduziert sich auf folgende geometrische Aufgabe: Gegeben sind zwei Kreise in einer Ebene, nämlich der Kreis um B_0 vom Radius

$$B_0C_1 = \sqrt{(vT_1)^2 - h_1^2},$$

und der Kreis um B_0' vom Radius

$$B_0'C_1' = \sqrt{(vT_1')^2 - h_1^2}.$$

Durch einen gegebenen Punkt A_0 ist jener Strahl zu ziehen, der die beiden Kreise im Verhältnis

$$A_0C_1 : A_0C_1' = (60 + T_1) : (60 + T_1') \qquad (3)$$

schneidet. In der Praxis wird man die Aufgabe empirisch mit Lineal und Rechenschieber lösen. Analytisch sind fünf Gleichungen gegeben, nämlich der Schnitt des Strahles durch A_0 mit den zwei Kreisen und die Relation (3) zur Bestimmung von fünf Unbekannten, nämlich der Lage der beiden Punkte C_1 und C_1' und des Richtungswinkels des durch A_0 gezogenen Strahles.

Beim Übergang zur zweiten Höhenschicht zerlegt man wieder versuchsweise die Verspätungszeiten $T_2 = t_1 + t_2$ bzw. $T_2' = t_1' + t_2'$ in einen für die untere und einen für die obere Schicht geltenden Wert. Da die Windgeschwindigkeit in der ersten Schicht bereits bekannt ist, sind mit t_1 bzw. t_1' auch die Punkte B_1 bzw. B_1' gegeben, wo die beiden von oben kommenden Schallstrahlen die Trennungsebene (in der Höhe h_1) passieren[1]), desgleichen der Punkt A_1, wo sich der Ballon in der ersten Minute befand. Nun wird die Konstruktion der Fig. 3 für die zweite Schicht mit den Werten t_2 und t_2' wiederholt: an Stelle der Ausgangspunkte A_0, B_0, B_0' treten nun die Punkte A_1, B_1, B_1', die zuvor in einen einzigen Punkt, nämlich den Ort des Ballons in der ersten Minute, zusammenfielen. Physikalisch bedeutet das nichts weiter, als daß in der Höhe h_1 jetzt nicht eine, sondern zwei Schallerregungsstellen liegen, die natürlich nicht mit dem Ort, wo der Ballon die Trennungsebene passiert hat, verwechselt werden dürfen.

Anstatt 1 Schallsignal von 2 Beobachtern aufnehmen zu lassen, kann man natürlich auch pro Luftschicht 2 aufeinanderfolgende Signale (in nahe benachbarten Höhenlagen) abgeben und von 1 Beobachter aufnehmen lassen. An Stelle von Fig. 3 tritt Fig. 4. C_1B_0 und $C_1'B_0$ stellen die Horizontalprojektion der beiden Schallwege im mitbewegten System dar. Die geometrische Aufgabe ist dieselbe geblieben. Wir

1) Nämlich es ist $B_1C_1 = w_1t_1$ und $B_1'C_1' = w_1t_1$.

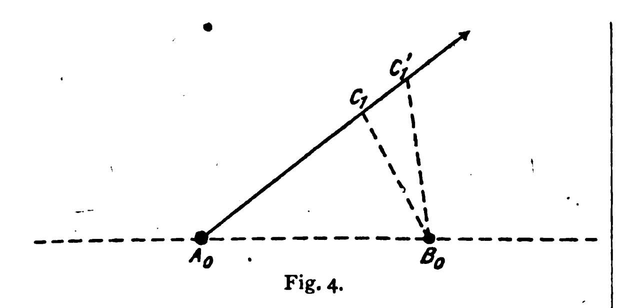


Fig. 4.

haben jetzt den Spezialfall, daß die beiden gegebenen Kreise konzentrisch sind.

Fig. 5 stellt ein Pilotdiagramm für drei Schichten dar. $A_0A_1A_2A_3$ ist die Bahn des Ballons während der ersten drei Minuten; der Wind dreht, wie man sieht, von SW. über S.

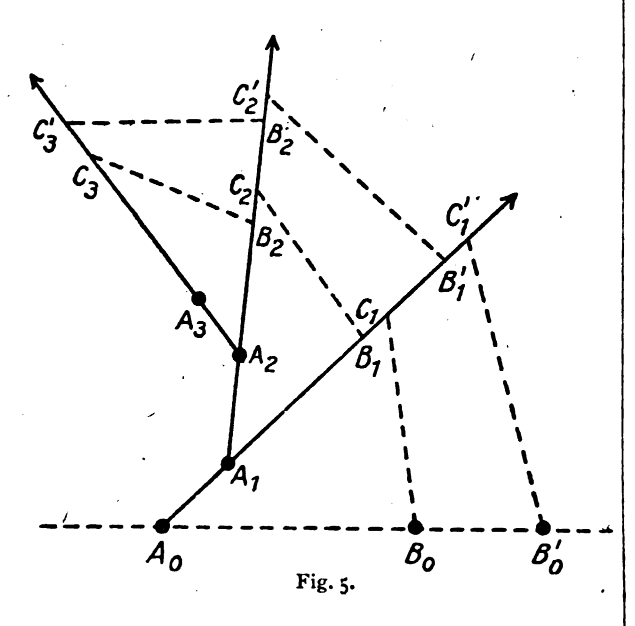


Fig. 5.

nach SE. Wäre nur ein Beobachter vorhanden, so tritt an Stelle der Geraden $B_0'C_1'$ die Gerade B_0C_1'.

Bei der praktischen Auswertung der Meßergebnisse wird man sich mit Vorteil eines Holzmodells der Fig. 2 bedienen, das die Höhen h_1 und h_2 zweier unmittelbar angrenzenden Luftschichten markiert und das das zu einer bestimmten Zerlegung $T_2 = t_1 + t_2$ gehörige Brechungsverhältnis unmittelbar abzulesen gestattet. An irgendeinem Punkte der Leiste (0,0) wird nämlich ein Faden von der Länge $vT_2 = vt_1 + vt_2$ fix befestigt, dessen oberes Ende längs der Leiste (2,2) frei verschiebbar ist, während ein längs (1,1) verschiebbarer Stift dafür sorgt, daß der Faden in jeder Lage gespannt ist. Der Übergang vom mitbewegten zum ruhenden Strahlenzug wird folgendermaßen bewerkstelligt: Längs der Leiste (1,1) ist ein Maßstab verschiebbar, dessen Einheit die Windgeschwindigkeit w_1 der unteren Luftschicht ist. Wir nennen ihn den „w_1-Maßstab“. Man muß 12 solche Maßstäbe, entsprechend den 12 Intensitätsstufen der Beaufortskala, für die Leiste (1,1) und ebensoviele „w_2-Maßstäbe“ für die Leiste (2,2) zur Verfügung haben. Ferner ist um den fixen Punkt der (0,0)-Leiste als Drehpunkt ein in Einheiten der Schallgeschwindigkeit v eingeteilter Maßstab befestigt. Ein zweiter „v-Maßstab“ ist an dem verschiebbaren Stifte der Leiste (1,1) ebenfalls drehbar angebracht. Für irgendeine beliebige Zerlegung $T_2 = t_1 + t_2$ messe ich mit dem unteren „v-Maßstab“ die Länge des mitbewegten Strahles in der unteren Schicht. Diese ist gleich t_1. Durch Verschieben des „w_1-Maßstabes längs (1,1) rücke ich den Punkt t_1 dieses Maßstabes an die Stelle, wo der mitbewegte Strahl die Linie (1,1) schneidet. Der Nullpunkt dieses Maßstabes zeigt dann die entsprechende Stelle für den ruhenden Strahl an. Mit t_1 ist aber auch t_2 und w_2 bestimmt; ich kann nun dieselbe Prozedur zwischen (1,1) und (2,2) wiederholen und mit Hilfe eines längs (1,1) verschiebbaren Transporteurs, an dem der Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels direkt abgelesen werden kann, entscheiden, ob der versuchsweise ermittelte Wert von w_2 richtig ist oder nicht. Auch der ruhende Strahl wird durch einen Faden markiert, der an demselben fixen Punkt der Leiste (0,0) wie der erste Faden befestigt ist und durch zwei kleine Ösen in den Nullpunkten des w_1- und w_2-Maßstabes geschlungen ist. Durch Spannen des Fadens in der oben dargelegten Lage der beiden Maßstäbe erhält man den Strahlenzug im ruhenden System.

Bei einer größeren Zahl von Schichten wird das Ausprobieren eine sehr zeitraubende Prozedur. Eine wesentliche Vereinfachung läßt sich jedoch erzielen, wenn außer den zwei Verspätungszeiten noch die zwei Himmelsrichtungen bestimmt werden, aus denen die beiden Schallstrahlen im Beobachtungsorte eintreffen. Dann ist nämlich durch die Beobachtung unmittelbar der ruhende Strahl in der unteren Schichte gegeben und man kann durch Übergang zum mitbewegten Strahl die zur unteren Schichte gehörige Zeit t_1 — ohne jegliches Ausprobieren — bestimmen. Der Übergang erfolgt in der Weise, daß man den w_1-Maßstab mit seinem Nullpunkt an den Schnittpunkt des ruhenden Strahles mit der Geraden (1,1) heranschiebt und durch Drehen des unteren v-Maßstabes die Stelle an der Leiste (1,1) aufsucht, wo zwei gleichbezifferte Punkte der beiden Maßstäbe zusammenfallen. Die so ermittelte Zahl ist t_1; damit ist aber auch t_2 und w_2 bestimmt. — In der Praxis, wenn es nicht auf große Genauigkeit ankommt und speziell bei nicht außergewöhn-

lich starken Stürmen, darf man die Schallverwehung vernachlässigen. In diesem Fall wird die Konstruktion äußerst einfach.

Um Pilotballons von normaler Größe verwenden zu können, wird man für jede Höhenschicht einen besonderen Ballon aufsteigen lassen. Als Schallquelle kommen in erster Linie Explosivstoffe in Betracht. Eventuell könnte auch der Gasinhalt des Ballons verwertet werden.

Leise Winde werden zumal für geringe Höhen sich der Bestimmung durch die vorliegende Methode entziehen. Aber schon ein schwacher Wind von 6 m/sec würde sich — bei einer Steiggeschwindigkeit des Ballons von ca. 3 m/sec — nach der ersten Minute durch eine Verspätung von 0,6 sec, nach der zweiten Minute durch eine Verspätung von 1,2 sec verraten. Die Zeitdifferenzen werden natürlich mit wachsender Windgeschwindigkeit und Höhe (zunehmender Zeit) immer markanter. Bei sog. mäßigem Wind von 8 m/sec betragen sie in der zweiten bzw. dritten Minute 1,8 bzw. 2,7 sec. Für starken Wind von 12 m/sec nach 10 Minuten (d. h. einer Höhe von ca. 2000 m) schon 15 sec.

Auf eine andere Methode, die der eben dargelegten in mancher Hinsicht überlegen sein dürfte, bin ich durch eine Anregung des Meteorologen Dr. Leo Wenzel Pollak geführt worden. Als ich ihm nämlich die obige akustische Methode erzählte, teilte er mir mit, daß er schon seit längerem eine optische Lösung des Problems beabsichtige. Die Pollaksche Methode besteht in folgendem: Der Ballon wird — wie bei einer Nachtpilotierung — mit einem Leuchtkörper versehen, der nach einer bestimmten Zeit durch eine automatische Auslösung fallen gelassen wird. Der Ort des Leuchtkörpers wird, wenn er unter der Wolkendecke wieder zum Vorschein kommt, durch Anvisieren bestimmt. Diese Methode ist ausgezeichnet durch die große theoretische Einfachheit. Ich selbst wurde dadurch auf eine andere, ebenfalls optische Methode geführt.

Bekanntlich sind die Verwehungen, welche die Geschosse auf ihrer Bahn erleiden, so stark, daß die so entstehenden Fehler durch besondere Korrekturen eliminiert werden müssen. Es muß natürlich möglich sein, umgekehrt diese Fehler zur Messung der Windgeschwindigkeit zu verwerten.

Sei etwa O_1S_1 (Fig. 6) die Schußebene, w_1 die Windstärke, α_1 der Winkel zwischen der Windrichtung und Schußebene, und β_1 der Winkel zwischen der Schußebene und „Reduktionsebene“[1]), bezeichnet ferner $x_{r_1} = O_1R_1$ die

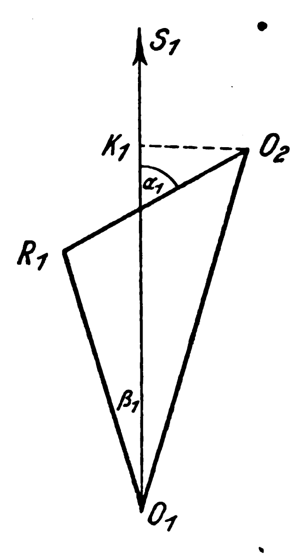


Fig. 6.

„reduzierte Schußweite“ zur Zeit t_1, so ist, da $R_1O_2 = w_1t_1$ gesetzt wurde, die Seitenabweichung $z_1 = K_1O_2$ des Geschosses

$$z_1 = w_1t_1 \sin\alpha_1 - x_{r_1} \sin\beta_1, \qquad \text{(I)}$$

und die veränderte Schußweite $x_1 = O_1K_1$

$$x_1 = x_{r_1} \cos\beta_1 + w_1t_1 \cos\alpha_1. \qquad \text{(II)}$$

Zu diesen Gleichungen tritt als dritte zur Bestimmung der drei Unbekannten w_1, α_1 und β_1 die Gleichung[1])

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{w_1 \sin\alpha_1}{v_1 \cos\varphi_1 - w_1 \cos\alpha_1}, \qquad \text{(III)}$$

worin v_1 die als bekannt anzusehende Anfangsgeschwindigkeit und φ_1 den ebenfalls bekannten Abgangswinkel bedeutet. Die Zeit t_1 kann beliebig gewählt werden, der zugehörige Wert x_{r_1} ist der Schußtafel zu entnehmen. Die Größen x_1 und z_1 werden durch Messung, nämlich durch Bestimmung des Auffall- oder des Geschoßsprengpunktes, ermittelt. Hierdurch ist das Problem theoretisch vollkommen bestimmt.

Nun ist aber, wie die Erfahrung zeigt, die Längenstreuung eines Geschosses relativ groß gegen die Breitenstreuung und auch relativ groß gegen die zu erwartende Veränderung der Schußweite durch den Wind. Für den 15-cm-Belagerungsmörser M 80 z. B. beträgt die 50-Proz.-Längenstreuung 50 m, die 50-Proz.-Breitenstreuung 5,2 m; für die 9-cm-Feldkanone M 75 „in der hohen Lafette“ die Längenstreuung 108 m, die Breitenstreuung 3,4 m[2]), während die zu erwartende Seitenabweichung

1) Vgl. C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik. I. 2. Aufl. 1917, S. 307.

1) Vgl. l. c. S. 307.

2) Schieß- und Wirkungsdaten sämtlicher eingeführten Feuerwaffen. 3. Aufl., Wien, Seidel & Sohn. 1912.

und Veränderung der Schußweite zwischen 100 und 1000 m liegen. Die Gleichung (II) kann also zur Bestimmung der Windgeschwindigkeit nicht benutzt werden. Man muß daher statt eines einzigen zwei Punkte derselben Flugbahn bestimmen. Bezeichnen wir mit z_1, t_1, x_{r_1} bzw. mit z_1', t_1', x_{r_1}' die zu den beiden Punkten gehörigen Werte, so lautet unser Bestimmungssystem:

$$z_1 = w_1 t_1 \sin\alpha_1 - x_{r_1} \sin\beta_1, \qquad (\text{I}')$$

$$z_1' = w_1 t_1' \sin\alpha_1 - x_{r_1}' \sin\beta_1, \qquad (\text{II}')$$

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{w_1 \sin\alpha_1}{v_1 \cos\varphi_1 - w_1 \cos\alpha_1}. \qquad (\text{III}')$$

Praktisch besteht die Methode darin, daß pro Luftschicht zwei verschieden tempierte Schrapnellschüsse bei gleichem Abgangswinkel abgegeben und die Lagen der Explosionswölkchen durch Anvisieren bestimmt werden. Bei einer Schußweite von ca. 5 km würde eine Ablesegenauigkeit von zehntel Graden wie beim gewöhnlichen Pilotierungstheodoliten vollkommen ausreichen. Die Explosion findet — bei bewölktem Wetter — auf dem absteigenden Ast der Flugbahn unterhalb der Wolkendecke statt.

Die Ermittlung der Windgeschwindigkeit in der nächst höheren Luftschicht, wenn die Geschwindigkeit in der darunter befindlichen Schicht bereits bestimmt ist, will ich zunächst für den Fall von wolkenlosem Wetter auseinandersetzen. Die Explosion findet in der oberen Schicht (Fig. 7) statt. O_3 und O_3' (Fig. 8)

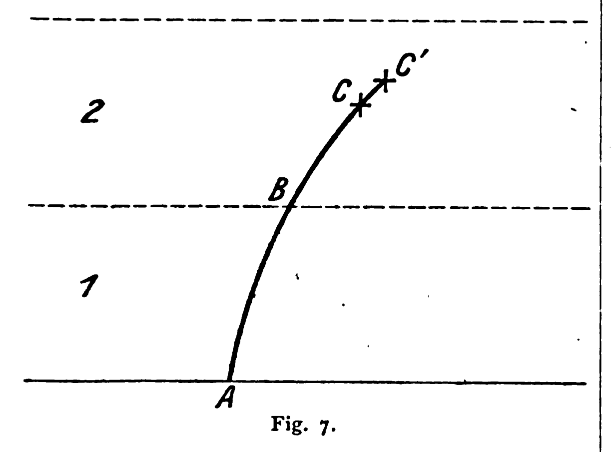


Fig. 7.

sind die Horizontalprojektionen der durch Anvisieren bestimmten Lage der Schrapnellwölkchen des ersten und zweiten Schusses. Aus der Schußtafel entnehme ich, wie sich die Gesamtflugzeit auf die beiden Luftschichten verteilt: es sei t_1 die zu dem Wege AB (Fig. 7), t_2 (bzw. t_2') die zum Wege BC (bzw. BC') gehörige Flugzeit. Mit Hilfe der Schußtafel

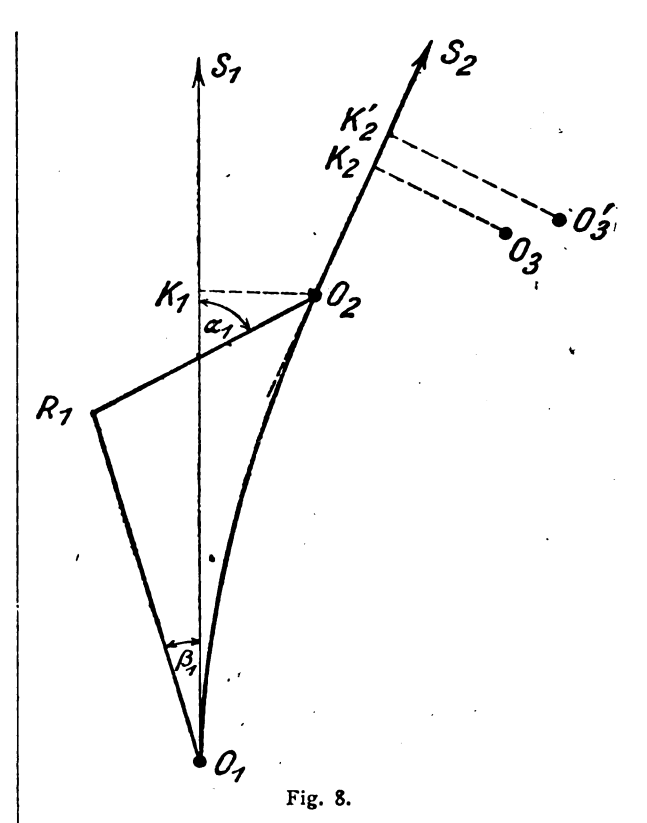


Fig. 8.

konstruiere ich die zur Zeit t_1 gehörige „wahre" Flugbahnkurve bzw. deren Projektion O_1O_2 (Fig. 8) auf die Horizontalebene und ziehe in dem Endpunkte O_2 die Tangente O_2S_2. Diese Gerade entspricht der Schußebene für die zweite Schicht. Die Aufgabe ist nunmehr auf jene für die erste Schicht zurückgeführt. In den Gleichungen (I'), (II') und (III') ist der Index 1 durch 2 zu ersetzen. $z_2 = O_3K_2$ und $z_2' = O_2'K_2'$ bedeuten die Seitenabweichungen von der Schußebene O_2S_2. v_2 (bzw. φ_2) ist die „zum Punkte B (Fig. 7) gehörige Anfangsgeschwindigkeit" (bzw. Abgangswinkel). Man erhält diese Größen, indem man der Schußtafel die zur Zeit t_1 gehörige Geschwindigkeit entnimmt und zur Windgeschwindigkeit w_1 der ersten Schicht vektoriell addiert.

Beim Übergang zur dritten Schicht wird der nunmehr bekannte Winkel β_2 im Punkte O_3 von der Geraden O_2S_2 abgetragen. Das Weitere ist aus dem Gesagten klar.

Bei der praktischen Auswertung der Messungen wird man als Unbekannte die Größen $w\sin\alpha$, $w\cos\alpha$ und $\sin\beta$ einführen und zuerst die Gleichungen (I') und (II') graphisch auflösen. Die fixen, durch

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{x_r}{t} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\gamma' = \frac{x_r'}{t'}$$

gegebenen Richtungen, kann man sich ein für

allemal auf dem Zeichenblatt (Fig. 9) vormerken.

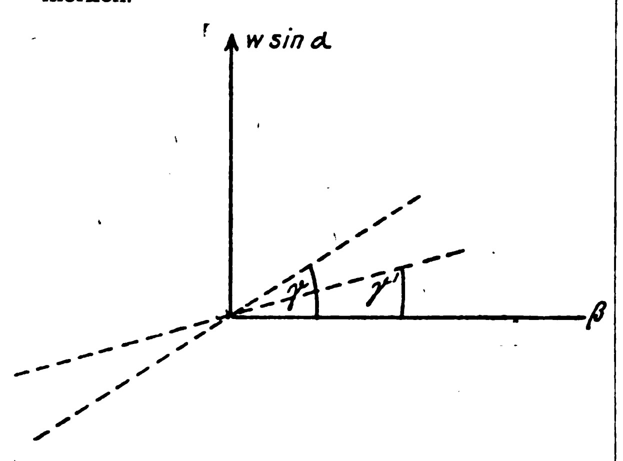


Fig. 9.

Nicht so einfach ist die Berechnung für unsichtiges Wetter. Hier führt das folgende graphisch-empirische Annäherungsverfahren zum Ziel, daß ich zunächst für den Fall von zwei Schichten auseinandersetzen will. Wir nehmen an, daß die Geschwindigkeit der ersten Schicht bereits auf die oben dargelegte Weise bestimmt würde. Es werden nun zwei Schüsse bei gleichem Abgangswinkel abgegeben, deren Bahnkurve die zweite Schicht durchsetzt und deren Explosionspunkte D bzw. D' auf dem absteigenden Ast in der Schicht 1 liegen (Fig. 10). Da

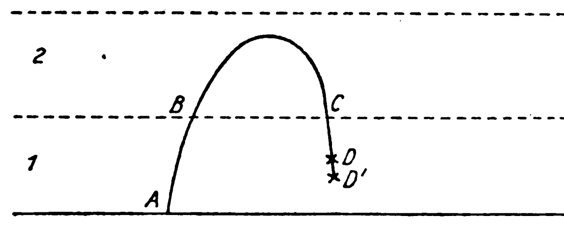


Fig. 10.

die Geschwindigkeit der ersten Schicht bekannt ist, kenne ich die Horizontalprojektion O_2 (Fig. 11) des Punktes B (Fig. 10) der „wahren" Flugbahnkurve; desgleichen kenne ich die Lage des Punktes R_3, denn O_4 ist die durch Messung bestimmte Horizontalprojektion des Explosionspunktes D und ich kenne außerdem die Richtung und Länge der Geraden $R_3 O_4 = w_1 \tau_1$, wo τ_1 die bekannte zur Bahn CD gehörige Flugzeit ist. Es bleibt also die folgende Aufgabe zu lösen: Gegeben sind zwei Kreise in einer Ebene, nämlich der Kreis vom Radius $O_2 R_2 = x_{r_2}$ um den Punkt O_2 und der Kreis vom Radius $O_3 R_3 = x_{r_3}$ um den Punkt R_3. x_{r_2} bzw. x_{r_3} sind die bekannten, zu den Bahn-

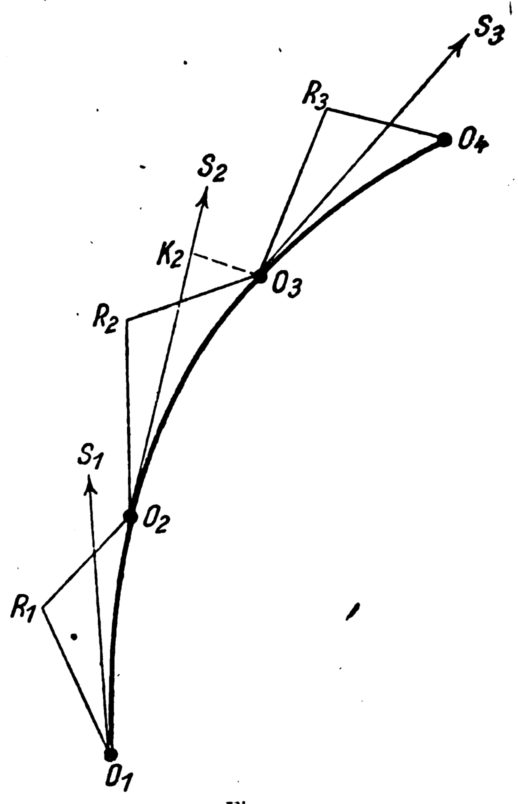


Fig. 11.

längen BC bzw. CD gehörigen reduzierten Schußweiten. Es ist nun — durch Ausprobieren — jene Verbindungslinie $R_2 O_3 = w_2 t_2$ von zwei Peripheriepunkten des einen und anderen Kreises zu suchen, welche einen mit der Gleichung (I') verträglichen Wert der Geschwindigkeit ergibt. Ziehe ich aufs Geratewohl irgendeine Verbindungslinie $R_2 O_3$, so kann ich, da die Tangente $O_2 S_2$ bekannt ist, die Winkel α_2 und β_2 unmittelbar aus der Figur ablesen und habe also zur Entscheidung der Frage, ob ich die richtige Wahl getroffen habe, nur die eine Gleichung (I') heranzuziehen. Beim Ausprobieren wird man sich meist auf die acht Hauptrichtungen beschränken dürfen; außerdem wird die Wahl der zu bestimmenden Richtung w_2 durch die Erfahrung eingeschränkt, daß bei größeren Windgeschwindigkeiten ein unstetiger Wechsel der Richtung meist nicht vorkommt.

In Fig. 12 und 13 ist der Fall von drei Schichten dargestellt. Ist bei Abgabe des dritten Doppelschusses die Geschwindigkeit in der ersten und zweiten Schicht bereits bestimmt, so kennen wir die Horizontalprojektion O_3 (Fig. 13) des Punktes C (Fig. 12) und auch die Lage des Punktes R_4, denn wir können ja die Konstruktion von R_4 bis O_6 ausführen und wissen auch, in welcher Weise dieses Gebilde an den

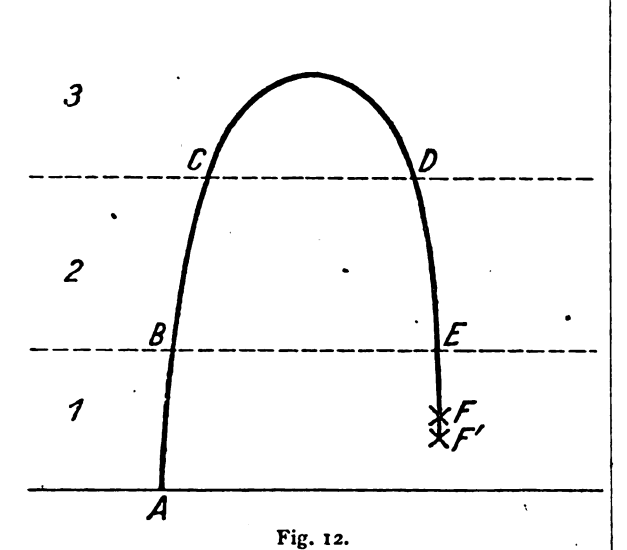


Fig. 12.

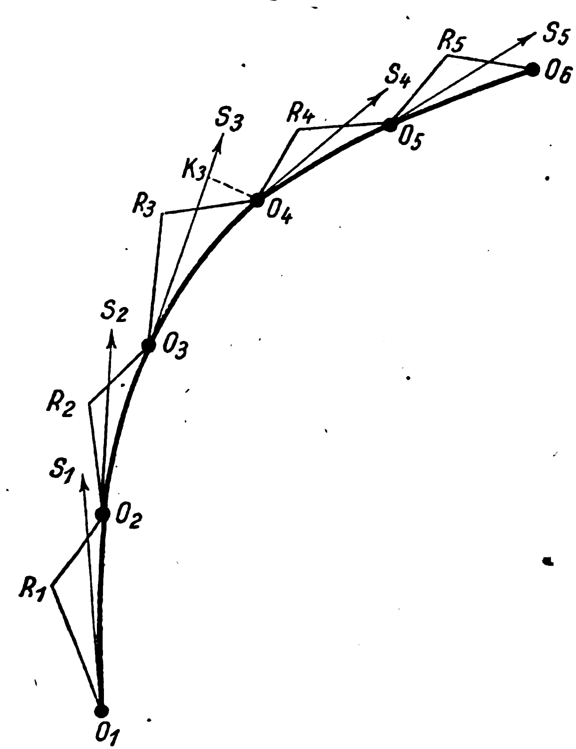


Fig. 13.

durch Messung bestimmten Punkt O_6 anzusetzen ist. Damit ist die Aufgabe auf die vorangehende zurückgeführt, O_3 und R_4 sind die Mittelpunkte der zwei gegebenen Kreise vom Radius x_{r_3} bzw. x_{r_4}. Der Wind dreht in unserem Beispiel von SW. über W. auf NW.

Doch ist etwas zu beachten: Indem ich von der Lage des Punktes O_6 (Fig. 13) ausgehe, benütze ich sowohl die mit größerer Genauigkeit bestimmte z-Koordinate (Seitenabweichung) als auch die minder genau bestimmte x-Koordinate (veränderte Schußweite). Ob die Lage O_6 nicht zu stark durch die Längenstreuung beeinflußt ist, kann ich auf folgende Weise entscheiden: Ich gebe einen zweiten Schuß mit etwas verschiedener Tempierung ab und zeichne die beiden Parallelen O_6R_5 und $O_6'R_5'$ (in der Figur fortgelassen). Der Punkt O_6 oder O_6' ist nur dann als Ausgangspunkt für die Konstruktion brauchbar, wenn $R_5R_5' = x_{r_5}' - x_{r_5}$ ist. x_{r_5} bzw. x_{r_5}' sind die zu den Bahnstücken EF bzw. EF' in Fig. 12 gehörigen reduzierten Schußweiten.

Wie man sieht, wird das Verfahren für unsichtiges Wetter doch recht umständlich. Hier ist es mir nicht gelungen, den durch die Längenstreuung entstehenden Fehler zu eliminieren, man müßte daher erst mit Hilfe des obigen Kriteriums für jeden Schuß entscheiden, ob derselbe brauchbar ist oder nicht. Diese Schwierigkeit läßt sich auf zwei Arten beheben. Erstens: Man beläßt die Explosion auf dem ansteigenden Ast. Das Geschoß wird als Träger einer Schallquelle ausgebildet, seine Lage auf akustischem Wege bestimmt. Oder zweitens: Man geht zum Vertikalschuß über. Die Längenstreuung verursacht hier einen praktisch bedeutungslosen Fehler in der Höhenangabe. Die Berechnung wird so einfach wie bei der Pollakschen Methode. Allerdings wird man einen solchen Schuß nicht ohne besondere Vorsichtsmaßregeln wagen, die sich aber auf einem Artillerieschießplatze mit Leichtigkeit durchführen ließen. Dasselbe Gefahrsmoment besteht natürlich auch für die Pollaksche Methode, dürfte aber hier schwieriger zu beheben sein. Man müßte nämlich die Steiggeschwindigkeit des Ballons wesentlich erhöhen, um die gefährdete Zone nach Möglichkeit einzuschränken. Für mobile Wetterstationen kommt bei unsichtigem Wetter wohl nur eine akustische Methode in Betracht.

Mit Hilfe der ballistischen Methode wird man zu Höhen vordringen, die allen anderen Methoden unzugänglich sind. Mit dem Riesengeschütz, womit die deutsche Artillerie eben jetzt aus über 100 km Distanz Paris bombardiert, könnte man Höhen von 40 km und darüber erforschen. Das Gewicht, das bei Artilleriegeschossen mit Rücksicht auf die Eindringungstiefe möglichst groß sein muß, wird man bei der meteorologischen Munition wesentlich herabsetzen können. In Hinsicht der Form dürften besonders sog. „Pfeilgeschosse" in Betracht kommen. Die ballistische Methode wird speziell bei stürmischem Wetter gut anwendbar sein, wo die Ballonmethoden zufolge der ihnen anhaftenden Überempfindlichkeit versagen. Bei Sturm wird bekanntlich der Pilot so stark verweht, daß man größere Höhen nicht mehr er-

reicht. An Genauigkeit dürfte die Methode vorerst den Ballonmethoden nachstehen. Ihre Genauigkeit ist eben nur so groß wie die Genauigkeit der zugrundegelegten Schußtafel. Jede Verbesserung der Schußtafel wird zugleich eine Verfeinerung der Methode bedeuten.

Noch in anderer Hinsicht wird die Ballistik der Meteorologie vielleicht einen Dienst erweisen. Ich glaube nämlich, daß man auf ballistischem Wege auch die anderen meteorologischen Elemente in der freien Atmosphäre bestimmen kann. Zur Messung des Luftdruckes hätte man etwa so zu verfahren: An der Seitenwand des Geschosses wird eine kleine Öffnung A (Fig. 14) angebracht, die zu einer im Innern des Geschosses befindlichen Barometerdose führt. Diese Dose steht an jeder Stelle der Flugbahn unter der Ein-

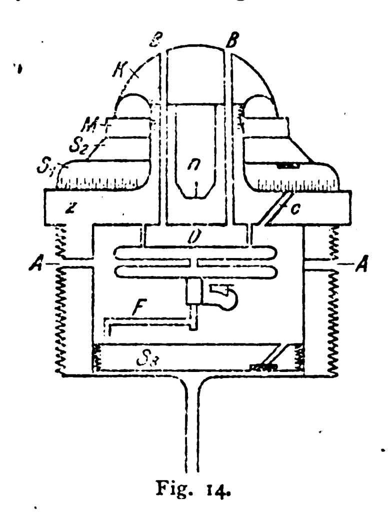


Fig. 14.

wirkung des sog. „statischen" Druckes. Dieser Druck kann von unten etwa dadurch gemessen werden, daß der Hebel der Barometerdose die Tempierung des Geschosses in bestimmter Weise beeinflußt. Wir nehmen an, die Explosion sei an jener Stelle, wo der Luftdruck gemessen werden soll, gerade bis zur Spitze der Barographenfeder fortgeschritten. Das läßt sich so durchführen, daß man den Hebel der Schreibfeder und diese selbst hohl ausbildet und die in der Höhlung befindliche Zündmasse mit der übrigen am Drehpunkt des Hebels durch ein dünnes Zündschnürchen in Verbindung setzt. An Stelle der Trommel tritt eine Satzscheibe, durch welche verschieden lange Zusatzzündwege angeschaltet werden. Verschiedenen Luftdrucken entsprechen also verschiedene Gesamttempierungen des Geschosses. In Fig. 14 habe ich als Beispiel die Konstruktion für den Doppelzünder M. 93a des Schrapnells M. 80/93a angedeutet[1]). z bedeutet den Zündkörper, n die Zündnadel, S_1 die untere drehbare Satzscheibe, S_2 die obere, am Zündkörper z fixe Satzscheibe, M die Schraubenmutter und K die Verschlußkappe. Der Zündkanal c befindet sich im Zündkörper z. Bis hierher ist an der normalen Konstruktion nichts geändert. Nun aber schließt sich — ebenfalls im Inneren des Zündkörpers — der Barometerraum an mit der Dose D und der hohlen Schreibfeder F. Diese ist durch ein Zündschnürchen mit dem Zündkanal c verbunden. Die Spitze der Feder bewegt sich längs des Satzkanals einer dritten Satzscheibe S_3, die von unten in den Zündkörper eingeschraubt werden kann. Diese Satzscheibe S_3 stellt den mit dem Luftdruck variabeln Zusatzzündweg dar. — Bringt man noch eine zweite Öffnung B (Fig. 14) an der Vorderseite des Geschosses an und läßt dieselbe mit dem Außenraum der Dose kommunizieren, während die seitliche Öffnung mit dem Doseninneren in Verbindung gebracht wird, so haben wir ein Gegenstück zu dem bekannten Rösenmüllerschen Instrument zur Bestimmung von Flugzeuggeschwindigkeiten. Aus der Differenz des „statischen" und „dynamischen" Druckes kann die Geschwindigkeit des Geschosses in jedem Punkte der Flugbahn bestimmt werden. Die Längsöffnung B muß mittels eines Knickansatzes, der in der Figur fortgelassen wurde, in den Barometerraum geführt werden, um die Geschwindigkeit der Luftteilchen auf Null zu bringen. Auch die Messung der Temperatur und Feuchtigkeit wird vielleicht auf diesem Wege gelingen, indem man durch eine Anzahl von Öffnungen an der Vorder- und Seitenwand des Geschosses für genügende Ventilation im Inneren sorgt. Die Außentemperatur der Luft wird sich gegenüber der relativ hohen Eigentemperatur des Geschoßinneren vermutlich ebenso geltend machen wie bei Flugzeugmotoren gegenüber der hohen Temperatur des Kühlwassers. Man kann auch daran denken mit einem einzigen Schuß alle meteorologischen Elemente zu bestimmen, indem man — wie beim Meteorograph — alle Instrumente hintereinander einbaut und ihre Angaben durch die Farbe oder Zahl der Explosionswölkchen unterscheidet.

Feldpost 437, Februar 1918.

(Eingegangen bei der Redaktion der Physikalischen Zeitschrift 6. März 1918.)

Anmerkung.

Die vorliegende Arbeit wurde Ende Februar 1918 an die Redaktion dieser Zeitschrift gesandt, konnte aber wegen Einspruchs der Militärzensur nicht veröffentlicht werden. Sie wurde zunächst als „Druckschrift nur für den Dienstgebrauch" (Der kommandierende General der Luftstreitkräfte Nr. 19 528 W) ausgegeben. Ende August wurde ich nämlich auf Anregung von Herrn Prof. Schmauß (München) zur „Inspek-

1) „Artillerieunterricht für die k. u. k. Festungsartillerie" I. Teil, 2. Heft „Belagerungskanonen M. 80". Wien, Hof- u. Staatsdruckerei. 1907.

tion der Luftschiffertruppen" (Berlin) kommandiert und habe im Oktober auf der Drachenwarte in Rossitten (Kurische Nehrung) mit Herrn Dr. E. Weyhing die in einer demnächst erscheinenden Arbeit beschriebenen „Akustischen Pilotversuche" durchgeführt.

Wien, Januar 1919.

Über die Abklingungszeit der Fluoreszenz.

Von O. Stern und M. Volmer.

Es ist bisher nicht gelungen, die Abklingungszeit der Fluoreszenz, d. h. die Zeit, in welcher die Intensität der Fluoreszenzstrahlung nach Aufhören der Erregung bis auf den e-ten Teil gesunken ist, zu bestimmen. Ältere Versuche mit dem Phosphoroskop haben gezeigt, daß sie sicher kleiner ist als 10^{-4} sec, da nach dieser Zeit die Fluoreszenz bereits völlig erloschen erscheint.

Ein Versuch von Wood[1]) an der Resonanzstrahlung von Quecksilberdampf, die sich als eine Art von Fluoreszenz auffassen läßt, bei der das ausgestrahlte Licht dieselbe Wellenlänge wie das erregende hat, scheint andererseits dafür zusprechen, daß die Abklingungszeit nicht kleiner als 10^{-5} sec ist. Wood beobachtete nämlich, daß, wenn durch Quecksilberdampf ein Resonanzstrahlung erregendes Lichtbündel geschickt wird, nicht nur der Raum innerhalb des Bündels, sondern auch die benachbarten Schichten des Dampfes leuchten. Die Strahlung dieser nicht direkt von dem erregenden Licht getroffenen Schichten kann nach Wood einmal durch sekundäre Erregung, nämlich durch das Resonanzlicht des Bündels entstehen, das andere Mal daher rühren, daß Quecksilbermoleküle, nachdem sie über die Grenze des primären Strahlenbündels hinausgeflogen sind, noch fortfahren können, Licht zu emittieren. Um diese beiden Einflüsse zu trennen, brachte Wood an die Grenze des Bündels eine dünne Quarzplatte, die das Licht hindurchläßt, aber keine Moleküle. Dabei ergab sich, daß die Intensität der Nachbarstrahlung jenseits der Quarzplatte um 25—30 Proz. verringert wurde. Würde die Verringerung nur durch Schwächung des sekundär erregenden Lichtes des Bündels durch Reflexion an der Quarzplatte hervorgerufen, so dürfte sie, wie Wood berechnet, nur etwa 10 Proz. betragen. Die Differenz spricht nach Wood dafür, daß die Nachbarstrahlung zum Teil auch auf die zweite Art, also durch primär erregte und durch Molekularbewegung ausgewanderte Moleküle erzeugt wird. Die Nachbarstrahlung ließ sich bis auf einige Millimeter Entfernung verfolgen. Da die Geschwindigkeit der Quecksilbermoleküle 170 m/sec beträgt, läßt sich aus Woods Daten schließen, daß die Abklingungszeit etwa 10^{-5} sec beträgt.

1) Diese Zeitschr. 14, 177, 1913.

Dieser Wert ist unwahrscheinlich groß. Es scheint uns, daß Wood den Reflexionsverlust an der Quarzplatte zu gering angenommen hat, und wir glauben, daß eine genauere Prüfung zeigen wird, daß die Nachbarstrahlung in diesen Entfernungen lediglich durch sekundäre Erregung zustande kommt. Diese Prüfung könnte z. B. so erfolgen, daß man senkrecht durch ein Lichtbündel einen Molekularstrahl von Quecksilberdampf schickt und die Intensität an der Ein- und Austrittsstelle, deren Lagen in ruhendem Hg-Dampf bestimmt werden, vergleicht.

Einfacher läßt sich eine solche Bestimmung der Abklingungszeit unter Benutzung der Molekulargeschwindigkeiten bei fluoreszierendem Joddampf ausführen. Einmal fällt hier die Unsicherheit infolge sekundärer Erregung fort, die bei Joddampf unmerklich ist, zum andern wird die Fluoreszenz der Jodmoleküle durch Zusammenstöße vernichtet, wie Frank und Wood[1]) und Wood und Speas[2]) gezeigt haben. Erzeugt man also in dichtem Joddampf durch ein Lichtbündel einen Fluoreszenzstreifen, so müssen seine Ränder scharf begrenzt sein, da die Fluoreszenzstrahlung der aus dem Streifen fliegenden Moleküle sofort durch die Zusammenstöße vernichtet wird. Erniedrigt man den Dampfdruck des Jods in dem Raum, vergrößert somit also die freie Weglänge der Moleküle, so muß eine Verbreiterung des Streifens vom ungefähren Betrage der mittleren freien Weglänge der Jodmoleküle eintreten, wenn die Abklingungszeit größer ist, als die Zeit zwischen zwei Zusammenstößen. Die von den obengenannten Forschern gefundene Beeinflussung der Fluoreszenz durch Zusammenstöße bei Gasdrucken von Bruchteilen eines Millimeters schien uns dafür zu sprechen, daß die Abklingungszeit von mindestens derselben Größe sein mußte, wie die mittlere Stoßzeit bei diesen Drucken. Wir haben einen solchen Versuch[3]) mit der in Fig. 1 wiedergegebenen Anordnung angestellt. Das den Joddampf enthaltende Glasgefäß A war vorher sorgfältig evakuiert worden. Im Ansatzgefäß B befand sich etwas festes Jod. Das erregende Licht fiel von C her durch das Blechröhrchen a, das eingeschmolzene Glas-

1) Verh. d. D. Phys. Ges. 13, 78, 84, 1911.

2) Diese Zeitschr. 15, 317, 1914.

3) Der Versuch wurde im Physikalisch-chemischen Institut der Universität Berlin ausgeführt. Herrn Geheimrat Nernst möchten wir für die erteilte Erlaubnis unseren besten Dank aussprechen.

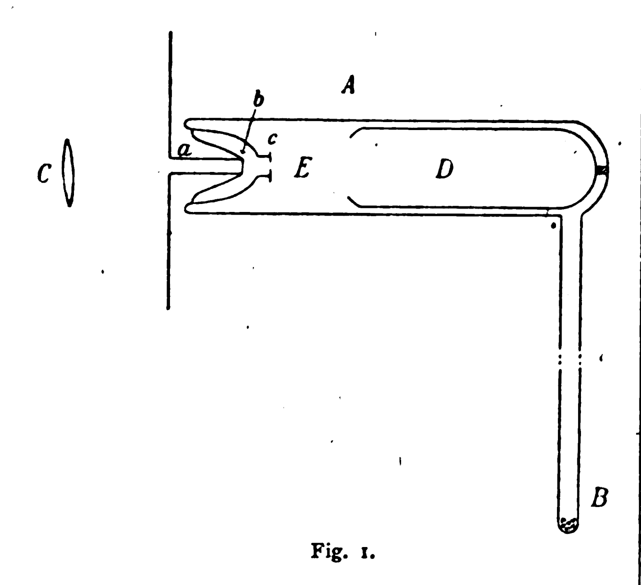


Fig. 1.

fenster b von 3 mm ⌀ und die geschwärzte Platinblende c von 0,5 mm Weite in das Gefäß A und wurde in dem innen berußten Glasrohr D vollständig absorbiert. Die das Fenster b und die Blende c tragenden Teile waren aus schwarzem Glas hergestellt. Bei E wurde der Fluoreszenzstreifen mit Hilfe eines Mikroskopes von zehnfacher Vergrößerung beobachtet. Zur Erregung wurde Sonnenlicht benutzt, das mit Hilfe eines Heliostaten[1]) durch ein Linsensystem in den Apparat geworfen wurde. Im Mikroskop war dann ein 5 mm breiter, ziemlich scharf begrenzter Lichtstreifen sichtbar. Die Beobachtung geschah in einem völlig verdunkelten Zimmer; das Sonnenlicht trat durch eine Öffnung in einem lichtdichten Vorhang in den Apparat. Nachdem zunächst bei Zimmertemperatur (20°) das Mikroskop auf die eine Grenze des Lichtstreifens möglichst scharf eingestellt und ihre Lage auf der Okularskala abgelesen worden war, wurde das Ansatzgefäß auf 0° und später auch tiefer abgekühlt. Dabei sinkt der Dampfdruck des Jods zunächst von 0,2 mm auf 0,03 mm, und die freie Weglänge der Moleküle steigt von 0,09 mm auf 0,6 mm. Die Zeiten, in denen diese Strecken durchlaufen werden, betragen bei einer Geschwindigkeit der Jodmoleküle von 150 m/sec $6 \cdot 10^{-7}$ bzw. $4 \cdot 10^{-6}$ sec.

Die kleinste Abklingungszeit, die bei vorsichtiger Schätzung der Intensitätsverhältnisse noch einen Effekt hätte ergeben müssen, beträgt mindestens $1 \cdot 10^{-6}$ sec. Tatsächlich wurde weder eine Verschiebung noch auch nur ein Unschärferwerden der Grenze beobachtet. Daraus geht hervor, daß die Abklingungszeit kleiner als $1 \cdot 10^{-6}$ sec ist. Eine Messung der Größe gestattet aber diese Anordnung nicht.

Dagegen ermöglichen die quantitativen Messungen von Wood und Speas[1]) über die Beeinflussung der Fluoreszenzintensität durch Molekularstöße die Berechnung der Abklingungszeit. Diese Forscher maßen die Fluoreszenzintensitäten bei verschiedenen Dampfdrucken und dividierten die gefundenen Werte durch die betreffenden Dampfdrucke. Sie erhielten so die molekularen Fluoreszenzintensitäten, d. h. die Intensitäten der Fluoreszenzstrahlung, bezogen auf die gleiche Anzahl von Molekülen. Falls die Ausstrahlung der Moleküle durch die benachbarten Moleküle nicht beeinflußt würde und man von der Absorption absehen kann, müßte die molekulare Fluoreszenzstrahlung unabhängig vom Druck sein, wie dies bei den entsprechenden absorbierten Lichtmengen der Fall ist (Gültigkeit des Beerschen Gesetzes). Statt dessen fanden sie eine Abhängigkeit vom Druck, die durch

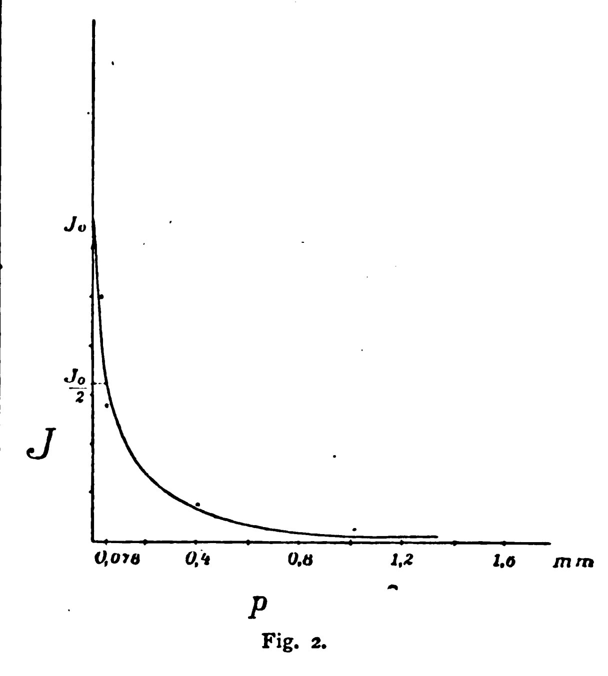


Fig. 2.

die Kurve in Fig. 2 wiedergegeben ist. Die von den Autoren angegebene Kurve[2]) ist etwas entstellt infolge einer fehlerhaften Extrapolation der Joddampfdrucke. Die hier gezeichnete Kurve ist von uns mit Hilfe der inzwischen gemessenen Dampfdrucke neu berechnet worden. Ihre Werte sind der folgenden Rechnung zugrunde gelegt. Die molekulare Fluoreszenz-

1) Der benutzte Heliostat wurde uns durch Herrn Prof. Mente aus dem photochem. Laboratorium der Technischen Hochschule in Charlottenburg leihweise überlassen, wofür wir auch hier unseren besten Dank ausdrücken.

1) l. c.
2) l. c.

intensität nimmt also von einem Maximalwert bei kleinem Drucke mit steigendem Druck bis 0 ab. Da eine Beeinflussung noch stattfindet bei Drucken, bei denen der mittlere Abstand der Jodmoleküle mehrere Hundert Molekulardurchmesser beträgt, werden die Moleküle nur bei Zusammenstößen merkliche Wirkungen aufeinander ausüben. Eine Beeinflussung der Fluoreszenzintensität kann in diesem Falle nur dann stattfinden, wenn der fluoreszenzfähige Zustand eines Moleküls die Zeit zwischen zwei Zusammenstößen überdauert. Eine genauere weiter unten durchgeführte Analyse zeigt, daß bei dem Drucke des Joddampfes, bei dem die molekulare Fluoreszenzintensität auf die Hälfte der Maximalintensität gesunken ist, die Abklingungszeit τ der Fluoreszenz gleich der mittleren Zeit T zwischen zwei Zusammenstößen ist. Dieser „Halbwertsdruck" ist, wie aus Fig. 2 zu entnehmen ist, 0,078 mm. Die mittlere Stoßzeit bei diesem Druck ist etwa $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ sec. So groß ist also auch die Abklingungszeit der Jodfluoreszenz. Hierbei ist vorausgesetzt, daß schon der erste Zusammenstoß die Fluoreszenzfähigkeit völlig zerstört, was bei dem stark elektroaffinen Jod sehr wahrscheinlich ist, andernfalls würde eine größere Abklingungszeit resultieren.

Eine solche Abklingungszeit von $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ sec hätte bei unserer Anordnung einen deutlichen Effekt ergeben müssen. Da ein solcher nicht gefunden wurde, muß also die berechnete Abklingungszeit zu groß sein und es muß ein Fehler in den Voraussetzungen stecken. Es liegt nahe, hierbei an eine analoge Unstimmigkeit zu denken, die bei der Berechnung der Verbreiterung von Spektrallinien durch Molekularstöße nach der Lorentzschen Theorie auftritt. Dabei hatte sich ergeben, daß die Zahl der optisch wirksamen Zusammenstöße ein vielfaches der Zahl der gastheoretisch berechneten Zusammenstöße ist. Neuerdings haben Füchtbauer[1]) und seine Mitarbeiter durch genaue Messungen an Absorptionslinien festgestellt, daß die Zahl der optischen Zusammenstöße bei *Cs*- und *Na*-Dampf in Stickstoff 32 mal bzw. 18 mal so groß ist, als man gastheoretisch berechnet. Die Zeiten zwischen zwei optischen Zusammenstößen sind also entsprechend 32 mal bzw. 18 mal kleiner. Aus den Versuchsergebnissen von Frank und Wood[2]) über den Einfluß verschiedener Gase auf die Fluoreszenzintensität des Joddampfes folgt unter Berücksichtigung der Molekularradien von Jod und Stickstoff mit Hilfe einer

1) Diese Zeitschr. **14**, 1164, 1168, 1913.
2) l. c.

leichten Überschlagsrechnung, daß das Verhältnis von optischer und molekularer Stoßzahl für Jod dreimal so groß ist, als für Stickstoff. Da es nach Füchtbauer für Stickstoff etwa 25 beträgt, wird es für Jod 75 sein. Daraus würde folgen, daß die Abklingungszeit nur den 75. Teil der oben berechneten Zeit von $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ sec, also $2 \cdot 10^{-8}$ sec beträgt.

Die wesentliche Unsicherheit dieser Rechnung liegt in der Übertragung der bei *Cs* und *Na* gefundenen optischen Stoßzahlen auf das Jod. Eine direkte Bestimmung an diesem würde eine strenge Berechnung gestatten.

Die obige Überlegung erklärt zunächst, weshalb wir den erwarteten Effekt nicht gefunden haben.

Ferner liegt der berechnete Wert von $2 \cdot 10^{-8}$ sec innerhalb der Grenzen von $6 \cdot 10^{-7}$ und $7 \cdot 10^{-10}$ sec, die Stark[1]) für die Abklingungszeit des Leuchtens von Molekülen gefunden hat, welche durch Kanalstrahlen angeregt worden sind. Er ist schließlich von derselben Größenordnung wie die aus der klassischen Theorie für einen schwingenden Dipol, der die Wellenlänge $\lambda = 500\ \mu\mu$ aussendet, berechnete Abklingungszeit von $\tau = 1 \cdot 10^{-8}$ sec.

Diese Tatsache spricht sehr dafür, daß man es bei der Fluoreszenz mit keinem anderen molekularen Vorgang zu tun hat, wie bei der Lichtemission durch thermische oder elektrische Erregung, wofür auch spricht, daß die Spektra wesensgleich sind.

Nun kann nach den neueren Arbeiten über die Emission von Spektrallinien kein Zweifel darüber bestehen, daß dieser Vorgang quantentheoretisch zu deuten ist. Die Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes weist darauf hin, daß gerade die Fluoreszenz ein Quanteneffekt ist. Auch der nach der klassischen Theorie schwer verständliche Umstand, daß die optische Stoßzahl größer ist als die gastheoretische, erklärt sich nach der Quantentheorie zwanglos dadurch, daß das Elektron im fluoreszenzfähigen Molekül eine Bahn mit größerem Radius als im gewöhnlichen Molekül beschreibt. Schließlich spricht auch die von Wood und Frank[2]) gefundene Veränderung des Jodfluoreszenzspektrums durch Heliumzusatz sehr zugunsten der quantentheoretischen Auffassung. Diese Forscher fanden nämlich, daß das von reinem verdünntem Joddampf ausgesandte Fluoreszenzspektrum bei Beleuchtung mit der grünen *Hg*-Linie $\lambda = 546$ aus fünfzehn einzelnen Linien besteht. Setzt man nun dem Joddampf in steigenden Mengen Helium zu, so findet man, daß die Intensität

1) Ann. d. Phys. **49**, 731, 1916.
2) Diese Zeitschr. **12**, 81, 1911.

dieser Linien immermehr abnimmt, daß dafür aber neue, den ursprünglichen 15 Linien benachbarte Linien mit wachsender Intensität auftreten, welche auch bei Beleuchtung mit weißem Licht ausgesandt werden. Während Frank und Wood das damals nach der klassischen Theorie in ziemlich gezwungener Weise dadurch erklären mußten, daß durch die Stöße der Heliumatome Koppelungen zwischen den einzelnen Elektronensystemen des Jodmoleküls bewirkt werden, erklärt es sich nach der Quantenauffassung ohne weiteres dadurch, daß durch die Zusammenstöße mit den Heliumatomen die Moleküle in benachbarte Quantenzustände geworfen werden. Nun fragt es sich, wie nach der Quantentheorie der Abklingungsvorgang zu deuten ist, und welcher Wert für die Abklingungszeit sich aus ihr ergibt.

Was zunächst die Lichtabsorption anbelangt, so erfolgt sie nach der klassischen Theorie so, daß alle Moleküle gleichmäßig absorbieren, während nach der Quantentheorie (nach der Einstein-Bohrschen Auffassung) die Mehrzahl der Moleküle nicht absorbiert und unverändert bleibt (Zustand a), und nur einige wenige Moleküle Energie aufnehmen, dann aber gleich ganze Quanta vom Betrags $h \cdot \nu$, wobei sie in einen Zustand b übergehen. Der Abklingungsvorgang erfolgt nach der klassischen Theorie durch allmähliche Ausstrahlung der Energie durch alle Moleküle, hingegen nach der Quantentheorie dadurch, daß von Zeit zu Zeit ein Molekül aus dem Zustand b in den Zustand a unter Lichtemission zurückspringt, in der gleichen Weise und nach demselben statistischen Gesetz, wie die Atome radioaktiver Stoffe zerfallen[1]). Die Abklingungszeit ist in der klassischen Theorie die Zeit, in welcher die Moleküle die absorbierte Energie bis auf den $e$ten Teil ausgestrahlt hat, in der Quantentheorie hingegen die mittlere Lebensdauer eines Atoms vom Zustand b.

Nach der klassischen Maxwell-Hertzschen Theorie berechnet sich die Abklingungszeit eines Resonators zu

$$\tau = \frac{3}{8\pi^2} \cdot \frac{c \cdot m \cdot \lambda^2}{e^2}$$

(e Ladung, m Masse des Elektrons, c Lichtgeschwindigkeit, λ Wellenlänge).

Über die mittlere Lebensdauerder Atome b sagt die Quantentheorie in ihrer bisherigen Form nichts aus.

Für hohe Quantenzahlen läßt sich die Lebensdauer durch Grenzübergang zur klassischen Theorie ableiten. Für den uns hier interessierenden Fall, daß der Resonator ein Quantum $h \cdot \nu$ besitzt, führt folgende Überlegung zum Ziel, die sich zunächst allerdings nur auf einen monochromatischen Resonator bezieht.

Die bisherigen Untersuchungen[1]) über Absorption von Spektrallinien machen es wahrscheinlich, daß die nach der klassischen Theorie berechnete Zahl der absorbierenden Elektronen gleich der Zahl der vorhandenen Moleküle ist, falls es sich um Linien handelt, die von nicht erregten Atomen absorbiert werden. Man kann also annehmen, daß die gesamte von n Resonatoren absorbierte Energie den aus der klassischen Theorie folgenden Betrag besitzt. Das Gleiche muß man dann auch für die emittierte Energie annehmen, weil das Verhältnis zwischen Strahlungsdichte und mittlerer Energie (ohne Nullpunktsenergie) von n Resonatoren ebenfalls den aus der klassischen Theorie folgenden Wert hat. Wir müssen also die Annahme machen, daß auch in der Quantentheorie die von n Resonatoren, von denen einige ein Quantum $h\nu$ besitzen, pro Sekunde ausgestrahlte Energie denselben Betrag hat, der sich aus der klassischen Theorie für n Resonatoren von der gleichen mittleren Energie ergibt.

Ist in der klassischen Theorie ε_0 die Energie, die ein Resonator zur Zeit $t = 0$ besitzt, so sinkt seine Energie ε durch Ausstrahlung nach dem Gesetz

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad \left(\tau = \frac{3}{8\pi^2} \frac{c \cdot m \cdot \lambda^2}{e^2}\right).$$

Sind n solcher Resonatoren mit der Gesamtenergie $E = n \cdot \varepsilon$ vorhanden, so sinkt E nach dem Gesetz

$$E = E_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Hat in der Quantentheorie das gleiche aus n Resonatoren bestehende System die Energie E_0 aufgenommen, so sind $m_0 = \frac{E_0}{h\nu}$ Resonatoren aus dem Zustand a in den Zustand b übergegangen, d. h. es ist $E_0 = m_0 \cdot h\nu$. Ist die Energie auf den Betrag E gefallen, so sind nur noch $m = \frac{E}{h \cdot \nu}$ Resonatoren im Zustand b vorhanden. Soll also wieder die Energie nach dem Gesetz:

$$E = E_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

fallen, so muß

$$m \cdot h\nu = m_0 \cdot h\nu \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

1) A. Einstein, diese Zeitschr. 18, 121, 1917.

1) Vgl. z. B. Füchtbauer, l. c.

sein. Die Atome im Zustande b zerfallen also nach dem Gesetz:

$$m = m_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Mit anderen Worten, die mittlere Lebensdauer eines Atoms in Zustand b ist gleich τ, der aus der klassischen Theorie folgenden Abklingungszeit.

Hat man keinen monochromatischen Resonator, sondern ein rotierendes Elektron, so ist die obige Überlegung darauf nicht ohne weiteres übertragbar, weil bei dem klassischen System sich die Frequenz mit der Energie ändert, beim quantentheoretischen nicht. Daß aber in jedem Falle dieselbe Größenordnung von τ resultieren wird, beweist die annähernde Gültigkeit der klassischen Dispersionstheorie.

Anm. Die oben benutzte Methode dürfte sich auch in allen anderen Fällen anwenden lassen, in denen es sich darum handelt, die Häufigkeit des Springens aus einem Quantenzustand in einen andern zu berechnen, wenn man annimmt, daß für die Mittelwerte der aufgenommenen und abgegebenen Energie diejenigen Werte einzusetzen sind, die sich aus der klassischen Theorie für den dem betrachteten Quantenvorgang entsprechenden klassischen Prozeß ergeben. So läßt sich z. B. beim monochromatischen Resonator die obige Überlegung ohne weiteres für beliebige Frequenzen verallgemeinern, so daß man für jede Stelle der Dispersionskurve die Zahl der aufgenommenen und abgegebenen Quanten $h\nu$ (ν Frequenz der Strahlung) erhält. In andern Fällen macht die Konstruktion des entsprechenden klassischen Prozesses Schwierigkeiten, z. B. bei der Dispersion Bohrscher Atommodelle. Immerhin scheint es uns sehr wahrscheinlich, daß man, um z. B. die Dispersion eines Gases aus Bohrschen H-Atomen zu erhalten, nicht wie Debye und Sommerfeld die Dispersion dieser Atome im einquantigen Kreise nach der klassischen Theorie berechnen darf, — ein Verfahren, das, wie Sommerfeld selbst hervorhebt, in der Nähe von Linien versagen muß —, sondern daß man bei im übrigen gleicher Rechnung ein H-Atommodell zugrunde legen muß, das nach der klassischen Theorie Absorption in den Linien der Lymanserie zeigt, indem man etwa annimmt, daß bei der Mehrzahl der Atome die Elektronen mit einer der ersten Linie der Lymanserie entsprechenden Frequenz umlaufen, bei einem kleineren Teil mit einer der zweiten Linie entsprechenden Frequenz usw. Als Argument gegen diese Auffassung könnte man die von Debye berechnete Dispersion des Wasserstoffmoleküls anführen. Gegen die Richtigkeit des Bohr-Debyeschen Modells spricht aber das schwerwiegende von Nernst hervorgehobene Bedenken, daß es eine viel zu kleine Dissoziationswärme liefert. Andererseits ergibt die Debye-Sommerfeldsche Methode für das sicher annähernd richtige (wegen der Ionisierungsspannung) Bohrsche Heliumatommodell eine falsche Dispersion. In beiden Fällen liegt die durch die hier vertretene Auffassung bedingte Abweichung von den Debye-Sommerfeldschen Resultaten in der richtigen Richtung.

Die im obigen berechnete mittlere Lebensdauer eines Moleküls im Bohrschen Zustande b ist eine Größe, deren Kenntnis auch in Hinsicht auf die Photochemie von Interesse ist. Wir müssen annehmen, daß bei jeder Lichtabsorption der Übergang der absorbierenden Moleküle in diesen Zustand der primäre Vorgang ist, für den das Einsteinsche Äquivalenzgesetz exakt gelten wird. Die Umwandlungen dieser Moleküle b, ihre Dissoziation oder Reaktion mit anderen Molekülen ergeben die beobachteten sogenannten photochemischen Reaktionen. Für diese wird also das Einsteinsche Gesetz nur dann zutreffen können, wenn die Moleküle b quantitativ in dem einen verfolgten Sinne reagieren. Jedenfalls ist die Kenntnis der Lebensdauer der Moleküle im Zustand b notwendig, um im Einzelfall die Bedingungen absichtlich so wählen zu können, daß möglichst alle in dem gewünschten Sinne in Reaktion treten.

Zum Schluß sei noch die Ableitung der oben benutzten Beziehung gegeben, wonach die Abklingungszeit gleich der mittleren Zeit zwischen zwei Zusammenstößen beim „Halbwertsdruck" ist. Wir benutzen hierbei die quantentheoretische Auffassung, die klassische Theorie ergibt, wie leicht ersichtlich, das Gleiche. Wir betrachten N Moleküle, die durch Strahlung von bestimmter Intensität zur Fluoreszenz angeregt werden. Dann stellt sich ein stationärer Zustand ein, bei dem die Zahl der pro Sekunde durch Absorption in den Zustand b gelangenden Moleküle gleich der Zahl der pro Sekunde durch Emission oder Zusammenstoß zerfallenden Moleküle im Zustand b ist. Falls das Beersche Gesetz gilt (die Absorptionsänderung infolge Linienverbreiterung durch die Zusammenstöße also vernachlässigt werden kann), ist die Zahl Nk_a der pro Sekunde durch Absorption in den Zustand b gelangenden Moleküle unabhängig vom Drucke des Gases. Ist das Gas so verdünnt, daß die Wirkung der Zusammenstöße sich nicht bemerkbar macht, so sei im stationären Zustand n_0 die Zahl der Moleküle im Zustand b. Dann gilt:

$$N \cdot k_a = n_0 \cdot k_s,$$

wobei $n_0 k_s$ die Zahl der pro Sekunde durch Ausstrahlung zerfallenden Moleküle im Zustand b, also $k_s = \frac{1}{\tau}$ ist. Befindet sich nun das Gas unter dem höheren Druck p oder ist ein fremdes Gas zugesetzt, so daß die Moleküle im Zustand b außer durch Ausstrahlung auch noch durch Zusammenstöße vernichtet werden, so sei n die Zahl der Moleküle in Zustand b. Ist nk_z die Zahl der vernichtenden Zusammenstöße pro Sekunde, so ist:

$$N \cdot k_a = n\,k_s + n\,k_z = n\,(k_s + k_z) = n_0 \cdot k_s;$$

folglich ist

$$\frac{n}{n_0} = \frac{k_s}{k_s + k_z}.$$

Nennen wir I_0 die maximale molekulare Fluoreszenzintensität, I diejenige beim Druck p, so ist

$$\frac{n}{n_0} = \frac{I}{I_0} = \frac{k_s}{k_s + k_z}.$$

Nun ist $k_s = \frac{1}{\tau}$ und $k_z = \frac{1}{T}$, wobei T die mittlere Zeit zwischen zwei vernichtenden Zusammenstößen bedeutet. Also ist

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T}}$$

oder

$$\tau = T \cdot \frac{I_0 - I}{I}.$$

Für $I = \frac{I_0}{2}$ folgt dann die oben benutzte Beziehung

$$T = \tau.$$

Setzt man die Zeit T umgekehrt proportional dem Druck p, also $T = \frac{a}{p}$, so wird

$$I = I_0 \cdot \frac{1}{1 + a\tau p} = I_0 \frac{1}{1 + bp}.$$

Diese Gleichung gestattet eine Berechnung der Kurve von Wood und Speas. In Fig. 2 sind einige der so berechneten Punkte eingetragen. Sie stimmen mit der experimentell gefundenen Kurve ziemlich gut überein[1]).

Zusammenfassung.

Es wurde gezeigt, daß man aus Messungen über die Beeinflussung der Fluoreszenzintensität durch Molekularstöße und über die Linienverbreiterung durch Molekularstöße die Abklingungszeit der Fluoreszenz berechnen kann. Aus den vorliegenden Messungen, die nur eine Überschlagsrechnung gestatten, ergab sich diese Zeit zu etwa $2 \cdot 10^{-8}$ sec in Übereinstimmung mit dem aus der klassischen Theorie für die Abklingungszeit eines Resonators folgenden Wert. Schließlich wurde diese Größe mit der Lebensdauer eines Moleküls im Bohrschen Zustand in Beziehung gebracht.

1) Nur nehmen Wood und Speas an, daß die Kurve bei den kleinsten Drucken umbiegt und parallel der Abszissenachse verläuft, während sie nach unserer Formel gradlinig und scharf auf die Ordinatenachse zuläuft (wie in Fig. 2 gezeichnet). Zur Entscheidung hierüber sind genauere Messungen erforderlich.

Berlin, den 20. Januar 1919.

(Eingegangen 23. Januar 1919.)

Zur Theorie der Bandenspektren.

Von T. Heurlinger.

Nach einer Hypothese von Schwarzschild[1]) werden die Bandenspektren emittiert oder absorbiert, wenn das Elektronensystem eines Moleküls von einem stationären Zustand in einen anderen übergeht und gleichzeitig die Quantenzahlen, welche die Rotationsbewegung des Moleküls bestimmen, geändert werden. Im folgenden werden wir einige Konsequenzen dieser Hypothese entwickeln und mit der Erfahrung vergleichen.

Zwei Zustände eines zweiatomigen Moleküls seien durch die Quantenzahlen $m, n_1 \ldots n_s$ und $m', n_1' \ldots n_s'$ bestimmt, von welchen m und m' sich auf die Rotation der Kernachse beziehen. Die entsprechende Schwingungszahl wird dann durch die Formel

$$\nu = \varphi(m, n_1 \ldots n_s) - \psi(m', n_1' \ldots n_s')$$

gegeben, wo φ und ψ die durch die Plancksche Konstante dividierte Energie der beiden Zustände bedeuten. Es ist also

$$\begin{aligned}\nu = \{\varphi(m, n_1 \ldots n_s) - \psi(m, n_1' \ldots n_s')\} + \\ \{\psi(m, n_1' \ldots n_s') - \psi(m', n_1' \ldots n_s')\}.\end{aligned} \quad (1)$$

Nach einem allgemeinen Satze von Bohr nähert sich die letzte Klammer dem Werte $(m - m')\omega$ (wo ω die Schwingungszahl der Rotation bedeutet), wenn $|m - m'| << m$ ist. Nach der klassischen Elektrodynamik sollte die Schwingungszahl drei verschiedene Werte annehmen können: $\nu_\omega, \nu_\omega \pm \omega$. Damit (1) in dem betrachteten Grenzfalle hiermit übereinstimmt, darf $m - m'$ nur drei konsekutive Zahlenwerte annehmen, und es sind daher nach der Quantentheorie im allgemeinen drei Serien zu erwarten:

$$\left.\begin{aligned}\nu^{I} &= F(m) - f(m-1),\\ \nu^{II} &= F(m) - f(m),\\ \nu^{III} &= F(m) - f(m+1).\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Von diesen können eventuell entweder ν^{II} oder ν^{I} und ν^{III} fehlen. — Aus (2) folgt unmittelbar

$$\nu^{II}(m) - \nu^{III}(m) = \nu^{I}(m+1) - \nu^{II}(m+1). \quad (3)$$

Diejenigen Bandenspektren, deren Struktur vollständig bekannt ist, sind aus Systemen von zwei bzw. drei einfachen oder zusammengesetzten Serien aufgebaut, die ich mit P und R bzw. P, Q, R bezeichnet habe[2]). Wenn die Gleichungen (2) überhaupt gelten sollen, muß Q mit ν^{II}, P und R mit ν^{I} und ν^{III} oder umgekehrt identifiziert werden.

1) K. Schwarzschild, Sitzungsber. Preuß. Akad. 1916, S. 548.

2) Vgl. Untersuchungen über die Struktur der Bandenspektren. Diss. Lund 1918.

Einige Banden bestehen aus P- und R-Serien, die, von der Feinstruktur abgesehen, einfach sind. Für die Serien dieser Banden gilt näherungsweise für kleine Werte von m:

$$R(m) = P(-m) = \varrho_0 + \varrho_1 m + \varrho_2 m^2 + \ldots,$$

was mit (2) nur dann übereinstimmt, wenn $F(m)$ und $f(m)$ annähernd gerade Funktionen von m oder $m +$ eine ganze Zahl sind. Ersteres trifft zu, wenn die Energie eine gerade Funktion der Rotationsgeschwindigkeit ist. Die Annahme

$$F(m) = a_0 + a_2 m^2 + a_4 m^4 + \ldots$$
$$f(m) = a'_0 + a_2' m^2 + a_4' m^4 + \ldots$$

gibt

$$\left.\begin{aligned} \varrho_0 &= a_0 - a_0' - a_2' - a_4' - \ldots, \\ \varrho_1 &= 2 a_2' + 4 a_4' + \ldots \\ \varrho_2 &= a_2 - a_2' - 6 a_4' - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Nach (4) stellt sich ϱ_0 als die Differenz zweier Funktionen dar, die wenigstens von je einer unabhängig veränderlichen ganzen Zahl n bzw. p abhängen. Dies gilt bei vielen Banden mehr oder weniger genau und stimmt innerhalb der Unsicherheit der Messung und Rechnung in dem Fall, wo eine genaue Prüfung ausgeführt wurde (bei den Cyanbanden). In den bekannten Bandenspektren sind n und p (außer m) die einzigen Veränderlichen. — Nach (4) soll ϱ_1 von n unabhängig sein. Dies wurde empirisch gefunden. Ferner soll, wenn a_4' gegen a_2' vernachlässigt werden kann

$$\varrho_2^{(p+1)} - \varrho_2^{(p)} = \mp \tfrac{1}{2}[\varrho_1^{(p+1)} - \varrho_1^{(p)}], \quad (5)$$

(je nachdem $a_2' \gtrless 0$), und diese Größe soll nur von p abhängen. Ebenso soll

$$\varrho_2^{(n+1)} - \varrho_3^{(n)} = a_2^{(n+1)} - a_2^{(n)} \quad (6)$$

nur von n abhängen. Zur Prüfung dieser Beziehungen können zurzeit nur die Messungen über die Cyanbanden herangezogen werden. Gibt man den Bandenserien A, B, C die Ordnungszahlen $p = 1, 2, 3$, den Banden A, B, C der Gruppen λ 4216 die Ordnungszahlen $n = 3, 2, 1$ und läßt n nach kürzeren Wellen wachsen, so ergibt sich:

Tabelle I.

n	$\varrho_2^{(n,p+1)} - \varrho_2^{(n,p)}$		$\varrho_2^{(n+1,p)} - \varrho_2^{(n,p)}$		
	$p = 1$	$p = 2$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
1		—0,021		—0,016	—0,020
2	—0,020	—0,024	—0,018	—0,019	—0,015
3	—0,022	—0,023	—0,017		
4	—0,023				

Die zu erwartende, annähernde Konstanz der Zahlen in jeder Kolonne ist also vorhanden[1]). Eine genaue Bestimmung von $\varrho_1^{(p+1)} - \varrho_1^{(p)}$ wird dadurch erschwert, daß in mehreren Banden die Linien mit kleinen Ordnungszahlen von intensiven Linien anderer Serien überlagert werden.

Wenn $F(m)$ und $f(m)$ auch ungerade Potenzen enthalten:

$$F(m) = \sum_0^\infty a_k m^k, \quad f(m) = \sum_0^\infty a_k' m^k,$$

so wird

$$P(m) = \sum_0^\infty \pi_k m^k, \quad R(m) = \sum_0^\infty \varrho_k m^k,$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \varrho_0 - \pi_0 &= \mp 2(a_1' + a_3' + \ldots) \\ \varrho_1 + \pi_1 &= 2(a_1 - a_1' - 3 a_3' \ldots) \\ \varrho_2 - \pi_2 &= \pm 6 a_3' \pm \ldots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Hier ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem ν^{I} oder ν^{III} die R-Serie darstellt. — Beim Übergang von der P- zur R-Serie tritt ersichtlich eine Diskontinuität auf.

Verschiedene Gründe sprechen dafür, daß die atmosphärischen Sauerstoffbanden aus zwei solchen Systemen P_1, R_1 und P_2, R_2 aufgebaut sind. Nach (7) sollen $\varrho_0 - \pi_0$ und $\varrho_2 - \pi_2$ unabhängig von n sein. Dies gilt in der Tat näherungsweise, wie es die folgende Tabelle zeigt. Der zweite Index bezeichnet die zwei Systeme.

Tabelle II.

n	$\varrho_{01} - \pi_{01}$	$\varrho_{02} - \pi_{02}$	$\varrho_{21} - \pi_{21}$	$\varrho_{22} - \pi_{22}$
1	—0,88	+0,74	—0,0069	—0,0073
2	—0,94	+0,72	84	75
3	—0,91	+0,72	73	98

Es mag bemerkt werden, daß nach der Theorie $R(m) - P(m)$ für große m-Werte annähernd gleich

$$2\omega = m \cdot \frac{h}{2\pi^2 I}$$

sein soll, unter I das Trägheitsmoment des Moleküls verstanden. Daß diese Größe bei zwei Bandensystemen, die vermutlich von demselben Molekül emittiert werden, annähernd denselben Wert hat, habe ich für einen Fall gezeigt (l. c., S. 64).

§ 3. In den bisher bekannten Fällen, wo sowohl P- und R- als Q-Serien auftreten, sind sie aus mehreren Komponenten zusammengesetzt. Bezeichnen wir die Komponenten durch untere Indizes, so wird für ein Dublettsystem:

$$\nu^{I}_2 - \nu^{I}_1 = F_2(m) - F_1(m) - [f_2(m-1) - f_1(m-1)],$$
$$\nu^{II}_2 - \nu^{II}_1 = F_2(m) - F_1(m) - [f_2(m) - f_1(m)],$$
$$\nu^{III}_2 - \nu^{III}_1 = F_2(m) - F_1(m) - [f_2(m+1) - f_1(m+1)].$$

---

1) Auch kann in den Zahlen ein systematischer Gang nicht festgestellt werden.

Nun sind diese Komponentenabstände in den bisher untersuchten Fällen bei einer gewissen Wahl der relativen Ordnungszahlen, $\overline{m}$, in den P-, Q- und R-Serien annähernd gleich. Diese Tatsache kann durch die Annahme einfach gedeutet werden, daß annähernd entweder

$$\text{a)} \quad f_2 - f_1 = 0$$

oder

$$\text{b)} \quad F_2 - F_1 = 0.$$

Die in (2) angenommenen Ordnungszahlen stehen dann in folgender Beziehung zu den Ordnungszahlen $\overline{m}$: im Falle a)

$$m = \overline{m},$$

im Falle b)

$$m_{\mathrm{I}} = \overline{m}_{\mathrm{I}} + 1, \quad m_{\mathrm{II}} = \overline{m}_{\mathrm{II}}, \quad m_{\mathrm{III}} = \overline{m}_{\mathrm{III}} - 1.$$

Die Beziehung (3) muß also in einer von diesen Systemen von Ordnungszahlen erfüllt sein. Nun gilt, wenn die Ordnungszahlen gemäß der Annahme a) bestimmt werden, in Übereinstimmung mit (3):

$$R(m) - Q(m) = Q(m+1) - P(m+1).$$

Es ist interessant, daß das eigentümliche Verhalten der Serien in der Nähe von $m = 0$ mit den Gleichungen (2) übereinstimmt. Merkwürdigerweise ist die Übereinstimmung aber nur angenähert; sie wird für größere m immer schlechter. Beispielsweise beträgt die Abweichung für die H_2O-Bande λ 3064 anfangs ein paar Promille, bei $m = 10$ 1 Proz. und bei $m = 20$ 3 Proz.

Die Dublettserien können nur durch Reihen nach sowohl fallenden als steigenden Potenzen von m dargestellt werden. Bezeichnen wir den Koeffizienten von m^k in der Entwicklung der P-, Q- und R-Serie bzw. mit π_k, χ_k, ϱ_k, so folgt aus (3):

$$\varrho_0 - \chi_0 = \chi_0 - \pi_0 + \chi_1 - \pi_1 + \chi_2 - \pi_2 + \ldots,$$
$$\varrho_1 - \chi_1 = \chi_1 - \pi_1 + 2(\chi_2 - \pi_2) + 3(\chi_3 - \pi_3) + \ldots,$$

welche Gleichungen ersichtlich näherungsweise mit den empirischen Beziehungen (l. c.) übereinstimmen. Außerdem ist empirisch $\varrho_0 - \chi_0$ nahe gleich 0, was durch die Annahme $a_1' = -a_2'$ erreicht werden kann.

Lund, im Januar 1919.

(Eingegangen 23. Januar 1919.)

Zwei quantentheoretische Bemerkungen.

Von P. Gruner.

1. Das Bohrsche Atommodell weist grundsätzlich so auffallende Analogien mit einem Planetensystem auf, daß es nahe liegt zu fragen, ob die Bohrschen Beziehungen sich auch in unserem Sonnensystem wiederfinden könnten. Von vornherein ist es zwar ganz unwahrscheinlich, daß die quantentheoretischen Gesetze, die sich in der Atomwelt vorfinden, in der Sternenwelt irgendeine Bedeutung haben sollten; doch ist es nicht ausgeschlossen, daß analoge Gesetze noch unbekannter Natur im Makrokosmos herrschen.

Daß die Planeten unseres Sonnensystems nicht regellos verteilt sind, darauf weist schon das Gesetz von Titius-Bode hin, wonach die relativen Sonnenabstände angenähert das einfache Gesetz: $a = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n$ befolgen. Es wäre deshalb denkbar, daß diese Verteilung der Planetenbahnen ähnlichen Beziehungen unterworfen wäre, wie die Verteilung der stationären Elektronenbahnen im Bohrschen Atommodell. In letzterem sind die Impulsmomente ganzzahlige Vielfache von $h/2\pi$.

Wir haben deshalb für unser System die Impulsmomente berechnet. Es ist

$$I_2 = m \cdot a^2 \cdot w \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

wo m = Masse, a = große Halbachse, w = Winkelgeschwindigkeit, ε = Exzentrizität des betreffenden Planeten ist.

In der letzten Spalte haben wir die abgerundeten Werte des Impulsmomentes I, bezogen auf den Wert $I = 1$ bei Merkur, zusammengestellt. Allerdings ist die Abrundung etwas stark, namentlich beim Saturn; doch schien es uns interessant, diese einfache Zahlenreihe hervorzuheben, die sich bei diesen Abrundungen ergibt. Ob hier wirklich eine Gesetzmäßigkeit in bezug auf die Impulsmomente der einzelnen Planetenbahnen vorliegt, ähnlich wie es die Quantentheorie bei dem Bohrschen Modell behauptet, wagen wir nicht zu entscheiden; wir wollten die ganze Frage hier nur zur weiteren Beachtung vorlegen.

2. Bei dieser Gelegenheit möchten wir einen Vorschlag über die Bezeichnung des elementaren Wirkungsquantums h bringen, der eine gewisse Vereinfachung in den diesbezüglichen Formeln bedingen würde, ähnlich wie dies in der Theorie der Elektrizität durch die Heavisidesche Einheit der Elektrizitätsmenge der Fall war.

Es scheint uns, es wäre rationell hinfort den Wert $\frac{h}{2\pi}$ als elementares Wirkungsquantum zu definieren und kurzweg hinfort mit h zu bezeichnen. Dadurch würde der Zahlenfaktor 2π aus vielen quantentheoretischen Beziehungen verschwinden.

So z. B. liefert die Quantelung der Elektronenbahnen des Bohrschen Atommodells nach Som-

	m	a	w	ε	J	$J_{approx.}$
Merkur	0,056	0,38710	14732,0	0,20561	120,98	1×10^0
Venus	0,817	0,72333	5767,7	0,006816	2465,4	2×10^1
Erde	1,000	1,00000	3548,2	0,01675	3547,7	3×10^1
Mars	0,108	1,52370	1886,5	0,093309	470,91	4×10^0
—	—	—	—	—	—	—
Jupiter	318,36	5,20256	299,13	0,048316	2574500	2×10^4
Saturn	95,22	9,55475	120,455	0,055863	1045500	1×10^4
Uranus	14,58	19,2181	42,231	0,046328	227170	2×10^3
Neptun	17,26	30,1096	21,535	0,008997	336960	3×10^3

merfeld die Bedingung $p_n = n \cdot \frac{h}{2\pi}$; ferner das Sommerfeldsche Gesetz des Wirkungsprinzips den Ausdruck

$$\int_0^\tau H \cdot dt = \frac{h}{2\pi};$$

namentlich aber tritt bei dem Strahlungsgesetz und allen damit verwandten Erscheinungen immer das Produkt $h \cdot \nu$ auf, wo ν die Frequenz in einer Sekunde angibt. Nun ist es aber bekanntlich viel einfacher, bei allen Formeln betreffend Schwingungen mit der Frequenz in 2π Sekunden, also mit dem 2π fachen Werte, zu rechnen und diesen kurzweg als Frequenz ν zu bezeichnen. Dann aber behält das Produkt $h \cdot \nu$ seine einfache Form nur, wenn man den von uns vorgeschlagenen Wert $\frac{h}{2\pi}$ hinfort mit h bezeichnet.

Ein weiterer Hinweis auf andere Vereinfachungen ist wohl nicht notwendig, um die Wünschbarkeit dieses Vorschlages darzutun: es möge hinfort als elementares Wirkungsquantum h der bisherige durch 2π dividierte Wert verwendet werden, also der Zahlwert

$$h = \frac{1}{2\pi}\left(6{,}547 \times 10^{-27}\right) = 1{,}0444 \times 10^{-27}.$$

Bern, Januar 1919.

(Eingegangen 24. Januar 1919.)

BESPRECHUNGEN.

F. Anderle, Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie. gr. 8⁰. V u. 354 S. mit 238 Figuren. 4. umgearbeitete u. vermehrte Auflage. Leipzig u. Wien, F. Deuticke. 1918. M. 12.— u. 30 Proz. Teuerungszuschlag.

Anderles Lehrbuch soll, wie er in der Vorrede sagt, dem gebildeten Laien, wie auch dem Praktiker, der dieses Gebiet zum ersten Male betritt, Aufklärung geben über die Vorgänge und Tatsachen, die man bei der Errichtung und beim Betriebe drahtloser Stationen kennen muß. Diesen Zweck erfüllt es gut, wie am besten daraus zu ersehen ist, daß es seit seinem ersten Erscheinen im Jahre 1911 bereits vier Auflagen erlebt hat, wovon zwei während des Krieges. Es werden die verschiedenen gebräuchlichen Systeme mit sämtlichen Organen der Sende- und der Empfangsseite erläutert, sowie die Vorgänge beschrieben, die sich in und zwischen ihnen abspielen, so daß ein guter Überblick der gesamten Anlage gewonnen wird.

Da, wo von der Beschreibung der Vorgänge zu ihrer Erklärung übergegangen wird, kann vielleicht der Leser nicht mehr so gut folgen, und die im Vorwort ausgesprochene Hoffnung, daß der Leser durch die Lektüre dieses Buches auch für wissenschaftliche Aufsätze genügendes Verständnis erwerben werde, vermögen wir nicht zu teilen. Speziell die einleitenden Kapitel, die der Erklärung der physikalischen Grundbegriffe gewidmet sind, müssen als wenig glücklich bezeichnet werden. Dem Physiker, auch wenn er sich mit drahtloser Telegraphie noch nicht beschäftigt hat, bringen sie nichts Neues; der Laie aber dürfte keinen Nutzen aus ihnen ziehen, da sie sehr wenig klar abgefaßt sind und eine Kenntnis mehr von Worten als von Begriffen vermitteln. Auch Unrichtigkeiten finden sich leider: so ist das Farad nicht gleich $\frac{\text{Coul.}}{\text{Amp.}}$, sondern gleich $\frac{\text{Coul.}}{\text{Volt}}$.

Für eine nötig werdende Neuauflage seien einige Wünsche gestattet: Da das Lehrbuch als Anleitung für den Praktiker gedacht ist, so dürfte die Aufnahme eines Namen- und Sachregisters äußerst erwünscht sein. Denn wenn man, was doch wohl häufig vorkommt, über irgendeinen einzelnen Punkt sich unterrichten will, so wird das Nachschlagen durch das Fehlen des Registers unnötig erschwert; ebenso auch durch verschiedene im Text befindliche falsche Hinweise auf andere Textstellen und auf Figuren. Schließlich müssen in den Figuren die Buchstaben und Zahlen doch mindestens so deutlich gedruckt werden, daß man sie lesen kann. Speziell bei der Kurve, Fig. 22, auf deren Angaben ausdrücklich im Text Bezug genommen wird, ist es dem Ref. nicht möglich, auch nur einen einzigen der Ordinatenwerte zu entziffern. Es liegt auf der Hand, daß hierunter das Verständnis leiden muß.

V. Pieck.

Zur Besprechung: H. Usener, Der Kreisel als Richtungsweiser usw.[1]**.** In dieser Zeitschrift **19**, 343 u. 487, 1918.

Herr Dr. Usener sagt auf S. 487 über die von der K. Marine angestellten Vergleichsversuche zwischen Kreiselkompassen von Anschütz und Sperry: „Sie beziehen sich weniger auf die Dämpfung, sondern in der Hauptsache auf das Verhalten auf schlingerndem Schiff. Diese Versuche, bei denen manche Zufälligkeiten mitgespielt haben mögen, können wohl kaum als Grundlage für ein abschließendes Urteil über die Güte der Sperryschen Konstruktion angesehen werden."

Vorstehendes könnte dahin verstanden werden, daß den Vergleichsversuchen, die im wesentlichen auf schlingerndem Schiff gemacht seien, infolge von Zufälligkeiten nur ein geringer Wert für die vergleichende Beurteilung beider Konstruktionen beiwohne.

Um Mißverständnissen über die Bewertung dieser Versuche des Reichsmarineamts vorzubeugen, sei folgendes festgestellt:

Die maßgebenden Versuche beziehen sich in der Tat auf Schlingersicherheit, sind aber nicht auf schlingerndem Schiff, sondern auf Schaukelapparaten an Land systematisch durchgeführt worden. Hierbei wurde aller Wert darauf gelegt, Zufälligkeiten auszuschließen, die den Wert dieser Versuche als einer unparteiischen Vergleichung hätten herabdrücken können. Sie sind durchaus sachgemäß und unter vollem Entgegenkommen gegen alle berechtigten Wünsche der Sperry-Gesellschaft durchgeführt worden und haben einwandfrei dargetan, daß der Sperrykompaß — auch nach 4 Tage langen Justierungsversuchen — dem Anschützschen in bezug auf Schlingersicherheit sehr stark unterlegen war. Die Ablenkungen durch Schaukelbewegungen waren 3—5 mal so groß.

Die Sperrysche Dämpfungseinrichtung an sich hat gut gearbeitet, konnte aber selbstverständlich die Schlingerfehler nicht beseitigen.

Dr. Maurer, Admiralitätsrat im Reichsmarineamt.

[1]) Der Aufforderung des Reichsmarineamtes, diese Notiz zu bringen, konnten wir uns nicht entziehen. Eine weitere Veröffentlichung in der Angelegenheit können wir aber unter keinen Umständen zulassen.

Die Schriftleitung.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: Der bisherige Privatdozent der Chemie an der Universität Berlin Dr. Walter Schöller an der Universität Freiburg i. Br. für medizinische Chemie.

Ernannt: Der ord. Honorarprofessor an der Universität Leipzig Dr. Max Siegfried zum ord. Professor der physiologischen Chemie ebenda, die a. o. Professoren an der Universität Freiburg i. Br. Dr. Franz Knopp (Physiologische Chemie) und Dr. Georg Meyer (Physikalische Chemie) zu ord. Professoren an der gleichen Universität, der ord. Professor für Chemie an der Handelshochschule Berlin Dr. A. Binz in gleicher Eigenschaft an der Universität Frankfurt, der a. o. Professor an der Universität Straßburg Dr. Fritz Straus zum ord. Professor der Chemie an der Handelshochschule Berlin, der a. o. Professor an der Universität Erlangen Dr. Richard Baldus zum ord. Professor der Geometrie an der Technischen Hochschule Karlsruhe, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Erich Trefftz zum ord. Professor der Mathematik an derselben Hochschule, der ständige Mitarbeiter am Marine-Observatorium in Wilhelmshaven Dr. Georg Struve zum Observator an der Universitäts-Sternwarte in Berlin-Babelsberg, der ord. Professor für pharmazeutische Chemie an der Universität Königsberg Dr. Erwin Rupp in gleicher Eigenschaft an der Universität Breslau, der Professor der Chemie an der Royal Holloway Universität in London George Barger zum ord. Professor für medizinische Chemie an der Universität Edinburgh.

Berufen: Der a. o. Professor an der Universität Greifswald Dr. Walter Roth zum ord. Professor der Physikalischen Chemie an der Technischen Hochschule Braunschweig.

Ehrung: Der Professor an der Universität Paris Dr. Daniel Berthelot zum Mitglied der Académie des Sciences in Paris für die Abteilung Physik.

Neuer Lehrauftrag: Der ord. Professor an der Universität Straßburg Dr. Emil Cohn für theoretische Physik als unbesoldeter Honorarprofessor im Sommersemester 1919 an der Universität Rostock.

Gestorben: Der des. ord. Professor der Pharmazeutischen Chemie an der Universität Breslau Dr. Max Scholtz (bisher in Greifswald), der Präsident der Society of Chemical Industry früherer Professor am Training College in Chester Sir William Crookes, der Privatdozent für Agrikulturchemie an der Technischen Hochschule Zürich und Vorstand der schweizerischen Agrikulturchemischen Anstalt Dr. A. August Grete, der Privatdozent für Chemie an der Universität Berlin und Mitherausgeber der Berichte der Deutsch-chemischen Gesellschaft Professor Dr. Franz Sachs, der frühere ord. Professor der Physik und Elektrotechnik an der Bergakademie Freiberg Geheimer Bergrat Dr. Theodor Erhard, der Direktor des Laboratoriums für Versuche mit radioaktiven Substanzen in Gif (Seine-et-Oise) und Herausgeber von „Le Radium" Jacques Danne, der ord. Professor der Physik an der Universität Budapest Baron Roland v. Eötvös, der frühere ord. Professor der Mathematik an der Universität Breslau Geh. Regierungsrat Dr. Rudolf Sturm.

Berichtigung: Die in 19, 536, 1918 gemeldete Ernennung von Professor Sebastian Finsterwalder zum Direktor des Geodätischen Instituts auf dem Trachenberg bestätigt sich nicht.

Straßburg. Zu den Straßburger Flüchtlingen gehört auch der langjährige Gehilfe von Professor Braun, der Mechaniker Julius Rolf (siehe auch unter Gesuche).

Gesuche.

Der bisherige

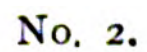
Mechaniker u. Vorlesungsgehilfe

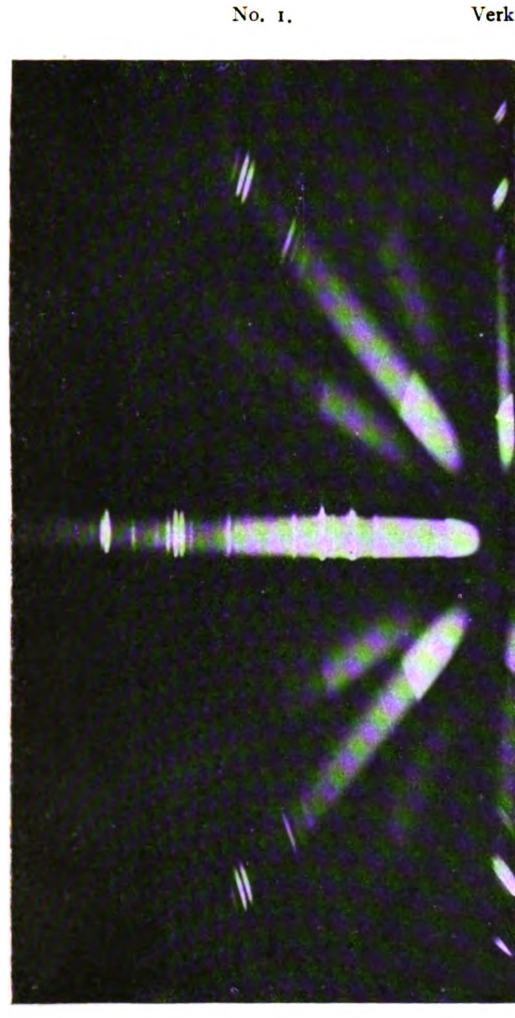
des Straßburger physik. Instituts, Julius Rolf, sucht Stellung. Zu Auskunft gern bereit Prof. **E. Cohn,** z. Z. **Warnemünde,** Wachtlerstr. 9.

Promovierter Physiker,

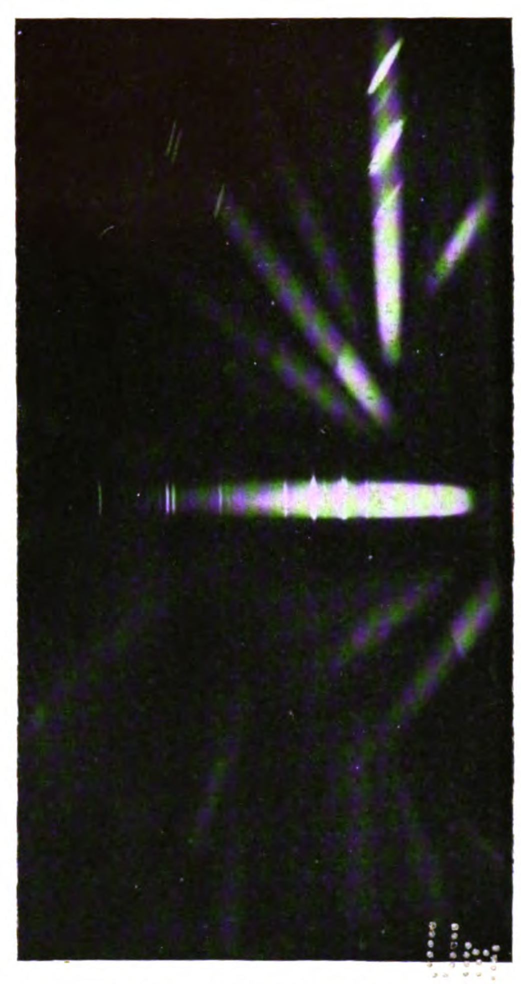
mit Erfahrung in Meßinstrumenten und Patentangelegenheiten **sucht Stellung.** Zuschriften unter **S. H. 541** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstr. 2 erbeten.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

No. 1. Verkleinerung 0,815.  No. 2.



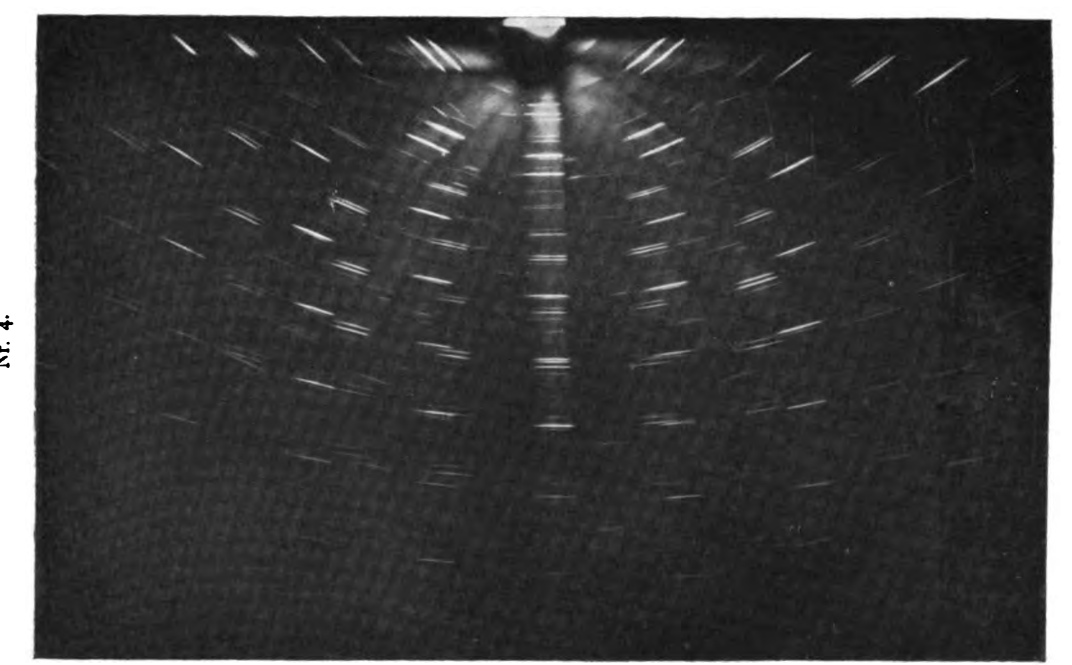
Steinsalz. Stellung der Fig. 3.



Steinsalz. Stellung der Fig. 4.

Platin-*L*-Spektrum. Im Hauptspektrum I Ordnung. vollständig, II. Ordnung ohne $l(\varepsilon)$-Linie. In den vertikalen (011)-Spektren nur I. Ordnung ohne $l(\varepsilon)$-Linie. In den schrägen (012)-Spektren nur I. Ordnung ohne $l(\varepsilon)$ und α-Linien.

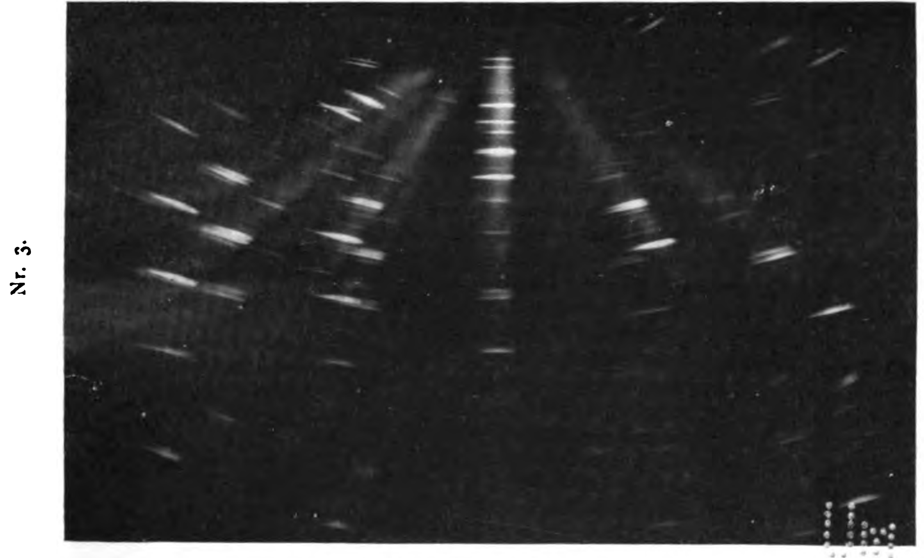
Verkleinerung 0,92.



Nr. 4.

Kaliumlithiumplatincyanür.

Pt-L-Serie in mehreren Ordnungen.



Nr. 3.

Zucker

Verkleinerung 0,89.

H. Seemann, Vollständige Spektraldiagramme von Kristallen.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.



Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und **H. Th. Simon**



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 40 Mark, im Ausland 45 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 60 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.
Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 9. 1. Mai 1919. No. 541. **20. Jahrgang.**

Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechungen.)

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 9. | 1. Mai 1919. Redaktionsschluß für No. 11 am 10. Mai 1919. | 20. Jahrgang.

INHALT:

Dem Andenken der im Kriege gefallenen deutschen Physiker.

Martin Rothenbach †.

Zu den Opfern, die der Krieg aus den Reihen der Wissenschaft gefordert hat, gehört auch das junge, hoffnungsvolle Leben Martin Rothenbachs. Er fiel am 6. Oktober 1914 bei Hebuterne in Frankreich.

Am 9. Januar 1890 zu Berlin geboren, studierte er Chemie in Marburg und Berlin, wo er als mein Schüler sich dem Gebiete der Radioaktivität zuwandte und seine Dissertation „Über die drei langlebigen Zerfallsprodukte in der Actiniumreihe" machte. Er promovierte am 5. Dezember 1912. Ein Auszug aus seiner Dissertation wurde in dieser Zeitschrift **14**, 409 bis 410, 1913, unter dem Titel: „Beitrag zur Kenntnis der langlebigen Actiniumprodukte" von Otto Hahn und Martin Rothenbach veröffentlicht. Sofort nach Ablegung der Prüfungen wurde er Assistent an der radioaktiven Abteilung des neu errichteten Kaiser-Wilhelm-Instituts für Chemie und verblieb in dieser Stellung bis zum 1. Oktober 1913, seinem Eintritt als Einjährig-Freiwilliger in das 3. Garde-Feldartillerie-Regiment. Während der Assistentenzeit entstand die in diesem Heft veröffentlichte Arbeit über die Radioaktivität der Alkalimetalle, speziell des Rubidiums.

Die von Rothenbach ausgeführten Arbeiten erfordern ein besonderes Ausmaß von Zuverlässigkeit, Ausdauer und Geduld; Eigenschaften, die der Verstorbene in hohem Grade besaß und mit gründlichem gediegenem Wissen, scharfer Selbstkritik und großem Fleiß in vielversprechender Weise verband.

Fast noch über seine wissenschaftlichen Anlagen möchte man seine Charakteranlagen stellen. Hinter seiner feinen, bescheidenen, zurückhaltenden Art verbarg er eine Tiefe der Empfindung, Vornehmheit der Gesinnung und starke Überzeugungstreue, wie man sie sehr selten bei so jungen Menschen antrifft.

So bedeutet sein Tod für unsere Abteilung nicht nur den Verlust eines lieben, hoffnungsvollen Mitarbeiters, sondern auch eines sehr hochgeschätzten Menschen. Otto Hahn.

(Eingegangen 1. Februar 1919.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Radioaktivität des Rubidiums.

Von Otto Hahn und Martin Rothenbach †.

Die vorstehende Arbeit weist insofern einige Lücken auf, als einige Tatsachen nur als Resultate gebracht und nicht mit allem Zahlenmaterial belegt werden können. Herrn Rothenbachs Laboratoriumsjournale wurden nach seinem Tode von seinen Angehörigen mit anderen Papieren vernichtet. In meinem Besitz sind nur die Kurven und die endgültigen Zahlen. Da diese einwandfrei sind, so sollen die erhaltenen Resultate hier mitgeteilt werden, besonders da eine Fortführung der Arbeiten jetzt, nachdem in dem Institut schon mit mancherlei anderen aktiven Stoffen gearbeitet worden ist, wegen der Infektionsgefahr auf große Schwierigkeiten stoßen würde.

Bekanntlich sind außer den eigentlich radioaktiven Substanzen, die alle in einer Beziehung zu den Elementen mit höchstem Atomgewicht, dem Uran und Thorium, stehen, noch die Alkalimetalle Kalium und Rubidium als einwandfrei radioaktiv erkannt. Während aber über das Wesen der Radioaktivität der ersteren völlige Klarheit herrscht, ist dies bei den Alkalimetallen noch nicht der Fall. Vor allem ist die Frage noch unbeantwortet: Handelt es sich auch hier um einen Atomzerfall, entstehen also auch hier andere chemische Elemente, oder bleiben die Alkalisalze unverändert als solche bestehen? Durch die Versuche einer ganzen Reihe von Forschern kann man jetzt als sicher annehmen, daß die vom Kalium und Rubidium emittierten Strahlen β-Strahlen vorstellen. α-Strahlen hat man nicht nachzuweisen vermocht, obgleich in Staßfurter Kalisalzen ein im Verhältnis zu Steinsalz ungewöhnlich hoher Heliumgehalt beobachtet wurde.

Die große Zahl der vor allem beim Kalium unternommenen Versuche, nachzuweisen, ob die Aktivität nicht von Spuren beigemengter, stark aktiver Substanzen herrührt, führten alle zu keinem Erfolg. Die Aktivität beliebiger Kaliumsalze war immer proportional dem Gehalt an Kaliumelement [1]).

Die Intensität der Strahlung der Alkalimetalle wird in der Literatur allgemein als äußerst gering angegeben.

1) Über die umfangreiche Literatur siehe den zusammenfassenden Bericht von Elster und Geitel, Jahrb. d. Rad. u. El. 10, 323—339, 1913; Stefan Meyer und E. v. Schweidler, Lehrbuch der Radioaktivität 1916.

In Übereinstimmung mit den Entdeckern der Aktivität der Alkalimetalle, Campbell und Wood, gibt Henriot für die β-Aktivität von Radium- und Rubidiumsulfat an, daß diese etwa $^1/_{1000}$ der β-Aktivität einer gleich großen Uranoxydoberfläche betrage. Dabei sind aber die Strahlen des Kaliums und Rubidiums untereinander beträchtlich verschieden, und zwar sind die Kaliumstrahlen nach Campbell [1]) etwa 16 mal, nach Henriot [2]) etwa 10 mal durchdringender als die des Rubidiums. Dagegen ist die Intensität der Strahlung beim Rubidium nach denselben Verfassern größer als beim Kalium.

Der Zweck der vorliegenden Untersuchungen war der, die Strahlen der Alkalimetalle in ihrer Durchdringlichkeit und Intensität mit denen bekannter radioaktiver Substanzen ähnlicher Durchdringbarkeit zu vergleichen. Außerdem sollte bei dem noch weniger erforschten Rubidium noch einmal der Frage nach einer geringen, stark aktiven Beimengung nähergetreten und auch das Cäsium erneut einer Prüfung auf sehr weiche Strahlen unterzogen werden.

Zur Verfügung standen außer reinem Rubidium-, Kalium- und Cäsiumsulfat von Kahlbaum eine größere Anzahl Rubidiumsalze verschiedenen Alters, die uns Herr Generaldirektor Dr. Feit von den Vereinigten Leopoldshaller Chemischen Werken und die Kaliwerke Aschersleben und die Kgl. Berginspektion Vienenburg leihweise überlassen haben [3]).

Die Messungen geschahen auf elektroskopischem Wege in der üblichen Weise. Nur waren die benutzten Elektroskope — ein α-Strahlen- und ein β-Strahlenelektroskop kamen zur Verwendung — sehr viel größer als die gewöhnlichen. Das α-Elektroskop hatte einen Plattendurchmesser von 25 cm und einen Plattenabstand von 10 cm. Das β-Elektroskop hatte bei kleiner Kapazität einen Ionisierungsraum von 10 cm Höhe und 30 cm Länge und Breite. Es war unten durch eine Aluminiumfolie von 0,01 mm luftdicht abgeschlossen. Während im ersteren Falle also die Strahlen direkt zur Messung gelangten, mußten sie hier erst das $^1/_{100}$ mm Aluminium durchdringen.

1) N. Campbell, Proc. Camb. Phil. Soc. 14, 15—21, 1906; 15, 11—12, 1908.
2) E. Henriot, Le Radium 7, 40—48, 1910.
3) Es sei uns gestattet, Herrn Generaldirektor Dr. Feit und den genannten Werken auch hier unseren herzlichsten Dank auszusprechen.

1. Vergleich verschieden alter Rubidiumsalze untereinander.

Wie eingangs erwähnt, haben alle Arbeiten, beim Kalium Aktivitätsänderungen durch chemische Behandlung zu erzielen, also den Nachweis einer unbekannten radioaktiven Beimengung zu erbringen, zu keinem Resultat geführt[1])[2]). Ebenso negativ verliefen Versuche von Biltz und Markus[3]), die sich Kaliumsulfat aus Kaliummineralien verschiedensten geologischen Alters herstellten und miteinander verglichen. Die Aktivität pro Metalleinheit war immer die gleiche. Dies ist auch insofern auffallend, als bei den gewöhnlichen Radioelementen fast immer durchdringende β-Strahlen von langlebigen Produkten emittiert werden. Die β-Strahlen des Kaliums haben sicher eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 90 Proz. Lichtgeschwindigkeit; man hätte also auch aus diesem Grunde beim Kalium einen kurzlebigen Körper vermuten müssen.

Die Rubidium-β-Strahlen sind zwar weniger durchdringend als die des Kaliums, aber auch hier besteht noch die obige Schwierigkeit.

Systematische Trennungsversuche sind beim Rubidium noch nicht gemacht worden. Da es stärker aktiv ist als Kalium, sich daher verhältnismäßig leicht messen läßt, so konnte man beim Vergleiche verschieden alter Rubidiumsalze vielleicht Unterschiede in der Aktivität erwarten. Eine solche Möglichkeit bestände nicht nur für den Fall, daß bei der Herstellung des Salzes eine direkte Abtrennung einer unbekannten β-strahlenden Substanz stattgefunden hätte, sondern auch dann, wenn etwa die charakteristischen β-Strahlen nicht vom eigentlichen Rubidium, sondern von einem kurzlebigen Isotop des Rubidiums herrührten, das dann über unbekannte Zwischenprodukte sich aus dem primären Rubidium bildete (etwa analog dem Falle Thorium—Radiothorium). Die Zwischenprodukte würden dann bei der Herstellung abgetrennt, und Aktivitätsunterschiede verschieden alter Salze (genau wie bei verschieden alten Thoriumpräparaten) wären die Folge.

Verglichen wurden gleiche Mengen Rubidiumsulfat:

1. neuerer Herstellung, von Kahlbaum bezogen,
2. 11 Jahre alt,
3. 21 Jahre alt.

Außerdem wurden drei verschiedene Proben Rubidiumalaun neueren, aber bekannten Herstellungsdatums miteinander verglichen.

Die Bedingungen der Messungen waren völlig gleich. Die Aktivitäten stimmten innerhalb der Meßgenauigkeit durchaus überein.

Irgendein Hinweis auf eine radioaktive Beimengung im Rubidium oder eine komplexe Zusammensetzung ließ sich also nicht finden. Die Verhältnisse liegen augenscheinlich genau so wie beim Kalium. Die Aktivität auch des Rubidiums ist eine Atomeigenschaft des Elementes.

2. Durchdringbarkeit der β-Strahlen des Rubidiums.

Campbell findet die β-Strahlen des Rubidiums etwa 16mal, Henriot 10mal absorbierbarer als die des Kaliums. Die Durchdringbarkeit der letzteren wird dabei mit der der β-Strahlen des Urans verglichen, wobei zweifellos die durchdringenden Strahlen des Urans X_2 gemeint sind und nicht die nur in dünnen Schichten gut nachweisbaren weichen Uran X_1-Strahlen. In einer späteren Mitteilung vergleicht Henriot[1]) die β-Strahlen des Rubidiums in ihrer Durchdringbarkeit mit denen des Radiums.

Eine andere Angabe findet sich in einer Arbeit von Bergwitz[2]), der die Natur der Rubidiumstrahlen, ähnlich wie es Campbell und Henriot und Vavon für die Kaliumstrahlen machten, durch die Einwirkung eines magnetischen Feldes als β-Strahlung nachweist. Bergwitz vergleicht die Ablenkung der Rubidiumstrahlen mit der der β-Strahlen von Radium E, und schließt daraus auf ihre Geschwindigkeit. Für die Geschwindigkeit der β-Strahlen von Radium E nimmt Bergwitz den H. W. Schmidtschen Wert von $2{,}31 \cdot 10^{10}$ cm/sec[3]) und schließt aus seinen Resultaten für die β-Strahlen des Rubidiums auf die 0,8fache Geschwindigkeit. Nach Bergwitz ergibt sich so für die β-Strahlen des Rubidiums ein Wert von etwa $1{,}85 \cdot 10^{10}$ cm/sec.

Wir haben die Durchdringbarkeit der β-Strahlen des Rubidiums in genau derselben Weise bestimmt, wie dies früher von O. Hahn und L. Meitner[4]) für die β-Strahlen fast aller Radioelemente ausgeführt worden ist, nämlich durch direkte Absorptionsmessungen in bekannten Schichten Aluminium. Um zu prüfen, ob diese Methode unter den oben angegebenen

1) Elster u. Geitel, diese Zeitschr. **11**, 275—280, 1910.
2) Henriot, l. c.
3) Biltz u. Markus, Zeitschr. f. anorg. Chem. **81**, 369—377, 1913.

1) E. Henriot, Le Radium **9**, 224—227, 1912.
2) K. Bergwitz, diese Zeitschr. **14**, 655—658, 1913.
3) H. W. Schmidt, diese Zeitschr. **8**, 361—373, 1907.
4) O. Hahn u. L. Meitner, diese Zeitschr. **9**, 321 bis 333, 1908.

Versuchsbedingungen einwandfreie Resultate gibt, wurden auf dieselbe Weise und in denselben Elektroskopen die bekannten β-Strahlen von UX_2 und die weichen von UX_1 zur Messung gebracht, der gefundene Absorptionskoeffizient dann mit dem früher gefundenen verglichen.

Entsprechend den großen Dimensionen der Elektroskope wurden die zu untersuchenden Präparate in möglichst gleichmäßiger Schicht auf Aluminiumplatten vom Durchmesser 25 cm aufgetragen. Beim Uran genügte entsprechend seiner leicht meßbaren β-Strahlung 0,1—0,3 g Substanz, die nach Anreiben mit Chloroform mittels eines Pinsels auf die Platte aufgetragen wurden.

Die dabei erhaltenen Schichten kann man wohl als fast unendlich dünn betrachten. Es

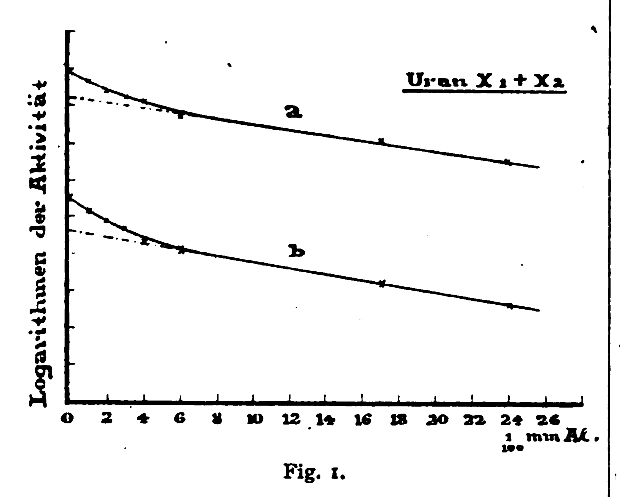


Fig. 1.

gelangten mehrere Präparate zur Messung, die praktisch dasselbe Resultat gaben. Um die α-Strahlen auszuschalten, wurden die Uranmessungen nur in dem durch $^1/_{100}$ mm Aluminium abgeschlossenen β-Elektroskop vorgenommen.

Die Absorptionsmessung geschah in der üblichen Weise derart, daß das Präparat mit zunehmenden Schichtdicken Aluminium bedeckt, und die jeweilige Aktivität gemessen wurde.

Das Resultat war das für eine weiche und eine durchdringende Strahlung zu erwartende: Ein anfänglich steiler Abfall, hervorgerufen durch die weichen UX_1-Strahlen und dann ein exponentialer Abfall entsprechend einer homogenen durchdringenden UX_2-Strahlung.

Figur 1 gibt die Resultate für zwei verschiedene Präparate graphisch wieder.

Als Abszissen sind die Schichtdicken Aluminium in $^1/_{100}$ mm, als Ordinaten die Logarithmen der Aktivität aufgetragen.

Die Aluminiumschicht, in der die durchdringenden UX_2-Strahlen auf die Hälfte herabgedrückt werden, ergibt sich im Mittel zu 0,38 mm. Hahn und Meitner haben in der oben erörterten Mitteilung den Wert 0,434 mm angegeben.

Die Übereinstimmung kann unter Berücksichtigung der wesentlich anderen Meßbedingungen als befriedigend angesehen werden.

Um nun aus den erhaltenen Kurven den

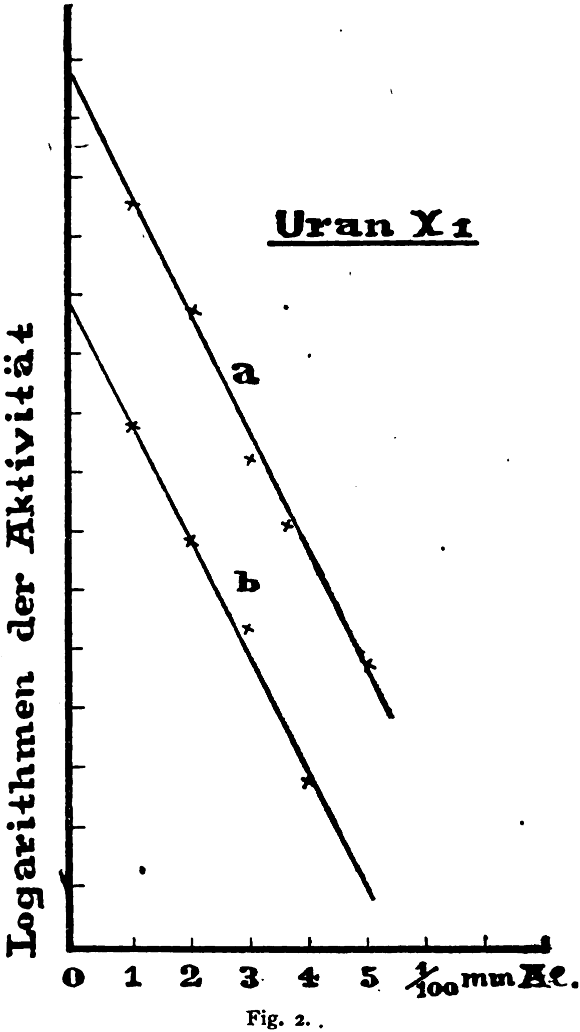


Fig. 2.

Absorptionskoeffizienten für die weichen UX_1-Strahlen zu erhalten, wurde die exponentiale Kurve für das UX_2, wie in der Figur angedeutet, nach 0 extrapoliert und die dabei erhaltenen Werte von den tatsächlich gefundenen abgezogen. Man erhält dann die Absorption der weichen β-Strahlen des UX_1 allein. In der Fig. 2 sind die dabei erhaltenen Absorptionskurven für die obigen Präparate wiedergegeben.

Abszissen und Ordinaten haben dieselbe Bedeutung wie in Fig. 1. Man sieht, daß die Absorption auch der weichen *U*-β-Strahlen nach einem Exponentialgesetz erfolgt. Die Hälfte der Strahlen wird in 0,015 mm Aluminium absorbiert. Dies entspricht einem Absorptionskoeffizienten von 463 cm^{-1}. H. W. Schmidt[1]) findet unter etwas anderen Versuchsbedingungen den Wert 510 cm^{-1}. Fajans und Göhring[2]) geben in einer Arbeit, in der sie den Nachweis erbringen, daß die durchdringenden β-Strahlen von dem von ihnen aufgefundenen UX_2, die langsamen von UX_1 herrühren, als Wert für den Absorptionskoeffizienten = 500 an. Unser Wert stimmt also mit den früheren innerhalb 8—10 Proz. überein.

Für ein Präparat von 0,28 g Uranoxyd, also 0,56 mg/qcm, erhielten wir eine Beteiligung der weichen Strahlen an der Gesamtstrahlung von 21,4 Proz. Für eine noch dünnere Schicht war das Verhältnis 24 Proz. Es scheint also doch, daß schon in einer Schicht von $^1/_2$ mg Substanz pro qcm eine gewisse Absorption der weichen Strahlen stattfindet, besonders da die Schicht durch das Aufstreichen der Masse mittels eines Pinsels nicht ganz gleichmäßig wird.

Der Wert von 23 Proz. Beteiligung der weichen UX_1-Strahlen an der Gesamtstrahlung des *UX* dürfte wohl unter unseren Versuchsbedingungen der richtige sein.

Zur Untersuchung der β-Strahlen des Rubidiums wurde reines Rubidiumsulfat in fein pulverisierter Form durch ein äußerst feines Metallsieb auf Aluminiumplatten von 25 cm Durchmesser aufgestäubt. Nach einiger Übung gelingt es, auf diese Weise sehr gleichmäßige Schichten des Salzes zu erhalten, und eine ganze Anzahl derartiger Rubidiumsulfatplatten wurde hergestellt.

Die Absorptionskurven wurden nun mit verschiedenen Platten durchgeführt. Als absorbierende Schichten dienten wieder Aluminiumfolien von $^1/_{100}$ mm Dicke, die zwischen zwei flachen Ringen eingeklemmt glatt über der Substanz angebracht wurden. In der Fig. 3 sind die erhaltenen Resultate graphisch dargestellt.

Als Abszissen sind wieder die Schichtdicken Aluminium in $^1/_{100}$ mm, als Ordinaten die Logarithmen der Aktivität aufgetragen. Kurven *a* und *c* wurden mit 12,6 g, Kurve *b* mit 10,8 g aufgenommen. Die Messungen für *a* und *b* geschahen im geschlossenen Elektroskop, die für *c* im offenen. Die Kurven stellen gerade Linien dar und beweisen, daß unter den eingehaltenen Bedingungen die Absorption der Rubidium-β-Strahlen nach einem Exponentialgesetz erfolgt. Man kann daraus den Schluß ziehen, daß beim Rubidium β-Strahlen sehr verschiedener Geschwindigkeit nicht vorkommen, sondern daß es sich wohl um eine im großen und ganzen homogene Strahlung handeln wird.

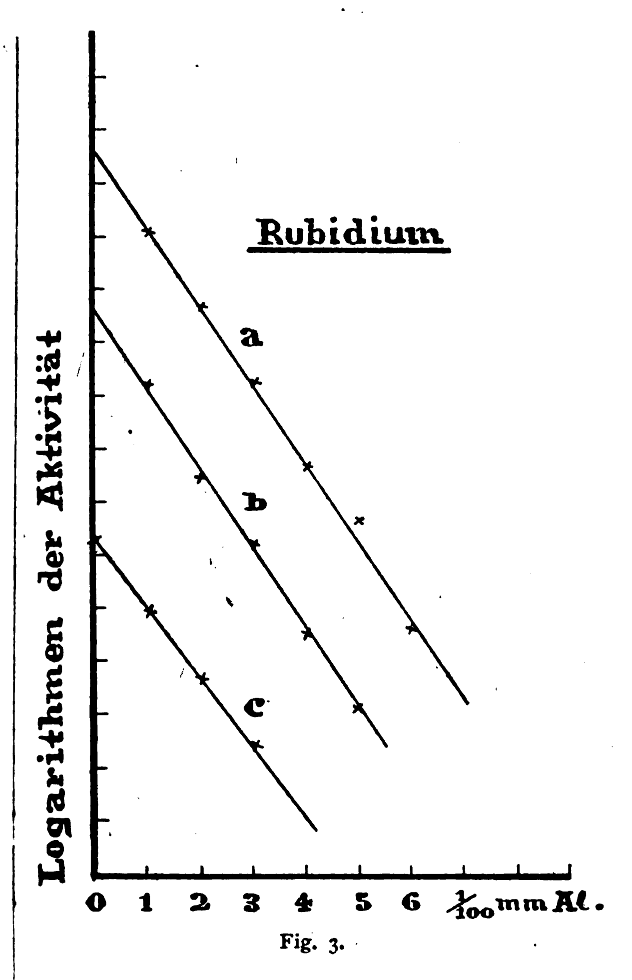


Fig. 3.

Aus den Kurven ergibt sich für die Halbwertschichtdicke *d*

für Kurve a 0,020 mm Aluminium
„ „ b 0,020 „ „
„ „ c 0,0225 „ „

Hieraus folgen für den Absorptionskoeffizienten in Aluminium die Werte 347, 347, 308 cm^{-1}. Es wurden auch Kurven mit dünneren Schichten aufzunehmen versucht; für diese ließen sich aber bei der Schwachheit der Intensitäten nur 2, höchstens 3 Punkte messen. Der allgemeine Verlauf schien auch hier derselbe zu sein.

Wie schon erwähnt, wurde die Kurve *c* in dem α-Elektroskop erhalten, die anderen in dem geschlossenen. Da die Absorption der β-Strah-

1) H. W. Schmidt, diese Zeitschr. 10, 6—16, 1909.
2) Fajans u. Göhring, diese Zeitschr. 14, 877 bis 884, 1913.

len des Urans auch im geschlossenen Elektroskop vorgenommen wurde, so sind die Werte aus den Kurven *a* und *b* direkt mit denen für das UX_1 zu vergleichen.

Die β-Strahlen des Rubidiums sind also etwas durchdringender als die des UX_1.

In einer früheren Arbeit von Hahn und Meitner[1]) wurde der Nachweis erbracht, daß auch das eigentliche Radium außer seinen bekannten α-Strahlen leicht absorbierbare β-Strahlen aussendet. Die Verfasser fanden dafür den Wert 312 cm^{-1}, als Halbierungsdicke 0,0222 mm Aluminium. Man sieht hieraus, daß die β-Strahlen des Rubidiums in ihrer Durchdringbarkeit zwischen denen des UX_1 und denen des Radiums liegen, und zwar sind sie denen des Radiums noch näher als denen des UX_1.

Zur Übersicht seien hier die entsprechenden Werte für die drei Elemente zusammengestellt:

Element	Absorptionskoeffizient	Halbierungsdicke in mm
Radium	312 cm^{-1}	0,0222
Rubidium	347 „	0,020
Uran X_1	463 „	0,015

Die von v. Baeyer, Hahn und Meitner photographisch aufgenommenen Spektren der β-Strahlen von Radium[2]) und UX[3]) ergaben für Radium die Werte 65 und 52 Proz. Lichtgeschwindigkeit, für Uran außer einem schwachen Band von etwa 59 Proz. Lichtgeschwindigkeit zwei scharfe Linien von 52 Proz. (schwach) und 48 Proz. (stark). Der Schwerpunkt wird beim Radium, das nicht in unendlich dünner Schicht untersucht werden konnte, bei etwa 60 Proz. liegen, beim UX bei 52 Proz.

Die Geschwindigkeit der β-Strahlen des Rubidiums dürfte also etwa 58 bis 60 Proz. von der des Lichtes betragen. Der von Bergwitz auf anderem Wege berechnete Wert von $1,85 \cdot 10^{10}$ cm = 61,7 Proz. Lichtgeschwindigkeit stimmt in Anbetracht der verschiedenen Methoden sehr gut damit überein.

3. Gesamtaktivität der β-Strahlen des Rubidiums, verglichen mit Uran.

Über die Intensität der Rubidium- und Kaliumstrahlen sind die Angaben wenig definiert. Übereinstimmend wird betont, daß die Strahlung äußerst gering ist, etwa $^1/_{1000}$ der β-Strahlung des Urans, die des Rubidiums aber größer als die des Kaliums.

Meyer und v. Schweidler[1]) verglichen die Henriotschen Zahlen über den Sättigungsstrom definierter Schichten Rubidiumsulfat und Kaliumsulfat mit denen entsprechender Schichten Uranoxyd und folgern, daß die Gesamtaktivität gleicher Gewichtsmengen der Alkalimetalle und Uran sich der Größenordnung nach wie 1 : 1000 verhalten. In letzterem Falle scheinen aber auch die α-Strahlen in dicker Schicht in den Vergleich mit einbezogen zu sein.

In keinem Falle wurden die β-Strahlen der Alkalimetalle mit analogen β-Strahlen einheitlicher anderer Radioelemente in Beziehung gebracht. Wir haben dies durchgeführt, indem wir die β-Strahlen des Rubidiums mit denen des UX_1 unter möglichst gleichen Bedingungungen verglichen. Wie oben angeführt, sind diese beiden β-Strahlentypen recht ähnlich.

Ein Vergleich der Rubidiumstrahlen mit denen der noch ähnlicheren β-Strahlen des Radiums scheitert neben anderen Schwierigkeiten an der Unmöglichkeit, Radium über eine für diese Messungen notwendige Zeit frei von allen Zerfallsprodukten zu erhalten.

Um wirklich einwandfreie Messungen sowohl für Rubidium als UX zu ermöglichen, müßten beide Substanzen in derart dünner Schicht zur Untersuchung gelangen, daß in der Schicht selbst eine Absorption von Strahlen nicht stattfindet. Dies läßt sich für das Rubidium nicht ermöglichen. Würde man dagegen dicke Schichten miteinander vergleichen, dann würden beim UX die durchdringenden Strahlen des UX_2 derart überwiegen, daß eine Extrapolation auf die weiche Strahlung des UX_1 sehr ungenau, wenn nicht unmöglich wäre.

Wir verwendeten die schon oben erwähnten Platten mit dünnen Schichten Uranoxyd, mit denen man die reine UX_1-Strahlung sehr leicht in ihrer Intensität bestimmen kann. Verglichen wurden damit erst Platten mit dicken Schichten Rubidiumsulfat; dann wurde versucht, auch auf dünnere Schichten herunterzugehen.

Die Messungen wurden im geschlossenen Elektroskop ausgeführt, um die α-Strahlen des Urans auszuschließen. Zu den erhaltenen Werten konnte dann leicht der in dem $^1/_{100}$ mm *Al* absorbierte Betrag hinzugezählt werden; da ja, wie wir oben gezeigt haben, sowohl die Strahlung des Rubidiums wie auch die des UX_1 und UX_2 innerhalb der Versuchsfehler in Aluminium nach einem Exponentialgesetz absorbiert werden.

1) O. Hahn u. L. Meitner, diese Zeitschr. 10, 741 bis 745, 1909.
2) v. Baeyer, Hahn u. Meitner, diese Zeitschr. 12, 1099—1101, 1911.
3) v. Baeyer, Hahn u. Meitner, diese Zeitschr. 15, 649—650, 1914.

1) Meyer u. v. Schweidler, Radioaktivität, S. 428.

Bei Verwendung einer dicken Schicht von 12,6 g Rubidiumsulfat pro 500 cm² Oberfläche ergab sich pro Gramm für die Aktivität des Rubidiumsalzes verglichen mit der Gesamt-β-Aktivität 1 g Urans das Verhältnis 1:184, wobei die Absorption in dem Aluminium bereits berücksichtigt ist. Der Wert 184 ist das Mittel aus mehreren Vergleichen mit verschiedenen Uranplatten. Die Werte stimmten auf etwa 10 Proz. überein. Nun enthält Uranoxyd (U_3O_8) 85 Proz. Uran und Rubidiumsulfat (Rb_2SO_4) 64 Proz. Rubidium. Auf Metall umgerechnet erhält man also das Verhältnis der Strahlungsintensitäten 1:138,7.

Wie wir weiter oben gesehen haben, beteiligt sich die weiche UX_1-Strahlung an der Gesamt-β-Strahlung des Urans bei unseren Meßbedingungen zu rund 23 Proz. Hieraus ergibt sich das Verhältnis von Rubidium zu UX_1 zu 1:32.

Bei der Weichheit der Rubidiumstrahlen wurde aber in der verwendeten Rubidiumplatte natürlich ein großer Prozentsatz der Strahlen in der Schicht selbst absorbiert, während dies für die fünfzigmal dünnere Uranoxydschicht kaum der Fall ist.

Deshalb wurde auch der Vergleich auf eine dünne Rubidiumplatte mit einem Gesamtgewicht von 1400 mg = 2,8 mg pro cm² ausgedehnt, obgleich die Messungen hier auch für dasselbe Präparat zu verschiedenen Zeiten ziemlich schwankende Werte zeigten.

Aus den gefundenen Zahlen ergab sich auf dieselbe Weise statt des oben angegebenen Wertes 1:32 der Wert 1:16. Bei unendlich dünner Schicht würden sich diese Zahlen sicher noch etwas zugunsten des Rubidiums verschieben. Es wurde daher versucht, auf die Schichtdicke Null zu extrapolieren, und zwar durch Messung einer ganzen Anzahl von Rubidiumplatten, beginnend mit den 12,6 g also 25 mg pro cm² — dann fallend über 10,8 g, 6,0 g, 4,1 g, 2,4 g und 1,9 g bis zu den schon erwähnten 1,4 g. Stellt man die gefundenen Aktivitäten graphisch mit steigender Schichtdicke dar, so erhält man den ungefähren Verlauf einer Sättigungskurve; von 12 g ab ist die Aktivität schon ungefähr konstant, eine Zunahme der Schicht gibt keine wesentliche Erhöhung der Ionisation mehr. Die den dünneren Schichten entsprechenden Punkte stimmten aber bei der sehr geringen gemessenen Intensität nicht so überein, daß eine Extrapolation auf die Schicht Null möglich gewesen ist.

Es wird deshalb für das Verhältnis der Aktivitäten der Wert 1:15 angenommen; es dürfte auf etwa 20 Proz. richtig sein.

Man sieht, daß bei einem Vergleich der β-Strahlen des Rubidiums mit analogen Strahlen anderer Radioelemente das Rubidium durchaus nicht so schwach aktiv ist, wie man überall in der Literatur angegeben findet.

Könnte man statt des Urans Thorium zum Vergleich heranziehen, so würde die Annäherung an die gewöhnlichen radioaktiven Elemente noch in die Augen springender sein. Denn die β-Aktivität von Thorium + Zerfallsprodukten ist geringer als die gleicher Gewichtsmengen Uran, obgleich mehr β-Strahlenprodukte in Thorium + Zerfallsprodukten enthalten sind als in $UX_1 + X_2$. Auch aus der fast dreimal höheren Lebensdauer des Thoriums gegenüber dem Uran läßt sich auf die geringere Aktivität des Thoriums schließen.

Die Schätzung wird daher eher zu ungünstig als zu günstig ausfallen, wenn wir folgern, daß das Rubidium höchstens zehnmal schwächer aktiv ist als eine gleiche Gewichtsmenge Thorium, verglichen mit β-Strahlen ähnlicher Geschwindigkeit, etwa denen des Radiothors (von 51 und 47 Proz. Lichtgeschwindigkeit[1])).

Eine gleiche Untersuchung wie für Rubidium war ursprünglich auch für das Kalium geplant. Sie wurde aber nicht zum Abschluß gebracht, und die Zahlen sind leider nicht erhalten. Wir bestätigten die früheren Angaben der sehr viel durchdringenderen Strahlen und der geringeren Aktivität des Kaliums. Bei unseren Versuchsbedingungen und unter Verwendung ziemlich dünner Schichten war Kalium um ein Mehrfaches schwächer als das Rubidium. Genaue Zahlen mit nicht zu dicken Schichten waren bei unserer Meßmethode kaum zu erhalten. Die Henriotsche Angabe des Verhältnisses von Rubidium zu Kalium wie 2:1 verschiebt sich bei dünneren Schichten sicher noch zuungunsten des Kaliums; und in der Tat findet Campbell[2]) für das Verhältnis den Wert mindestens 7:1.

Auch mit Cäsium wurden einige orientierende Versuche unternommen, eine Aktivität nicht gefunden.

4. Zur Frage nach dem Atomzerfall der Alkalimetalle.

Die Frage nach dem Wesen der Aktivität der Alkalimetalle wird durch die Erkenntnis, daß die Rubidiumstrahlung nur etwa 10mal schwächer ist, als die analoge β-Strahlung von Thor und Uran, in verstärktem Maße in den Vordergrund des Interesses gerückt. Die Strah-

1) v. Baeyer, Hahn u. Meitner, diese Zeitschr. **16**, 6—7, 1915.

2) N. Campbell, Proc. Camb. Phil. Soc. **14**, 11 bis 12, 1908.

len verhalten sich genau wie die üblichen β-Strahlen radioaktiver Substanzen; die etwas geringere Intensität kommt gegenüber den Unterschieden in der Intensität der anderen Radioelemente gar nicht in Betracht, da diese entsprechend dem Bereiche ihrer Lebensdauer das ungeheure Intensitätsintervall von mehr als $1:10^{27}$ umschließen.

Das Gesetz der radioaktiven Vorgänge und Umwandlungen für alle diese Substanzen ist klar und durch die bekannte Verschiebungsregel festgelegt.

Sollte dies für die Alkalimetalle nicht auch gelten?

Wenn aber die Gesetze der radioaktiven Umwandlungen auch für die Alkalimetalle Geltung haben, dann muß aus dem β-strahlenden Kalium das Calcium, aus dem Rubidium das Strontium entstehen, genau so wie sich etwa das Thalliumisotop *ThD* durch β-Strahlenemission in Blei verwandelt.

Diese Frage wurde schon von H. Lachs[1]) und auch von Meyer und v. Schweidler in ihrem Lehrbuch diskutiert.

Meyer und v. Schweidler geben auch den Weg an, wie man diese grundsätzlich wichtige Frage einer experimentellen Entscheidung zuführen könnte, nämlich durch Vergleich des Atomgewichts von Calcium aus geologisch sehr alten Kaliumlagern mit dem von Calcium gewöhnlichen Vorkommens.

Im ersten Augenblick erscheint die Entscheidung dieser Frage durchaus möglich. Es gibt in der Natur Kaliummineralien hohen Alters mit verhältnismäßig hohem Kaliumgehalt, die nach ihrer chemischen Formel frei von Calcium sein müßten. Es sind dies vor allem die reinen, schön kristallisierenden Kalifeldspate $KAlSi_3O_8$ und auch viele Kaliglimmer. Erstere, z. B. der Adular vom St. Gotthardt oder der weitverbreitete Mikroklin wurden in schönen Exemplaren häufig gefunden und wären wohl das beste Ausgangsmaterial für eine derartige Untersuchung.

Überprüft man die in den Handbüchern der Mineralogie in zahllosen Beispielen angegebenen Analysenresultate, so findet man neben einem Maximalgehalt von 14 Proz. Kaliumelement in der allergrößten Mehrzahl der Fälle auch Calcium angeführt, allerdings schwankend zwischen allen Werten von 0 und mehreren Prozent. In vereinzelten Fällen ist Calcium analytisch nicht nachgewiesen worden. Doch würden wohl sehr geringe Mengen bei einer Untersuchung, die den Nachweis des Calciums nicht als Selbstzweck hat, übersehen worden sein können. Zur Prüfung der obigen Frage wäre es also notwendig, solche Kalifeldspate, deren Calciumgehalt sich bei genauer Analyse als gering erweist auf Calcium zu verarbeiten und dessen Atomgewicht zu bestimmen (siehe weiter unten).

Will man zu einer ungefähren Schätzung gelangen, welche Mengen Calcium sich aus dem Kalium in den Feldspaten gebildet haben, so bietet dazu die obige Bestimmung der Strahlungsstärke des Rubidiums im Verhältnis zu Uran oder Thor einen ungefähren Anhalt. Das Rubidium ist etwa 15 mal schwächer aktiv als das Uran, seine Lebensdauer daher 15 mal so groß. Die Halbwertszeit des Urans ist $5 \cdot 10^9$ Jahre, die des Rubidiums unter der obigen Voraussetzung $7{,}5 \cdot 10^{10}$ Jahre oder rund 10^{11} Jahre. Das Alter primärer Feldspate kann man der Größenordnung nach mit rund 10^9 Jahren annehmen. In dieser Zeit hätte sich also von einer gegebenen Menge Rubidium 0,5 Proz. in Strontium umgewandelt. Leider gibt es keine entsprechenden hochwertigen Rubidiummineralien, die eine Prüfung auf Strontium ermöglichten. Man muß deshalb den unsicheren Schluß vom Rubidium auf das schwächere Kalium machen. Nimmt man dieses als etwa dreimal schwächer aktiv als das Rubidium an, so ist seine Halbwertszeit dreimal so groß; in 10^9 Jahren werden sich also nur 0,17 Proz. in Calcium umgewandelt haben.

Bei einem Kaliumgehalt von 14 Proz. im reinen Kalifeldspat würde also unter obigen Voraussetzungen pro Gewichtseinheit Feldspat 0,024 Proz. in Calcium zerfallen sein, pro Gramm also $^1/_4$ mg.

Kalium hat das Atomgewicht 39,10. Das daraus entstehende Calcium hat dasselbe Atomgewicht, das gewöhnliche Calcium hat 40,07. Die Unterschiede sind so beträchtlich, daß man vielleicht schon bei einem nicht zu ungünstigen Gemisch von umgewandeltem und gewöhnlichem Calcium einen Atomgewichtsunterschied feststellen könnte. Angenommen, man findet einen kristallisierten Feldspat von 0,1 Proz. Calciumgehalt. Nach den obigen Voraussetzungen sind von diesen 0,1 Proz. 0,024 Proz. durch Umwandlung aus dem Kalium entstanden; der Rest von 0,076 Proz. ist zufällige Beimengung. Die 0,024 Proz. Calcium hätten ein Atomgewicht von 39,10, die 0,076 eines von 40,07. Das mittlere Atomgewicht wäre also:

$$x = 0{,}24 \cdot 39{,}1 + 0{,}76 \cdot 40{,}07$$
$$x = 9{,}38 + 30{,}45$$
$$x = 39{,}83.$$

Diese Berechnung wurde unter der Voraussetzung gemacht, daß Kalium nur dreimal schwächer aktiv ist, als das Rubidium.

1) H. Lachs, Chem. Zentralbl. 1, 872, 1916.

Campbell findet dagegen, wie oben erwähnt, für die Aktivität des Kaliums nur $^1/_7$ der des Rubidiums, wenn die Strahlungsstärke auf dünne Schichten bezogen ist.

Ist nun aber die Lebensdauer des Kaliums 7 mal so groß, als die des Rubidiums, und nicht nur dreimal, dann ändern sich obige Zahlen noch beträchtlich. Aus 1 g altem Feldspat kann man dann nur 0,1 mg umgewandeltes Calcium erwarten. Für das Atomgewicht eines Calciumgemisches aus einem 0,1 Proz. Calcium enthaltenden Feldspat ergäbe sich dann statt 39,83 der theoretische Wert 39,96. Das ist aber schon so nahe am normalen Wert für Calcium, daß eine Entscheidung, ob tatsächlich umgewandeltes Calcium vorhanden ist, außerordentlich schwer wäre.

Bei der langsamen Umwandlungsgeschwindigkeit des Kaliums bedürfte es also eines Feldspats (oder anderen alten Kaliumminerals) mit äußerst geringem Calciumgehalt, damit das zu erwartende Atomgewicht von dem des gewöhnlichen Calciums genügend stark unterschieden ist. Gibt es aber wirklich Mineralien, deren Calciumgehalt ganz oder zum erheblichen Teile durch Umwandlung des Kaliums verursacht ist, dann ist die Abscheidung dieser Spuren von Calcium aus den erheblichen Mineralmengen eine Arbeit, die analytisch einwandfrei kaum zu bewältigen sein wird. Es sei hier nur erwähnt der mühselige Aufschluß des Mineralpulvers mit völlig calciumfreien Reagenzien und die Trennung der großen Mengen Aluminium von den minimalen Spuren Calcium.

Beim Rubidium mit seiner größeren Umwandlungsgeschwindigkeit werden die Schwierigkeiten entsprechend geringer. Hier scheitert die Möglichkeit eines Nachweises wie schon erwähnt daran, daß es kein geeignetes Analysenmaterial gibt. Rubidium ist zwar in der Natur ziemlich weit verbreitet, findet sich aber immer nur in geringer Menge. Ein eigentliches Rubidiummineral gibt es nicht.

Man sieht somit, daß der experimentelle Nachweis der Umwandlung von Kalium und Rubidium in die entsprechenden Erdalkalimetalle auf diesem Wege doch wohl kaum zu erbringen ist. Es besteht aber durchaus kein zwingender Grund gegen die Ansicht, daß diese Elemente tatsächlich entstehen, daß also die Radioaktivität des Kaliums und Rubidiums eine Eigenschaft des Atomkerns ist, ebenso wie bei den gewöhnlichen radioaktiven Elementen.

Man richtet auch in diesem Zusammenhang unwillkürlich den Blick auf das höchste Homologe des Kaliums, nämlich das Cäsium, bei dem sich bisher eine Strahlung nicht hat nachweisen lassen. Wenn eine solche trotzdem vorhanden sein sollte, dann würde diese aus Analogiegründen ja noch viel weniger durchdringend sein als die des Rubidiums, könnte sich also bisher aus diesem Grunde dem Nachweis entzogen haben. Die Umwandlungsgeschwindigkeit wäre wieder aus Analogiegründen wohl größer als die des Rubidiums; es müßten sich also unter obigen Voraussetzungen aus einem alten Cäsiummineral nicht unbeträchtliche Mengen Barium gebildet haben mit einem Atomgewicht von 132,81 gegenüber dem des gewöhnlichen Bariums von 137,4. Nun gibt es ein primäres Cäsiummineral von über 30 Proz. Cäsiummetall, es ist das allerdings selten vorkommende Mineral Pollux. Die Verhältnisse liegen hier derart günstig, daß es trotz der etwas gewagt erscheinenden Hypothese von der Aktivität des Cäsiums einen Reiz bietet, dieses Mineral zu untersuchen. Die Aufgabe wäre dann die, in dem Pollux Barium nachzuweisen, dieses aus einer genügend großen Menge Ausgangsmaterial herzustellen und eine Atomgewichtsbestimmung damit zu versuchen. Bei den großen Unterschieden 132,81 und 137,4 würden geringe Beimengungen gewöhnlichen Bariums wenig schaden, besonders weil nach der Voraussetzung ja hier relativ mehr umgewandeltes Barium als aus dem Feldspat Calcium vorhanden sein müßte. Gelänge die Abscheidung von Barium und ergäbe dessen Atomgewichtsbestimmung einen nachweislich niedrigeren Wert als den normalen, so wäre damit einerseits die Radioaktivität des Cäsiums bewiesen, andererseits wäre dadurch die auf direktem Wege wohl kaum zu beweisende Atomumwandlung auch des Rubidiums und Kaliums in allerhöchstem Maße wahrscheinlich gemacht.

Es kommt darauf an, ob das seltene Mineral Pollux in genügender Reinheit und Menge beschafft werden kann, um die obigen vorerst rein hypothetischen Vermutungen einer experimentellen Prüfung zugänglich zu machen. Es ist beabsichtigt, in Gemeinschaft mit Herrn Privatdozenten Dr. E. Tiede dieser Frage näherzutreten.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Es wurden keine Anhaltspunkte für die Existenz eines kurzlebigen aktiven Rubidiumisotops oder einer abtrennbaren Beimengung im Rubidium gefunden.
2. Die β-Strahlen des Rubidiums wurden in ihrer Durchdringbarkeit mit denen bekannter Radioelemente verglichen. Der Absorptionskoeffizient im Aluminium er-

gab sich zu 347 cm^{-1}. Die Halbierungsdicke d für Aluminium beträgt

für Rubidium . 0,020 mm;
im Vergleich dazu
für Radium 0,022 „ ;
„ UX_1 0,015 „ .

Die Rubidium-β-Strahlen sind also etwas durchdringender als die von UX_1 und ein wenig langsamer als die des eigentlichen Radiums.

3. Die Aktivität gleicher Mengen Rubidiummetall zu Uranmetall verhält sich ungefähr wie 1 : 15, wenn beim Uran die analogen Strahlen des UX_1 zum Vergleich herangezogen werden. Entsprechend wird für die Aktivität von Rubidium zu Thorium ein Verhältnis von weniger als 1 : 10 gefolgert.
4. Die Halbwertszeit des Rubidiums ergibt sich nach 3) zu 10^{11} Jahren. Je nach den Angaben der Literatur wird für die Lebensdauer des Kaliums daraus ein 3—7mal so hoher Wert abgeleitet. Unter diesen Voraussetzungen wird die Frage nach der experimentellen Entscheidung der Umwandlung von Rubidium in Strontium, Kalium in Calcium (und Cäsium in Barium) diskutiert.

Berlin-Dahlem, Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie.

(Eingegangen 1. Februar 1919.)

Läßt sich die Clausius-Clapeyronsche Gleichung auf die Glühelektronen anwenden?

Von M. v. Laue.

In einer kurzen Veröffentlichung in dieser Zeitschrift will Herr Schottky[1]) die Berechtigung der Clausius-Clapeyronschen Gleichung in Anwendung auf das Gleichgewicht zwischen einer Glühelektrode und der sie umgebenden Elektronenschar dartun, indem er aus ihr dasselbe Gleichgewichtsgesetz ableitet, das wir im Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik dafür angegeben haben. Nun ist diese Rechnung vollkommen in Ordnung, sofern man den Elektronen einen Gasdruck sowie eine Zustandsgleichung der gewöhnlichen Art zuschreibt und durch sie Massendichte, Temperatur und Druck miteinander verknüpft. Daß diese Verknüpfung gerade die Form hat, wie für ein ideales Gas, ist hier unwesentlich. An eine solche Verknüpfung aber ist die Clausius-Clapeyronsche Gleichung ihrer Ableitung nach notwendig gebunden; bezweifelt man das Dasein eines Dampfdruckes, so wird sie ja überhaupt sinnlos. Daran vermögen die Ausführungen Herrn Schottkys nichts zu ändern; muß man doch auch, wenn man in Umkehrung seiner Rechnung von dem Gleichgewichtsgesetz zur Clausius-Clapeyronschen Gleichung zurückgelangen will, [nämlich beim Übergang von seiner Gleichung (3) zu Gleichung (2')] die Zustandsgleichung $p = RT\varrho$ voraussetzen. Unsere Behauptung, daß die Kraftwirkungen der Elektronen sich nicht ohne weiteres aus einem Gasdruck herleiten lassen, und daß sie keine Zustandsgleichung dieser Art besitzen, bleibt somit durch seine Betrachtungen vollständig unberührt.

Trotzdem hat Herr Schottky bis zu einem gewissen Grade recht. Wie wir nämlich in einer am 30. Dezember 1918 den Annalen der Physik eingereichten Untersuchung zeigten, gibt es Bedingungen, unter denen man den Elektronen eine Zustandsgleichung, und zwar gerade die der idealen Gase, zuschreiben kann; freilich sind diese Bedingungen sehr beschränkend und, sofern die Elektronenschar mit einer Glühelektrode im Gleichgewicht sein soll, nur bei verhältnismäßig niedrigen Temperaturen überhaupt erfüllbar. Wir betonen selbst bei dieser Gelegenheit, daß dann auch die Clausius-Clapeyronsche Gleichung gilt und zum richtigen Gleichgewichtsgesetz führt. Der Unterschied gegen Herrn Schottkys Ausführungen liegt aber darin, daß wir zur Ableitung dieser Bedingung auf die Differentialgleichung

$$\Delta\varphi = -\varrho_0 e^{-\frac{\varepsilon\varphi}{kT}}$$

zurückgehen, welche das innere Gleichgewicht der Elektronenscharen beherrscht. Einen anderen Weg, die Thermodynamik der Glühelektronen befriedigend zu begründen, als über diese Gleichung, gibt es, soviel wir sehen, nicht. Da wir auch in den früheren Veröffentlichungen zunächst diese Differentialgleichung integriert haben, enthält die erwähnte, bei den Annalen im Druck befindliche Untersuchung ihnen gegenüber trotz des veränderten Gedankenganges nichts grundsätzlich Neues oder gar Widersprechendes.

Wir möchten aber noch auf ein Mißverständnis bei Herrn Schottky hinweisen; er schreibt im Hinblick auf unsere früheren Untersuchungen: „Gleichung (1)" — das ist das Gleichgewichtsgesetz — „gilt nur unter der Annahme, daß die elektrische Feldstärke an der Grenzfläche des Metalls einen bestimmten Wert hat; ferner muß angenommen werden, daß die so-

1) W. Schottky, diese Zeitschr. **20**, 49, 1919.

genannte elekrische Bildkraft das Feld und die kinetische Energie der Elektronen nicht abändert. Wie unter den allgemeineren Annahmen die Dampfdruckformel lauten würde, bleibt offen."

Wir haben bei unseren Untersuchungen von vornherein betont[1]): „An jeder Glühelektrode ist die Dichte der Elektronen durch die Temperatur und gewisse Materialkonstanten vollständig bestimmt." Wenn diese, aus dem Boltzmannschen Verteilungssatz leicht zu begründende Behauptung zutrifft, so ist der Weg, den man zur Ableitung des Gleichgewichtsgesetzes einschlägt, ohne Einfluß auf das Ergebnis, sofern er nur richtig ist. Daß wir also früher die Elektronen in dem Zustand einer von außen unbeeinflußten, die Glühelektrode bedeckenden „Kapillarhaut" betrachtet haben, tut der Allgemeingültigkeit des Ergebnisses keinen Abbruch. Dazu stimmt, daß wir in der im Druck befindlichen Veröffentlichung dasselbe Gleichgewichtsgesetz bei durchaus anderen Zuständen der Elektronenschar wiederfinden.

Und was nun schließlich die Bildkraft anlangt, so soll eine demnächst erscheinende Notiz dartun[2]), daß diese bei unseren Untersuchungen überhaupt keine Rolle spielt, so daß alle die Einschränkungen, die wir anfangs ihretwegen glaubten vornehmen zu müssen, fortfallen.

Wir sind also vielleicht etwas, aber nur sehr wenig, zu weit gegangen, als wir die Clausius-Clapeyronsche Gleichung von der Thermodynamik der Glühelektronen ganz ausschließen wollten. Schuld daran war der aus der Literatur übernommene Irrtum hinsichtlich der Bildkraft[3]). Daß wir aber im Gegensatz zu allen früheren thermodynamischen Arbeiten über Glühelektronenscharen zunächst deren inneren Zustand und ihre Kraftwirkungen auf Grund der Differentialgleichung untersucht haben, statt einen Dampfdruck und eine Zustandsgleichung einfach vorauszusetzen, möchten wir doch als einen gewissen Fortschritt in der begrifflichen Klärung dieses Gebietes betrachten.

1) M. v. Laue, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik 15, 205, 1918, Zeile 13 von unten auf der ersten Seite.
2) M. v. Laue, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 15, 301, 1918.
3) Vgl. darüber die im Druck befindliche Annalenarbeit.

Frankfurt a. M., Institut für theoretische Physik, Februar 1919.

(Eingegangen 9. Februar 1919.)

Akustische Pilotversuche.

Von Heinrich Löwy und Emil Weyhing.

Zur Erprobung des akustischen Pilotverfahrens[1]) wurden in der Zeit vom 10.—17. Oktober 1918 34 Ballonaufstiege gemacht. Der Ballon wurde optisch von zwei, akustisch von drei Stellen angeschnitten, das Ergebnis der akustischen und optischen Messung miteinander verglichen.

Als Schallquellen wurden Knallgasballons und fünf vom Spandauer Feuerwerkslaboratorium gelieferte Bomben mit Uhrwerkzünder (Gewicht 1,2 kg) erprobt. Bei den Knallgasversuchen wurde zumeist so verfahren, daß ein kleiner Knallgasballon (Inhalt 0,5 m³) an einem gleichen oder größeren (0,5 oder 1,0 m³) Wasserstoffballon als Träger angehängt wurde. Bei Aufstieg Nr. 18 wurden zwei Wasserstoffballons à 0,5 m³ als Träger eines 0,5 m³-Knallgasballons benutzt; bei Aufstieg Nr. 20 ein einziger 6 m³-Knallgasballon (ohne Tragballon), bei Nr. 31 ein 6 m³-Wasserstoffballon als Träger eines 0,5 m³-Knallgasballons. Zum Tragen der Bomben wurden durchweg 6 m³-Ballons benutzt. Sämtliche bei diesen Versuchen benutzten Papierballons (0,5, 1 und 6 m³) wurden von der Fa. Schroedter & Co., Berlin N geliefert. Sie sind mit Schlingen zum Anhängen und einem zweiten, seitlichen Füllansatz zum Einführen der Zündschnur versehen.

Das Ergebnis der Versuche ist in der großen Tabelle I zusammengestellt. Die optisch beobachteten Daten sind: t_0 die Zeit der Explosion (vom Aufstieg gerechnet), s_1 und h_1 bzw. s_2 und h_2 Seiten- und Höhenwinkel der beiden optischen Meßstellen. Index 1 bedeutet stets Meßstelle 1 „Krause" in Rossitten (Figur 1). Hier wurde auch der Ballon aufgelassen; nur bei Aufstieg Nr. 30 und 31 von der „Ballonhalle". Index 2 bedeutet — sofern es in der „Anmerkung" nicht anders vermerkt ist — den Schwarzen Berg, Index 3 die Försterei. Die akustisch beobachteten Daten sind t_1, t_2, t_3, d. s. die Zeiten, wo das Schallsignal in den drei Meßstellen wahrgenommen wurde. H ist die aus optischen Daten berechnete Höhe der Explosionsstelle, $\overline{W}_{opt.}$ der ebenfalls optisch berechnete Mittelwert der Windgeschwindigkeit bis zur betreffenden Höhe H. Die Windstärke ist in m/sec angegeben, die Richtung nach der 32-teiligen Windrose in Klammern beigefügt. $\overline{W}_{ak.}$ ist der akustisch berechnete Mittelwert der Windgeschwindigkeit. Bei der Berechnung wurde die Schallverwehung vernachlässigt. $\overline{C}$ bedeutet

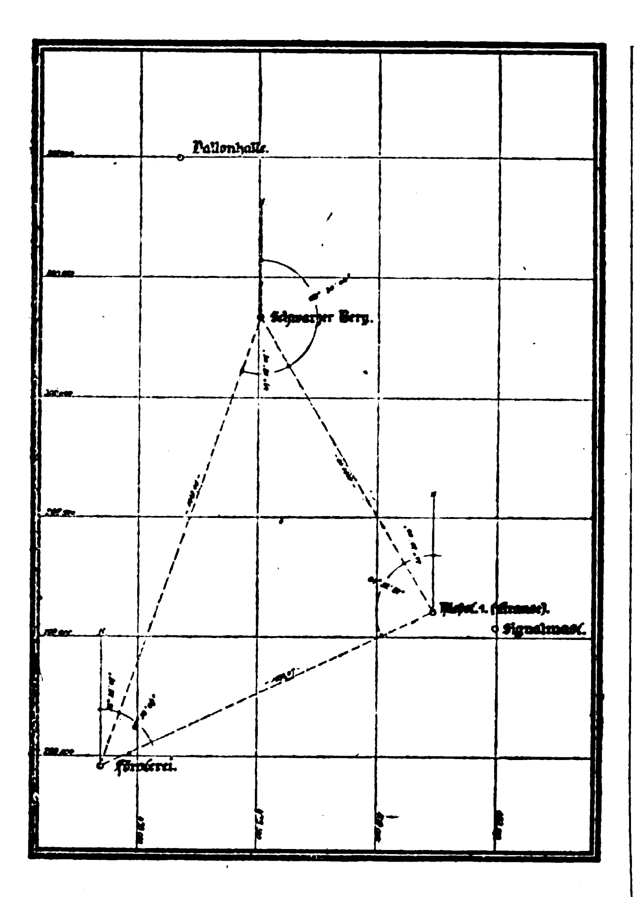
1) H. Löwy, Zur Erforschung der Atmosphäre bei unsichtigem Wetter, diese Zeitschr. 20, 175, 1919.



Tabelle I.

Aufstieg Nr.	Datum	Zeit	Boden-temperatur	Bewölkung (Witterung)	Trag-ballon	Knallgas-ballon	Knall-körper	Zünd-schnur Länge	optisch beobachtet					akustisch beobachtet			aus optischen Daten ber.		aus ak. Dat. ber.	$\overline{C}$	Bemerkung
									t_0	s_1	h_1	s_2	h_2	t_1	t_2	t_3	H	$\overline{W_{opt.}}$	$\overline{W_{ak.}}$		
1	10./X.	10 a		heiter	1 m³	0,5 m³	Knallgas	2 m	3'56",5					3'57",0							
2	„	10h 10' a	11⁰	„	„	„	„	3 m	6'5"	74,8	63,6	130,15	39,5	6'8",5	6'10",4	6'13",7	1320	1,8 (23)	3,4 (18,5)	335	t_1 unbrauchbar! ($ct < H$!)
3	„	11h a	11⁰	„	„	„	„	5 m	10'36",1	57,8	57,7	105,1	49,7	10'49",0	10'45",2	10'48",8	2304	2,3 (21)	3,4 (19)	335	t_1 unbrauchbar!
4	„	2h30' p		„	„	„	„	7 m	15'8",3	46,4	48,5	75,1	49,1	15'20",2	15'20",8	15'26"	3243	3,2 (20)	2,5 (21)	332	t_3 unbrauchbar!
5	„	3h15 p	10⁰	„	„	„	„	10 m	22'30",4	75,4	60,1	99,3	54,9	22'43",6	22'44",2		4879	2,1 (22,5)		330	unbrauchbar: t_1 u. t_2 offenbar falsch!
6	11./X.	8 a	8⁰	„	„	„	„	8 m	15'31",8	6,6	25,4	13,6	30,2	15'51",2	15'47",6		3910	4,5 (16)	2,7 (17)	332	Index 2 bedeutet Försterei.
7	„	12	12⁰	bew. (5/10)	„	„	„	über 8 m	19'30",4	357,4	23,7			20'1",4	20'3",2	19'58",8					Pilot nach 14. Minute dem Beob. 2 (Försterei) hint. Wolk. entschwund.
8	„	4 p		10/10 bed.	„	„	„	5 m													Wolkendecke in ca. 500 m. Knall nirg. vernomm.
9	„	4h30'p		„	„	„	„	1 m													Knall kurz nach Eintauch. in Wolkendecke deutlich vernommen.
10	12./X.	10 a		„	„	„	„	3 m						6'12"	nicht besetzt						Nach 4' Eintauchen d. Ballons in Wolkend. Index 2: Försterei.
11	„	11 a		„	„	„	„	6 m						9'44"	nichts gehört	nicht besetzt					Nach 4'30" in Wolken.
12	„	12		„	„	„	„	4 m						8'23",6	„	„					Nach 4' in Wolken.
13	„	1h30'p		10/10 bed.	„	„	„	3 m 50						7'17",2	7'19",5	„					Nach 3' in Stratus.
14	„	2h30'p		„	„	„	„	5 m						klar gehört!	10'10",7	klar gehört					Nach 2'30" in Stratus! t_1 u. t_2 nicht gestoppt, durch Geschoßeinschl. getäuscht!
15	„	4h30'p		bed.	0,5 m³	„	„	5 m						10'10",6	10'7"	10'10",7					Nach 4'30" in Stratus.
16	„	5h p		„	„	„	„	7 m						nichts gehört!							Nach 3'20" in Stratus.
17	14./X.	8h30' a		10/10	„	„	„	6 m						12'49",6	12'46",2	nicht besetzt					Starker dumpf. Knall! Nach 2'45" im Nebel!

18	14./X.	9 a		bed.	2 Stück à 0,5 m³	0,5 m³	Knallgas	10 m						nichts gehört!		nicht besetzt!					Nach 7′ im Nebel.
19	,,	9^h30a		10/10	0,5 m³	,,	,,	3 m						6′17″,8	6′18″,2	,,					Nach 30″ verschwund.
20	,,	10^h30a		,,	—	6 m³	,,	6 m						13′25″	13′24″,2	,,					Knall deutlich gehört, doch nicht stärker als bei Nr. 17.
21	15./X.	10^h a		,,	6 m³	—	Bombe 15 Min.							16′11″	nicht besetzt						Starker Knall! Nach 30″ in dicht. Nebel.
22	,,	$2^h30'$p	13°	heiter	,,	—	Bombe	—	9′7″	304,5	58,3	255,0	72,3	9′17″,5	9′15″,2	9′17″,2	2912	3,3 (11)	3,6 (11,5)	334	t_2 unbrauchbar.
23	,,	3^h p		,,	,,	—	,,	—	14′22″	334,6	55,5	332,8	69,7	14′38″,9	14′36″,2	14′39″,1	427	3,4 (13)	6,4 (14)	334	$H = 427$ m sehr unwahrscheinlich! Opt. Ables. vermutl. falsch!
24	,,	$4^h30'$p		,,	,,	—	,,	—	10′33″,2	302,4	44,6	277,6	56,4	10′46″,2	10′43″,6	10′43″,6	2797	4,5 (11)	4,6 (14)	334	$W_{Ak.}$ aus (F.—S. B.) berechn. (S. B.—K.) gibt: $W_{Ak.} = 5,3$ (12). (F.—K.) unmöglich! Vermutlich hat K. falsch gestoppt!
25	16./X.	$9^h15'$a		,,	0,5 m³	0,5 m³	Knallgas	4 m 80	9′53″	319,4	11,45	330,9	14,7	10′17″,2	10′12″,2	nicht gehört!	1484	12,5 (12,5)	13,4 (10)	334	Index 2: Försterei.
26	,,	10^h a		,,	1 m³	,,	,,	4 m 30	8′51″,8	317,8	15,5	331,9	16,1	9′15″,0	9′13″,2	9′10″,2	1730	11,6 (12,5)	14,4 (11)	334	Index 2: Försterei. t_3 unbrauchbar!
27	,,	11^h a		,,	0,5 m³	,,	,,	3 m	5′42″,2	318,6	13,3	336,5	13,6	5′57″,5	5′56″,4	5′53″,6	1142	13,9 (12,5)	14,5 (12)	334	Index 2. Försterei. Berechnet aus t_1 u. t_2. (t_1 u. t_2) ergibt: $W_{Ak.} = 14,5$ (10); (t_2 u. t_3) ergibt: $W_{Ak.} = 16,1$ (10,5).
28	,,	$3^h45'$p		,,	,,	,,	,,	2 m 50	4′51″,9			338,7	14,6	5′5″,1	5′4″,8	5′1″,6				334	Index 2: Försterei. s_1 u. h_1 wurde vergessen zu notieren.
29	,,	$4^h30'$p		,,	,,	,,	,,	2 m 50	4′35″,2	319,1	13,2	340,7	13,8	4′48″,1	4′47″,4	4′43″,8	955	15,1 (12,5)	15,3 (12,5)	334	Index 2: Försterei. Berechn. aus t_1 u. t_2. t_3 gibt kein. Schnitt (offenbar zu früh gestoppt).
30	17./X.	10^h a		,,	6 m³	—	Bombe	—	9′44″,3	333,0	24,7	346,4	24,5	10′5″,4	10′5″,8	10′2″,4	3045	7,6 (13,5)	7,2 (13,5)	334	Index 2: Försterei. Aufstieg: Ballonhalle.
31	,,	11^h a		,,	,,	0,5 m³	Knallgas	6 m	12′56″,4	334,5	29,8	344,8	29,7	13′25″,6	13′25″,2	13′21″	3762	8,5 (13,5)	8,9 (13)	334	Index 2: Försterei. Aufstieg: Ballonhalle. Berechnet aus t_1 u. t_2. t_3 offenbar falsch!
32	,,	3^h p		,,	0,5 m³	,,	,,	3 m	6′3″,8			348,3	22,4	6′13″,4	6′12″,6	6′9″,8				334	Index 2: Försterei. s_1 u. h_1 wurd. nicht not. Knallgasball. explod. Tragball. verbr. nicht!
33	,,	$3^h15'$p		,,	,,	,,	,,	4 m	8′7″,0	323,6	23,3	347,1	23,7	8′19″,2	8′17″,2	8′15″,16	1656	7,9 (13)	7,6 (13)	344	Index 2: Försterei.
34	,,	$3^h40'$p		,,	,,	,,	,,	5 m	10′16″,8	321,8	26,8	342,9	27,7	10′30″,5	10′30″,0	10′27″,0	2145	6,9 (12,5)	6,6 (12)	334	Index 2: Försterei. Aus t_1 u. t_2 berechn. Die and. 2 Punkte stimm. ebenfalls gut.



den der Rechnung zugrunde gelegten Mittelwert der Schallgeschwindigkeit. Es wurde nur grob gemittelt, streng genommen wäre

$$\overline{C} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\frac{1}{C_k}}$$

zu setzen, wo C_k den Wert der Schallgeschwindigkeit in der $k$ten Schicht über dem Erdboden darstellt.

Zum Vergleich der akustischen und optischen Methode kommen im ganzen 19 Aufstiege (Nr. 2—7 und Nr. 22—34) in Betracht. Nr. 1 scheidet als Vorversuch aus. Die übrigen Versuche (Nr. 8—21) wurden bei stark bewölktem Wetter ohne optischen Doppelanschnitt gemacht. Von den 19 Aufstiegen können drei zum Vergleich nicht benutzt werden: bei Nr. 7 verschwand der Pilot vor der Explosion für den Beobachter 2 hinter einer Wolke. Bei Nr. 28 und 32 wurde auf Meßstelle 1 die Ablesung der letzten Einstellung versäumt. Aufstieg Nr. 32 ist dadurch bemerkenswert, daß der Knallgasballon explodierte, ohne den Wasserstoffballon in Brand zu setzen. Es bleiben also für den Vergleich 16 Versuche: von diesen führen nur zwei, nämlich Nr. 5 und 23, zu einem unbrauchbaren Ergebnis. Bei Nr. 5 wurde wahrscheinlich irrtümlicherweise ein Geschoßeinschlag abgestoppt. Die Beobachtung war bei allen Versuchen dadurch erschwert, daß auf dem unmittelbar benachbarten Artillerieschießplatz fast ununterbrochen geschossen wurde. Bei Nr. 23 ist die optische Messung offenbar durch einen Ablesungsfehler entstellt. Die berechnete Höhe $H = 427$ m nach einer Steigdauer von 14 Min. 22 Sek. ist höchst unwahrscheinlich und könnte nur durch einen enormen Gasverlust des Ballons erklärt werden. Setzt man auf Grund von Nr. 22 für H (statt 427) etwa den Wert 3800 m, so erhält man $W_{ak.} = 4{,}7$ m/sec, Richtung (13,5), was der Wirklichkeit entsprechen dürfte.

Sämtliche hiernach für den Vergleich in Betracht kommenden Versuche sind in der folgenden Tabelle II zusammengestellt. In Kolonne 4 ist der Fehler der akustischen Messung in Prozenten angegeben.

Tabelle II.

Aufstieg Nr.	$\overline{W}_{opt.}$	$\overline{W}_{ak.}$	$\frac{100(\overline{W}_{opt.} - \overline{W}_{ak.})}{\overline{W}_{opt.}}$
2	1,8	3,4	89 Proz.
3	2,3	3,4	48 "
4	3,2	2,5	22 "
6	4,5	2,7	33 "
22	3,3	3,6	9 "
24	4,5	4,6	2 "
25	12,5	13,4	7 "
26	11,6	14,4	24 "
27	13,9	14,5	4 "
29	15,1	15,3	1 "
30	7,6	7,2	5 "
31	8,5	8,9	5 "
33	7,9	7,6	4 "
34	6,9	6,6	4 "

Wie man sieht, sind die ersten vier Versuche (Nr. 2, 3, 4 und 6) durch starke Fehler entstellt. Schuld dürfte sein, daß die Beobachter noch nicht die nötige Übung im Abstoppen des Knalles hatten. Bei den restlichen Versuchen (Nr. 22—34) beträgt der mittlere prozentuelle Fehler 6,7 Proz., befindet sich also unterhalb der Genauigkeitsgrenze von 10—15 Proz., welche die akustische Methode — nach einer Abschätzung von Prof. Emden — besitzt. Der mittlere Fehler in bezug auf die Richtung beträgt ca. 1 Grad der 32-teiligen Windrose.

Die größte Distanz zwischen Schallquelle und Beobachter wurde bei Aufstieg Nr. 31 mit Knallgas erzielt und beträgt ca. 9700 m. Diese Messung fand bei klarem Wetter statt. Ob man bei bewölktem Wetter ebenso große Distanzen erzielen kann,

sollen die Aufstiege Nr. 8—21 zeigen. Eine genaue Abschätzung der Distanz ist natürlich unmöglich, da die Steigtabelle der gekoppelten Ballons unbekannt war. Man kann nur soviel sagen: An klaren Tagen betrug die größte Zündschnurlänge, wobei die Detonation noch deutlich gehört wurde, ca. 8 m (entsprechend einer Steigdauer von ca. 16 Min.) bei einer mittleren Windstärke von ca. 4,5 m/sec; an bewölkten Tagen ca. 6 m (entsprechend ca. 12 Min.) bei einer Windstärke von ca. 6—7 m/sec in 2000 m Höhe (laut Angabe der Drachenwarte).

Ein Vergleich der Detonation des Knallgases und der Bombe ist auf Grund des vorliegenden Materials nicht möglich. Der Unterschied ist nicht so markant, um ohne Meßinstrument festgestellt werden zu können. Auch wurde die Knallgasmischung stets nur „nach Augenmaß" vorgenommen, es wurde also nicht mit dem günstigsten Mischungsverhältnis gearbeitet.

Für die Praxis dürfte die Knallgasmethode als die minder gefährliche den Vorzug verdienen. Ein Versagen der Zündung ist bei Knallgas minder bedenklich. Zum Tragen der Bombe müßte man Ballons aus soliderem Material benutzen: die 6 m³-Papierballons besitzen nicht die erforderliche Festigkeit. Zur Auslösung der Bombe wird man an Stelle des Uhrwerkzünders am besten eine Zündschnur (oder einen Zündsatz) verwenden; die Konstanz der Brenndauer ist für den vorliegenden Zweck vollkommen ausreichend.

Das Anhängen des Knallgasballons an einen Wasserstoffballon verursacht störende Rotationen und einen relativ großen Luftwiderstand. Man wird daher den Knallgasballon in das Innere des Wasserstoffballons verlegen. Zur Verringerung des Luftwiderstandes empfiehlt es sich ferner, die Zündschnur spiralförmig aufzuwickeln und in einen Behälter von günstigem Abflußprofil einzuschließen.

Rossitten (Kurische Nehrung), Oktober 1918.

(Eingegangen 10. Januar 1919.)

Zur Erforschung der Tiefsee.

Von Heinrich Löwy.

Zur exakten Messung von Meeresbewegungen gibt es zwei Arten von Instrumenten: die Propeller- und die Pendelstrommesser[1]), die im Prinzip den zur Windmessung benutzten Anemometern bzw. Windfahnen entsprechen. Die Instrumente werden an Seilen in die Tiefe versenkt und nach erfolgter Messung wieder aufgeholt. Ein Pilotverfahren würde hier denselben Vorteil bieten wie in der Meteorologie der Übergang vom Drachen und Fesselballon zum Freiballon. Die Vereinfachung der Meßtechnik wäre auch hier mit Hinblick auf die große Zahl der anzustellenden Messungen von praktischer Bedeutung. Wie nämlich Bjerknes hervorhebt, sollen die meteorologischen und hydrographischen Beobachtungen gleichzeitig erfolgen und angenähert stetig in Raum und Zeit verteilt sein. Speziell die hydrographischen Untersuchungen werden also „nicht von üppig ausgestatteten Schiffen auszuführen

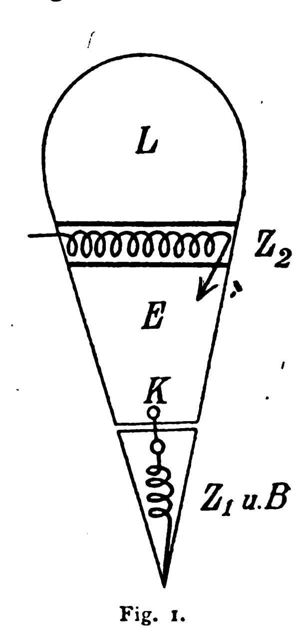


Fig. 1.

sein, die Monate oder gar Jahre auf dem Meere kreuzen, sondern durch das Zusammenwirken kleiner Fahrzeuge, die gleichzeitig ausreisen"[1]).

Die akustische Pilotmethode, die ich in einer kürzlich erschienenen Arbeit (diese Zeitschrift 20, 175, 1919) zur Windmessung bei unsichtigem Wetter auseinandergesetzt habe, könnte auch zur Messung der Meeresbewegungen verwendet werden. In Fig. 1 habe ich die Konstruktion eines Tiefseepilots angedeutet. L bedeutet den Luftraum, B den Ballast, der an der Stelle K an dem oberen Teile befestigt ist. Die Zündschnur Z_1 ist so dimensioniert, daß der Ballast in der gewünschten Tiefe ausgeworfen wird. Die Sink-

1) Vgl. Otto Krümmel, Handbuch der Ozeanographie, 2. Aufl., 2. Bd., S. 417. Stuttgart 1911.

1) V. Bjerknes, Dynamische Meteorologie und Hydrographie, II. Teil, Nr. 8 u. 6. Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1913.



geschwindigkeit des Pilots ist als bekannt vorausgesetzt. Der Pilot soll nach Verlust des Ballast gerade schwimmen. Der in E befindliche Explosivstoff wird durch die Zündschnur Z_2 zur Detonation gebracht. Z_2 muß länger sein als Z_1, und zwar umso länger, je geringer die Geschwindigkeit der untersuchten Meeresströmung ist. Zur Beobachtung des Schallsignals wird man das Instrument benützen, womit Leonardo da Vinci als Erster die Schallleitung in Flüssigkeiten untersucht hat: ein Sprachrohr, dessen Kopf auf das Wasser gesetzt wird[1]). Dank der günstigen Schalleitungsverhältnissen wird man Tiefen erreichen, die den anderen Methoden unzugänglich sind. So hat Colladon bei seinen Versuchen am Genfer See eine unter Wasser tönende Glocke noch in 35 km Abstand gehört[2]). Die Verhältnisse scheinen hiernach wesentlich günstiger zu liegen als in der freien Atmosphäre. Statt mit dem Sprachrohr könnte das Signal auch durch einen Seismographen oder ein akustisches Registrierinstrument aufgenommen werden. Das hätte den Vorteil, daß die Beobachtungsstationen auf dem Festland (an der Küste) oder auf Inseln besessen werden könnten. Jedes beliebige Schiff könnte in den Dienst der Ozeanographie gestellt werden. Auch die Ortsbestimmung könnte seismographisch oder akustisch vorgenommen werden. Nur müssen die zur Ortsbestimmung dienenden, von der Meeresoberfläche ausgehenden Signale von den Tiefseesignalen — etwa durch die Zahl der Detonationen — unterschieden werden.

Ist die Sinkgeschwindigkeit des Pilots unbekannt, so ersetzt man Z_2 durch ein Dosenbarometer, dessen Zeiger in einer bestimmten Stellung durch Berühren einer Auslösung die Verbindung mit dem Ballast aufhebt.

Auch die Bestimmung der anderen „hydrographischen Elemente" (speziell von Druck und Temperatur) wird vielleicht mit Hilfe der Methode gelingen, die ich kürzlich für die ballistische Erforschung der Atmosphäre auseinandergesetzt habe (vgl. diese Zeitschrift 20, 175, 1919). In Fig. 2 habe ich als Beispiel einen Tiefseepilot zur Messung des Druckes skizziert. L bedeutet den Luftraum. Im Instrumentenraum I befindet sich ein Dosenbarometer. Doch könnte man auch die Wand des Instrumentenraums als Dose ausbilden und den Zeiger ins Doseninnere verlegen. Der Zeiger ist hohl ausgebildet und enthält einen Explosivstoff, der im Drehpunkt

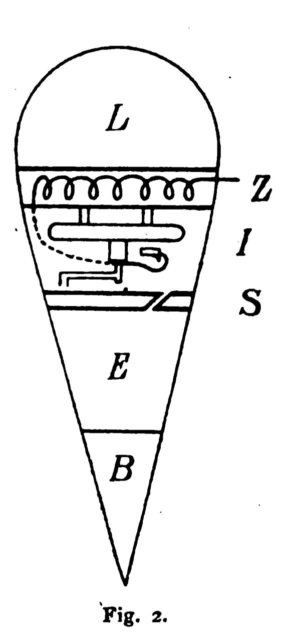


Fig. 2.

mit der Zündschnur Z verbunden ist. Die Länge von Z ist so gewählt, daß die Explosion in der zu untersuchenden Tiefe gerade bis zur Spitze des Zeigers fortgeschritten ist. Die Spitze bewegt sich längs des Satzkanals einer Satzscheibe S, die mit dem Explosionsraum E in Verbindung steht. Verschiedenen Stellungen des Zeigers entsprechen also verschieden lange Zusatzzündwege. Will man das im Pilot eingebaute Meßinstrument retten, so kann man die Einrichtung so treffen, daß E und B als selbständiger Teil (wie B in Fig. 1) dem oberen Teil des Pilots angefügt und die Verbindung noch rechtzeitig vor der Explosion gelöst wird.

Wien, Januar 1919.

(Eingegangen 28. Januar 1919.)

1) Leonardo da Vinci, Auswahl von Marie Herzfeld, 2. Aufl., S. 43. Jena, Diederichs. 1906. Vgl. auch Winkelmann, Handbuch der Physik (2. Aufl., Bd. II, S. 560).

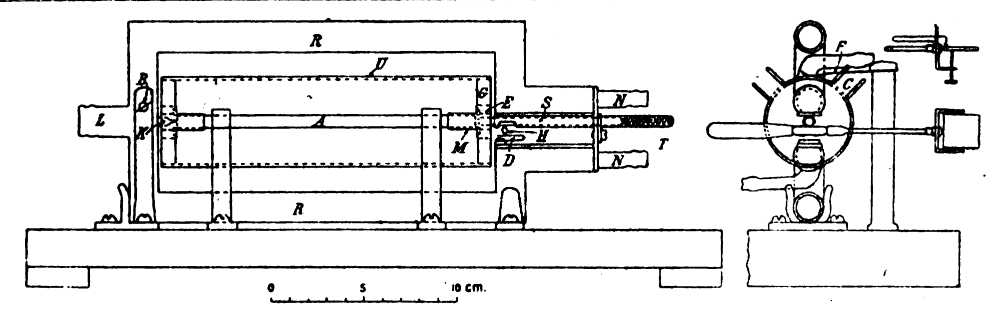
2) Winkelmanns Handbuch der Physik, l. c.

Ein Ausdehnungsapparat.

Von O. E. Frivold.

Bei der Bestimmung des Wärme-Ausdehnungskoeffizienten fester Körper stehen oft nur ganz kleine Stücke des Versuchsmaterials zur Verfügung. In einem solchen Falle sind die Anforderungen an die Empfindlichkeit der Meßvorrichtung sehr groß, und zwar schon deshalb, weil die Ausdehnung fester Körper immer sehr klein ist.

Es liegt in diesem Falle nahe, das bekannte Martinsche Meßverfahren mittels Spiegelapparaten, das ja im Materialprüfungswesen eine große Verbreitung gefunden hat, zu benutzen. Die Schwierigkeit, dieses Verfahren anzuwenden, liegt vorwiegend darin, der ganzen Probe eine



bestimmbare Temperatur zu geben, sowie verschiedene Fehlerquellen zu beseitigen, oder sie in Berechnung zu ziehen.

Mittels der Wasserkühlung und unter Anwendung von Quarz und Invar in den Apparatteilen, deren Ausdehnung das Ergebnis fehlerhaft machen kann, gelang es, einen Apparat zu konstruieren, der sehr befriedigend arbeitete, und dessen Ergebnisse bis auf 0,5 — 1 Proz. übereinstimmten.

Der Probestab A ist zwischen der Invarspitze K, die an dem Röhrensystem RR angelötet ist und der Quarzröhre (eventuell der Invarspitze) S, die in einer Metallröhre verschiebbar und mittels der Feder T gegen den Probestab festgeklemmt ist, eingespannt.

Der Probestab ist umgeben von dem Glaszylinder U, der mittels der Feder F gegen zwei V-förmige Metallstücke festgeklemmt wird. Die Verbindung zwischen Stab und Zylinder besteht aus dem Gummiteil G, Ebonit E und der Messingröhre M.

Das Röhrensystem R wird von zwei Schrauben B festgehalten. In eine Ansatzröhre C kann ein Thermometer eingesetzt werden. An der Feder D und der Quarzröhre S befindet sich das zweischneidige Stahlstück H, das in einem Spiegel endet. Diese Vorrichtung mißt die Ausdehnung, die der Stab A erfährt, wenn er z. B. mittels Wasserdampfs erwärmt wird. Bei einem Skalaabstand von etwa 400 cm, einer Stablänge von etwa 8 cm (kleines Modell) und einem Abstand zwischen den Schneiden der Drehvorrichtung von 0,5 cm erhält man einen Ausschlag von etwa 15 cm (Material Kupfer). Das will besagen, daß diese Größe mit einer Genauigkeit von rund 0,2 Proz. bestimmbar ist, wenn man die Ablesungsgenauigkeit = 0,2 mm setzt.

Bei dieser Versuchsanordnung sind verschiedene Fehlerquellen zu beachten. Erstens können die Anlagestellen des Stabes A an der Invarspitze K und der Schneide an der Feder D bei einer Temperaturveränderung des Systems verschoben werden. Der Quarzstab S dehnt sich ebenfalls unter dem Einfluß dieser Temperaturerhöhung aus. Diese Fehlerquellen werden wenigstens teilweise unterdrückt durch die Wasserkühlung in dem System $L\ R\ N$ und die Umbiegung der Feder D, und zwar auch deshalb, weil diese Apparatteilchen aus Material mit kleinem Ausdehnungskoeffizienten bestehen. Invar hat einen Ausdehnungskoeffizienten von ungefähr 1/10 von dem des Eisens, und Quarz sogar einen noch kleineren.

Um die Wärmeabgabe an den Enden des Stabes A zu verringern, werden kleine Quarzplatten zwischen den Stab und die Spitzen K und S gelegt.

Ob die Fehlerquellen bei dieser Anordnung so weit unterdrückt werden, daß ihr Einfluß unberücksichtigt bleiben kann, ließe sich nur durch eine Untersuchung des Temperaturverlaufs der Invarspitze und des Quarzstabes bei Erhitzung des Probestabes feststellen. Mit kleinen Thermoelementen (Fe-Konstantan), die teils an den Spitzen angelötet wurden, teils mittels einer Feder längs des Quarzstabes verschiebbar waren, wurden die Temperaturen gemessen, und die Ausdehnung der genannten Apparatteilchen berechnet. Es ergab sich, daß die betreffenden Fehlerquellen mit 0,2 Proz. auf das Ergebnis fehlerhaft einwirkten. Dieser Betrag ist nicht größer, als die Ablesungsfehler eines gewöhnlichen Ausschlags und kann deshalb unberücksichtigt bleiben.

Kontrollmessungen wurden mit einem Probestück aus Kupfer vorgenommen. Zwei gleichlaufende Messungen ergaben für den Koeffizienten bzw. $1{,}721 \cdot 10^{-5}$ und $1{,}701 \cdot 10^{-5}$, im Durchschnitt also $1{,}711 \cdot 10^{-5}$. Dieser Wert steht im guten Einklang mit den Angaben für diesen Koeffizienten nach Landolt und Börnsteins Tabellen, wo der Ausdehnungskoeffizient als zwischen $18^0 — 100^0$ gleich $1{,}71 \cdot 10^{-5}$ angegeben wird.

Im vorliegenden Falle wurden ein Skalaabstand von etwa 400 cm, ein Probestab von etwa 8 cm (mit dem Horizontalkatetometer gemessen), sowie ein Thermometer mit $^1/_{10}{}^0$ Teilen (für herausragende Quecksilberfaden korrigiert) verwendet. Der Abstand zwischen den Schneiden der Drehvorrichtung wurde mit einer Mikrometerschraube bestimmt (zu etwa 0,5 cm).

Kristiania, Physikalisches Institut der Universität, Mai 1918.

(Eingegangen 31. Januar 1919.)

Messungen des Ausbleichens von Farben im Tageslicht.

Von Otto Meißner.

Die nachstehenden Messungen des Ausbleichens von Farben unter dem Einfluß des Lichtes sind nach der Ostwaldschen Methode ausgeführt[1]). Es handelt sich um 7 Stücke Papier verschiedener Färbung: 2 dunkle, nämlich I. ein Stück eines blauen Heftdeckels, II. ein Stück rotbraunes Papier, wie es in die Briefumschläge eingelegt wird, um diese undurchsichtig zu machen, III. bis VII. waren Stücke von Löschblättern der Färbungen: rot, orange, gelb, grün, blau. (Die genauen Kennzahlen finden sich in der Tabelle unten.) Diese Papiere klebte ich auf ein Pappstück nebeneinander, über das letzte Drittel legte ich wieder einen Pappstreifen, so daß dies unbelichtet blieb. Dann setzte ich das Ganze vom 26./9.—21./10. 1918 dem Tageslicht aus, und zwar in annähernd vertikaler Stellung, zwischen Doppelfenstern. Vom 22./12. 1918 bis 2./1. 1919 machte ich dann je sechs Messungen der belichteten (B) und unbelichteten (U) Stellen. In der Zwischenzeit hatte ich die Pappe lichtdicht in einem Heft aufbewahrt. Schwarz- und Weißgehalt s und w bestimmte ich wie in der früheren Arbeit; zur Bestimmung des Farbtons c stand mir diesmal dank des Herrn Geheimrats Wilhelm Ostwald für jede Nummer des Farbkreises eine Farbe zur Verfügung. g in der Tabelle ist der Weißgehalt des in der Farbe vorkommenden Graus in Prozenten, also

$$g = \frac{100\,w}{w + s}$$

Die Reinheit

$$r = 100 - w - s.$$

Aus der Tabelle ersieht man sogleich, daß das Verhalten der dunklen und hellen Farben verschieden ist.

Bei den dunklen Farben hat der Schwarzgehalt ab-, der Weißgehalt zugenommen. Es ist also auch rechnerisch ein „Ausbleichen" festzustellen. Der Farbton und die — geringe — Reinheit haben sich nicht wesentlich verändert.

Bei den hellen Farben hat die Reinheit infolge der Belichtung erheblich abgenommen. Während sie bei den unbelichteten Farben 33—60 Proz. beträgt, ist sie bei den unter dem Einfluß der Belichtung von $3^1/_2$ Wochen überall auf etwa 20 Proz. gesunken. Dabei ist das Grau an sich ziemlich unverändert geblieben — es ist bei V. dunkler, bei VI. und VII. heller geworden. Der Farbton ist auch hier konstant geblieben.

Darf man vorliegende Untersuchungen, die der Natur der Sache nach und unter den jetzigen Verhältnissen nur als vorläufige gelten können,

		c	w	s	r	g
I.	B	53,0 ± 0,0	17,7 ± 2,1	69,8 ± 4,0	12,5 ± 4,5	20,3
	U	53,7 ± 0,3	07,0 ± 0,8	74,2 ± 1,5	18,8 ± 1,7	8,6
	Δ	−0,7 ± 0,3	+10,7 ± 2,3	− 4,4 ± 4,3	− 6,3 ± 4,8	+11,7
II.	B	14,8 ± 0,3	08,5 ± 0,8	86,8 ± 1,0	04,7 ± 1,4	8,9
	U	14,0 ± 0,0	04,7 ± 0,5	93,0 ± 0,8	02,3 ± 0,9	4,8
	Δ	+0,8 ± 0,3	+ 3,8 ± 0,9	− 6,2 ± 1,4	+ 2,4 ± 1,7	+ 4,1
III.	B	00,8 ± 6,2	54,2 ± 3,4	23,3 ± 3,3	22,5 ± 4,8	70,2
	U	00,7 ± 0,3	45,0 ± 2,6	18,3 ± 3,1	36,7 ± 4,1	71,0
	Δ	+0,1 ± 0,4	+ 9,2 ± 4,3	+ 5,0 ± 4,5	−14,2 ± 6,2	− 0,8
IV.	B	10,5 ± 0,3	36,7 ± 2,1	38,3 ± 1,1	25,0 ± 2,3	49,3
	U	11,0 ± 0,7	31,7 ± 2,6	31,7 ± 1,7	36,6 + 3,1	50,0
	Δ	−0,5 ± 0,8	+ 5,0 ± 3,3	+ 6,6 ± 2,0	−11,6 ± 3,9	− 0,7
V.	B	30,5 ± 0,3	42,5 ± 2,1	38,5 ± 1,1	19,0 ± 2,4	52,8
	U	31,0 ± 6,7	41,2 ± 1,5	25,5 ± 1,4	33,3 ± 2,0	62,8
	Δ	−0,5 ± 0,8	+ 1,3 ± 2,6	+13,0 ± 1,8	−14,3 ± 3,2	−10,0
VI.	B	54,0 ± 0,0	36,7 ± 2,5	44,2 ± 3,3	19,1 ± 4,1	45,8
	U	54,3 ± 0,4	15,2 ± 0,6	23,3 ± 2,5	61,5 + 2,6	39,3
	Δ	−0,3 ± 0,4	+21,5 ± 2,6	+20,9 ± 4,1	−42,4 + 4,9	6,5
VII.	B	84,5 ± 0,3	36,7 ± 2,8	49,8 ± 3,8	13,5 ± 4,8	42,7
	U	84,7 ± 0,3	10,7 ± 0,4	28,7 ± 3,2	60,6 ± 3,2	27,5
	Δ	−0,2 ± 0,4	+26,0 ± 2,9	+21,1 ± 4,9	−47,1 ± 5,8	+15,2
Mittel Δ III.—VII.		−0,3 ± 0,6	+12,6 ± 3,1	+13,3 ± 3,5	−25,9 ± 4,8	+2,0 ± 8,7

1) Vgl. diese Zeitschr. **20**, 83—85, 1919.

verallgemeinern[1]), so hätte man folgende Ergebnisse:

1. Bei dunklen Farben nimmt unter dem Einflusse der Belichtung (durch Tageslicht) der Weißgehalt auf Kosten des Schwarzgehaltes zu. Reinheit und Farbton bleiben annähernd gleich. (Bei sehr langer Belichtung dürfte die Reinheit asymptotisch dem Grenzwerte o zustreben.)

2. Bei hellen Farben nehmen Weiß- und Schwarzgehalt annähernd gleich stark zu, die Reinheit also entsprechend ab. Der Farbton bleibt ungefähr derselbe.

Bei ganz hellen Farben (s sehr klein) würde man zweifellos eine Zunahme von s finden, wie ja insbesondere bei V. der Tabelle schon angedeutet ist; es findet eine Verdunkelung, ein „Verschmutzen" statt. Unter Vorbehalt werde demnach noch hinzugesetzt:

3. Bei ganz hellen Farben nimmt der Schwarzgehalt auf Kosten des Weißgehaltes zu.

„Endziel" der Entwicklung ist immer: $r = 0$.

1) Daß dies in der Tat möglich ist, halte ich für sicher nach meinen Erfahrungen über das Ausblassen von Teppichen, Vorhängen, Tapeten u. ä.

Potsdam, 21. Januar 1919.

(Eingegangen 22. Januar 1919.)

Über eine Beziehung zwischen der L-Serie der Röntgenspektren und den Atomgewichten.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von F. Kirchhof.

Das Moseleysche Gesetz drückt bekanntlich die Beziehung zwischen den Werten der Barklaschen K-Serie der charakteristischen Röntgenstrahlenspektren und den Moseleyschen Ordnungszahlen der Elemente aus, wonach das Produkt aus dem Quadrat der um 1 verminderten Ordnungszahl eines Elementes zwischen Aluminium und Silber und seinem K-Wert eine Konstante darstellt, welche ungefähr 1200 beträgt. Für die L-Serie besteht eine derartige Beziehung nicht.

Es wurde daher untersucht, ob für diese nicht eine andere Gesetzmäßigkeit existiere, da die L-Kurve einen etwas anderen Verlauf als die Kurve der K-Werte nimmt[1]).

Es ergab sich tatsächlich eine solche, indem das Produkt aus dem Quadrat neuer Ordnungszahlen der Elemente und ihren entsprechenden L-Werten eine Konstante ergibt, welche um den Wert 12550 liegt, demnach ungefähr von der zehnfachen Größenordnung der Moseleyschen Konstanten ist[1]).

Wie man aus der Tabelle I ersieht, sind diese neuen Ordnungszahlen (N), welche man erhält, wenn man auf Grund eines verallgemeinerten Zerfallsschemas die geradwertigen Elemente mit stets um zwei Einheiten wachsenden Nummern versieht und hierbei auch Isotope berücksichtigt, durchweg von der Größenordnung der halben Atomgewichte, wie dies bei den Moseleyschen Ordnungszahlen bis zum Kalzium gleichfalls der Fall ist[2]).

Die Folge davon ist, daß die Werte, welche mit Hilfe der halben Atomgewichte berechnet sind, weitgehend mit denen aus den Rutherfordschen Ordnungszahlen übereinstimmen. Die angeführte Beziehung läßt sich demnach durch folgende Formeln ausdrücken:

$$N^2 \cdot L_{\alpha_1} \cong \left(\frac{A}{2}\right)^2 \cdot L_{\alpha_1} = \text{konst.} \cong 12550. \quad (1)$$

Hieraus folgt für A die einfache Beziehung:

$$A \cong \sqrt{\frac{12550}{L_{\alpha_1}}} \cong \frac{224}{\sqrt{L_{\alpha_1}}}. \quad (2)$$

Da sich die L-Kurve mit einiger Sicherheit ungefähr bis zum Zink extrapolieren läßt, so wurde die Konstante bloß bis zu diesem Element berechnet. Ob auch für die niedrigeren Atomgewichte noch Gültigkeit des Gesetzes besteht, bleibt abzuwarten.

Innerhalb des oben angeführten Bereiches scheint es aber als erwiesen, daß auch die Atomgewichte bzw. die neuen Ordnungszahlen, welche von der Größenordnung der halben Atomgewichte sind, zu den charakteristischen Röntgenstrahlenspektren in Beziehung stehen.

Als eine Folgerung aus dieser Gesetzmäßig-

1) Auf Grund einer brieflichen Mitteilung von Herrn Prof. Dr. St. Meyer (Wien) ist der Grund für diesen Unterschied in folgendem Umstand zu erblicken: Man nimmt an, daß nahe dem positiven Atomkern zunächst drei Elektronen vorhanden sind, die für die Entstehung der K-Serie als maßgebliche gelten (Debye); der nächste Elektronenring, der für die L-Serie in Betracht gezogen wird, ist etwas weiter vom Kern entfernt und soll sieben Elektronen umfassen (Kroo, Vegard).

1) Nach einer neueren Angabe von L. Graetz, Die Atomtheorie in ihrer neuesten Entwicklung, Stuttgart 1918, S. 57, berechnet sich diese Konstante zu 12600. Die vorliegenden L_{α_1}-Werte sind dem Werke desselben Autors, Die Elektrizität und ihre Anwendungen, entnommen.

2) Ebenfalls durch Prof. St. Meyer erfuhr ich, daß E. Rutherford, Phil. Mag. (6) 21, 669, 1911, bereits vor Moseley für die Kernladungszahl, die seither mit der Ordnungszahl identifiziert wurde, den Wert $N = \frac{A}{2}$ angenommen hatte. Diese Ordnungszahl möge in Zukunft als Rutherfordsche O.-Z. bezeichnet werden.

Tabelle I.

Element	Neue O.-Z. N	$\frac{A}{2}$	Wellenlänge in $La_1 \cdot 10^{-8}$ cm	Konstante aus N ber. K_2	Dieselbe aus $\frac{A}{2}$ ber. K_2	Diff. vom Mittelwert
1	2	3	4	5	6	7
Zn	32	32,685	12,346 gem.	12640	(13030)	+ 90
Ga	35	34,95	10,20 ber.	12490	12358	— 60
Ge	36	36,25	9,55 „	12380	12540	—170
As	37	37,485	9,10 „	12458	12782	— 92
Se	38/40 [1]	39,6	8,704 „	12530	12640	— 20
Mo	48	48,0	5,423 gem.	12495	12495	— 55
Pd	54	53,35	4,385 „	12787	12476	+237
Ag	55	53,94	4,170 „	12613	12130	+ 63
Sn	58/60	59,4	3,619 „	12600	12750	+ 50
Ta	91	90,75	1,525 „	12630	12560	+ 80
W	92	92,0	1,475 „	12484	12484	— 66
Pt	98	97,6	1,316 „	12640	12535	+ 90
Tl	101	102,0	1,220 „ [2]	12445	12570	—105
Pb	102/104	103,6	1,179 „	12503	12645	— 47
U	118/120	119,1	0,919 „	12550	(13030)	0
				Mittel 12550	Mittel 12600	Sa. —5

Tabelle II.

Elem.	O.-Z.	Elem.	O.-Z.	Elem.	O.-Z.	Elem.	O.-Z.	Elem.	O.-Z.	Elem.	O.-Z.
He	2	(*Prt Ca*)	22	—	—	*La*	69	*Ad*	86	*RdTh, MTh*$_1$	114
Li	3	*Sc*	23	*Y*	45	*Ce*	70	*Lu*	88	*MTh*$_2$	115
Be	4	*Ti*	24	*Zr*	46	*Pr*	71	*Tu II*	90	*Th*	116
B	5	*V*	25	*Nb*	47	*Nd*	72	*Ta*	91	*Bv*	117
C	6	*Cr*	26	*Mo*	48	—	73	*W*	92	*U*	118/120
N	7	*Mn*	27	—	49	*Sm*	75	—	93/95		
O	8	*Fe*	28	*Ru*	50/52	*Eu*	76	*Os*	96		
F	9	*Co*	29	*Rh*	53			*Ir*	97		
Ne	10	*Ni*	30	*Pd*	54			*Pt*	98		
Na	11	*Cu*	31	*Ag*	55	*Gd*	78	*Au*	99		
Mg	12	*Zn*	32	*Cd*	56	*Tb*	80	*Hg*	100		
Al	13	*Ga*	33/35	*In*	57	*Ds*	81	*Tl*	101		
Si	14	*Ge*	36	*Sn*	58/60	*Ho*	82	*Pb*	102/104		
P	15	*As*	37	*Sb*	59	*Er*	83	*Bi*	103		
S	16	*Se*	38/40	*Te*	62/64	*Tu I*	84	*Po, ThB*	104/106		
Cl	17	*Br*	39	*J*	63			—	—		
A	18/20	*Kr*	40/42	*X*	66			*Th Em*	110		
K	19	*Rb*	43	*Cs*	67			—	111		
Ca	20	*Sr*	44	*Ba*	68			*Ra, ThX*	112		

keit ergibt sich, daß auch den Isotopen einer Plejade verschiedene Ordnungszahlen zukommen müssen, da jene verschiedene Atomgewichte aufweisen. Hingegen ist es ersichtlich, daß Elementen benachbarter Gruppen gleiche Ordnungszahlen zukommen können, z. B. dem MTh_1 und dem $RdTh$ (114), dem ThB und dem ThC'' (106) usw.

Um eine Charakterisierung der Elemente im Sinne der Moseleyschen Ordnungszahlen zu erzielen, wurden den ungeradwertigen Elementen (ersten β-Strahlungsprodukten) die ungeraden natürlichen Zahlen zugeordnet und bezüglich der Isotopen so verfahren, wie bei den geradwertigen Elementen.

Die so erhaltenen neuen Ordnungszahlen finden sich in Tabelle II zusammengestellt.

Wir sehen hier eine analoge Erscheinung wie bei den Atomgewichten, indem einem in der Reihe vorhergehenden Element bereits eine höhere Ordnungszahl zukommen kann als dem folgenden. Diese „Anomalie" tritt bekanntlich auch bei den Atomgewichten auf und hat aller Wahrscheinlichkeit nach ihren Grund in der Isotopenbildung und der verschiedenen Lebensdauer der Glieder benachbarter Plejaden[1]). Sind z. B. A und A' die Isotopen einer gerad-

1) Bei Elementen, denen zwei (neue) Ordnungszahlen (2 Isotope) zukommen, wurde das arithmetische Mittel der beiden K_2-Werte genommen.

2) Nach Siegbahn u. Friman, Phil. Mag. 31, 1916, stellen die charakteristischen Röntgenspektrallinien (α u. β) enge Doublets dar. Den Komponenten der α-Linie des Tl kommen die folgenden Wellenlängen zu: $\alpha_1 = 1{,}209 \cdot 10^{-8}$ cm, $\alpha_2 = 1{,}220 \cdot 10^{-8}$ cm.

1) An anderer Stelle werde ich auf die Verallgemeinerung der Zerfallstheorie ausführlich zu sprechen kommen.

Tabelle III.

Elemente	O.-Z. N	$\frac{A}{2}$	Wellenlänge von L_{α_1} in 10^{-8} cm	Schwingungszahl νL_{α_1}	2. Wurzel aus νL_{α_1}	$6{,}48\sqrt{\nu L_{\alpha_1}}$	Abweichung von N	Abweichung von $\frac{A}{2}$	Anmerkung
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zn	32	32,68	12,346	$0{,}2430 \cdot 10^{18}$	$4{,}930 \cdot 10^{8}$	31,95	— 0,05	— 0,73	
Ge	36	36,25	9,55	0,3156 „	5,618 „	36,34	+ 0,35	+ 0,09	L_{α_1} ber.
As	37	37,48	9,10	0,3297 „	5,743 „	37,14	+ 0,14	— 0,34	„
Se	38	39,6	8,704	0,3447 „	5,871 „	37,97	— 0,03	— 1,63	
Br	39	39,96	8,391	0,3575 „	5,978 „	38,74	— 0,26	— 1,22	
Zr	46	45,3	6,596	0,4932 „	7,023 „	45,51	— 0,49	+ 0,21	
Mo	48	48,0	5,423	0,5532 „	7,438 „	48,11	+ 0,11	+ 0,11	
Rh	53	51,45	4,596	0,6527 „	7,986 „	51,75	— 1,25	+ 0,30	
Pd	54	53,35	4,385	0,6842 „	8,271 „	53,56	— 0,44	+ 0,21	
Ag	55	53,94	4,170	0,7194 „	8,482 „	54,86	— 0,14	+ 0,92	$N = 59$ angen.
Sn	58|60	59,4	3,594	0,8346 „	9,135 „	59,16	+ 0,16	— 0,24	
Cs	67	66,4	2,891	1,037 „	10,19 „	66,06	— 0,97	— 0,37	
Nd	72	72,15	2,369	1,267 „	11,27 „	73,03	+ 1,03	+ 0,88	
Ta	91	90,75	1,525	1,967 „	14,025 „	90,72	— 0,28	— 0,03	
W	92	92,0	1,471	2,040 „	14,28 „	92,53	+ 0,53	+ 0,53	
Pt	98	97,6	1,316	2,280 „	15,10 „	97,66	— 0,34	+ 0,06	
Hg	100	100,3	1,240	2,420 „	15,55 „	100,76	+ 0,76	+ 0,46	
Tl	101	102,0	1,209	2,481 „	15,75 „	101,9	+ 0,9	— 0,1	
Pb	102|104	103,56	1,175	2,554 „	15,98 „	103,54	+ 0,54	— 0,02	$N = 103$ angen.
Ra	112	113,0	1,010	2,970 „	17,23 „	111,65	— 0,35	— 1,35	
Th(Io)	116(114)	116,1	0,957	3,135 „	17,71 „	114,76	— 0,24	(—1,34)	$N = 115$ angen.
U(II)	118	119,09	0,911	3,293 „	18,14 „	117,55	— 0,45	(—1,54)	
							— 0,78	— 2,26	

wertigen Gruppe, B und B' die durch β-Strahlung aus ihnen hervorgegangenen Isotopen (ungeradwertige Gruppe), so ist leicht einzusehen, wenn die Lebensdauer von $A > A'$, die von $B' > B$ ist, daß dann im Isotopengemisch AA' das Atomgewicht des A, im Gemisch BB' dasjenige von B' überwiegen wird. Ist nun das Atomgewicht von $A = B >$ als dasjenige von $A' = B'$, so wird das vorhergehende Element (AA') ein (scheinbar) höheres Atomgewicht als das nachfolgende (BB') aufweisen. Ein derartiger Fall scheint bei $Te—J$ in Betracht zu kommen.

Die Lücken in der Reihe der Rutherfordschen Ordnungszahlen weisen, mit Ausnahme derjenigen, welche denen der Moseleyschen Reihe entsprechen, nicht auf fehlende Elementtypen (Isotopengruppen), sondern bloß auf einzelne unbekannte Isotopen hin.

Bezeichnen wir jedes Isotop als „Atomart“ im Sinne K. Fajans, so existieren im ganzen 120 Arten von Atomen, welche sich auf 92 „Elementtypen“ (entsprechend der höchsten Moseleyschen Ordnungszahl) verteilen, von welchen fünf unbekannt sind.

Die Moseleyschen Ordnungszahlen behalten daher selbstverständlich ihre Bedeutung als Kernladungszahlen bei. Die neuen Ordnungszahlen gehen vielmehr aus den Moseleyschen dadurch hervor, daß zu diesen noch jene Zahlen (ein- oder ein Vielfaches davon) hinzukommen, welche durch die Isotopenbildung auf Grund des Zerfallsschemas resultieren. So hat Ti z. B. die Moseleysche Ordnungszahl 22; nun kommt zufolge des Zerfallsschemas dem (unbekannten) Isotopen des Ca ($Protr\text{-}Ca = 44$), die neue Ordnungszahl 22 zu, weshalb z. B. Ti sowie sämtliche mit ihm in einer Reihe stehenden Elemente (Ti bis Ga) eine um zwei Einheiten höhere neue Ordnungszahl als die Moseleysche besitzen.

Diese zu den Moseleyschen Ordnungszahlen hinzukommenden Zahlen habe ich „Isotopenzahlen“ genannt. Die Moseleyschen Ordnungszahlen stellen demnach sozusagen die Vertikalprojektion der Rutherfordschen Ordnungszahlen auf die x-Achse dar, indem dabei die Isotopen einer Plejade in den gleichen Projektionsstrahl fallen, mithin das gleiche x, die gleiche Moseleysche Ordnungszahl besitzen müssen.

Bezeichnen wir die Moseleysche Ordnungszahl mit M[1]), die Isotopenzahl mit I, die Rutherfordsche Ordnungszahl mit N, so ergibt sich die einfache Beziehung:

$$M + I = N \backsimeq \frac{A}{2}, \qquad (3)$$

mithin

$$A \backsimeq 2(M + I), \qquad (4)$$

d. h. das Atomgewicht stellt sich angenähert als lineare Funktion der Moseleyschen Ordnungszahl und der Isotopenzahl dar.

1) Ich möchte hier in Vorschlag bringen, die Atomzahl zu Ehren Moseleys mit dem Buchstaben M zu bezeichnen.

Drückt man I durch die Beziehungen zwischen K_{α_1}, L_{α_1}, K_1 (1200) und K_2 (12600) aus, so ergibt sich schließlich für das Atomgewicht eines Elementes in erster Annäherung die Formel:

$$A \cong 2\left[M + \sqrt{\frac{K_2}{L_{\alpha_1}}} - \left(\sqrt{\frac{K_1}{K_{\alpha_1}}} + 1\right)\right]. \qquad (5)$$

Dieselbe stellt das Atomgewicht (in erster Annäherung) als Funktion der Moseleyschen Ordnungszahl und der K- und L-Werte der charakteristischen Röntgenspektren dar[1]).

Da K_1 bekanntlich zur Rydbergschen Universalkonstante ν_0 (109675) in Beziehung steht, so kann man auch K_2 als Funktion dieser Größe ausdrücken:

$$K_1 = \frac{10^8}{{}^3/_4\,\nu_0}, \quad K_2 = 10{,}5\ K_1 \qquad (6)$$

$$K_2 = 10{,}5 \cdot \frac{10^8}{{}^3/_4\,\nu_0} = \frac{1{,}40 \cdot 10^8}{\nu_0}. \qquad (7)$$

Führen wir diese in die Formeln (1) bzw. (2) ein, so erhalten wir schließlich folgende Ausdrücke:

$$N = 10^4 \sqrt{\frac{1{,}40}{L_{\alpha_1}\nu_0}} = \frac{1{,}1183 \cdot 10^4}{\sqrt{L_{\alpha_1}\nu_0}} \qquad (8[2]))$$

und

$$A \cong 2 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{1{,}40}{L_{\alpha_1}\nu_0}} = \frac{2{,}366 \cdot 10^4}{\sqrt{L_{\alpha_1}\nu_0}}. \qquad (9)$$

Die Atomgewichtsformeln geben, wie nochmals betont sei, nur eine erste Annäherung an die wirklichen Atomgewichtswerte. Da Isotope, wie E. Rutherford und C. Andrade für RaD und Pb gefunden haben, gleiche Röntgenspektren, folglich auch gleiche K- und L-Werte besitzen, so versagt bei ihnen (bzw. bei einigen von ihnen) die Berechnung ihres Atomgewichts nach diesen Formeln.

1) Da $\sqrt{\frac{K_1}{K}} + 1$ die Moseleysche O.-Z. M darstellt, so ist Formel (5) bloß als eine Umformung von (2) anzusehen.

2) Die Zahl $Q = M - 1$ kann man bekanntlich als Funktion von K_{α_1} und ν_0 ausdrücken:

$$Q = \sqrt{\frac{\nu}{{}^3/_4\,\nu_0}} = \frac{10^4}{\sqrt{K_{\alpha_1}\nu_0}}.$$

Nachtrag.

Setzt man in der Gleichung (1) statt der Wellenlänge die Schwingungszahl, so gelangt man zu den folgenden Ausdrücken:

$$N^2 \cdot L_{\alpha_1} = N^2 \cdot \frac{3 \cdot 10^{10}}{\nu_{L_{\alpha_1}} \cdot 10^{-8}} = N^2 \cdot \frac{3 \cdot 10^{18}}{\nu_{L_{\alpha_1}}} = K_2. \qquad (10)$$

Daraus berechnet sich N zu:

$$N = 6{,}48 \cdot 10^{-8} \sqrt{\nu_{L_{\alpha_1}}} = 6{,}48 \cdot a, \qquad (11)[1])$$

wobei $a \cdot 10^8 = \sqrt{\nu_{L_{\alpha_1}}}$ ist, z. B. für Zn ist $a = 4{,}930$, für U, $a = 18{,}14$.

Die hieraus berechneten Werte für N finden sich in Tabelle III zusammengestellt. Dabei sind den Berechnungen die neueren L_{α_1}-Werte (s. l. c.) zugrunde gelegt.

Da die Konstante 6,48 in Beziehung zur Planckschen Konstanten ($h = 6{,}55$ bzw. $6{,}57 \cdot 10^{-27}$) zu stehen scheint, so kann man N auch zu dieser Größe in Beziehung bringen:

$$N = k \cdot h \cdot \sqrt{L_{\alpha_1}}, \qquad (12)$$

wobei $k = 1{,}01 \cdot 10^{19}$ zu setzen ist.

Da h das Verhältnis zwischen Energiequantum und Schwingungszahl des schwingenden Elektrons darstellt, so käme der Rutherfordschen O.-Z. N, und mithin auch dem Atomgewicht die Funktion eines solchen Energiequantums zu.

Die aufeinanderfolgenden Elemente (bzw. Isotopen) unterscheiden sich voneinander durch ein Energiequantum oder ein ganzes Vielfaches davon.

Diese Beziehung scheint dem Verfasser eine neue Bestätigung für die Scheinbarkeit der Atommasse bzw. des mechanischen Begriffs der Masse überhaupt zu sein.

1) Die Moseleysche O.-Z. N kann mit großer Annäherung durch die Beziehung: $M = 2\sqrt{\nu_{L_{\alpha_1}}} + 1$ ausgedrückt werden.

(Eingegangen 27. Januar 1919.)

BESPRECHUNGEN.

M. v. Rohr, Die optischen Instrumente. 3. Auflage. kl. 8°. (Aus Natur und Geisteswelt, 88. Bändchen.) VI u. 137 S. m. 89 Abbildungen im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1918. Geh. M. 1.20, geb. M. 1.50.

Das schon im XIII. Jahrgang dieser Zeitschrift auf Seite 792 besprochene Werkchen ist nun in 3. Auflage erschienen, ein Zeichen dafür, daß es viele Leser gefunden hat, trotzdem es tatsächlich nicht ganz leicht ist, für nicht ausreichend mit der neueren Betrachtungsweise optischer Vorgänge in Linsensystemen Vertraute den an manchen Stellen sehr gedrängten Darlegungen zu folgen. Der

Verfasser hat in der neuen Auflage bei der Durcharbeitung des Stoffes diesem eine andere Einteilung zugrunde gelegt, indem er die optischen Instrumente in „verdeutlichende“ und „wiederholende“ einteilt, gegenüber der früheren Einteilung in solche zum „objektiven“ und zum „subjektiven“ Gebrauch. Die Rechtfertigung für diese Einteilungen ist in beiden Fällen schwer zu erbringen, da tatsächlich die einzelnen Typen häufig ineinander übergreifen und die Trennung derselben durch ganz geringfügige Änderungen in der Zusammenfügung der optischen Elemente verwischt werden kann. Wenn auch nicht ganz gleichmäßig, sind die einzelnen optischen Instrumente nach einer Einführung in die heutige Anschauungsweise beschrieben und in ihrer Wirkung durch Wort und Bild so weit erläutert, daß der Leser einen genügenden Einblick in das Wesen der Apparate erhält. Besonderes Gewicht ist immer wieder auf die Eigentümlichkeiten des perspektivischen Sehens gelegt, indem die davon betroffenen Vorgänge stets auf den Drehpunkt des Auges bezogen werden, was namentlich bei der richtigen Beurteilung der Projektionsbilder von Bedeutung ist. — Das Bestreben, alle Fremdworte zu verdeutschen, führt an manchen Stellen zu merkwürdigen Wortbildungen (Verant = Richtiggucker; Mikroskop = Nahegucker u. dgl.), die nicht allgemeine Billigung finden dürften. Leider ist durch den Papiermangel die Deutlichkeit des Druckes und der Figuren gegen die 2. Auflage merkbar schlechter geworden, wozu auch die Auswahl der Typen, die in jener Auflage wesentlich besser waren, erheblich beiträgt. Für weite Kreise, die sich über die Einrichtung der optischen Instrumente in kürzerer Zeit unterrichten möchten, bietet das Heftchen ein sehr zu empfehlendes Hilfsmittel. L. Ambronn.

G. Wiegner, Boden und Bodenbildung in kolloidchemischer Betrachtung. gr. 8°. 98 S. m. 10 Abb. Dresden u. Leipzig, Th. Steinkopff. 1918. M. 4.50.

Die vorliegende Monographie enthält in knapper Darstellung eine Übertragung der Ergebnisse der Kolloidforschung auf die Bodenkunde und hebt zugleich in klarer Form die Bedeutung der Kolloidchemie für die Erklärung der mannigfachen von der Bodenforschung festgestellten Tatsachen hervor.

Der Ackerboden kann als grobes Gemenge von verschiedenen Körpern sehr wechselnder Teilchengröße angesehen werden. Der Zerteilungsgrad selbst ist schon von größter Bedeutung für die Landwirtschaft; man unterscheidet z. B. zwischen Sand- und Tonböden, je nach der Größe der in der Hauptmenge vorhandenen Teilchen; ihr Einfluß auf das Wachstum der Pflanzen ist allgemein bekannt, und ebenso sind es die Mittel, um den feinteiligen und verkrustenden Ton- oder Lehmboden wieder aufzulockern und so eine bessere Bodenbeschaffenheit herbeizuführen. Hier ergeben sich viele Berührungspunkte mit der Kolloidforschung, die eine Anzahl von Gesetzmäßigkeiten über das Verhalten noch feinerer Teilchen festgestellt hat. Die Anwendung der von der Kolloidchemie gegebenen Begriffe auf die Resultate der Bodenforschung und die Aufklärung einer Reihe beobachteter Tatsachen sind von verschiedenen Agrikulturchemikern angestrebt worden; freilich ist diese Aufgabe bei der sehr wechselnden Zusammensetzung der Bodenbestandteile keineswegs leicht, immerhin ist schon viel Wertvolles auf diesem Gebiete geschaffen worden. Ein weiteres Berührungsgebiet mit der Kolloidchemie bildet der für die Ernährung der Pflanzen so wichtige Basenaustausch, der vornehmlich durch die in der Ackererde vorkommenden Gele bewirkt wird und vom Verfasser selbst eingehend studiert wurde.

Die begriffliche Zusammenfassung der wichtigsten oben erwähnten Erfahrungstatsachen unter allgemeinen Gesichtspunkten hat der Verfasser mit Erfolg durchgeführt und dabei manches Neue und Interessante geboten. Eine Reihe von Anmerkungen, die zur Erläuterung dient, sowie von Literaturnachweisen erleichtert das Eindringen in den Gegenstand.

R. Zsigmondy.

P. Ehrenberg, Die Bodenkolloide. Eine Ergänzung für die üblichen Lehrbücher der Bodenkunde, Düngerlehre und Ackerbaulehre. II. Auflage. gr. 8°. 716 S. Dresden u. Leipzig, Th. Steinkopff. 1918. M. 24.—, geb. M. 27.—,

Das Buch behandelt den gleichen Gegenstand, wie das von Wiegner aber unvergleichlich ausführlicher und von anderem Standpunkte aus. Während Wiegner die Böden als „Disperse Systeme“ verschiedenen Zerteilungsgrades betrachtet, lenkt Ehrenberg die Aufmerksamkeit auf die im Boden enthaltenen sehr feinteiligen, also kolloiden Bestandteile und erörtert deren Einfluß auf die gröberen. Mit größter Sorgfalt und Ausführlichkeit ist die einschlägige Literatur behandelt, und manche Abschnitte des Buches, z. B. der über die Eigenschaften des Tons, seine Plastizität und Zusammensetzung werden auch für Fernstehende manches Interessante bringen. R. Zsigmondy.

Emil Du Bois-Reymond, Jugendbriefe an Eduard Hallmann. Zu seinem 100. Geburtstage, den 7. Nov. 1918, herausgegeben von Estelle Du Bois-Reymond. 8°. 155 S. Berlin, Dietrich Reimer (Ernst Vohsen). 1918. Karton. M. 5,50.

In unserer Zeit des raschen Erlebens, da alle Werte umgewertet werden und Altes niedergerissen und zerstört wird, ohne daß Neues und Besseres an seine Stelle tritt, ist es doppelt wohltuend, wenn der Blick zu jenen Gestalten hingelenkt wird, die nicht nur für den Tag Bedeutung hatten, sondern deren Werk auch nach ihrem Tode fortlebt. Aus Anlaß des 100. Geburtstages von Emil Du Bois-Reymond, der in ruhigeren Zeiten von der gesamten wissenschaftlichen Welt festlich begangen worden wäre, und dessen beim Hereinbrechen der Katastrophe kaum gedacht worden ist, beschert uns seine Tochter einen Band Briefe dieses großen Mannes. Sie sind an den um 5 Jahre älteren Freund Eduard Hallmann gerichtet, umfassen die Zeit von 1839—1850 und geben ein geschlossenes Bild einer hochbedeutsamen, vielleicht der wichtigsten Periode im Leben ihres Verfassers. Sie beginnen mit der Zeit, da sich Du Bois-Reymond auf Anregung Hallmanns von den mathematischen den organisch-naturwissenschaftlichen Studien zugewandt hatte, und endigen mit dem Erscheinen seines ersten großen Werkes über die tierische Elektrizität. Über die Ergebnisse seiner Forschungen erfahren wir nicht viel, aber wir gewinnen einen tiefen Einblick in seinen Entwicklungsgang, den Beginn der Studien und der Untersuchungen, die selbstquälerischen Zweifel an seinen Fähigkeiten, die Genugtuung über die ersten positiven Ergebnisse, bis sich endlich die Überzeugung von seinem eigenen Werte Bahn bricht. Auch andere ärztliche und naturwissenschaftliche Größen jener Zeit

lernen wir kennen, und den Physiker wird ganz besonders die Freundschaft mit Helmholtz, sowie die Gründung der Physikalischen Gesellschaft interessieren, aus der ja später die Deutsche Physikalische Gesellschaft geworden ist.

Nur ein kleines Bändchen liegt vor uns, aber hochbedeutend ist sein Inhalt. Und damit auch die Jetztzeit zu ihrem Rechte kommt, so können wir lesen, wie sich der Gelehrte mit den Ereignissen von 1848 abfindet.

V. Pieck.

Tagesereignisse.

Die Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft in Leipzig stellt die folgenden mathematisch-physikalischen Preisaufgaben:

1. Zur Entscheidung der Frage, ob eine physikalische Theorie der elektrolytischen Dissoziation möglich ist, oder ob dabei chemische Kräfte die entscheidende Rolle spielen, ist nicht bloß das vorhandene Material kritisch zu sichten, sondern es ist vor allem auch neues Material herbeizuschaffen.

Die Lösungsmittel, welche man bisher untersucht hat, stehen entweder dem Wasser sehr nahe, wie die Alkohole, oder sie zeigen nur geringe lösende und dissoziierende Eigenschaften. Eine Ausnahme bildet das flüssige Ammoniak, dessen lösende und dissoziierende Eigenschaften aber an die des Wassers lange nicht heranreichen. Ein Lösungsmittel, das seinen chemischen Eigenschaften nach vom Wasser völlig verschieden ist, aber nach seinen physikalischen Eigenschaften befähigt erscheint, ein großes Lösungs- und Dissoziationsvermögen zu zeigen, ist der flüssige Fluorwasserstoff. Die Untersuchung dieses Lösungsmittels wird daher mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit das notwendige Material zur Entscheidung der obigen Frage liefern können. Eine Erklärung dafür, daß diese Untersuchungen nicht längst ausgeführt sind, liegt nur darin, daß die experimentellen Schwierigkeiten dieser Untersuchung recht erhebliche, aber, wie der Gesellschaft scheint, nicht unüberwindliche sind.

Die Gesellschaft stellt daher die Aufgabe:

Es sind die Dielektrizitätskonstante und die lösenden und dissoziierenden Eigenschaften des flüssigen Fluorwasserstoffs zu untersuchen und die erhaltenen Resultate mit den bestehenden Theorien der elektrolytischen Dissoziation in Verbindung zu bringen.

Einlieferung bis zum 31. Oktober 1919; Preis 1500 Mark.

2. Die Gesellschaft wünscht eine Übersicht der Leptonenkunde hinsichtlich ihrer Anwendung auf kristalline Materie und eine experimentelle Fortführung der einschlägigen Forschung mittels Röntgenstrahlen auf mineralogisch bedeutsame Stoffe.

Einlieferung bis zum 31. Oktober 1920; Preis 1500 Mark.

3. Die Additionstheoreme für die drei elliptischen Funktionen $\sin \mathrm{am}\, u$, $\cos \mathrm{am}\, u$, $\Delta\, \mathrm{am}\, u$ weisen auf eine Verallgemeinerung für ein System von vier oder mehr Funktionen hin. Man könnte für $\nu = 1, 2, 3 \ldots n$

$$\varphi_\nu (u + v) = R_\nu (\varphi_1 (u), \varphi_1 (v), \varphi_2 (u), \varphi_2 (v), \ldots \varphi_n (u), \varphi_n (v)) \quad (1)$$

setzen und dabei $R_1, R_2 \ldots R_n$ als rationale Funktionen annehmen. Diese rationalen Funktionen hätten dann vermutlich nur den Bedingungen zu genügen, daß die beiden für $\varphi_\nu (u + v)$ und für $\varphi_\nu (v + u)$ unmittelbar und ebenso die beiden für $\varphi_\nu ((u + v) + w)$ und für $\varphi_\nu (u + (v + w))$ unmittelbar aus (1) sich ergebenden Ausdrücke übereinstimmend ausfallen.

Die Gleichungen (1) lassen sich unter analogen Bedingungen noch weiter so verallgemeinern, daß man die $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ als Funktionen von mehreren Argumenten voraussetzt; auch kann man nach Art der Weierstraßschen Behandlung der Additionstheoreme in die rechten Seiten der Gleichungen die Ableitungen der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ mit eingehen lassen.

Alle die angedeuteten Ansätze sind von dem Standpunkt aus zu verfolgen, daß die rationalen Funktionen $R_1, R_2 \ldots R_n$ zuerst den Bedingungen gemäß gewählt und nachher die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ mit Hilfe der Additionstheoreme definiert werden. Es soll versucht werden, durch tatsächliche spezielle Wahl von n und von $R_1, R_2 \ldots R_n$ einen elementaren Zugang zu einem speziellen Kapitel der Theorie der Abelschen Funktionen zu gewinnen.

Einlieferung bis zum 31. Oktober 1921; Preis 1500 Mark.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Frau Dr. Irene Götz zum Professor für Chemie an der Universität Budapest, der ständige Mitarbeiter und Laboratoriumsvorsteher an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin Dipl.-Ing. Dr. Walter Rogowski zum a. o. Professor für angewandte Physik an der Universität Jena.

Berufen: Der ord. Professor an der Universität Greifswald Dr. Johannes Stark zum ord. Professor der Experimentalphysik an die Universität Hamburg und Direktor des Physik. Staatslaboratoriums, der a. o. Professor der pharmazeutischen Chemie an der Universität Göttingen Dr. Karl Mannich in gleicher Eigenschaft an die Universität Frankfurt/M., der Oberingenieur der Siemens-Schuckert-Werke Dr.-Ing. Ludwig Binder zum ord. Professor der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt.

Neuer Lehrauftrag: Der Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Heinrich Faßbender wurde mit provisorischer Vertretung des Lehrstuhls für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Aachen beauftragt.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Münster Geh. Regierungsrat Dr. Wilhelm Killing.

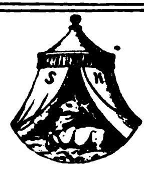
Gestorben: Der Dozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Zürich Professor Dr. Konrad Brandenberger, der ord. Professor für theoretische Physik, Meteorologie und Erdmagnetismus an der Universität Kiel Geh. Reg.-Rat Dr. Leonhard Weber.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und **H. Th. Simon**



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 41 Mark, im Ausland 46 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 10. 15. Mai 1919. No. 542. **20. Jahrgang.**

Inhaltsverzeichnis:



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 10. | 15. Mai 1919. Redaktionsschluß für No. 12 am 24. Mai 1919. | 20. Jahrgang.

INHALT:

Dem Andenken der im Kriege gefallenen deutschen Physiker.

Karl Vollmer †.

Am 3. Juni 1918[1]) erlitt der Professor für angewandte Physik an der Universität Jena, Dr. ing. Karl Vollmer, den Tod für das Vaterland, indem er als Kapitänleutnant d. R. bei einem Übungsflug mit einem Riesenflugzeug abstürzte und zugleich mit seinem Assistenten Schöning und der ganzen Besatzung verbrannte. So tief schmerzlich dieser traurige Unglücksfall allen seinen Freunden und Anverwandten war, ihm, der mit der ganzen zähen Liebe des Niederdeutschen an seinem Vaterlande hing, ersparte es der schnelle Fliegertod, den äußeren und inneren Zusammenbruch Deutschlands mit zu erleben.

Karl Vollmer wurde am 28. Dezember 1877 als Sohn des Bauunternehmers August Vollmer zu Marne in Holstein geboren. Er studierte, nachdem er das Abiturientenexamen an der Oberrealschule in Kiel gemacht hatte, in München und Berlin und bestand dort die Diplomprüfung mit Auszeichnung. 1902—1906 war Vollmer Assistent am Wärmetechnischen Laboratorium der Technischen Hochschule Berlin, dann am Elektrotechnischen Institut in Danzig. Nach einer Studienreise nach Südamerika war er 1906 bis 1908 bei der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie in der Projektierung und Ausführung von Funkenstationen tätig. 1908 kehrte er nach Danzig zurück, um in dem mir damals unterstellten physikalischen Institut seine Doktorarbeit zu machen.

Die von ihm bearbeitete Aufgabe war

1) Das Erscheinen dieses Nachrufs ist durch äußere Ursachen verzögert.

eine sehr schwierige und umfassende; es galt die für die Anwendung der Poulsen-Generatoren in der drahtlosen Telegraphie so schädlichen Schwankungen in der Wellenlänge zu messen und ihre Ursache festzustellen.

Alle Vorzüge, die ihn als Experimentator in so hervorragendem Maße auszeichneten, traten bei der Arbeit schon voll hervor: Seine große technische Geschicklichkeit, seine Erfindungsgabe, sein unermüdlicher Fleiß, das frische Zupacken beim Versuch, seine Freude an der Überwindung von Schwierigkeiten. In seiner umfangreichen Dissertation[1]) wurde das gestellte Problem restlos gelöst; die Größe der Frequenzschwankungen wurde unter den verschiedensten Umständen gemessen und ihr Zusammenhang mit den Spannungsschwankungen am Lichtbogen klargelegt; damit war der Weg zur Überwindung der durch sie bedingten Schwierigkeiten gewiesen. In der weiteren Entwickelung des Poulsen-Generators ist uns dann das Ausland zuvorgekommen. Die damit ausgerüsteten Großstationen in Amerika, Frankreich usw. arbeiten jetzt so vorzüglich, daß auch mit dem äußerst empfindlichen Schwebungsempfang die Schwankungen der Wellenlänge kaum mehr wahrnehmbar sind. In Deutschland hat man sich leider erst in allerneuester Zeit den Poulsen-Stationen wieder mehr zugewandt.

Nachdem Vollmer 1909 seine Doktorprüfung mit Auszeichnung bestanden hatte, trat er als Angestellter in die Badische Anilin- und Sodafabrik ein, woselbst ihm unter Professor Zenneck die Ausarbeitung des elektrotechnischen Teiles der Stickstoffgewinnung aus der Luft übertragen wurde — eines Problems, dessen hervorragende Bedeutung für unser Vaterland erst jetzt voll zu Tage tritt. Naturgemäß ist von seinen Leistungen in dieser Stellung wenig an die Öffentlichkeit gedrungen.

1) Jahrb. d. drahtl. Telegr. 3, 117, 1910.

Als 1911 durch den Fortgang von Konrad Simons nach Argentinien die Professur für angewandte Physik in Jena frei wurde, wurde Vollmer, trotzdem er wissenschaftlich noch wenig hervorgetreten war, an die Stelle berufen: das Vertrauen der Fakultät wurde nicht getäuscht. In den wenigen Jahren, die ihm hier zu wirken vergönnt war, hat er als Institutsleiter und Lehrer Hervorragendes geleistet. Sehr bald wurde er seinem Schülerkreis ein außerordentlich beliebter Dozent; sein frischer lebensvoller Vortrag, seine tatkräftige, kameradschaftliche Mitarbeit bei den Übungen und Exkursionen, seine unermüdliche Schaffenskraft, sein glücklicher Optimismus bei den Versuchen rissen die Schüler mit fort und begeisterten sie für den Gegenstand.

Das physikalisch-technische Institut wurde nach seinen Plänen und unter seiner Leitung zu seiner jetzigen stattlichen Größe ausgebaut. Als Spezialität sollte die drahtlose Telegraphie gepflegt werden, deren Aufschwung Vollmer mit Sicherheit voraussah. Die innere Einrichtung wurde wesentlich hierauf zugeschnitten. Als es sich zeigte, daß die vorhandene kleine Antenne für Aufnahmen von Fernstationen nicht ausreichte, beschloß Vollmer sogleich, trotz der beschränkten, ihm zur Verfügung stehenden Mittel den Bau einer Großantenne. Es gelang ihm durch persönliche Arbeit mit der Hilfe von Assistenten, Mechanikerlehrlingen, Studenten in wenigen Wochen eine Antenne von 30—40 m Höhe und 700 m Länge unter den schwierigsten Geländeverhältnissen zu errichten. Die Kosten betrugen nur 8000 M., und hätten bei Übernahme des Baues durch eine Firma sicher das zehnfache erfordert. Die Antenne ist während des Krieges vielfach für militärische Zwecke in Anspruch genommen worden und hat sich vorzüglich bewährt.

Die ihm bei seiner Lehrtätigkeit und den Bauten noch übrig bleibende Zeit widmete Vollmer den Vorarbeiten zu einer ausgedehnten Untersuchung über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen an der Erdoberfläche, die von der Internationalen Kommission für drahtlose Telegraphie in Brüssel für 1914 in Aussicht genommen war und an der sich die Station Jena in hervorragendem Maße beteiligen sollte.

Es galt vor allem quantitative Registriermethoden für Fernaufnahmen, Verfahren für schnelle Aufnahme von Resonanzkurven auszuarbeiten, Detektoren zu untersuchen und Monate hindurch zu vergleichen. Die Dämpfung der Empfangsantennen wurde in verschiedenen Jahreszeiten und Witterungsverhältnissen gemessen. Alle diese vielversprechenden Arbeiten wurden nicht zu Ende geführt, weil der Ausbruch des Krieges sie jäh unterbrach.

Als Leutnant d. R. im Grenadier-Reg. 5 (Danzig) rückte er sogleich ins Feld und wurde schon nach wenigen Tagen bei Mlawa durch einen Knieschuß schwer verwundet. Aber sobald er sich an Stöcken wieder einigermaßen fortbewegen konnte, suchte er sich eine neue Kriegstätigkeit; sie bot sich bei dem Admiralstab der Marine: er sollte bestimmte feindliche drahtlose Übertragungen suchen, die mit den gewöhnlichen Empfangsmethoden nicht zu finden waren. Trotz monatelanger unermüdlicher Arbeit gelang es ihm nicht, die vermuteten Zeichen zu entdecken, wohl aber hatte die Marine seine Fähigkeiten erkannt, und als Anfang 1915 die Funkentelegraphie bei den Fliegern aufkam, wurde ihm die Aufgabe zu teil, die Flugzeuge der Marine mit geeigneten Apparaten auszurüsten. Das war gerade eine Tätigkeit, die ihm lag: er beherrschte die Funkentelegraphie, war von Hause aus Techniker, so daß er auch die Konstruktion und fabrikmäßige Herstellung übersehen konnte, und — was man vor allem selten mit den anderen Eigenschaften vereint findet — flog auch bei jedem Wetter, so daß er die Apparate selbst erproben konnte. Jahre hindurch hat er so jedes Flugzeug der Marine, das mit Funkentelegraphie ausgerüstet wurde, selbst durchgeprüft, und er hat dabei, wie er mir oft sagte, mehr Flüge gemacht, wie die allermeisten Land- und Seeflieger des Heeres und der Marine.

Seiner rastlosen Tätigkeit ist es zu verdanken, daß die funkentelegraphischen Einrichtungen der Marine mustergültig waren und glänzend funktionierten. Gar mancher deutsche Flieger, den fern von der Küste eine Panne betraf, hat so Vollmer sein Leben zu danken, indem er drahtlos Hilfe herbeirufen konnte. Er selbst setzte sich bei seinen Versuchsfahrten in rücksichtsloser und aufopfernder Weise ein. Kein Wind und keine Gefahr konnten ihn von seinen Versuchsfahrten abschrecken, so ist er mehrfach abgestürzt, aber immer glücklich davongekommen, bis ihn am 3. Juni das Geschick ereilte. Wie beliebt und verehrt „unser Professor“ bei seiner Truppe war, bewies die erhebende Leichenfeier am 7. Juni in Warnemünde. Ihr folgte am 11. Juni seine Beisetzung in seinem Heimatsorte Marne in Holstein.

Mit Vollmer ist ein echter deutscher Mann von uns gegangen, erfüllt von rein idealem Streben, von unbedingter Zuverlässigkeit des Charakters, der stets bei allem Tun seine ganze Persönlichkeit einsetzte. Gerade Männer seines Schlages, die besten die Deutschland besaß, sind dem Kriege ja vorzugsweise zum Opfer gefallen, und gerade sie täten uns jetzt so bitter not zur Wiederaufrichtung unseres Vaterlandes.

Max Wien.

(Eingegangen 2. Februar 1919.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Weitere Bemerkungen zum Elektronendampfproblem.

Von W. Schottky.

Einleitung. In einer kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Notiz über „Elektronendampfdruck und Clausius-Clapeyronsche Gleichung"[1]) habe ich gezeigt, daß die von Herrn v. Laue in verschiedenen Arbeiten[2]) aufgestellte neue Formel für die Dampfdichte der Elektronen unmittelbar an der Oberfläche eines Leiters in ihrer Aussage nicht von dem abweicht, was für gewöhnliche Dämpfe aus den bekannten Formeln, nämlich der Clausius-Clapeyronschen Gleichung und den Gasgesetzen folgt[3]).

Kurze Zeit darauf ist auch Herr v. Laue zu derselben Erkenntnis gekommen, wie ich einem mir freundlichst zugesandten Manuskript: „Unter welchen Bedingungen kann man von einem Elektronengas reden?", entnehme. In dieser neuen Abhandlung[4]) gibt Herr v. Laue demnach zu, daß die alte Vorstellung vom „Elektronengas" zu derselben Dampfdruckformel führt, wie sein neuer thermodynamischer Begriff der „Elektronenwolke". Infolgedessen liegt natürlich die Folgerung nahe, daß der Begriff des Elektronengases auch in demselben Umfang thermodynamisch anwendbar ist, wie der der Elektronenwolke. Wie aus dem Schlußpassus seiner Arbeit hervorgeht, hat sich Herr v. Laue zu dieser Folgerung noch nicht entschließen können, und ich betrachte es daher als eine meiner Aufgaben, in dem hier folgenden Beitrag ihn und seine Leser zu dieser Auffassung zu bekehren.

Noch wichtiger aber erscheint mir folgendes: Herr v. Laue hat in seiner neuen Arbeit auch die sehr einfache Ableitung seiner neuen Dampfdruckgleichung gegeben, die von der Gleichgewichtsbedingung für die „Teilchenzahlkoordinaten" n der freien Energie f in beiden Phasen ausgeht, und die auch mir als die einfachste und klarste erschienen war. Nachdem nun festgestellt ist, daß sich alle diese Überlegungen gar nicht speziell auf den Elektronendampf, sondern ganz allgemein auf eine dampfförmige Phase beziehen, möchte ich schon an dieser Stelle darauf hinweisen, daß sich nach meiner Ansicht durch diese auf Umwegen erfolgte Entdeckung Herrn v. Laues auch für die allgemeine klassische Thermodynamik ein bemerkenswerter Fortschritt ergibt. Einerseits scheint mir, als ob der Gleichgewichtsbedingung $\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f'}{\partial n'}$, die für jede Phase und jeden sonstigen Spezialzustand (Einwirkung von elektrischen Kräften, Schwere usw.) eines Teilsystems innerhalb eines thermodynamischen Gleichgewichts gilt, in der Phasenlehre noch nicht ganz die Stellung eingeräumt wäre, die sie verdient; und was andererseits die neue Form der Dampfdruckgleichung selbst betrifft, so scheint mir der Umstand, daß sie den Druck außer von der Temperatur nur in Abhängigkeit von der freien Energie des festen Systems darstellt, eine besondere Erleichterung bei der Aufstellung theoretischer, speziell statistischer Dampfdruckformeln zu bieten. Ich sehe diese Formel gewissermaßen als eine Verallgemeinerung des Boltzmannschen e-Gesetzes für die Konzentration ν an[1]), die auch in solchen Fällen anwendbar ist, wo nicht nur potentielle, sondern auch kinetische Energieunterschiede in Frage kommen. Ferner ist natürlich diese Formel wegen ihrer rein thermodynamischen Ableitung von den speziellen Annahmen der kanonischen Verteilung unabhängig und z. B. auch in Verbindung mit Quantenansätzen brauchbar.

Ferner möchte ich darauf aufmerksam machen, daß, wenn man in der v. Laueschen Formel die freie Energie statistisch durch die Energiefunktion der festen Phase ausdrückt, man sehr nahe an allgemeine Beziehungen für die Verteilungsfunktion herankommt, wie sie von Boltzmann und Gibbs aufgestellt sind; am allernächsten aber an Formeln von P.

1) Diese Zeitschr. 20, 45 ff., 1919.

2) M. v. Laue, Glühelektronen. Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 15, 205—256, 1918; Die Entropiekonstante der Glühelektronen, ebenda S. 257—270; Die Rolle der Bildkraft in der Thermodynamik der Glühelektronen, ebenda S. 301—305.

3) Anm. bei der Korrektur. Diese Fassung meines Resultats unterliegt wohl nicht mehr dem Bedenken, das Herr v. Laue in einer inzwischen in dieser Zeitschrift 20, 202, 1919) erschienenen Entgegnung auf meine Notiz geltend macht, nämlich daß ich, um die Gasähnlichkeit des Elektronengases aus dem Beweise der Gleichwertigkeit der neuen Dampfdruckformel mit der Clausius-Clapeyronschen Gleichung zu deduzieren, für die Elektronen bereits stillschweigend die Gasgesetze vorausgesetzt hätte. Was ich im übrigen zu den weiteren dort angeschnittenen Streitfragen zu sagen habe, findet sich bereits alles in den folgenden Ausführungen.

4) Ann. d. Phys. 58, 1919 (erscheint demnächst). Im folgenden zitiert als „Annalenarbeit".

1) Dies Gesetz ist bekanntlich von O. Stern zur Ableitung einer wichtigen Dampfdruckformel benutzt worden (diese Zeitschr. 14, 629, 1913).

Debye[1]), wie er sie ebenfalls zur Berechnung des Elektronendampfdruckes aus der Gibbsschen Auffassungsweise abgeleitet hat.

Man sieht, es handelt sich da um eine sehr vernünftige und bisher noch nicht voll ausgenutzte Verknüpfung von Thermodynamik und Statistik, in der Art, daß man thermodynamisch bereits das gesamte System so weit als möglich unterteilt[2]), auf diese Weise alle Beziehungen ableitet, die abzuleiten sind, und dann erst auf die thermodynamisch nicht mehr unterteilbaren Systeme die Statistik anwendet, um so zu einer theoretischen Berechnung aller meßbaren Zustandsvariabeln (insbesondere der Verteilungszahlen) aus den Elementargesetzen zwischen den kleinsten Teilen zu gelangen.

Obgleich ich, wie gesagt, diesen Ausblick auf eine gemischt-statistische Behandlungsweise des Verteilungsproblems für die wichtigste Konsequenz der v. Laueschen Arbeit halte, muß ich mich hier doch mit diesen Andeutungen begnügen, denn es sind noch eine ganze Reihe von anderen Punkten, die ich zu besprechen habe, und die allerdings hier und da das Problem berühren. Ich hatte schon eine systematische Darstellung begonnen, als ich die neue Arbeit von Herrn v. Laue erhielt, die mich der Notwendigkeit verschiedener Auseinandersetzungen überhob; ich möchte deshalb nunmehr einiges von dem, was ich noch zu dem Elektronendampfproblem zu sagen habe, unter möglichst geringer Verschwendung von Systematik, in zwangloser Form, zum besten geben. Voraussetzung für das Verständnis ist hierbei für den Leser eine gewisse Kenntnis der v. Laueschen Arbeiten, sowie vielleicht dessen, was ich in meinem „Bericht über thermische Elektronenemission" im Jahrbuch der Radioakt. u. Elektr. **12**, S. 147—205, 1915 veröffentlicht habe (insbesondere §§ 7, 14 und 15).

1. Das Elektronengas.

Die frühere Auffassung des Elektronengases entsprach der eines „Gases im Schwerefelde", d. h., es wurde jedes Raumelement des Elektronengases, innerhalb dessen sich das Potential nicht merklich änderte, als ideales Gas mit den normalen Druck- und Energieeigenschaften betrachtet, nur mit einem zusätzlichen Energieglied, das sich auf die potentielle Energie der betrachteten Elektronen im äußeren Felde bezog. Diese Auffassung ist jetzt von Herrn v. Laue schließlich auch mit gewissen Einschränkungen als richtig anerkannt worden. Auf die Einschränkungen komme ich gleich zurück.

Die Vorstellung einer „Elektronenwolke" nach Herrn v. Laue weicht von dieser einfachen Vorstellung ab. Er betrachtet nicht Raumelemente konstanten elektrischen Potentials als Einheiten, sondern viel größere, in denen das Potential alle möglichen Werte annimmt. Speziell wählt er solche Gebilde als Einheiten, in denen das ganze elektrische Feld durch die betrachteten Teilchen selbst bedingt ist, so daß also keine „äußeren Felder" auf das System wirken. Das Eigentümliche der v. Laueschen Betrachtungsweise ist hierbei noch, daß die Elektronen immer von einer leitenden Schicht umgeben sind, die infolge der auf ihr influenzierten Ladungen das elektrische Feld der Elektronen nach außen kompensiert. Die Ladungen auf dieser Schicht werden — ohne das dies ganz deutlich hervorgehoben wird — mit zum System gerechnet, sie werden bei einer Änderung des Volumens mit verschoben, die an ihnen geleistete Arbeit wird zu der am System geleisteten Arbeit zugezählt usw.

Zweifellos ist eine derartige Definition einer „Elektronenwolke" (in Spezialfällen einer „Elektronenschicht") möglich, und in der Tat führte diese Auffassung zu richtigen Resultaten, die sogar den nicht zu unterschätzenden Vorzug der (formalen) Neuheit haben. Nachdem sich aber gezeigt hat, daß dieses formal neue Resultat auf andere Weise viel einfacher abgeleitet werden kann, muß man sich doch fragen, ob die Beibehaltung dieser komplizierten Vorstellung ersprießlich und notwendig ist. Man wird dies, wie mir scheint, verneinen müssen, wenn sich zeigt, daß mit der älteren Vorstellung komplizierte Verhältnisse, die der neuen Vorstellung große Schwierigkeiten machen, einfach zu durchschauen sind, und wenn man zeigen kann, daß die Einschränkungen, die für die alte Vorstellung gelten, für die neue in demselben Maße Platz greifen.

Diesen zweiten Punkt wollen wir zuerst diskutieren. Die Bedingung, daß sich das Potential innerhalb des betrachteten Elementarvolumens „nicht merklich ändern soll", können wir genauer und ganz allgemein dahin präzisieren: „Die potentiellen Energieunterschiede der Elektronen an verschiedenen Stellen des betrachteten Elements müssen klein sein gegen die mittlere kinetische Energie der Elektronen". Das gilt auch bei der Anwesenheit äußerer Felder; fehlen diese, so geht diese allgemeine Bedingung in die speziellen Beziehungen zwischen Dichte, Volumgröße und Temperatur über, die

1) P. Debye, Zur Theorie der Elektronen in Metallen, Ann. d. Phys. **33**, 441—489, 1910.
2) S. a. w. u.

v. Laue formuliert hat[1]). Wenn nun gezeigt wird, daß die Abmessungen (z. B. dünne Schichten zwischen Potentialflächen) der Elementarvolumina, die diesen Bedingungen genügen sollen, u. U. sehr klein sein müssen, so ist damit keinerlei Einschränkung der Betrachtungsweise gegeben; diese tritt erst dann ein, wenn die Volumina so klein gewählt werden müssen, daß nur noch ganz wenige Teilchen in ihnen enthalten sind, auf die eine thermodynamische Durchschnittsbehandlung nicht mehr anwendbar ist.

(Anm. bei der Korrektur. Wenn man von dem betrachteten System annehmen kann, daß es die Eigenschaft kanonischer Verteilung besitzt, ist eine thermodynamische Behandlung sogar dann noch zulässig, wenn es sich nur um eine kleine Anzahl von Teilchen handelt. Formal kann man z. B. in einem hoch evakuierten Rohr, das nur noch ein einzelnes (geladenes oder ungeladenes) Teilchen enthält, sehr wohl noch von einer gewissen mittleren Temperatur, Energie, Volum, Druck, Arbeit usw. des darin enthaltenen „Gases" reden, und zwischen diesen Größen bestehen alle bekannten Gasbeziehungen. Man kann sogar noch von verschiedenen mittleren Drucken, Dichten usw. an verschiedenen Stellen des Rohres reden, wenn das darin enthaltene Teilchen irgendwelchen konstanten äußeren Potentialkräften unterworfen ist. Die thermodynamische Unterteilung geht darin so weit, daß kleine Elemente des Vakuumrohres, in die das Teilchen nur ab und zu einmal hineinkommt, als thermodynamische Systeme betrachtet werden, und auch hier kann man noch die Gesetze über mittlere Dichte, Druck, Temperatur usw. aus den thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen der Teilsysteme untereinander ableiten. In allen mittleren Eigenschaften benimmt sich das System dabei wie ein „Gas im Schwerefelde".

In solchen Fällen ist nach meiner Ansicht die Grenze für die Möglichkeit der thermodynamischen Isolierung eines Systems nur dadurch gegeben, daß sich die „äußeren Koordinaten" (z. B. die Lage der wirksamen Kraftzentren) nicht mehr „unendlich langsam" und nicht mehr unabhängig von den Einzelwerten der inneren Koordinaten des Systems ändern. Auch diese Auffassung führt also zu der weiter unten angeführten Bedingung, daß die Wirkung der Einzelfelder der nächstbenachbarten Elektronen zu vernachlässigen sein muß, wenn man dem Elektronendampf soll „Gas"- oder „Wolken"-Eigenschaften zuschreiben dürfen.)

[1]) Annalenarbeit.

Der Fall, daß ein als Gas zu betrachtendes Elementarvolum nur noch wenige Teilchen enthalten darf, kann in unmittelbarer Nähe stark emittierender Flächen eintreten. So berechnet Herr v. Laue für die Grenzdichte von Wolfram bei 2400°, daß eine Kugel, die die aufgestellten Bedingungen erfüllen soll, so klein sein müßte, daß nur fünf Elektronen darin enthalten sind. Ich werde dieses Resultat später etwas einschränken müssen. Wenn es aber auch zutrifft, was würde es in der Vorstellungsweise der alten Auffassung besagen? Es würde besagen, daß wir es hier mit Elektronendichten zu tun haben, die so groß sind, daß bei einer geringen weiteren Steigerung bereits die Felder der vier nächstbenachbarten Elektronen einem im Innern der Kugel liegenden Elektron eine potentielle Energie erteilen, die gegen die mittlere kinetische Energie im idealen Gaszustand nicht zu vernachlässigen ist. Das bedeutet also eine von der Struktur der Einzelfelder (und von der Elementarladung) abhängige Abweichung vom idealen Gaszustande, und man sieht sofort, daß, wenn dieser Zustand vorliegt, auch die Betrachtungsweise des Herrn v. Laue, die ja ausdrücklich auf der Möglichkeit der Mittelung des elektrischen Feldes und der Annahme Maxwellscher Geschwindigkeitsverteilung, demnach auf der Vernachlässigung der Strukturwirkungen der Elementarfelder aufgebaut ist, hinfällig wird.

Also: Die Anwendbarkeit der v. Laueschen Vorstellungsweise unterliegt den gleichen Einschränkungen wie die alte Vorstellung eines idealen Elektronengases. Oberhalb einer gewissen durch die Temperatur gegebenen Dichte sind die Elektronen weder als ideales Gas, noch als „Wolke" im v. Laueschen Sinne zu betrachten, sondern die mittlere kinetische Energie eines einzelnen Elektrons weicht von der eines einatomigen Gases ab, der Maxwellsche Verteilungssatz, die Boltzmannsche e-Beziehung zwischen Dichte und Mittelwert des Potentials hören auf zu gelten, kurz, es wird eine ganz andere Betrachtungsweise notwendig.

Die andere Frage, welche Vorstellung die komplizierteren Fälle besser zu behandeln gestattet, die „Gas"- oder „Wolken"-Vorstellung, werden wir unter den Überlegungen der folgenden Gruppe mit zu behandeln haben.

2. Oberflächenkraftfelder.

Die von Herrn v. Laue angegebene Berechnung der thermodynamischen Eigenschaften einer Elektronenwolke, die an eine metallische Oberfläche grenzt, beruht auf der Voraussetzung, daß in genügender Entfernung von der

Oberfläche das Feld o ist, und daß im Endlichen keine anderen Kräfte wirken als die von den Elektronen und der von ihnen influenzierten Oberflächenladung herrührenden. Ist ein zusätzliches konstantes äußeres Feld vorhanden, so wird der ganze Energieausdruck, die Beziehung zwischen Grenzdichte und Entropie, freier Energie usw. verändert, und wenn gar ein räumlich variables Zusatzfeld etwa in unmittelbarer Nähe der Oberfläche vorhanden ist, so ist gar nicht abzusehen, welche Schwierigkeiten aus der energetischen Trennung des Eigen- und Fremdfeldes, der Berechnung des Feldverlaufs usw. noch erwachsen können.

Bei der „Gas"vorstellung ist das alles viel einfacher, indem jedes elektrische Feld als äußeres Feld betrachtet wird; dessen elektrische Eigenenergie hat dann mit der Eigenenergie des betrachteten Volumelementes gar nichts zu tun. Die Möglichkeit dieser Auffassung beruht, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, darauf, daß bei Betrachtung genügend kleiner Volumenelemente die elektrische Eigenenergie des Systems gegen die kinetische Energie und auch gegen die Wechselenergie des äußeren Feldes auf die betrachteten Ladungen verschwindet. Die einzige Energie, außer der Gasenergie, ist also die potentielle Energie der in dem Volumenelement enthaltenen Ladungen $n \cdot e$ in bezug auf das elektrische Potential φ, also $n e \cdot \varphi$.

Hierbei ist nun offenbar ganz gleichgültig, was für einen Ursprung das elektrische Potential besitzt; Raumladungsfelder, Oberflächenfelder, statische Bildkraftfelder werden alle in gleicher Weise behandelt, und wenn es sonst noch eine potentielle Energie gäbe, die nur von der Lage abhängig und der Teilchenzahl proportional ist, z. B. die Energie des Schwerefeldes oder einer molekularen Attraktion, so würde diese in allen thermodynamischen Betrachtungen einfach zu der elektrischen potentiellen Energie hinzutreten und ebenso wie diese behandelt werden können.

Wird die freie Energie f des betrachteten Elementarsystems aus der Gasenergie und der eben besprochenen potentiellen Energie zusammengesetzt, so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung $\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f'}{\partial n'}$ für die verschiedenen Teile des Feldes ohne weiteres das Boltzmannsche e-Gesetz für die Dichteverhältnisse.

Hier führt also die „Gas"auffassung entschieden weiter wie die „Wolken"auffassung; Herr v. Laue muß das Boltzmannsche e-Gesetz als besondere Voraussetzung neben seinen thermodynamischen Betrachtungen einführen. Allgemein wird man sagen können, daß die thermodynamische Behandlung irgendeines Zustandes zu desto genaueren und weiter reichenden Resultaten führt, je mehr Variable des Systems als äußere Variable betrachtet werden, d. h. je kleiner man die Einzelsysteme wählt, auf die man die thermodynamischen Gleichungen und Gleichgewichtsbedingungen anwendet.

Aus der Gleichgewichtsbedingung $\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f'}{\partial n'}$ für alle Volumelemente des Elektronengases ergibt sich auch ohne weiteres, daß ein angelegtes äußeres Feld auf die Grenzdichte der Elektronen keinen Einfluß haben kann, solange wenigstens sich überhaupt eine Grenzdichte definieren läßt. Dies wird dann der Fall sein, wenn sich in der Oberflächenschicht des Metalls eine Grenzfläche angeben läßt, innerhalb deren der Zustand durch das äußere Feld nicht beeinflußt wird, und außerhalb deren bereits die normale Gas- oder Wolkeneigenschaft der Elektronen beginnt. Bei dieser — allerdings sehr rohen — Fiktion müssen sich alle von außen influenzierten Ladungen in eben dieser Grenzschicht ansammeln. Da sich nun die freie Energie bei der Hindurchführung einer Anzahl geladener Teilchen durch eine mit elektrischen Ladungen belegte Oberfläche stetig ändert, so ist in unmittelbarer Nähe dieser Fläche die freie Energie der Elektronen und demgemäß auch ihre Dichte von der Ladung dieser Oberfläche, d. h. von der auf den Leiter wirkenden Feldstärke unabhängig.

(Anm. bei der Korrektur. Wie ich aus der letzten Mitteilung von Herrn v. Laue mit Vergnügen ersehe, sind wir in diesem Punkte völlig einer Meinung. Ich konnte mir vorher nur nicht denken, daß Herr v. Laue für den Beweis seiner Dampfdichteformel ganz spezielle Annahmen über die Grenzfeldstärken usw. heranziehen würde, wenn er sich von vornherein gesagt hatte, daß diese Annahmen auf das Resultat keinen Einfluß hätten!)

Genau dasselbe, was von äußeren elektrischen Feldern gilt, gilt nun aber auch von jeder Art in den Elektronendampfraum hinübergreifenden elektrischen, molekularen oder Schwerefeldern, die aus dem Innern des Leiters heraus auf die Elektronen wirken. Könnte man diese Felder ohne Veränderungen des Zustandes innerhalb der Grenzfläche durch äußere Einwirkungen verändern, so würde das alles an der Grenzdichte der Elektronen in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur nichts ändern. Man kann also die Grenzdichte berechnen, in-

dem man sich alle (statischen) Kraftfelder außerhalb der Grenzfläche einfach fortdenkt; diese werden vielmehr nur die Elektronendichte in endlicher Entfernung von der „Grenzfläche" beeinflussen (all dies unter der oben eingeführten vereinfachenden Fiktion).

Eine weitere Vereinfachung des Problems besteht dann darin, daß man nur einen sehr kleinen Raum außerhalb der Grenzfläche für die Elektronen freigibt, so daß die Raumladungsfelder der Elektronen keine merklichen Potentialänderungen innerhalb des Elektronenraumes hervorrufen können. Dann sind alle Voraussetzungen der gewöhnlichen Dampfdrucktheorie gegeben und man gelangt auf die einfachste Weise zu der Clausius-Clapeyronschen Gleichung und zu der aus ihr abzuleitenden Wilsonschen Formel, sowie zu der Laueschen Dampfdruckformel, und diese gilt dann, wie gezeigt, ohne jede Beschränkung bezüglich äußerer Felder, Bildkräfte usw.

Ich habe diese etwas groben Betrachtungen hierher gesetzt, um zu zeigen, daß die Elektronengasvorstellung auch auf dem Boden, der nicht ihr eigentliches Gebiet ist, nämlich bei Zugrundelegung einfacher thermodynamischer Annahmen (Grenzschicht, eindeutige Grenzdichte) die Wolkenvorstellung an Einfachheit und Reichweite übertrifft. Ich möchte aber nicht behaupten, daß damit das wirkliche Problem gelöst ist; ich wage sogar die radikale Behauptung, daß es einen durch die Eigenschaften des Metallinnern eindeutig bestimmten Elektronendampfdruck und damit auch eine wohldefinierte Voltadifferenz zwischen zwei verschiedenen Metallen gar nicht gibt. Daß zur Bewältigung des allgemeinen Problems die Betrachtung von möglichst kleinen Elementarelementen noch viel notwendiger ist als bei der rohen Betrachtung, wird man wohl ohne weiteres einsehen. Diese Überlegungsgruppe müßte einer späteren Publikation vorbehalten bleiben; zunächst möchte ich die von Herrn v. Laue neuerdings angeschnittene Bildkraftfrage meinerseits noch einmal beleuchten.

3. Die Bildkraft.

Nachdem Herr v. Laue in seiner ersten Abhandlung über Glühelektronen auf eine schriftliche Mitteilung von meiner Seite hin die Bildkraft als besondere Kraft neben der Raumladungswirkung eingeführt hatte, ist er später wieder zu der Ansicht gelangt, daß die Bildkraft in der Raumladungswirkung enthalten sei. Ich habe diese Frage schon früher ziemlich weitgehend in einer in dieser Zeitschrift erschienenen Abhandlung[1]) besprochen und habe meine Überlegungen dort in dem Satze zusammengefaßt: „Nicht zwischen Bild- und Raumladungswirkungen besteht ein Gegensatz, sondern zwischen den elektrostatischen Theorien der kontinuierlichen und quantenhaften Elektrizitätsverteilung im Vakuum".

Ich brauche die damaligen Überlegungen hier nur noch etwas weiter auszuführen. Die Beweise von Herrn v. Laue, daß die Bildkraftwirkung in der Raumladungswirkung enthalten ist, haben physikalisch etwa folgenden Inhalt: Ein Elektron steht u. a. unter der Wirkung sämtlicher im Dampfraume vorhandenen Elektronenladungen und unter der Wirkung der an der Grenzfläche des Metalles von den anderen Elektronen und von seiner eigenen Ladung influenzierten Ladungen. Die Wirkung dieser influenzierten Ladungen kann man sich nach dem bekannten Spiegelungsgesetz dadurch ersetzt denken, daß man alle äußeren Elektronen an der Grenzfläche spiegelt und als „positive Elektronen" innerhalb des Leiters verteilt denkt. Man hat dann bei der Berechnung des Gesamtfeldes in Wirklichkeit nur die Wirkungen zweier gleichartiger aber entgegengesetzt geladener Wolken innerhalb und außerhalb der Grenzfläche zu untersuchen. Falls nun für die äußere Wolke der Potentialwert richtig berechnet werden kann, wenn man sich alle Ladungen innerhalb ihres Atomvolumens kontinuierlich verteilt denkt, so muß dasselbe auch für die „innere Wolke" gelten. Eine besondere Bildkraft, die ja ein Anwachsen des Potentials wie $1/x$ in der Nähe der Grenzfläche bedeuten würde (x Entfernung von der ideal spiegelnd gedachten Fläche), kann also nicht auftreten, vielmehr muß die Bildkraftwirkung vollständig durch die Theorie der kontinuierlichen Raumladungswirkung und die Berücksichtigung der gleichmäßigen influenzierten Oberflächenladung erfaßt werden.

Der Fehler in dieser Überlegung ist folgender: Damit die Ersetzung der konzentrierten Ladungen durch gleichmäßig verteilte zulässig ist, muß die Bedingung erfüllt sein, daß die nächst benachbarten Ladungen im Mittel überhaupt nur einen verschwindend kleinen Einfluß auf das betrachtete Elektron ausüben. Ist dies der Fall, — auf die Beziehung zwischen Dichte und Temperatur, die hierfür maßgebend ist, komme ich im nächsten Abschnitt noch einmal

1) Über den Einfluß von Strukturwirkungen, besonders der Thomsonschen Bildkraft, auf die Elektronenemission der Metalle. Diese Zeitschr. 15, 872—878, 1914. Im folgenden zitiert als „Strukturarbeit".



zu sprechen —, so ist ohne weiteres einzusehen, daß die „Struktur" der Elektrizität für das elektrische Feld, in dem sich das Elektron bewegt, keine Bedeutung haben kann. Die nächstbenachbarten Elektronen üben dann nämlich weder in quantenhafter noch in kontinuierlicher Verteilung einen merklichen Einfluß auf das Feld und die Bewegung des Elektrons aus, und für die weiter entfernten Ladungen ist es ohne weiteres klar, daß das Feld einer quantenhaft verteilten Ladung sich von dem einer kontinuierlichen Ladung nicht merklich unterscheidet. (Wären etwa die Elektronen in dem Gebiete der etwas weiteren Umgebung noch so spärlich verteilt, daß auch da ein prozentischer, merklicher Unterschied des kontinuierlichen und quantenhaften Ladungsfeldes wahrzunehmen wäre, so würde man beweisen können, daß der Einfluß dieser Elektronen kleiner als der der nächstbenachbarten Elektronen, also a fortiori zu vernachlässigen ist usw. Diese Bemerkungen mache ich deshalb, weil Herr v. Laue in seiner ersten Abhandlung auch eine untere Grenze der Dichte für notwendig hält, um die kontinuierliche Ladungsverteilung zulassen zu können.)

Nun möchte ich zeigen, daß die erwähnte Beziehung zwischen Temperatur und Dichte, oder, was dasselbe ist, zwischen Temperatur und dem mittleren Abstand der Nachbarelektronen für die äußere Elektronenwolke (und ebenso für die innere) vollständig zutreffen kann, und trotzdem für die Wechselwirkung beider Wolken nicht erfüllt zu sein braucht. Man sieht dies ohne weiteres ein, wenn man bedenkt, daß bei der Annäherung eines Elektrons an die Oberfläche die Bewegung des Spiegelbildelektrons nicht mehr so verläuft wie die mittlere Bewegung zweier Nachbarelektronen gegeneinander, sondern es findet eine zwangsläufige Annäherung (unter idealen Voraussetzungen bis zur völligen Berührung unter Durchlaufen unendlich großer Potentialunterschiede und Erreichung unendlich großer Geschwindigkeiten) statt. Da nun ein Elektron die Grenzfläche gar nicht passieren kann, ohne diese spezielle Feldwirkung durchgemacht zu haben, während im übrigen Raum die Anwesenheit der Nachbarelektronen bei geringeren Dichten höchstens kleine Störungen hervorruft, so ist damit die Ausnahmestellung der Bildkraft, d. h. der Wirkung des eigenen Spiegelbildelektrons auf ein der Oberfläche sich näherndes Elektron klar gegeben. Anders ausgedrückt: Die Mittelung der Wirkung der Nachbarelektronen ist nur zulässig, wenn ihre Bewegungen näherungsweise voneinander unabhängig sind. Für das Bildkraftelektron trifft diese Annahme auch dann nicht zu, wenn die Elektronendampfdichte beliebig klein ist.

Auf die Frage, wann neben der Bildkraft noch andere Strukturwirkungen, Einflüsse der Nachbarelektronen und ihrer Spiegelbilder auf das betrachtete Elektron, eine Rolle spielen, komme ich im nächsten Abschnitt zurück. Hier möchte ich nur noch einmal darauf hinweisen, daß neben theoretischen Betrachtungen über die Bildkraft doch auch ein Versuch[1]) über die Erhöhung der Elektronenemission eines Glühdrahtes durch starke äußere Felder vorliegt; ein Versuch, welcher nicht nur gezeigt hat, daß besondere Oberflächenfelder vorhanden sind, welche von der Raumladungstheorie nicht erfaßt werden, sondern sogar, daß diese Oberflächenfelder bis zu einer gewissen Tiefe ungefähr die Form und berechnete Stärke der Bildkraftfelder besitzen.

4. Die zahlenmäßigen Bedingungen des idealen Gaszustandes außerhalb und innerhalb der Bildkraftsphäre.

Ich komme jetzt nochmals auf eine Frage zurück, die ich schon im ersten Abschnitt gestreift habe: Bei welcher Dichte läßt sich ein genügend kleines Element eines mit Elektronen von bestimmter Temperatur angefüllten Raumes noch als ideales Gas betrachten? Die Antwort war: Wenn das elektrische Feld der nächstbenachbarten Elektronen die Bewegung der einzelnen Elektronen während des größten Teiles ihrer Bahn nicht merklich beeinflußt. (Daß bei sehr großer Annäherung zweier Teilchen eine Beeinflussung, eine Abstoßung, stattfinden kann, widerspricht nicht den Bedingungen des idealen Gaszustandes; solche Zusammenstöße finden ja auch in einem neutralen idealen Gase statt.)

Wie ebenfalls schon früher erwähnt, ist die Bedingung, daß man den mit Elektronen erfüllten Raum in Volumelemente unterteilen kann, die sich wie ein ideales Gas (im „Schwerefelde") verhalten, immer dann erfüllt, wenn sich die quantenhafte Ladungsverteilung ohne Fehler durch eine kontinuierliche Ladungsverteilung ersetzen läßt, und umgekehrt. Da also diese Frage für die Theorie des Elektronendampfdruckes grundlegend ist, möchte ich auf die quantitativen Bedingungen dieses Fragenkomplexes noch etwas genauer eingehen, zumal sich gewisse Angaben von Herrn v. Laue[2]) über diesen Punkt mit früheren Angaben von mir[1]) in einem gewissen Widerspruch zu befinden scheinen.

In meiner Strukturarbeit habe ich als Be-

1) Strukturarbeit.
2) Annalenarbeit.

dingung dafür, daß die Annahme kontinuierlicher Ladungsverteilung und Anwendung der Poissonschen Gleichung zulässig ist, die Gleichung angegeben:

$$\frac{3}{2} KT << \varepsilon^2 \sqrt[3]{\frac{2i}{\varepsilon^2 \sqrt{\frac{2KT}{\pi\mu}}}}. \qquad (1)^{1)}$$

Hierbei bedeutet K die Gaskonstante eines Elektrons, T die absolute Temperatur, ε die Elementarladung eines Elektrons in elektrostatischen Einheiten, μ seine Elementarmasse und i den in elektrostatischen Einheiten gemessenen Strom pro Flächeneinheit, der von der Gesamtheit aller Teilchen getragen wird, die in einer gegebenen Richtung eine positive Komponente haben. Dieser Strom ist in unmittelbarer Nähe der Glühkathode angenähert gleich dem gemessenen Sättigungsstrom, so daß Gl. (1) direkt eine Beziehung zwischen dem meßbaren Sättigungsstrom, der Temperatur und lauter bekannten Konstanten darstellt.

Über die Ableitung dieser Gleichung, die in meiner früheren Arbeit nur sehr kurz angedeutet ist, möchte ich folgendes nachtragen: Als Ausgangsgleichung ist die Bedingung benutzt, daß die Arbeit, die an einem Elektron geleistet werden muß, um es bis auf den mittleren Atomabstand an ein Nachbarelektron heranzubringen, klein sein muß gegen die mittlere thermische Energie des betreffenden Elektrons. Bedeutet also a diesen mittleren Atomabstand, so wurde gefordert:

$$\frac{3}{2} KT >> \frac{\varepsilon^2}{a}.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so wird offenbar bei allen gegenseitigen Abständen der Elektronen voneinander, die nicht klein sind gegen den mittleren Atomabstand (Gebiet der „Zusammenstöße"), die kinetische Energie der Elektronen durch die Wirkung des vom Nachbarelektron herrührenden Feldes keine merkliche relative Änderung erfahren, die Bedingung für idealen Gaszustand und für die Zulässigkeit der Annahme kontinuierlicher Ladungsverteilung ist erfüllt. Drückt man weiter a durch die Ladungsdichte ϱ und durch ε aus, so erhält man die weiteren Gleichungen:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{a^3}, \qquad a = \left(\frac{\varepsilon}{\varrho}\right)^{1/3},$$

also

$$\frac{3}{2} KT >> \varepsilon^{5/3} \cdot \varrho^{1/3}, \qquad (2)$$

und wird endlich ϱ mittels des Maxwellschen Verteilungsgesetzes durch den Strom i (beide in elektrostatischen Einheiten) ausgedrückt, wobei sich ergibt:

$$\varrho = \sqrt{\frac{2\pi\mu}{KT}} \cdot i, \qquad (3)$$

so folgt aus (2) und (3) die Gleichung:

$$\frac{3}{2} KT >> \varepsilon^{5/3} \left(\frac{2\pi\mu}{KT}\right)^{1/6} \cdot i^{1/3}, \qquad (1')$$

die sich von Gleichung (1) nicht unterscheidet.

Die Zwischenbeziehung (2) möchte ich nun mit einer Beziehung von Herrn v. Laue vergleichen, die ebenfalls aus der Forderung abgeleitet ist, daß ein Volumelement der Elektronenwolke als „Gas" (nicht als „Wolke") soll aufgefaßt werden können. Diese Beziehung lautet[1]), von Konstanten der Größenordnung 1 abgesehen:

$$\frac{\varepsilon}{KT} \cdot \varrho \cdot \lambda^2 << 1.$$

λ bedeutet hierbei die lineare Abmessung des betrachteten Volumelementes, und die Forderung, die zur Aufstellung dieser Gleichung führt, ist die, daß die elektrische Eigenenergie der in dem Volumelement enthaltenen Teilchen (— Eigenenergie natürlich im Sinne von Wechselenergie der inneren Teilchen aufeinander —) klein ist gegen die kinetische Energie dieser Teilchen.

Diese Bedingung läßt sich nun offenbar extrapolieren auf den Fall, daß das betrachtete Elementarvolumen nur etwa zwei Elektronen umfaßt, und müßte dann mit der Bedingung zusammentreffen, daß die Wechselenergie zweier Nachbarelektronen aufeinander klein sein soll gegen die kinetische Energie eines einzelnen Elektrons. λ müßte dann von der Größenordnung des mittleren Atomabstandes a gewählt werden und es würde sich die Bedingung ergeben:

$$KT >> \varepsilon \varrho a^2,$$

oder, wegen

$$\frac{\varepsilon}{a^3} = \varrho, \quad a^2 = \varepsilon^{2/3} \cdot \varrho^{-2/3},$$

$$KT >> \varepsilon^{5/3} \cdot \varrho^{1/3}. \qquad (3')$$

Diese Bedingung ist, wie man sieht, bis auf den Zahleneffektor $\frac{3}{2}$ identisch mit (2), so daß beide Arten von Überlegungen sich gegenseitig stützen.

Nun aber zu den Zahlenwerten. Herr v. Laue setzt in seinem erwähnten Beispiel (Wolfram bei 2400° abs.) eine Stromdichte von der Größenordnung 1 Amp. voraus und findet

1) In derselben Gleichung meiner „Strukturarbeit" ist auf der linken Seite fälschlich der Faktor 1/2 weggelassen.

1) Annalenarbeit.

bereits bei dieser Stromdichte die zulässige Zahl der in einem „Gasvolum" enthaltenen Elektronen auf fünf beschränkt, so daß nach unserer Überlegung bei wenig größeren Stromdichten auch die Bedingungen des idealen Gaszustandes überhaupt nicht mehr zutreffen. Durch Ausrechnung der direkten Beziehung (1) mit den Zahlenwerten

$$\varepsilon = 4{,}69 \cdot 10^{-10}, \qquad \mu = 9 \cdot 10^{-28}, \qquad K = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$$

ergibt sich dagegen, wenn man die Stromstärke in Ampere ausdrückt, die Bedingung:

$$i_{\text{Amp.}} = 7 \cdot 10^{6} \left(\frac{T}{2000}\right)^{7/2}. \qquad (4)$$

(In meiner früheren Arbeit hatte ich statt $7 \cdot 10^{6}$ den Zahlenfaktor $2{,}56 \cdot 10^{10}$; dieser Faktor ist sicher nicht richtig, ich habe mich da offenbar verrechnet.) Immerhin würden nach (4) noch Stromstärken zulässig sein, die weit über alles praktisch jemals im Vakuum zu erreichende hinausgehen, so daß also alle Gebiete des mit Glühelektronen erfüllten Raumes, in die man durch Sättigungsstrommessungen eindringen kann, unter dem Zepter des Maxwellschen Verteilungsgesetzes und des idealen Gaszustandes ständen.

In Wirklichkeit unterscheidet sich jedoch die Bedingung (4) von der v. Laueschen Bedingung nur durch die Deutung, die man dem Zeichen „klein gegen" beimißt. Aus den Gleichungen (2) und (1) erkennt man, daß eine 10^{6}-fache Erhöhung der Ladungs- und Stromdichte das Verhältnis der beiden gegeneinander abzuschätzenden Größen auf der linken und rechten Seite nur im Verhältnis 1 : 100 verändert. Würde ich also, wie Herr v. Laue, fordern, daß das Verhältnis dieser beiden Größen mehr als 1 : 100 beträgt, so würde ich statt (4) die Bedingung haben:

$$i_{\text{Amp.}} < 7 \cdot \left(\frac{T}{2000}\right)^{7/2},$$

d. h. ich würde dann auch keinen Strom von höherer Größenordnung als 1 Amp. zulassen können. Das Ganze ist also schließlich eine Frage des Zutrauens zu der Genauigkeit, mit der man überhaupt die experimentelle Prüfung aller dieser Betrachtungen für möglich hält, und in dieser Hinsicht bin ich als Glühstromtechniker vielleicht etwas weitherziger als Herr v. Laue.

Ebensowenig aber, wie es nach meiner Ansicht möglich sein wird, daß Messungen von stationären Raumladungs- und gewöhnlichen Sättigungsströmen irgendwelche „Strukturwirkungen" der Nachbarelektronen aufeinander erschließen, wird dies wahrscheinlich bei den durch sehr starke Felder erzwungenen Strömen der Fall sein, die durch Überwindung eines Teiles des Bildkraftfeldes entstehen[1]).

Wegen der Verkleinerung des Zahlenfaktors in Gl. (4) sind allerdings meine früheren Überlegungen über den möglichen Einfluß von Strukturwirkungen der Nachbarelektronen innerhalb der Bildkraftsphäre (d. h. also auch über die Zulässigkeit der Annahme eines idealen Gaszustandes innerhalb der Bildkraftsphäre) etwas zu korrigieren. Würde innerhalb der Attraktionssphäre der Glühelektrode das Boltzmannsche e-Gesetz im Verein mit der Bildkraft wirklich die mittlere Entfernung zweier Nachbarelektronen voneinander bestimmen, so müßte man jetzt allerdings sagen, daß bei höheren Temperaturen und Sättigungsströmen die mittleren Abstände der Elektronen innerhalb der Bildkraftschicht, und zwar auch schon außerhalb des „kritischen Abstandes" (von der Größenordnung 10^{-7} cm) so klein werden können, daß die Strukturwirkung der Nachbarelektronen von derselben Größenordnung wird, wie die der Bildkraft. In Wirklichkeit ist aber der mittlere Abstand der Nachbarelektronen selbst unter Voraussetzung ganz idealer Bedingungen viel kleiner als die Berechnung ergibt, und zwar einfach deshalb, weil in einen solchen Elementarwürfel, der auf der Verlängerung seiner Mittelachsen die nächstbenachbarten Elektronen haben sollte, auf der einen Seite das Metall selbst, auf der anderen Seite das Gebiet mit ganz wesentlich dünnerer Verteilung der Elektronen hineinragt, so daß für die Nachbarelektronen nur eine ganz dünne Schicht in Frage kommt, welche natürlich einen viel größeren mittleren Abstand der Einzelelektronen voneinander bedingt, als wenn der ganze Raum gleichmäßig erfüllt wäre.

Da nun die Nachbarelektronen im Gegensatz zum Spiegelelektron in ihrer Bewegung voneinander in erster Annäherung unabhängig sind, so wird hier die Überlegung von Herrn v. Laue zulässig sein, deren Anwendung auf das Spiegelelektron wir oben bekämpfen mußten. Es wird sich die Wirkung der Nachbarelektronen, wenigstens der Größenordnung nach, aus der Annahme der kontinuierlichen Verteilung berechnen lassen. Dann ist aber die Berechnung der Größenordnung der „Strukturwirkungen" der Nachbarelektronen innerhalb der Bildkraftatmosphäre auf Berechnung der „Doppelschichtwirkung" zurückgeführt, und da meine Überlegungen, die sich auf diese Wirkung beziehen, von dem in Frage stehenden Zahlenfaktor unabhängig sind und ergeben, daß die Doppel-

1) Vgl. die „Strukturarbeit".

schichtwirkung meist vernachlässigt werden kann, so ergibt sich aufs neue, wenn auch auf etwas anderem Wege, das Resultat, daß auch innerhalb der Bildkraftatmosphäre alle Strukturwirkungen, außer der Bildkraft selbst, zu vernachlässigen sind, falls nicht extrem hohe Temperaturen in Frage kommen. So rechtfertigt sich auch für tiefere Temperaturen die Berechnung der erzwungenen Ströme allein aus der Bildkraft und dem Boltzmannschen e-Gesetz; die weitere Annahme, die dieser Berechnung zugrunde liegt, nämlich die der „schwarzen Elektronenstrahlung" (d. h. vollständiges Emissions- und Absorptionsvermögen für Elektronen von mittleren Wärmegeschwindigkeiten) rechtfertigt sich nach meiner Ansicht nicht nur durch die theoretischen Überlegungen über das Vorhandensein einer Anziehungssphäre von der Größenordnung von einigen Volt (vgl. den Schluß des „Berichtes") an der Oberfläche, sondern noch mehr durch die uns aus unzähligen Kurven immer wieder entgegentretende Tatsache, daß für Geschwindigkeiten von der Größenordnung 1 Volt der Reflexionskoeffizient der Elektronen sehr klein gegen 1 sein muß[1]).

So scheint mir, daß sich auch durch die neuerliche Prüfung des Bildkraftproblems, die durch die Arbeiten von Herrn v. Laue hervorgerufen wurde, an den früheren Resultaten tatsächlich wenig ändert (von dem korrigierten Rechenfehler abgesehen). Um nicht falsch aufgefaßt zu werden, möchte ich aber zum Schluß betonen, daß ich keineswegs zu den Physikern gerechnet zu werden wünsche, die „mit der Bildkraft durch dick und dünn gehen". Man vergleiche deswegen meine Einschränkungen S. 202 des „Berichtes".

1) Vgl. dazu § 6 meiner demnächst im Archiv für Elektrotechnik erscheinenden Abhandlung „Über Hochvakuumverstärker".

Charlottenburg, 11. bis 25. Januar 1919.

(Eingegangen 27. Januar 1919.)

Das Serienspektrum des Heliums.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von A. Landé.

Um das Serienspektrum des Heliums und der Alkalien dynamisch zu erklären, braucht man sich mit Rücksicht auf die Bohrsche Frequenzbedingung $\nu = E_n - E_n/h$ nur mit den Energiewerten E_n zu beschäftigen, die ein Außenelektron (Valenzelektron) auf seiner n-quantigen Bahn um die von $Z-1$ Innenelektronen dicht umgebene Kernladung $+Ze$ besitzt. Kern und innere Elektronen wirken auf das äußere wie ein punktförmiger Kern der Ladung $+e(1+x)$, worin x aus der Wechselwirkung der Elektronen zu berechnen ist. In Anbetracht der Schnelligkeit des Elektronenumlaufes ersetzte A. Sommerfeld[1]) die Wechselwirkung zwischen inneren und äußeren Elektronen näherungsweise durch die Wirkung, welche zwischen den konzentrischen Kreisbahnen auftritt, wenn man sich dieselben entsprechend der Verweilzeit kontinuierlich mit Elektrizität belegt denkt. x wird dann eine Größe zweiter Ordnung in dem Radienverhältnis der inneren Elektronenbahnen zur äußeren. Dagegen würde man einen Effekt erster Ordnung durch eine exzentrische Verschiebung des Ringes vom äußeren Valenzelektron fort (Fig. 1) erhalten, und eine solche Verschiebung

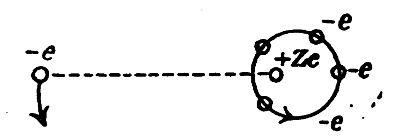


Fig. 1.

ist infolge der abstoßenden Kraft des Außenelektrons gegen die Ringelektronen tatsächlich vorhanden. Der Kern $+Ze$ mit der um die Strecke d verschobenen Ringladung $(Z-1)(-e)$ wirkt dann auf das äußere Elektron in erster Näherung zurück wie ein Dipol vom Moment $d \cdot e$, dessen ungleichnamiger Pol auf das Valenzelektron zu zeigt; erst in zweiter Näherung macht sich in x die Größe des Ringes bemerkbar, und in dritter Näherung eine Verzerrung der Kreisringform. Es kommt nun darauf an, die Größe der exzentrischen Ringverschiebung d im Feld des Valenzelektrons zu berechnen. Das ist eine ähnliche Aufgabe, wie die in der Dispersionstheorie gestellte Frage nach dem Moment eines Ringes im periodischen Feld einer Lichtwelle, nur daß im vorliegenden Fall das Feld mit dem Valenzelektron rotiert und dazu nicht an allen Stellen des Ringes die gleiche Stärke und Richtung hat. Letztere Inhomogenität wird aber die Größe des erzielten Ringmomentes wieder nur in höherer Ordnung verändern. Wir denken uns deshalb das inhomogene Feld des Valenzelektrons ersetzt durch ein homogenes von der Größe und Richtung, wie es im Ringzentrum herrschen würde. Die verschiedenen schiefen Stellungen der Bahnebene des äußeren Elektrons gegen den

1) A. Sommerfeld, Sitzungsber. der Bayr. Akademie, November 1916.

inneren Ring und die verschiedenen Ellipsenformen dieser Bahn, die bei azimutaler, radialer und räumlicher Quantelung auftreten, ergeben schließlich die Aussicht, das Seriensystem des Heliums dynamisch zu deuten.

Der Gang der Untersuchung ist so vorgezeichnet: Man rechne in Anlehnung an Debyes Störungstheorie des Wasserstoffmoleküls[1]) die Störungen in einem rotierenden Felde aus, setze für die Größe des Feldes die vom Außenelektron herrührende Feldstärke $-e/r^2$ ein und ziehe die Energiebilanz des gesamten Systems Kern + Ring + Valenzelektron bei verschieden gequantelten Bahnen des letzteren, um die mit h multiplizierten Kombinationsterme des Serienspektrums zu erhalten. Ihre Größe hängt natürlich ab von der jeweiligen exzentrischen Ringverschiebung. Berechnet man aber die Ringmomente in der üblichen Weise der Dispersionstheorie, sinngemäß für rotierendes Feld geändert, so erhält man ganz falsche Energiewerte. Die üblichen gestörten Ringbahnen, welche aus ungestörten Kreisbahnen vom Radius a entstehen, sind nämlich in dem störenden Feld zwar im Gleichgewicht; mit diesem Feld sind aber auch noch viele andere exzentrisch verschobene Bahnen verträglich, nämlich diejenigen, welche nach jenen Formeln aus Kreisen mit irgendwelchen anderen Radien a' entstehen würden. Aus der Auswahl dieser mechanisch mit dem störenden Feld verträglichen Bahnen hat man nun diejenige auszusuchen, welche aus der ungestörten Kreisbahn a bei unendlich langsamen Anwachsen des Feldes entstehen würde (Adiabatensatz von P. Ehrenfest[2])). Da nun die Ringladung $-pe$ auch beim Bohrschen Atommodell näherungsweise quasielastisch an den Kern gebunden ist, leistet ein elektrisches Feld beim Anwachsen vom Betrag Null auf den Betrag $\mathfrak{E}$ die Verschiebungsarbeit

$$W = pe \cdot \mathfrak{E} \cdot \frac{d}{2} .$$

Der um d verschobene Ring muß also einen um W größeren Energieinhalt (kinetische + potentielle Energie der Ringelektronen gegeneinander und gegen den Kern) haben als der ungestörte Ring. Die Debyeschen gestörten Dispersionsbahnen widersprechen aber dieser Forderung, wie man sich durch Rechnung leicht überzeugt. Zu dem ungestörten Radius a bekommt man vielmehr die energetisch richtigen gestörten Bahnen, indem man die Debyeschen Störungsformeln auf einen ungestörten Ring a' anwendet, wobei a' so zu wählen ist, daß nach der Verschiebung die adiabatisch verlangte Energiezunahme W gilt. Im Falle der periodischen Lichtwelle wäre also mit der Verschiebung eine periodische Pulsation des Ringes verbunden, in unserm Fall der Heranbringung des felderzeugenden Valenzelektrons aus dem Unendlichen eine einmalige kleine Zusammenschrumpfung des Ringes bei seiner azentrischen Verschiebung. Übrigens erweist sich diese Radiusänderung als so klein, daß bei der Entwicklung des atomaren Feldes nach Potenzen von a/r in großer Näherung der normale Wert a eingesetzt werden kann. Jenes Zusammenschrumpfen ist aber für die Energiebilanz wesentlich.

Um dann die Serienterme zu erhalten, hat man nach der Methode der Dispersionstheorie zu jeder Entfernung r des Außenelektrons die zugehörige Lage des Ringes aufzusuchen und das Potential des exzentrischen Systems Kern + verschobener Ring auf das Valenzelektron zu bilden und die Verschiebungsenergie W hinzuzufügen, um nach den allgemeinen Methoden von A. Sommerfeld[1]) die quantentheoretischen Bahnen des Valenzelektrons in diesem Potentialfeld zu erhalten[2]).

Das Valenzelektron soll um den Kern eine konzentrische Kreisbahn beschreiben, deren Achse mit der Achse des ungestörten inneren Ringes einen Winkel ϑ einschließt (Fig. 2).

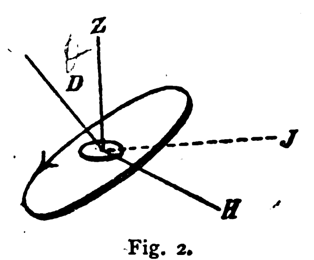


Fig. 2.

$\vartheta = 180^0$ bedeutet also komplanar, aber entgegengesetzt umlaufendes Elektron. Nimmt man die Schnittlinie der beiden Bahnebenen zur x-Achse, die Drehachse, des inneren Ringes zur z-Achse, und hat das äußere Elektron die Umlaufsfrequenz s, so ist seine Bahn beschrieben durch

$$X_0 = r \cos s t, \qquad Y_0 = r \sin s t \cos \vartheta, \qquad Z_0 = r \sin s t \sin \vartheta. \tag{1}$$

Es erzeugt im Ringzentrum ein Feld, dessen periodische Komponenten durch die reellen Teile von

1) P. Debye, Sitzungsber. der Bayr. Akademie, Januar 1915.
2) P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 51, 327, 1916.

1) A. Sommerfeld, l. c.
2) Vgl. Fußnote 1 S. 232.

$$\mathfrak{E}_x = \frac{e}{r^2} e^{is'}, \quad \mathfrak{E}_y = -i\frac{e}{r^2}\cos\vartheta\, e^{is'}, \qquad (1')$$
$$\mathfrak{E}_z = -i\frac{e}{r^2}\sin\vartheta\, e^{is'}$$

gegeben sind.

Die Ringelektronen (beim He nur ein einziges) mögen mit der Frequenz ω auf einem Kreis vom Radius a umlaufen; eins von ihnen beschreibt dann ungestört die Bahn

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t, \quad z = 0. \qquad (2)$$

Steht es unter dem Einfluß der scheinbaren Kernladung $Z' = Z - s_p$ mit der Abschirmungskonstante s_p (bei He ist $Z' = Z = 2$), so sind a und ω durch die mechanische Gleichgewichtsforderung und Quantenbedingung (einquantige Bahn)

$$m a \omega^2 = \frac{Z' e^2}{a^2}, \quad m a^2 \omega = \frac{1 \cdot h}{2\pi} \qquad (3)$$

festgelegt, während das Valenzelektron mit n Quanten den Impuls

$$m r^2 s = \frac{n h}{2\pi} \qquad (3')$$

hat. Aus Gl. (3) und (3') folgt die Frequenzbeziehung

$$\frac{s}{\omega} = \frac{n a^2}{r^2}. \qquad (3'')$$

Die ungestörte Bahn (2) des inneren Elektrons ändere durch den Einfluß des Feldes (1') ihren Kernabstand a um einen Betrag $R(t)$, ihren Phasenwinkel ωt um einen Winkel $\Phi(t)$, und ihre Koordinate $z = 0$ um den Betrag $Z(t)$, wobei R/a, Φ und Z/a als periodische Funktionen

$$\left.\begin{aligned} \frac{R}{a} &= \frac{A}{2} e^{i(s+\omega)t} + \frac{A'}{2} e^{i(s-\omega)t}, \\ \Phi &= \frac{B}{2} e^{i(s+\omega)t} + \frac{B'}{2} e^{i(s-\omega)t}, \\ \frac{Z}{a} &= \frac{G}{2} e^{ist} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

in die Bewegungsgleichungen des Ringelektrons im störenden Feld eingesetzt werden können. Mit Hilfe der potentiellen Energie U von Kern und Ring, die bei dem einen Ringelektron des He die Gestalt

$$U = -Ze^2 : \sqrt{(a+R)^2 + Z^2} = -\frac{2e^2}{a}\left(1 - \frac{R}{a} + \frac{R^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{Z^2}{a^2} + \cdots\right) \qquad (5)$$

hat, erhält man nach dem Muster der Debyeschen Störungstheorie beim Wasserstoffmolekül[1]) als Resultat für die Koeffizienten A, A', B, B', G in (4) die Ausdrücke

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{m a \omega^2}\frac{e^2}{r^2}(1-\cos\vartheta)\frac{\left(2+\frac{s}{\omega}\right)^2 - 1}{\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^4 - \left(1+\frac{s}{\omega}\right)^2} \\ B &= \frac{i}{m a \omega^2}\frac{e^2}{r^2}(1-\cos\vartheta)\frac{\left(2+\frac{s}{\omega}\right)^2 + 2}{\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^4 - \left(1+\frac{s}{\omega}\right)^2} \\ A' &= \frac{1}{m a \omega^2}\frac{e^2}{r^2}(1+\cos\vartheta)\cdot\frac{\left(2-\frac{s}{\omega}\right)^2 - 1}{\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^4 - \left(1-\frac{s}{\omega}\right)^2} \\ B' &= \frac{-i}{m a \omega^2}\frac{e^2}{r^2}(1+\cos\vartheta)\frac{\left(2-\frac{s}{\omega}\right)^2 + 2}{\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^4 - \left(1-\frac{s}{\omega}\right)^2} \\ G &= \frac{-2i}{m a \omega^2}\frac{e^2}{r^2}\sin\vartheta\cdot\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 - 1} \end{aligned} \qquad (6)$$

Die Entwicklung nach der kleinen Größe $s/\omega = na^2/r^2$ gibt mit Benutzung von (3)

$$\left.\begin{aligned} A &= (1-\cos\vartheta)\frac{1}{n}\frac{3}{4}\left(1 - \frac{7}{6}\frac{s}{\omega}\right) \\ B &= i(1-\cos\vartheta)\frac{1}{n}\frac{6}{4}\left(1 - \frac{11}{6}\frac{s}{\omega}\right) \\ A' &= -(1+\cos\vartheta)\frac{1}{n}\frac{3}{4}\left(1 - \frac{7}{6}\frac{s}{\omega}\right) \\ B' &= i(1+\cos\vartheta)\frac{1}{n}\frac{6}{4}\left(1 - \frac{11}{6}\frac{s}{\omega}\right) \\ G &= i\frac{s}{n\omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

G ist also in s/ω um eine Größenordnung kleiner als A, B, A', B'.

Damit sind die Störungen (4) bestimmt: Aus ihnen setzt sich die Bahn des gestörten Ringelektrons zusammen (statt (2))

$$\left.\begin{aligned} x &= (a+R)\cos(\omega t + \Phi) = \\ &= a\left[\cos\omega t + \frac{R}{a}\cos\omega t - \Phi\sin\omega t\right] \\ y &= (a+R)\sin(\omega t + \Phi) = \\ &= a\left[\sin\omega t + \frac{R}{a}\sin\omega t - \Phi\cos\omega t\right] \\ z &= Z = a\cdot\frac{Z}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Bildet man aus (1) und (8) die Entfernung l zwischen dem Valenz- und dem Ringelektron, so erhält man, da

$$l^2 = (X_0 - x)^2 + (Y_0 - y)^2 + (Z_0 - z)^2,$$

1) P. Debye, l. c.

den folgenden Ausdruck

$$\frac{l^2}{r^2} = 1 - \frac{2a}{r}\Big[(\cos st \cos\omega t + \cos\vartheta \sin st \sin\omega t) + \\ + \frac{R}{a}\Big(\cos(s+\omega)t\cdot\frac{1-\cos\vartheta}{2} + \cos(s-\omega)t\,\frac{1+\cos\vartheta}{2}\Big) \\ - \Phi\Big(\sin(s+\omega)t\cdot\frac{1-\cos\vartheta}{2} - \sin(s-\omega)t\,\frac{1+\cos\vartheta}{2}\Big)\Big] \\ + \frac{a^2}{r^2} = 1 - 2M + N^2$$

mit $M = \frac{a}{r}[\cdots]$, $N = \frac{a}{r}$. (9)

Bildet man die reziproke Größe r/l, entwickelt bis zu Gliedern zweiter Ordnung

$$\frac{r}{l} = 1 + M + \frac{1}{2}(3M^2 - N^2) + \cdots$$

und bestimmt den zeitlichen Mittelwert, so erhält man nach einiger Rechnung

$$\overline{M} = \frac{a}{r}\Big[\frac{1-\cos\vartheta}{8}(A - iB) + \frac{1-\cos\vartheta}{8}(A' + iB')\Big]$$

$$\overline{M^2} = \frac{a^2}{r^2}\Big\{\frac{1+\cos^2\vartheta}{4} + \\ + \frac{1}{128}(1-\cos\vartheta)^2[(A-iB)^2 + 2A^2 + 2(iB)^2] + \\ + \frac{1}{128}(1+\cos\vartheta)^2[(A'+iB')^2 + 2A'^2 + 2(iB')^2] - \\ - \frac{1-\cos^2\vartheta}{32}(A - iB)(-A' - iB')\Big\}. \quad (10)$$

Andererseits ist die in obiger Verschiebungsarbeit W vorkommende Größe $d/2$ zu entnehmen aus der Entwicklung

$$W = \frac{e^2}{r^2}\cdot\frac{d}{2} = \frac{e^2}{2r}\Big(\frac{\overline{l}}{r} - 1\Big) = \\ = -\frac{e^2}{r}\Big[\frac{\overline{M}}{2} + \frac{1}{4}(\overline{M^2} - \overline{N^2})\Big]. \quad (10')$$

Das mittlere Potential des in der Entfernung r kreisenden Elektrons gegen Kern $Z = 2$ und Ring $-1e$ ist also beim Helium

$$V = -\frac{e^2}{r}\Big(2 - \Big(\overline{\frac{r}{l}}\Big)\Big) + W.$$

Mit Benutzung von (7), (10), (10') ergibt sich

$$V = -\frac{e^2}{r}\Big(1 + \alpha_1\frac{a}{r} + \alpha_2\frac{a^2}{r^2} + \alpha_3\frac{a^3}{r^3} + \cdots\Big) \quad (11)$$

mit den Abkürzungen

$$\alpha_1 = \frac{9\cos\vartheta}{16n}, \\ \alpha_2 = -\frac{1 + 5\cos^2\vartheta}{16} - \\ - \frac{45(1 + 150\cos^2\vartheta + \cos^4\vartheta)}{n^2\cdot 4096} \quad (12)$$

als **mittleres** Potential des auf einer geneigten Kreisbahn umlaufenden Valenzelektrons gegen Kern und verschobene Kreisbahn des inneren Ringelektrons beim Helium. Für $\vartheta = 0^0$ und $\vartheta = 180^0$ ist überdies (11) nicht nur das mittlere Potential, sondern das Potential in jedem Punkt der komplanaren Kreisbahn. Wir betrachten nun im Folgenden den Ausdruck (11), (12) als Potential des Valenzelektrons in einem beliebigen Punkt des Abstandes r vom Kern, auch wenn sich das Valenzelektron auf irgendeiner andern Bahn, etwa einer Ellipse, durch diesen Punkt hindurch bewegt.

Die Reihenentwicklung (11) des Potentials V auf das Valenzelektron bildet die Grundlage der Quantelung seiner Umlaufsbahnen im Atomfeld. Herr Sommerfeld hat die allgemeine Methode zur Ableitung der zugehörigen Kombinationsterme[1]) mit Hilfe komplexer Integration gegeben nur für den Fall, daß allein **gerade** Potenzen von $\frac{a}{r}$ in V vorkommen (fehlende exzentrische Ringverschiebung). Die Erweiterung der Sommerfeldschen Methode auf Potentialfelder der Gattung (14) führt zu folgender Bahnenergie des Valenzelektrons bei n azimutalen und n' radialen Quanten

$$h\nu = \frac{Nh}{(n+n')^2}\cdot\frac{1}{\Big(1 - \frac{n}{n+n'}\delta_n\Big)^2} \quad (13)$$

worin δ_n die nur von n, nicht von n' abhängende Größe bedeutet:

$$\delta_n = \alpha_1\Big(\frac{a}{n^2 a_0}\Big) + \Big(\alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{2}\Big)\Big(\frac{a}{n^2 a_0}\Big)^2 + \\ + \Big(\alpha_3 + 3\alpha_1\alpha_2 + \frac{\alpha_1^3}{2}\Big)\Big(\frac{a}{n^2 a_0}\Big)^3 + \cdots \quad (13')$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{2\pi m e^4}{h^3} \text{ (Rydberg-Frequenz)}, \\ a_0 &= \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2} \text{ (innerster Wasserstoff-ringradius)}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Die in δ_n auftretende Größe $a/n^2 a_0$ ist im wesentlichen gleich a/r. Die Stellung ϑ der schiefen Kreisbahnen ist geregelt durch die Sommerfeldschen Bedingungen[2])

$$\cos\vartheta = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad \text{wobei} \quad n_1 + n_2 = n, \quad (15)$$

erhalten aus der Quantelung im Raum. Jede quantentheoretisch mögliche Bahn ist nun charakterisiert durch die drei Quantenzahlen $n' n_1 n_2$.

---

1) A. Sommerfeld, Münchener Akademieberichte, November 1916.

2) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **51**, 31, 1916, Formel 22.

$n = n_1 + n_2$ bestimmt das Flächenmoment $mr^2\dot{\varphi} = nh/2\pi$, die Neigung ϑ der inneren gegen die äußere Elektronenbahn ist durch (15) gegeben, und die Exzentrizität ε wird gefunden aus $\sqrt{1-\varepsilon^2} = n/n + n'$. Rechnet man die Terme ν_{He} aus (13) für verschiedene positiv ganzzahlige Tripel $n' n_1 n_2$ aus, so ergeben sich durch Vergleich mit den Serientermen $\nu_H = N/(n+n')^2$ des Wasserstoffs[1]) die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte $\nu_{He} : \nu_H$.

	Beobachtung		Theorie		
	ν_{He}	$\nu_{He} : \nu_H$	$\nu_{He} : \nu_H$	$n' n_1 n_2$	ϑ
S_I	32 031 13 445 7 369 4 646	1,168 1,103 1,075 1,059	Näherung unzureichend		
P_I	27 174 12 099 6 817 4 367	0,982 0,992 0,994 0,995	0,9979 0,9986 0,9989 0,9991	002 102 302 402	90° " " "
D_I	12 204 6 863 4 391	1,0011 1,0009 1,0007	0,9996 0,9997 0,99976	003 103 203	90° " "

	Beobachtung		Theorie		
	ν_{He}	$\nu_{He} : \nu_H$	$\nu_{He} : \nu_H$	$n' n_1 n_2$	ϑ
S_{II}	38 453 15 073 8 011 4 963	1,402 1,237 1,168 1,131	1,37 1,225 1,160 1,125	110 210 310 410	0° " " "
P_{II}	29 222 12 745 7 093 4 509	1,0657 1,0458 1,0337 1,0278	1,050 1,034 1,023 1,019	020 120 220 320	0° " " "
D_{II}	12 208 6 865 4 393	1,0012 1,0010 1,0009	1,0181 1,0135 1,0108	030 130 230	0° " "

Theorie		
$\nu : \nu_H$	$n' n_1 n_2$	ϑ
1,029 1,020 1,014 1,011	011 111 211 311	60° " " "
— 1,012 1,009 1,007	— 021 121 221	 48,20° " "
1,0062 1,0046 1,0039	012 112 212	70,53° " "

1) Für N ist dabei der nach F. Paschen, Ann. d. Phys. **50**, 935, 1916 für Helium geltende Wert $N = 109722$ genommen.

Nach einer zuerst von A. Sommerfeld vertretenen Auffassung besitzen in den Serien

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Hauptserie} & \nu = S - P \\ \text{1. (diffuse) Nebenserie} & \nu = P - D \\ \text{2. (scharfe) Nebenserie} & \nu = P - S \end{array}\right\} \quad (16)$$

die S-Terme die azimutale Quantenzahl $n = 1$, die P-Terme $n = 2$, die D-Terme $n = 3$, während die radiale Quantenzahl n' die Werte 1, 2, 3 ·· durchläuft. S-Terme gibt es also mit den Wertetripeln $(n' n_1 n_2) = (n', 0, 1)$ und $(n', 1, 0)$, P-Terme mit $(n', 0, 2)$, $(n', 1, 1)$ und $(n', 2, 0)$, D-Terme mit $(n', 0, 3)$, $(n' 1, 2)$, $(n', 2, 1)$ und $(n', 3, 0)$. Das sind zwei S-Termserien, drei P-Term- und vier D-Termserien. Empirisch gibt es ebenfalls zwei S-Termserien, nämlich S_I (Parhelium) und die einfach beobachteten S_{II}-Terme; ferner drei P-Termserien, nämlich P_I und die beiden Terme von P_{II}; ferner wäre es möglich, daß von den beobachteten drei D-Termen D_I und zwei D_{II}-Terme einer noch doppelt wäre, D_{II} also in Wahrheit ein Triplet darstellt. Die Zusammenstellung der Tabelle, graphisch in der Fig. 3 aufgetragen, zeigt aber, daß nach unserer Näherungsrechnung die Terme $(n' 0 2)$, $(n' 0 3)$, $(n' 2 0)$, $(n' 1 2)$, allenfalls auch $(n' 1 0)$ mit beobachteten Termen nahe zusammenfallen, während die übrigen Terme mit den vorigen keine genügend engen Duplets bilden. Man beachte aber, daß unsere Näherungsmethode, besonders die räumliche Quantelung (15) nur als provisorisch anzusehen ist[1]). In Wirklichkeit werden z. B. die gegeneinander geneigten Bahnachsen noch säkulare Präzessionen ausführen, deren Periode zu quanteln ist, an Stelle der räumlichen Quantelung (15). Deshalb kann die hier gegebene Theorie, besonders die erhaltenen Zahlenwerte, nur als eine erste Orientierung über die Möglichkeit, das Serienspektrum des Heliums dynamisch zu deuten, angesehen werden.

Unsere Näherung ist besonders unzureichend bei den S-Termen mit $n = 1$, weil hier die äußere Elektronenbahn zu dicht am inneren Elektron vorbeiführt. Das hängt damit zusammen, daß die S-Terme hier als starke Störungen der Wasserstoffterme $n = 1$, $n' = 0, 1, 2 \cdots$ aufgefaßt werden, im Gegensatz zu der üblichen Beschreibung durch schwach gestörte Laufzahlen $n = 1,5; 2,5; 3,5 \cdots$. Auch bei den P-Termen $(n = 2)$ würden die dritten Glieder der Reihenentwicklung vermutlich die erhaltenen Quotienten

1) Die exakte Behandlung der gegenseitigen Bahnstörungen mit Hilfe Fourierscher Reihen nach Winkelkoordinaten und deren Quantelung (Schwarzschild, Burgers), die Verf. gegenwärtig durchführt, konnte bereits die erste Näherung der hier gegebenen Rechnungsmethode bestätigen und dadurch die obige Anwendung des Adiabatensatzes auf die Verschiebungsenergie W rechtfertigen.

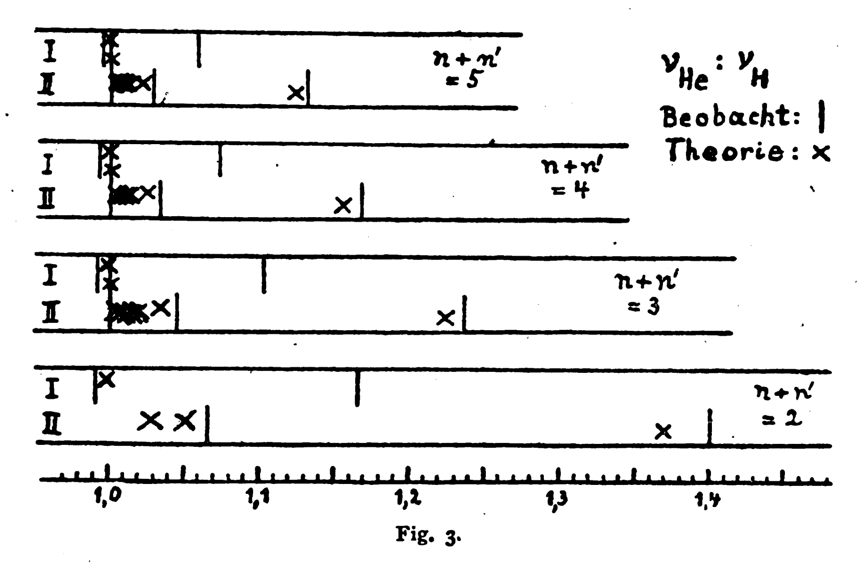


Fig. 3.

ν_{He}/ν_H noch merklich vergrößern. Ferner bemerkt man, daß Umkehrung des Vorzeichens von $\cos\vartheta$ (Umkehrung des Umlaufssinns des äußeren Elektrons) gerade das Hauptglied α_1 der Reihenentwicklung δ_n (13) umkehrt, also zu der nahezu entgegengesetzten Abweichung des *He*-Terms vom entsprechenden *H*-Term führen würde. Die Forderung positiver Quantenzahlen n_1 und n_2 schließt aber solche Umkehrung aus.

In der Fig. 3 sind die aus der Beobachtung abstrahierten Termwerte $\nu_{He} : \nu_H$ als Striche eingetragen, für die verschiedenen Werte von $n + n'$ und von He_{I} und He_{II} getrennt, dazu als Kreuze die theoretischen Termwerte $\nu_{He} : \nu_H$ der Tabelle.

Die Werte der *S*-Terme von He_{II} in der Tabelle, gehörend zu den Quantentripeln (n' 1 0), und die entsprechenden Kreuze der Figur sind wegen der unzureichenden Konvergenz der Störungsreihen nicht mit Hilfe von (13) berechnet worden. Vielmehr ist, einer Anregung von Herrn Sommerfeld folgend, der in (13) benötigte Wert von $\delta_{n=1}$ ($n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $\vartheta = 0^0$) erhalten aus der von H. Rau[1]) gemessenen Ionisierungsspannung, die zur Erzeugung der Fowlerschen Heliumserie

$$\nu = N\,4\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

nötig ist. Die gemessene Ionisierungsspannung ist 75—80 Volt, umgerechnet gleich einer Arbeit $Nh \cdot 5{,}55$ bis $5{,}91$. Davon möge die Arbeit

$$Nh \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right)$$

für den Sprung des innern Elektrons aus der normalen einquantigen Bahn in die vierquantige Fowlersche Ausgangsbahn verbraucht werden, nachdem das äußere Elektron bereits entfernt gedacht ist. Der Rest $Nh \cdot 1{,}80$ bis $2{,}16$ bleibt also zur Abtrennung dieses äußeren Elektrons vom neutralen Helium übrig. Ist im neutralen Helium der Normalzustand durch das Quantentripel $(n' n_1 n_2) = (0, 1, 0)$ (Grundglied von S_{II} in obiger Tabelle) charakterisiert, so ist nach (13) die Abtrennungsarbeit $Nh : (1-\delta_1)^2$ für seinen Sprung ins Unendliche nötig.

Aus der Gleichsetzung

$$\frac{1}{(1-\delta_1)^2} = \begin{cases} 1{,}80 \\ 2{,}16 \end{cases}$$

folgt dann als Mittel $\delta_1 = 0{,}29$.

Mit diesem Zahlenwert sind die theoretischen Werte S_{II} nach (13) berechnet und in die Figur als Kreuze eingetragen worden. Umgekehrt kann man aber auch aus der dynamischen Deutung der *S*-Terme von He_{II} rückwärts den Wert δ_1 extrapolieren und mit ihm die Energie des normalen *He*-Atoms mit $n' = 0$, $n_1 = 1$, $n_2 = 0$ nach (13) berechnen. Man findet so den Energiewert $-Nh \cdot 6{,}16$ bis $6{,}20$ als innere Energie des neutralen Heliums im Normalzustand, wenn dieses besteht aus dem Kern $+2e$, umkreist von einem Elektron auf einquantiger Kreisbahn, in weiterem Abstand von einem zweiten Elektron auf ebenfalls einquantiger[1]) komplanarer Kreisbahn (Kreisbahn cum grano salis zu verstehen, da sich die beiden Elektronen stören). Dieses Modell des normalen Heliums steht im Gegensatz zu dem von N. Bohr propagierten Modell[2]),

1) H. Rau, Berichte d. phys. med. Ges. Würzburg, 26. Febr. 1914.

1) Bei fehlender gegenseitiger Störung würden die Radien der beiden einquantigen Bahnen gleich $a_0/2$ und $a_0 \cdot 1$ sein (a_0 ist in (14) definiert).

2) Das Bohrsche Modell zweier auf demselben Kreis diametral gegenüber rotierender Elektronen gibt bekanntlich die falsche Dispersion. Das hier verwendete Heliummodell, zwei einquantige Kreisbahnen mit verschiedenen Radien, wurde von Sommerfeld vorgeschlagen.

bei dem die beiden Elektronen auf ein und demselben einquantigen Kreis diametral gegenüberliegend laufen. Das Bohrsche Modell hat den Energieinhalt $-Nh \cdot 2(2-0{,}25)^2 = -Nh \cdot 6{,}125$. Aus unserer Deutung der S-Terme von He_{II} ergibt sich also, daß das hier benutzte He-Modell mit seiner Energie $-Nh \cdot 6{,}16$ bis $6{,}20$ um ein geringes stabiler ist als das von Bohr vorgeschlagene. —

Nachtrag bei der Korrektur. Die Rotationsachse eines kreisenden Elektrons, welche sich mit einer im Raum festen Achse gleichrichten will, mit der sie einen Winkel Θ bildet, führe bei unverändertem Θ (fehlende Nutation) eine Präzessionsbewegung um z aus. Ist $2\pi o$ die Präzessionsfrequenz, klein gegen die Rotationsfrequenz s des Elektrons, so ist die kinetische Energie näherungsweise gleich

$$mr^2 (s + o \cos \Theta)^2/2,$$

die Gesamtenergie also um einen Betrag

$$E = mr^2 s o \cos \Theta$$

größer als die normale Energie bei fehlender Präzession. Aus der Quantelung dieser mit o periodischen Zusatzenergie: $\overline{E} = n_1 h \cdot o$ folgt sofort

$$\cos \Theta = n_1/n_s, \tag{1}$$

wenn $n_s = mr^2 s/h$ die Zahl der Energiequanten sh ist, aus denen sich wegen $oh \ll sh$ die Gesamtenergie im wesentlichen aufbaut, übereinstimmend mit der Regel (15), die von Sommerfeld auf ganz andere Art abgeleitet wurde. — Die zwei kreisenden Elektronen beim Helium können eine Präzessionsbewegung ausführen, so daß ihre Rotationsachsen mit einer im Raume festen Achse z die unveränderlichen Winkel ϑ und Θ einschließen, während ihre Knotenlinie $\perp z$ mit der einen Frequenz $2\pi o$ vorrückt. Die Quantelung der mit o periodischen Zusatzenergie $\overline{E} = ma^2 \omega o \cos \vartheta + mr^2 s o \cos \Theta$, $\overline{E} = n_1 h \cdot o$, führt zu

$$n_s \cos \Theta + n_\omega \cos \vartheta = n_1. \tag{2}$$

Da andererseits die potentielle Energie V der beiden Kreisbahnen nur von $\vartheta - \Theta$ abhängt, führt die Bedingung des Gleichgewichts

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial V}{\partial \Theta} = -\frac{\partial T}{\partial \vartheta},$$

d. h. $ma^2 \omega o \sin \vartheta = mr^2 s o \sin \Theta$ zu

$$n_s \sin \Theta + n_\omega \sin \vartheta = 0 \tag{3}$$

als zweite Bestimmung für ϑ und Θ bei gegebenen $n_s n_\omega n_1$. Die aus (2) (3) entspringenden diskreten Werte ϑ, Θ führen zu von (15) abweichenden gegenseitigen Stellungen der beiden Kreise gegeneinander. Die Diskussion von (2) (3) zeigt zu jedem n_s bei $n_\omega = 1$ nur zwei Stellungen (ϑ, Θ), entsprechend den zwei Termsystemen He_I und He_{II}. Die Duplizität der He_{II}-Terme dürfte möglicherweise auf Nutationen mit quantenmäßigen bestimmten Frequenzen beruhen.

(Eingegangen 25. März 1919.)

Szintillation bei Kanalstrahlen.

Von H. v. Dechend u. W. Hammer.

In dem „Handbuch der Radiologie“ von E. Marx Bd. 4 ist in der erschöpfenden Zusammenfassung der Kanalstrahlen-Arbeiten durch W. Wien auch unsere Beobachtung der Szintillation der Kanalstrahlen (Seite 15) erwähnt, die Realität dieses Effekts aber aus energetischen Gründen bestritten worden. Auf Seite 9 wird berechnet, daß beim Auftreffen eines Wasserstoff-Kanalstrahlteilchens von 10^8 cm/sec Geschwindigkeit auf einen Sidot-Blendeschirm die erregte Lichtemission $0{,}4 \cdot 10^{-10}$ erg beträgt; da die Reizschwelle des Auges nach v. Kries bei $2 \cdot 10^{-10}$ erg liegt, so ergibt sich, daß die Beobachtung der Szintillation mit Kanalstrahlen von 10^8 cm/sec nicht möglich ist. Wir haben aber auch bei unseren Versuchen über Szintillation derartig langsame Strahlen nicht benutzt, sondern Strahlen, deren Geschwindigkeit mindestens $3 \cdot 10^8$ cm/sec betrug. Wir können diese Zahl als ganz sicher bezeichnen, da die Untersuchung mit derselben Apparatur erfolgte, mit der der eine von uns die Geschwindigkeit der Strahlen nach direkter Methode (Handbuch d. Radiologie, Bd. 4, S. 120) zu $2{,}51 \cdot 10^8$ cm/sec gefunden hat. Bei dieser Geschwindigkeitsmessung war aber absichtlich, um konstante Verhältnisse zu erhalten, nicht mit den härtesten erzeugbaren Strahlen gearbeitet worden, während sich umgekehrt die Szintillation nur bei Anwendung der schnellsten, mit der Apparatur erzielbaren Strahlen beobachten ließ, so daß die Geschwindigkeit dieser sicher erheblich über $3 \cdot 10^8$ cm/sec lag, und demgemäß die Energie des erregten Lichtes $3{,}6 \cdot 10^{-10}$ erg überschritt. Gerade der Umstand, daß sich die Szintillation nur bei stärkster Forcierung des Rohres beobachten ließ, worauf auch in unserer ersten Veröffentlichung[1]) ausdrücklich hingewiesen wurde, beweist wohl die Realität des Effekts.

Die Szintillation der Kanalstrahlen bietet daher einen Weg, die erwähnte Reizschwelle des Auges zu ermitteln und es ist beabsichtigt, sobald eine Apparatur geschaffen ist, welche Strah-

---

1) Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 1910, S. 531.

len der erforderlichen Härte in genau meßbarer Weise herzustellen gestattet, die Konstante in dieser Weise zu bestimmen.

Freiburg Br. u. Hamburg, 6. Febr. 1919.

(Eingegangen 14. Februar 1919.)

Magnetische Mittelwerte des Jahres 1918.

Von Ad. Schmidt.

Nach den Beobachtungen des Potsdamer Magnetischen Observatoriums des Preußischen Meteorologischen Instituts waren die Durchschnittswerte der Elemente während des verflossenen Jahres:

westliche Deklination . .	7°49',3
nördliche Inklination . .	66°30',9
Horizontalintensität . . .	0,18646 Γ.

Die Änderungen gegen das Vorjahr betrugen (vgl. diese Zeitschr. **19**, 195, 1918): —9,1, +1,7, —25 γ. Sie stimmen innerhalb der Grenzen der Sicherheit, die man den Jahresmittelwerten zuschreiben kann, mit den Differenzen von 1917 gegen 1916 überein.

Für andere Orte in Deutschland entnimmt man die Werte der magnetischen Elemente am besten den von K. Haußmann bearbeiteten „Magnetischen Übersichtskarten von Deutschland für 1912" (Petermanns Mitteilungen 1913), indem man ihnen zur Umrechnung auf die Mitte des laufenden Jahres (1919,5) die Korrektionen —1°10', +12' und —0,0018 Γ hinzufügt. Für die in den „Veröffentlichungen des Meteorologischen Instituts" (Nr. 217, 224, 276) erschienenen „Magnetischen Karten von Norddeutschland und Südwestdeutschland sind die entsprechenden Reduktionen —1°34', +12', —0,0022 Γ.

Entsprechend der kräftigen Sonnenflecken-Entwicklung (die Wolf-Wolfersche Relativzahl betrug im Jahresmittel 77,6) war das Jahr reich an Störungen, unter denen sich indessen keine besonders starke befand.

(Eingegangen 14. Februar 1919.)

Berichtigung

zur Arbeit von T. Heurlinger, Zur Theorie der Bandenspektren. (Diese Zeitschr. **20**, 188—190, 1919.)

Die Fußnote S. 189 soll lauten: Auch in den Zeilen kann ein systematischer Gang nicht festgestellt werden.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. A. v. Antropoff (früher Dozent für Physikalische Chemie am Polytechnikum in Riga, zuletzt Leiter des Radiologischen und Chemischen Laboratoriums an der Zentralkammer für Maße und Gewichte in Petersburg) für Radioaktivität, an der Universität Königsberg Dr. Hans Falckenberg für Mathematik.

Berufen: Der ord. Professor für Astronomie an der Universität Straßburg Dr. Julius Bauschinger in gleicher Eigenschaft an die Universität Königsberg, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin und ständiges Mitglied des Aufsichtsamtes für Privatversicherung Regierungsrat Dr. Paul Eugen Böhmer zum ord. Professor der Versicherungsmathematik an der Technischen Hochschule Dresden.

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Göttingen Dr. Richard Zsigmondy zum ord. Professor für anorganische Chemie ebendaselbst, der Repetitor an der Universität Lüttich Apotheker Dr. Huybrechts zum a. o. Professor für analytische Chemie daselbst, Dr. Heinrich Wigge zum Adjunkten am Physikalischen Institut des Polytechnikums in Köthen mit einem Lehrauftrag für Physik, Mathematik und Funkentelegraphie, D. Mac Candish zum ord. Professor für angewandte Chemie an der Universität Leeds, J. R. Partington Lecturer an der Universität Manchester zum ord. Professor für Chemie am East London College, an der Universität Hamburg zu ord. Professoren Dr. Paul Rabe für Chemie, Dr. Rich. Schorr für Astronomie, der Privatdozent für Mathematik an der Universität Frankfurt/M. (früher a. o. Professor an der Universität Straßburg), Dr. Richard Edler v. Mises zum ord. Professor für Festigkeitslehre, Hydromechanik und Aeromechanik an der Technischen Hochschule Dresden.

Neue Lehraufträge: An der Universität Berlin Professor Dr. Otto v. Baeyer für Elektronik und Ionik und Professor Dr. Otto Hahn (Mitglied des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Chemie) für Radioaktivität.

In den Ruhestand: Der ord. Professor für analytische Chemie an der Universität Lüttich L. L. de Koninck, der ord. Professor für Astronomie und Direktor der Sternwarte in Königsberg Dr. Hans Battermann, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Freiburg i. B. Geh. Hofrat Dr. Ludwig Stickelberger (mit dem Titel und Rang eines ord. Honorarprofessors).

Gestorben: Der Privatdozent für drahtlose Telegraphie und Hochfrequenzmaschinen an der Technischen Hochschule Zürich D. Korda.

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1919.

Technische Hochschule Aachen.

Starke: Experimentalphysik II, 4; Übungen im physikalischen Laboratorium: a) Praktikum, nach Verabredung, b) Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl. — **Seitz:** Theoretische Physik, 2; Experimentalphysik enzyklopädischer Kurs, 2. — **Steubing:** Photographie I und II, 1, Übungen, 2—3; Theorie der Wärmestrahlung, 1. — **Hopf:** Quantentheorie, 1; Variationsprinzipien der Mechanik, 1. — **Polis:** Klimatologie, 2; Ausgewählte Kapitel der Meteorologie, 1; Meteorologische Technik, 1, Übungen, 2—4. — **N. N.:** Allgemeine Elektrotechnik, 5; Theoretische Elektrotechnik, 2; Elektrotechnisches Praktikum, 8 und 5. — **N. N.:** Ausgewählte Kapitel der praktischen Elektrotechnik, 1; Einleitung in die Elektrotechnik, 2; Konstruktionslehre der Elektrotechnik, 3; Elektrotechnische Konstruktionsübungen, 2. — **Finzi:** Elektrische Zentralanlagen und Leitungen, 2, Übungen, 2; Elektromotorische Antriebe in Berg- und Hüttenwerken, 2. — **Schreber:** Technische Thermodynamik, 2; Besprechungen neuerer Arbeiten auf dem Gebiete der Wärmekraftmaschinen, 1. — **Fischer:** Grundzüge der Hochspannungstechnik, 2. —

Bredt: Organische Experimentalchemie I, 4; Allgemeine Übersicht über die organische Chemie, 2; Organisches Praktikum, tägl. — **Classen:** Allgemeine und an-



organische Experimentalchemie, 4; Anorganisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Elektroanalytisches und elektrochemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Wilski**: Markscheiden und Feldmessen II, 3, Übungen, 1 Tag; Geophysik, 1. — **Rau**: Chemische Technologie II, 2, IV, 2; Entwerfen von chemischen Apparaten und Fabrikanlagen, Übungen, 4; Chemisch-technisches Praktikum, tägl., für Bergleute, 12. — **Ruer**: Physikalische Chemie II, 2; Ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie, 1; Übungen in physikalischer Chemie für Hüttenleute, 3, für Chemiker, 1 Vormittag, für Fortgeschrittene, tägl. außer Sonnabend; Allgemeines hüttenmännisches Praktikum, 3. — **Fischer**: Maßanalyse und Gasanalyse, 1; Spezielle Elektrochemie, 1. — **Kapff**: Chemische Technologie der Gespinstfasern: Färberei, Bleicherei usw., 2, Übungen, 4. — **N. N.**: Markscheiderische Zeichen- und Rechenübungen, 2. — **Levy**: Heterozyklische Verbindungen, 2. — **Lipp**: Über organisch-analytische Arbeitsmethoden, 1. —

Blumenthal: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der Mathematik, 2 *g*. — **N. N.**: Höhere Mathematik III, 3; Elemente der Differential- und Integralrechnung, 5, Übungen, 1. — **v. Kármán**: Mechanik I, 4, Übungen, 1, II, 3, Übungen, 1; Flugtechnische Aerodynamik, 2 *g*. — **Kötter**: Darstellende Geometrie II, 2, Übungen, 2; Elemente der darstellenden Geometrie, 2, Übungen, 2. — **Gasiorowski**: Oberflächen zweiter Ordnung, 2. — **Gast**: Praktische Geometrie I, 2, II, 1; Geodätisches Praktikum I, 1 Tag, II, 4; Geodätische Ausarbeitungen, 4; Geographische Ortsbestimmung, 2, Übungen, 2. —

Universität Basel.

Hagenbach: Experimentalphysik I, 6; Physikalisches Praktikum für Vorgerücktere, ganztägig, für Anfänger (mit Veillon und Zickendraht), 8; Demonstrationsversuche, 1; Physikalisches Kolloquium, 14 tägig, 2 *g*. — **Matthies**: Strahlungs- und Quantentheorie, 4, Übungen, 1 *g*; Einführung in die analytische Behandlung der Naturwissenschaften, 2; Mathematisch-physikalisches Seminar, 2 *g*. — **Veillon**: Vektoranalysis, 1; Handfertigkeits-Praktikum (mit Zickendraht), 2. — **Zickendraht**: Das magnetische Feld und seine Anwendungen, 2. — **Zehnder**: Geschichte der Physik, 2; Physikalische Weltanschauungen I: Mikrokosmos, 2. —.

Rupe: Chemisches Vollpraktikum für organische Chemie, tägl.; Chemie der Benzolderivate, 4; Chemisches Kolloquium (mit Fichter und Bernoulli), 1 *g*. — **Fichter**: Anorganische Experimentalchemie, 6; Analytisches Halbpraktikum für Chemiker und Pharmazeuten, 9, Übungen in der qualitativen Analyse für Mediziner, 9; Chemisches Vollpraktikum: Anorganische und elektrochemische Übungen und Arbeiten, tägl. — **Bernoulli**: Allgemeine physikalische Chemie, 2; Chemisches Praktikum für Lehramtskandidaten und Naturwissenschaftler, 9; Physikalisch-chemisches Praktikum für Anfänger, 4; Vollpraktikum, tägl. — **Kreis**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel I, 2; Übungen in der Untersuchung von Lebensmitteln, 4; Arbeiten im Laboratorium für angewandte Chemie, tägl. —

Mohrmann: Algebra, 4, Übungen, 1; Ausgewählte Kapitel der Geometrie, 4; Mathematisches Seminar (mit Spieß), 1 *g*. — **Spieß**: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, Proseminar, 1; Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen, 3. — **Niethammer**: Sphärische Astronomie, 3; Theorie astronomischer Instrumente, 1 *g*; Astronomische Übungen, für Vorgerückte, 3, für Anfänger, 3. — **Flatt**: Pädagogisches Seminar, mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung II, 2; Methoden der darstellenden Geometrie, 2; Geschichte und Methodik der physischen Erziehung, 1. —

Universität Berlin.

Rubens: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik und Wärmelehre, 5; Experimentalvorträge über Licht und Elektrizität, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium, $1^1/_2$ *g*; Arbeiten im Physikalischen Laboratorium für Geübtere (mit Wehnelt), tägl. — **Planck**: Mechanik deformierbarer Körper, 4; Mathematisch-physikalische Übungen, 1 *g*. — **Wehnelt**: Praktische Übungen für Anfänger I und II (mit Blasius), 7; Physikalisches Praktikum für Pharmazeuten, 3; Praktikum zur Erlangung von Handfertigkeit für das physikalische Arbeiten, 3; Mathematische Ergänzungen zum physikalischen Praktikum, 1 *g*. — **v. Laue**: Thermodynamik, 4; Mathematisch-physikalische Übungen, 1 *g*. — **Hellmann**: Theorie und Gebrauch der meteorologischen Instrumente, mit Übungen, $2^1/_2$; Meteorologisches Kolloquium, für Vorgerücktere, 1 *g*. — **Einstein**: Relativitätstheorie, $1^1/_2$. — **Hergesell**: Die wissenschaftliche Erforschung der freien Atmosphäre, 1. — **Kohlschütter**: Die Probleme der Erdmessung, 1. — **Warburg**: Kathodenstrahlen, 2. — **Schmidt**: Erdmagnetismus, mit praktischen Übungen, 2, Mathematische Ergänzungen, 1 *g*. — **Neesen**: Geometrische Optik und optische Instrumente, 2. — **Blasius**: Übungen zum Praktikum, 1 *g*. — **E. Meyer**: Ausgewählte Kapitel der technischen Mechanik, 2. — **Krigar-Menzel**: Verschiedene Gebiete der theoretischen Physik, 4. — **Leß**: Praktische Wetter- und Klimakunde, 1; Über die jeweiligen Witterungsvorgänge, 1 *g*. — **Byck**: Kinetische Gastheorie, 2; Aerodynamik, 2. — **v. Baeyer**: Physik der radioaktiven Strahlen, 1. — **Franck**: Experimentelle Grundlagen der Quantentheorie, 1; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen für Fortgeschrittene, tägl. *g*. — **Gehrcke**: Ausgewählte Kapitel aus der Optik, 1. — **Grüneisen**: Theorie der Wechselströme, 2. — **Hertz**: Die Physik der Röntgenstrahlen, 1. — **Kiebitz**: Elektrische Schwingungen, 2. — **Reichenheim**: Physik der Sonne, 1 *g*. — **Henning**: Einführung in die theoretische Physik, 2. — **Reiche**: Elektronentheorie, 3. — **Westphal**: Das gesamte Spektrum, mit Experimenten, 1; Mathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik, 1. — **Scheffer**: Praktikum der wissenschaftlichen Mikroskopie, einschließlich der technologischen Mikroskopie, für Fortgeschrittene, nach Verabredung; Praktikum der wissenschaftlichen Photographie, für Fortgeschrittene, nach Verabredung. —

Fischer: Praktische Arbeiten im chemischen Laboratorium (mit Gabriel, Traube, Leuchs, Schrauth und Tiede), tägl.; Kursus für Mediziner und Zahnärzte, 6. — **Nernst**: Anorganische Experimentalchemie, 5; Anorganisch-chemisches Praktikum (mit Marckwald), tägl.; Physiko-chemische Übungen, 7; Physikochemische Arbeiten, tägl.; Physikochemisches Kolloquium, 1 *g*; Galvanische Stromerzeugung, 1 *g*. — **Beckmann**: Chemische Untersuchungen im Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie, tägl. *g*. — **Wichelhaus**: Technologie für Chemiker: Anorganische Stoffe, 4; Übungen im Technologischen Institut (mit Großmann und Houben), tägl.; Anleitung im Institut (mit Großmann und Houben), tägl. — **Gabriel**: Organische Experimentalchemie, 5. — **Thoms**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 4; Praktische Übungen und Arbeiten in pharmazeutischer, toxikologischer, physiologischer und Nahrungsmittelchemie (mit Rosenmund), tägl.; Nahrungsmittelchemie, $1^1/_2$. — **Traube**: Qualitative chemische Analyse, mit Experimenten, $1^1/_2$. — **Stock**: Anorganisch-chemische Arbeiten, tägl. — **Biedermann**: Explosivstoffe, 2. — **Neuberg**: Arbeiten auf dem Gebiete der Biochemie, tägl.; Organisch-chemische Arbeiten, tägl. — **Pschorr**: Organische Chemie II, 4. — **Fock**: Physikalische Chemie, 1; Kristallchemie, 1. — **Rosenheim**: Anorganisch-chemisches Praktikum (mit R. J. Meyer), tägl.; Übungen in der Experimentalchemie (mit R. J. Meyer), 8; Praktische Übungen in der Gas- und Maßanalyse, 4. — **Jacobson**: Besprechung chemischer Tagesfragen, 1. — **Spiegel**: Anorganische Chemie, 3. — **Großmann**: Der Krieg und die chemische Industrie im In- und Auslande, 1; Chemische Warenkunde und Weltwirtschaft II: Die pflanzlichen und kolonialen Rohstoffe, mit Exkursionen, 1; Besprechung chemisch-technischer und wirtschaftlicher Tages-

fragen, $1^1/_2$. — **Leuchs**: Einführung in die organische Chemie II, 1. — **Pringsheim**: Einführung in die physiologische Chemie, 1. — **Lockemann**: Geschichte der Chemie, 1. — **R. J. Meyer**: Kolloquium über wichtige Abschnitte aus der anorganischen und physikalischen Chemie, für Anfänger und Fortgeschrittenere, $1^1/_2$. — **Rosenmund**: Qualitative chemische Analyse, 1; Gewichts- und Maßanalyse, 1. — **Tiede**: Einführung in das chemische Studium, 1. —

Schottky: Analytische Geometrie der Ebene, 4; Allgemeine Funktionentheorie, 4; Mathematisches Seminar, 2 *g*. — **Foerster**: Geschichte der Astronomie, $1^1/_2$ *g*; Grundlehren der Zeit- und Ortsbestimmung, 1 *g*; Tierkreislicht und Polarlicht, 1 *g*. — **Schmidt**: Integralrechnung, 4, Übungen, 2; Determinanten, 4; Mathematisches Seminar, (mit Carathéodory), 2 *g*. — **Struve**: Sphärische Astronomie I, 3; Übungen an den Instrumenten der Sternwarte, nach Verabredung, *g*. — **Cohn**: Einführung in die Himmelsmechanik, 4; Übungen zur sphärischen Astronomie, 2 *g*. — **Carathéodory**: Projektive Geometrie, 4; Analytische Mechanik, 4. — **Rothe**: Differentialrechnung, 4, Übungen, 1. — **Knopp**: Einführung in die höhere Mathematik, 4; Höhere Funktionentheorie, 4; Mathematisches Proseminar (mit Schur), 14 tägig, 2 *g*. — **Guthnick**: Photographie der Gestirne, 2; Das Sonnensystem, 1 *g*. — **Schur**: Zahlentheorie, 4; Algebraische Gleichungen: Galoissche Theorie, 4. — **Marcuse**: Geographische Ortsbestimmung am Lande, auf See und in der Luft, mit Übungen, $1^1/_2$; Allgemeine Himmelskunde, mit Lichtbildern und Fernrohrbeobachtungen, $1^1/_2$; Astronomische Geographie und Erdphysik, mit Lichtbildern, $1^1/_2$. — **Witt**: Wissenschaftliches Rechnen, 2; Übungen an den Instrumenten der Übungssternwarte, 6 *g*. — **Schweydar**: Theorie der Elastizität der Erde, 2. —

Technische Hochschule Berlin.

Kurlbaum: Experimentalphysik: Wärme, Optik, 4; Physikalische Übungen, 16. — **Grunmach**: Magnetische und elektrische Maßeinheiten und Meßmethoden, 2; Physikalische Maßbestimmungen und Meßinstrumente (Physikalische Übungen), 10. — **Kalischer**: Die physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik I, 2; Elektromagnetismus und Induktion mit besonderer Berücksichtigung der Elektrotechnik, 4; Grundzüge der Elektrotechnik, 2. — **Korn**: Ausgewählte Kapitel der Elastizitätstheorie, 2. — **Krigar-Menzel**: Theorie des Lichts, 4; Theorie der Wärmeleitung und der Strahlung, 2. — **Berndt**: Luftelektrizität, 1. — **Felgentraeger**: Maß- und Gewichtswesen II, 2; Die Meßinstrumente des Chemikers, 2. — **Gehlhoff**: Elektronentheorie der Metalle, 1. — **Kaßner**: Der Wind nach Entstehung, Messung und Ausnutzung für Hoch- und Hafenbau, See- und Luftschiffahrt, sowie für Windmotorenbau, 1. — **Kock**: Methoden zur Aufnahme von schnell verlaufenden elektrischen und magnetischen Erscheinungen: Oszillographen usw., 2; Meßmethoden der drahtlosen Telegraphie, 2. — **Möller**: Beleuchtungstechnik, 1. — **Petzoldt**: Die Relativitätstheorie, 1 *g*. — **Pirani**: Anwendungen der graphischen Darstellung und des graphischen Rechnens auf physikalische Fragen, 1. — **Orlich**: Theoretische Elektrotechnik I, 2, Übungen, 1; Elektrotechnische Meßkunde I und II, 2; Elektrotechnisches Laboratorium I, II und III, 4; Elektrotechnisches Laboratorium für Fortgeschrittene, tägl. — **Wedding**: Elektromaschinenbau I und II, 2; Beleuchtungstechnik, 2; Beleuchtungstechnisches Laboratorium, 3, für Fortgeschrittene, tägl.; Elektrotechnik für Bergleute, 2, Übungen, 1. — **Franke**: Elektrische Fernmeldetechnik einschließlich drahtlose Telegraphie II: Anlagen, 4, Übungen, 1; Entwerfen von Instrumenten und Apparaten der Meß- und Fernmeldetechnik, Übungen, 2; Entwerfen von Anlagen der Fernmeldetechnik, Übungen, 2; Laboratorium für Fernmeldetechnik, 6, für Fortgeschrittene, tägl. — **Kloß**: Elektromaschinenbau I, 4, Übungen, 1, III, 2; Entwerfen elektrischer Maschinen I, Übungen, 4, III, Übungen, 8; Elektrotechnisches Versuchsfeld, 4, für Fortgeschrittene, tägl. — **v. Parseval**: Flugzeuge, 2. — **W. Reichel**: Elektrische Kraftanlagen und Bahnen II, 2; Entwerfen elektrischer Kraftanlagen und Bahnen, 4. — **Becker**: Flugmotoren und Luftschiffmotoren, 2. — **Benischke**: Allgemeine Wechselstromtechnik, 4. — **Breslauer**: Berechnung und Prüfung elektrischer Maschinen nach den in der Praxis herrschenden Gepflogenheiten, 2. — **Everling**: Messungen an und in Luftfahrzeugen, 1; Steigfähigkeit von Luftfahrzeugen, 1. — **Faßbender**: Elektrische Messungen und Meßmethoden in Hochfrequenzkreisen und ihre praktische Anwendung in der drahtlosen Telegraphie, 2; Technische Grundlagen der Elektromedizin, mit Demonstrationen, 2. — **Philippi**: Über elektrisches Förder- und Signalwesen. — **Rüdenberg**: Selbstinduktion und Streuung in elektrischen Maschinen, 2. — **Wagner**: Elektrische Wirbelströme, 2. — **Zehme**: Elektrische Stadtschnellbahnen und Vorortsbahnen, 2. — **Krell**: Schiffselektrotechnik, 2. — **Dietzius**: Luftschiffbau und Luftschiffahrt, 1. — **Schaffran**: Luft- und Wasserpropeller-Versuche, 1. — **Günther**: Anwendung der Photographie zum Messen in der Technik: Photogrammetrie, mit Lichtbildern und Demonstrationen, 2. —

Hofmann: Experimentalchemie, 4; Experimentalchemie: Chemie der Metalle mit Einführung, 4; Gasanalyse, 2. — **Dolezalek**: Angewandte Elektrochemie, 2; Kleines physikalisch-chemisches und elektrochemisches Praktikum, 2 halbe Tage; Praktische Arbeiten im physikalisch-chemischen und elektrochemischen Institut, tägl. — **Holde**: Untersuchung der Kohlenwasserstofföle und verwandte Produkte: Schmieröle, Treiböle, Leuchtöle, Paraffin, Ceresin, Asphalt usw., 2. — **Juckenack**: Chemie der Nahrungsmittel mit Berücksichtigung der Nahrungsmittelanalyse und Bakteriologie, 4; Chemisch-technische Analyse, 2. — **Miethe**: Spektralanalyse, mit Übungen, 2; Photochemie und photochemische Prozesse, 2; Konstruktionstypen photographisch-optischer Instrumente, 1; Praktische Arbeiten im photochemischen Laboratorium, speziell für Photochemiker, tägl.; Photographische Übungen in den gebräuchlichen Prozessen, 16. — **Pschorr**: Organische Chemie II: Aromatische Reihe, zyklische Verbindungen, Farbstoffe, Alkaloide usw., 4; Praktische Arbeiten im organischen Laboratorium, tägl. — **Reisenegger**: Chemische Technologie II: Organische Verbindungen, Faserstoffe, Papier, Leder, Fette, Öle, Seifen, Farbstoffe, Beleuchtung, Trockene Destillation, Gasbereitung, Kokerei, Teerdestillation, Holzschwelerei, Braunkohle, Erdöl, mit Exkursionen, 4; Praktische Arbeiten im technisch-chemischen Institut, tägl. — **Traube**: Thermochemie, 2; Physikalisch-chemische Übungen, 3; Chemie der Kolloide, 1. — **Stavenhagen**: Anorganische Experimentalchemie, für Bergleute, 4; Praktische Arbeiten im Chemischen Laboratorium der Bergbau-Abteilung, tägl.; Einführung in die Experimentalchemie, 2. — **Wölbling**: Analytische Chemie, für Bergleute, 2; Chemisches Kolloquium, für Bergleute, 1. — **Arndt**: Anwendungen der physikalischen Chemie auf technische Vorgänge, 1. — **Börnstein**: Verbrennung und Heizung, 1. — **Bucherer**: Die Grundzüge der Färberei und Druckerei, 1. — **Byk**: Chemie der photographischen Prozesse, 1. — **Endell**: Ausgewählte Kapitel der Mineralchemie nebst technischen Anwendungen, 1. — **v. Girsewald**: Praktische Kalorimetrie, mit Übungen, 2. — **Guertler**: Metallographie II, spezielle Konstitutionslehre, Messing-, Bronze-, Kupfer-, Aluminium-, Zink- usw. Legierungen, 2. — **Hanemann**: Ausgewählte Abschnitte aus der Metallographie, 1. — **Herrmann**: Radioaktive Prozesse, 1. — **Just**: Chemische Elektronenlehre, 1. — **Lehmann**: Die Farbenphotographie, 1. — **Liebermann**: Methoden zur Konstitutionsbestimmung organischer Verbindungen, 1. — **Loewenherz**: Erläuternde Vorträge zu den Führungen durch das Chemische Museum, organischer Teil, 1 *g*; Die Produkte der chemischen Industrie, ausgewählte Kapitel im Anschluß an die Sammlungen des Chemischen Museums, organischer Teil, 1 *g*. — **Schaarschmidt**: Die Rohprodukte der Teerfarbenindustrie, 2; Färberkursus, Übungen, 4. — **Scheibler**: Über heterozyklische Verbindungen,

1. — **Seegert**: Ausgewählte Kapitel aus der Spektralanalyse, 1. — **Simonis**: Organische Analyse und Arbeitsmethoden, 2. — **Ullmann**: Arbeitsmethoden der Farbenindustrie, 1. — **Voswinckel**: Terpene und Kampfer, 1. — **Wirth**: Analytische Chemie, 1. — **Wolffenstein**: Die neueren Arzneimittel und ihre Fabrikation, 2. —

Scheffers: Darstellende Geometrie II, 5, Übungen, 5. — **N. N.**: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2. — **Haentzschel**: Elemente der Mechanik, 4. — **Jolles**: Darstellende Geometrie II, 4, Übungen, 4. — **Hamel**: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2. — **Rothe**: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2; Differentialgleichungen, 2. — **Wallenberg**: Ausgewählte Kapitel der Elementarmathematik, 2; Funktionentheorie II, 2; Variationsrechnung, 2. — **Schuberg**: Mechanische Technologie, für Chemiker, 2; Maschinenelemente, mit Übungen im Maschinenzeichnen, für Chemiker, 1, Übungen, 3; Baukonstruktionslehre, 2, Übungen, 4; Die technischen Einrichtungen chemischer Fabriken I, 1, Übungen, 3. — **Jahnke**: Analytische Geometrie und algebraische Analysis, für Bergleute, 3; Höhere Mathematik und technische Mechanik I und II, 7, Übungen, 2; Ausgleichungsrechnung, für Bergleute, 4. — **Haußmann**: Vermessungskunde II und Meßübungen II, 4, Übungen, 4; Planzeichnen und zugleich Bearbeitung der Aufnahmen, nach Vereinbarung. — **Reißner**: Mechanik und graphische Statik I, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der Mechanik, 2 *g*. — **Wolff**: Niedere Geodäsie im Abriß, Aufnahme und Bearbeitung eines Höhen- und Lageplanes, 1, Übungen, 1 Nachmittag. — **W. Hartmann**: Kinematische Geometrie und theoretische Kinematik, 2. — **E. Meyer**: Mechanik I, 4, Übungen und Festigkeits-Laboratorium, 3; Ausgewählte Kapitel der Technischen Mechanik, 2. — **Fuchs**: Lineare Differentialgleichungen, 2. — **Jacobsthal**: Besselsche Funktionen und Kegelfunktionen, 2. — **Lichtenstein**: Darstellende Geometrie, 2, Übungen, 2. —

Universität Bern.

Forster: Experimentalphysik I: Allgemeine Physik, Akustik, Optik, 6; Wärmelehre (Schluß), 1 *g*; Repetitorium der Physik, 2; Theoretisch-praktischer Kurs der Photographie, 2; Physikalisches Praktikum, 4; Arbeiten im physikalischen Institut für Vorgerücktere, nach Verabredung. — **Gruner**: Analytische Mechanik, 3, Übungen, 1; Interferenz- und Beugungserscheinungen, 1; Seminar für theoretische Physik, 2; Einführung in die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Probleme, 2. — **Blattner**: Elektrizitätswerke und elektrische Bahnen (Fortsetzung und Schluß), 1; Theorie der Wechselströme (Fortsetzung und Schluß), 1; Generatoren, Transformatoren, Motoren, 1. — **Luterbacher**: Meteorologische Faktoren mit Berücksichtigung der aeronautischen Meteorologie, 2; Dynamik, ausgewählte Kapitel, 1 oder 2. — **Koestler**: Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik, 2; Elektrische Energieübertragung mit besonderer Berücksichtigung der modernen Hochspannungstechnik, 1—2; Graphisches Rechnen, ausgewählte Kapitel, nach Verabredung; Rechenschieber, Log.-Papier, graphische Statik, Elektrographik, 2. —

Kohlschütter: Anorganisch-chemisches Praktikum, tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner, 8; Anorganische Chemie: Spezieller Teil, 4; Kolloquium über anorganische Chemie, 1. — **Ephraim**: Analytische Chemie, 3; Elektrochemie, 2; Gasanalytisches Praktikum, 3. — **Mai**: Repetitorium der anorganischen Chemie, für Mediziner und Lehramtskandidaten, 1. — **Frl. Woker**: Arbeiten im Laboratorium für physikalisch-chemische Biologie, tägl.; Kurs für die Untersuchung der Körperflüssigkeiten: Harn, Blut, Magensaft, Milch, 4; Die wichtigsten Fermente der Pflanzen und Tiere, ihre Theorie und ihre Wirkungen, 1; Praxis der Untersuchungsmethoden, 1; Ausgewählte Kapitel aus dem Gebiete der physikalisch-chemischen Biologie mit besonderer Berücksichtigung des Assimilationsproblems der Kohlensäure, 2. — **Tambor**: Organische Chemie I, 6, Repetitorium, 1; Organisch-chemisches Vollpraktikum, tägl. — **Abelin**: Chemie der Eiweißkörper, 1. — **Schaffer**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel II, 2; Chemische Technologie der milchwirtschaftlichen Gewerbe, nach Verabredung. —

G. Huber: Analytische Geometrie des Raumes mit Theorie der Flächen zweiten Grades, 2; Theorie der Hüllkurven und Brennlinien, 2; Einleitung der Differentialgeometrie der Flächen, 1; Sphärische Astronomie II, 2; Mathematisches Seminar, 2. — **N. N.**: Höhere Analysis, nach Verabredung. — **Crelier**: Algebraische Analysis I, 3; Differentialrechnung, 2; Analytische Geometrie, 2; Darstellende Geometrie I, 2, III, 2; Synthetische Geometrie: Einleitung, 2; Ebene und sphärische Trigonometrie, 2; Mathematische Übungen, 3. — **Berliner**: Höhere Algebra (Fortsetzung), 1—2; Theorie der Kettenbrüche, 1—2. — **Mauderli**: Astronomische Beobachtungspraxis II: Theorie der wichtigsten astronomischen Beobachtungs- und Meßinstrumente, 2; Wissenschaftliches Rechnen II: Numerische Differentiation und Integration, 2; Astronomische Phänomenologie, 1; Unser Sternensystem, mit Lichtbildern, 1. — **Moser**: Intensitätsfunktionen und ihre Verwendung zur Invalidierungs- und Sterblichkeits-Messung, 2; Mathematische Grundlagen der Witwen- und Waisenversicherung, nach Verabredung; Mathematisch-versicherungswissenschaftliches Seminar, 1—2. — **Bohren**: Ausgleichungsrechnung, 2. —

Universität Bonn.

Kayser: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, Akustik, 5; Laboratorium für Anfänger, 8, für Vorgeschrittene, tägl. — **Pflüger**: Theorie des Lichtes, 4, Übungen, 1. — **Eversheim**: Übungen für Lehramtskandidaten im Experimentalvortrag, mit Handfertigkeitspraktikum, 2; Physikalisches Praktikum für Mediziner, 2; Grundzüge der Elektrotechnik, 1 *g*. — **Grebe**: Theorie der Wärme, 3; Meteorologie, 2. —

Anschütz: Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 6; Kolloquium über neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Chemie, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgeschrittene sowie für Nahrungsmittelchemiker (mit Benrath, Frerichs und Kippenberger), tägl., für Mediziner (mit Benrath), tägl. außer Sonnabend. — **Rimbach**: Physikalische Chemie II: Thermochemie und Elektrochemie, 3; Chemisches Rechenseminar: Unterstufe: Stoechiometrische und chemisch-analytische Aufgaben, 14 tägig, 2 *g*; Oberstufe: Physikalisch-chemische Aufgaben, 14 tägig, 2 *g*, Übungen in den wichtigsten physikalisch-chemischen Meßmethoden, 3. — **Benrath**: Justus Liebig und seine Zeit, 1 *g*; Qualitative Analyse, 2; Übungen in der Gasanalyse, 3. — **Meerwein**: Aromatische Verbindungen der Benzolderivate, 2. — **Frerichs**: Toxikologische Analyse, 1; Pharmazeutische Chemie II (organisch), 3, III: Zyklische Verbindungen, 1 *g*. — **Mannheim**: Einführung in das chemische Praktikum, für Pharmazeuten, 1; Sterilisieren von Arzneimitteln, 1. — **Kippenberger**: Grundzüge der Nahrungsmittelchemie, 2; Chemische Technologie, organischer Teil (ausschließlich der Farbstoffe), mit Exkursionen, 2; Einführung in die chemische Großtechnik II: Organisch-chemische Betriebe, mit Exkursionen, 1 *g*; Besprechung technisch-chemischer Betriebskontrollen, 1 *g*. — **Gewecke**: Mikrochemische Analyse, 1. — **Laar**: Grundlagen der photographischen Verfahren, 2; Übungen in ausgewählten photographischen Verfahren, nach Verabredung. —

Beck: Mathematische Erdkunde, 2; Projektive Geometrie in synthetischer Behandlungsweise, 4; Differentialgleichungen, 3; Mathematisches Seminar: Mittelstufe, 1 *g*. — **Hahn**: Differential- und Integralrechnung I, 4; Analytische Darstellung willkürlicher Funktionen, insbesondere Fouriersche Reihen, 3; Mathematisches Seminar: Unterstufe: Übungen zur Differentialrechnung, 1 *g*. — **Study**: Sphärische Trigonometrie, 1; Kolloquium, 1—2 *g*;

Höhere Geometrie, 4; Mathematisches Seminar: Oberstufe (Vortragsübungen), 14tägig, 2 *g*. — **J. O. Müller**: Zahlentheorie, 4. — **C. Müller**: Einführung in die Geodäsie mit Übungen, 2. — **Küstner**: Theorie und Praxis der astronomischen Instrumente, 3; Praktische Übungen im astronomischen Beobachten (mit Mönnichmeyer), nach Verabredung; Astronomisches Kolloquium, 1 *g*. — **Mönnichmeyer**: Gebrauch der astronomischen Jahrbücher, 1. —

Technische Hochschule Braunschweig.

Diesselhorst: Experimentalphysik: Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik, Wärmelehre und Optik, 4; Wechselströme, 3; Physikalisches Praktikum I und II; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*. — **Bergwitz**: Radioaktivität der Erde und Atmosphäre, 1; Theoretische Telegraphie, 1. — **Witte**: Analytische Mechanik, 4. — **Peukert**: Elektrotechnische Messungen, 2; Allgemeine Elektrotechnik, 4; Grundzüge der Elektrochemie, 2; Elektrotechnisches Praktikum, 9; Arbeiten im elektrotechnischen Laboratorium, 9. — **Müller**: Elektromaschinenbau, 4, Übungen, 6; Elektrische Bahnen, 2; Grundzüge der Elektrotechnik, 2. — **Mosler**: Drahtlose Telegraphie, 2; Radiotelegraphisches Praktikum, 3. —

Fries: Organische Experimentalchemie, 6; Arbeiten im chemischen Laboratorium; Chemisches Kolloquium *g*. — **R. Meyer**: Geschichte der Chemie, 1. — **Biehringer**: Analytische Chemie, 2; Grundzüge der Chemie, 4. — **N. N.**: Elektrochemie, 2; Chemische Technologie I, 4. — **Reinke**: Chemische Technologie II 2, 4, Seminaristische Übungen, 1; Chemisch-technische Analyse II, 2; Enzyme, 2; Arbeiten im Laboratorium für chemische Technologie II und landwirtschaftlich-chemische Gewerbe. — **Schultze**: Agrikulturchemie, 2. — **Beckurts**: Abwässerreinigung, 1; Wasser- und Harnuntersuchung, 1; Pharmazeutische Chemie, 4; Arbeiten im Laboratorium für pharmazeutische Chemie und Nahrungsmittelchemie. — **Troeger**: Analytische Chemie, 2; Repetitorium der anorganischen und organischen Chemie, 2. — **Emde**: Alkaloide, 1. —

Fricke: Differential- und Integralrechnung I, 5, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie, 2; Grundlagen der Theorie der Fourierschen Reihen, 1. — **Timerding**: Darstellende Geometrie, 3, Übungen, 4; Perspektive, 1, Übungen, 2; Einführung in die höhere Mathematik, 3, Übungen, 1. — **Schlink**: Technische Mechanik I: Statik, 2, Übungen und Repetitionen, 1, III: Hydraulik, Aerostatik und Aerodynamik, 4, Übungen und Repetitionen, 2; Die Grundlagen des Fliegens und die verschiedenen Arten von Flugzeugen, 1; Graphische Statik, 2, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der Konstruktionen, 2. — **Lührs**: Grundzüge der Geodäsie, 1, Übungen, 1; Geodäsie I, 5, Übungen, 2; Grundzüge der sphärischen Astronomie, 2, Übungen, 2; Vermessungsübungen I, 4, II, 9; Ausarbeitung geodätischer Aufnahmen, 3. —

Universität Breslau.

Lummer: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, Akustik, 5; Physikalisches Praktikum für Geübtere (mit Schaefer, Waetzmann und Ladenburg), tägl., für Anfänger (mit Waetzmann, Ladenburg und Buchwald), 9. — **Schaefer**: Theorie der Elektrodynamik und Optik I, 5, Übungen, $1^1/_2$ *g*; Einführung in die statistische Mechanik, 1; Theoretisch-physikalisches Kolloquium über Tagesfragen, 2 *g*. — **Waetzmann**: Einführung in die theoretische Physik, 2. — **Ladenburg**: Vektorrechnung und ihre Anwendungen in der Physik, 2; Sichtbares und unsichtbares Licht, mit Demonstrationen, 1 *g*. — **Buchwald**: Geometrische Optik mit Vorführungen, 2; Das Bohrsche Atommodell, 1. —

Biltz: Unorganische Experimentalchemie, 6; Chemisches Praktikum, organische Abteilung, ganztägig, unorganische Abteilung, ganz- und halbtägig, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner und Landwirte, 4; Chemische Referatenstunde für Vorgeschrittenere (mit Meyer und Koenigs), 14 tägig, $1^1/_2$ *g*. — **Herz**: Chemische Verwandtschaftslehre: Gesetz der Massenwirkung, Phasenlehre, Affinitätsmessung, 2; Grundlagen der Maßanalyse, 1; Anwendungen der Maßanalyse mit besonderer Berücksichtigung des Deutschen Arzneibuches, 1; Besprechungen zur qualitativen Analyse, 1 *g*. — **Meyer**: Grundlagen der analytischen Chemie, 2; Physikalische Chemie I, 2. — **Koenigs**: Benzolderivate, 2. — **Fischer**: Physik und Chemie der Geschosse, 1. — **Ehrlich**: Landwirtschaftliche Technologie II: Die Gärungsindustrien (Brennerei, Brauerei usw.), 2; Die Milch, ihre technische Verarbeitung und Verwertung, 1; Chemische, biochemische und technische Arbeiten, für Anfänger und Fortgeschrittene, tägl. außer Sonnabend; Gasanalytische und chemisch-technische Untersuchungen, 3; Einführung in die Chemie für Landwirte: Organischer Teil, 2; Biochemisches Kolloquium, 1 *g*. — **Gadamer**: Anorganische Experimentalchemie, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie, 6; Praktisch-chemische Übungen mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie, der forensischen Chemie und Nahrungsmittelchemie, tägl.; Kleines chemisches Praktikum, 6; Prüfung der Arzneimittel, 1 *g*. —

N. N.: Zahlentheorie, 3. — **Kneser**: Analytische Mechanik, 5; Elementargeometrie, 2; Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars, 2 *g*. — **N. N.**: Differentialrechnung, 4; Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars, 2 *g*. — **Steinitz**: Analytische Geometrie, 5, Übungen, 1. — **Wilkens**: Praktische Astronomie: Instrumente und Beobachtungsmethoden, 3, Übungen, 2 *g*; Astronomisches Kolloquium, für Vorgerücktere, nach Verabredung, *g*. —

Technische Hochschule Breslau.

Lummer: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Praktikum, 3. — **N. N.**: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Luftschiffahrt: Theorie der Flugzeuge, 2; Aeronautische und meteorologische Übungen, 2; Grundzüge der Meteorologie, 1; Physik der Erdfeste, 2. — **Hilpert**: Elektrotechnik II, 4; Elektromaschinenbau, 2; Apparatebau, 2; Übungen im Elektromaschinen- und Apparatebau, 4; Elektrotechnisches Laboratorium I, 4, III, 8. — **Euler**: Elektrotechnische Meßkunde I und II, 2; Elektr. Kraftanlagen II, 2; Elektrische Bahnen, 2; Übungen im Bau elektrischer Kraftanlagen und Bahnen, 4. — **N. N.**: Telegraphentechnik, 2. —

Ruff: Anorganisch-chemisches Praktikum, tägl.; Analytische Chemie, 3; Chemisches Kolloquium (mit Eucken, Neumann und Semmler), 14 tägig, 2 *g*. — **Eucken**: Physikalische Chemie I und II, 2; Physikalisch-chemisches Praktikum für Fortgeschrittene, tägl.; Übungen in physikalischer Chemie und Elektrochemie, 4. — **Neumann**: Anorganisch-chemische Technologie, 4; Chemisch-technisches Praktikum, tägl.; Elektrochemisch-technisches Praktikum, tägl.; Technische Berechnungen aus der chemischen Industrie, Metallurgie, Elektrochemie und Feuerungskunde, 1. — **Semmler**: Organisch-chemisches Praktikum, tägl.; Organische Experimentalchemie, 4; Abriß der organischen Chemie, 1. — **Nauß**: Einführung in die Gastechnik, 1. —

Dehn; Höhere Mathematik IV, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der Analysis, nach Verabredung. — **Hessenberg**: Darstellende Geometrie, 2, Übungen, 4; Analytische Geometrie, 3. — **Steinitz**: Höhere Mathematik II, 2, Übungen, 2; Vektoranalysis, 2. —

Technische Hochschule Danzig.

Krüger: Experimentalphysik II, 4; Kleines physikalisches Praktikum, 4; Großes physikalisches Praktikum, tägl.; Spezialvorlesung über ein physikalisches Gebiet, 2. — **Kalähne**: Einführung in das physikalische Praktikum, 1; Licht- und Wärmestrahlung, 1; Photographie und



photographische Reproduktionsverfahren, 1, Übungen für Anfänger und Fortgeschrittene, 3; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten im photophysikalischen Laboratorium, tägl. — **Försterling**: Elektromagnetische Lichttheorie, 3. — **Roeßler**: Elektrotechnik I, 4, II, 2, Laboratorium, I, 4, II, 6, III, 9, IV, tägl. außer Sonnabend; Projektierung elektrischer Anlagen, 4; Berechnung und Entwurf elektrischer Maschinen (mit Roth), 1, Übungen, 4. — **Grix**: Elektrische Bahnen, 2, Übungen, 4; Berechnung elektrischer Leitungsnetze, 2. — **Roth**: Elektrotechnische Meßkunde, 2. — **Föttinger**: Ausgewählte Kapitel aus der Physik der technischen Strömungserscheinungen, 1. —

v. Wartenberg: Anorganisch-chemische Technologie I, 3; III: Technische Elektrochemie, 1; Praktikum im anorganisch-chemischen und elektrochemischen Laboratorium (mit Jellinek), tägl.; Physikalische Chemie I und II, 3; Kleines physikalisch-chemisches Praktikum I und II, 4; Großes physikalisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Wohl**: Organische Experimentalchemie II, 2; Organisch-chemische Technologie I, 3; Praktikum im organisch-chemischen Laboratorium, tägl.; Praktikum im Laboratorium für landwirtschaftliche Gewerbe, tägl. — **Jellinek**: Analytische Chemie I, 2. —

v. Mangoldt: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 1. — **Lorenz**: Einführung in die Mechanik, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik, 2 *g*. — **Sommer**: Höhere Mathematik II, 2, Übungen, 1; Einführung in die höhere Mathematik, 5. — **Schilling**: Darstellende Geometrie, 3, Übungen, 4; Graphische Statik, 2, Übungen, 3. — **v. Brunn**: Himmelsmechanik I: Bewegung der Schwerpunkte, 2. — **Eggert**: Geodäsie I, 2, II, 2; Praktische Übungen im Feldmessen, 4; Geodätisches Praktikum I, 2, II, 2; Geographische Ortsbestimmung, 2. —

Technische Hochschule Darmstadt.

Schering: Allgemeine Physik, mit Versuchen, 5; Physikalische Übungen (mit Zeissig), 4 Nachmittage; Selbständige Arbeiten aus dem Gebiete der Physik (mit Zeissig), nach Verabredung; Elektrische Schwingungen und elektrische Wellen, Maxwellsche Theorie der Elektrizität, mit Versuchen, 2; Theoretische Elektrizitätslehre, 2. — **Zeissig**: Allgemeine Physik, mit Versuchen, 4; Ausgewählte Kapitel aus der allgemeinen Physik, 1. — **Baerwald**: Allgemeine Elektronik II, 1 *g*; Quantentheorie, 2 *g*. — **Limmer**: Photographische Übungen A und B, für Anfänger und Fortgeschrittene, 3; Grundlagen der Photographie, 2; Farbenphotographie, 2; Grundlagen der Kinematographie, 1. — **Wirtz**: Allgemeine Elektrotechnik I: Elemente der Elektrotechnik, 3; Elektrotechnische Meßkunde, 2; Übungen im elektrotechnischen Laboratorium (mit Sengel), I, II und IV, 4 halbe Tage; Selbständige Arbeiten für Vorgeschrittenere: Praktikum III (mit Sengel und Petersen), nach Verabredung; Grundzüge der Telegraphie und Telephonie, 2; Radiotelegraphisches Praktikum. — **Petersen**: Allgemeine Elektrotechnik II: Gleich- und Wechselstromtechnik, 4; Übungen im Hochspannungslaboratorium, 6; Grundzüge der Hochspannungstechnik, 2. — **Sengel**: Konstruktion elektrischer Maschinen und Apparate, 3, Übungen, 3; Elektrische Licht- und Kraftanlagen, 2, Übungen, 2; Grundzüge der Elektrotechnik, 2. — **Goldschmidt**: Elektrischer Antrieb von Hebemaschinen und industrielle elektrische Betriebe, 2; Referate aus elektrotechnischen Fachblättern, Kolloquium, 1. —

Wöhler: Anorganische Experimentalchemie: Grundzüge der Chemie, 5; Kolloquium über chemische Tagesfragen (mit Martin), 1; Chemisches Praktikum für anorganische und physikalische Chemie (mit Heyl und Martin), tägl. außer Sonnabend. — **N. N.**: Agrikulturchemie, 1. — **Finger**: Ausgewählte Kapitel aus der organischen Chemie, 2; Teerfarbstoffe, 4; Praktikum im Laboratorium für organische Chemie (mit Friedlaender), tägl. außer Sonnabend; Färberei-Praktikum (mit Heuser), 4. — **Martin**: Analytische Chemie I, 2. — **Heuser**: Organisch-chemisches Praktikum, nach Verabredung; Chemische Technologie der Gespinstfasern-Gewinnung der Fasern: Bleicherei, Färberei, Zeugdruck, 1; Kunstseide, andere künstliche Fäden und Zellulosepro- dukte, 1. — **Friedlaender**: Chemie der natürlichen Farbstoffe, 1 *g*. — **Heyl**: Pharmazeutische Chemie, anorganischer Teil, 2, organischer Teil, 2, Repetitorium, 1; Ausmittelung der Gifte, 1. — **Berl**: Elektrochemie, 2; Chemische Technologie, 2; Metallurgie, 2; Chemisch-technisches und elektrochemisches Praktikum (mit Moldenhauer), tägl. außer Sonnabend. — **Moldenhauer**: Ausgewählte Kapitel aus der chemischen Technologie, 1; Elektrochemische Übungen, 4; Anwendung der physikalischen Chemie auf chemisch-technische Prozesse, 1. — **Vaubel**: Theoretische Chemie II: Thermochemie, 1, Übungen, 3; Die Steinkohlengasindustrie, 1 *g*; Die maschinellen Hilfsmittel der chemischen Technik, 1½. — **Sonne**: Chemische Technologie der Explosivstoffe, 2. — **Weller**: Untersuchen von Nahrungsmitteln, Genußmitteln und Gebrauchsgegenständen, 8, Übungen, 1. —

N. N.: Repetitorium der Elementar-Mathematik, 3—4; Höhere Mathematik, 3, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der höheren Mathematik, 2. — **Horn**: Höhere Mathematik, 5, Übungen, 3; Integralgleichungen, 2—3. — **Dingeldey**: Höhere Mathematik, 6, Übungen, 3, II, 2, Übungen, 1. — **Schleiermacher**: Rechenapparate und wissenschaftliches Rechnen, 2. — **Wiener**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 6; Neuere mathematische Lehren zur Behandlung naturwissenschaftlicher und technischer Aufgaben: Ortsfunktionen und Vektorfelder, 2; Arbeiten im mathematischen Institut, 3. — **Hohenner**: Geodäsie, 4; Ausgewählte Kapitel aus der Geodäsie, 2; Geodätische Übungen I, 4, II, 4; Geodätische Ausarbeitungen, 4; Praktische Geometrie, Übungen, 4, Ausarbeitungen, 2. — **R. Müller**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 6; Reine Kinematik, 2. — **Assistenten**: Planzeichnen, 4 und 2. — **N. N.**: Technische Mechanik, 3, Übungen, 2. — **Henneberg**: Mechanik I, 6, Übungen, 2. — **Braun**: Hydraulik, 2, Übungen, 1. — **Blaess**: Ausgewählte Abschnitte aus der technischen Mechanik, 2 *g*. —

Universität Erlangen.

Wiedemann: Experimentalphysik II: Wärme, Akustik, Optik, 5; Physikalisches Anfängerpraktikum, 2; Physikalisches Halb- und Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Reiger**: Theoretische Physik, 4, Übungen, 1 *g*; Elektrotechnisches Praktikum, 3. — **Hauser**: Photographie, mit Übungen, 2. —

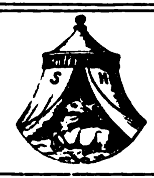
O. Fischer: Organische Experimentalchemie, 5; Praktische Übungen im Chemischen Laboratorium (mit Henrich): a) Analytisch-chemische Übungen, tägl. außer Sonnabend; b) Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Mediziner, 4. — **Busch**: Anorganische Chemie, unter Berücksichtigung ihrer Anwendung in der Pharmazie, 3; Chemische Technologie, anorganische Großindustrie, mit Ausflügen, 2; Chemisches Praktikum, ganz- und halbtägig, tägl.; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Übungen auf dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie, ganz- und halbtägig, tägl. außer Sonnabend. — **Henrich**: Analytische Chemie der Metalloide: Anionen und Maßanalyse (Experimentalvorlesung zur Ergänzung des analytisch-chemischen Praktikums), 2; Spezielle Methoden der Analyse, mit Übungen in der Gasanalyse, Elektroanalyse und Spektralanalyse, 2; Physikalisch-chemisches Praktikum, 2; Repetitorium der Chemie für Kriegsteilnehmer, 2. — **Dilthey**: Organische Farbstoffe, 2. —

Noether: Einleitung in die elliptischen Funktionen, 3. — **E. Fischer**: Differential- und Integralrechnung, 5, Übungen, 2 *g*; Elemente der Zahlentheorie, 2; Einführung in die höhere Zahlentheorie, 2 *g*. — **Hartwich**: Fixsternkunde, 2; Systematische Vorführung der Einrichtungen der Sternwarte, tägl. *g*; Astronomisches Praktikum auf der Sternwarte, tägl. *g*. —

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von: **E. Riecke** und **H. Th. Simon**



Herausgeber und Schriftleiter: **P. Debye** in Göttingen

Die **Physikalische Zeitschrift** erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 41 Mark, im Ausland 46 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 11. 1. Juni 1919. No. 543. **20. Jahrgang.**

Inhaltsverzeichnis:

④ PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 11. 1. Juni 1919. 20. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 13 am 7. Juni 1919.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über einen Fall von krummliniger Strahlenbrechung.

Von Walter König.

Die krummlinige Brechung der Schallstrahlen in der Luft ist in den letzten Jahren mehrfach Gegenstand der Erörterung gewesen infolge der merkwürdigen Erfahrungen, die uns der Krieg in bezug auf die Hörweite des Geschützdonners gebracht hat. Ich bin zu einer Beschäftigung mit diesem Problem von einem ganz anderen Ausgangspunkt her gelangt. Vor mehreren Jahren habe ich einmal den Versuch gemacht, die Gesetzmäßigkeiten der Schneidentöne durch die Vorstellung zu erklären, daß von der Schneide irgendeine Störung sich mit der Schallgeschwindigkeit ausbreitet und an der Ausströmungsöffnung angelangt, hier eine Veränderung des Strömungsvorganges bewirkt, die nun ihrerseits vom Strome fortgetragen, zu einer neuen Störung an der Schneide und so zur periodischen Wiederholung des Vorganges Veranlassung gibt[1]). Diese Annahme erklärte aber nur einen Teil der Gesetzmäßigkeiten; sie gewährte kein Verständnis für die Beschränkung der Erscheinung auf einen gewissen Bereich der Abstände, und ebensowenig für die Sprünge und die Wiederholung der Tonfolge in mehreren Intervallen. Das Bemühen, in die Erfassung dieser Vorgänge weiter einzudringen, führte mich auf die Frage, ob vielleicht die durch die Struktur der strömenden Lamelle bedingte besondere Art der Schallausbreitung innerhalb der Lamelle an der Erscheinung und ihren Besonderheiten beteiligt sein könnte. So entstand die nachfolgende Untersuchung, deren Mitteilung mir lohnend erscheint, auch wenn die Ergebnisse der Rechnung den vermuteten Zusammenhang mit den Schneidentönen nicht ganz sicher erscheinen lassen.

1) H. R. Göller, Untersuchungen über Lamellentöne, Diss. Gießen 1912; W. König, Zur Theorie der Schneidentöne, Verhandlg. d. D. Phys. Ges. **14**, 918, 1912.

Wir wollen annehmen, daß die aus einem schmalen Spalt austretende Lamelle sich in gleichförmiger Strömung befinde. Ihre Achse oder Mittellinie, in der die Strömungsgeschwindigkeit am größten ist, werde als X-Achse genommen, und zwar soll die positive X-Richtung der Strömungsrichtung der Luft entgegengerichtet sein. Die Z-Achse liege parallel dem Spalt, aus dem die Lamelle austritt, die Y-Achse also senkrecht zur Fläche der Lamelle. Die Strömungsgeschwindigkeit wird im allgemeinen eine Funktion aller drei Koordinaten sein. Ist der Spalt lang und eng, so kann das Problem als ein zweidimensionales behandelt und die Betrachtung auf die X-Y-Ebene beschränkt werden. Die Verteilung der Geschwindigkeit in einem senkrecht durch die Lamelle hindurchgelegten Querschnitt ist von Herrn Dr. Johannes Rieth in meinem Institut für eine Reihe verschiedener Querschnitte untersucht und in Kurven dargestellt worden[1]). Der ursprünglich starke Abfall der Geschwindigkeit von der Mitte der Lamelle aus nach den Seiten hin flacht sich mit wachsender Entfernung von der Spaltöffnung allmählich ab. Aber auch diese Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit von der X-Koordinate soll im folgenden der Vereinfachung halber vernachlässigt werden. Es soll also vorausgesetzt werden, daß die Luft überall der X-Achse parallel ströme und ihre Geschwindigkeit nur längs der Y-Achse variiere. Die Kurven, welche diese Abhängigkeit darstellen, haben etwa das Aussehen einer Resonanzkurve. Es soll daher der Rechnung die Annahme zugrunde gelegt werden, daß die Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit von der Y-Koordinate durch die Formel

$$w = \frac{w_0}{1 + b y^2} \qquad (1)$$

gegeben sei. Bildet die Richtung des Schallstrahls mit der X-Achse den Winkel α, so ist

1) J. Rieth, Untersuchungen über Lamellentöne, Diss. Gießen. 1917.

der Einfluß der Luftströmung auf die Fortpflanzung des Schalles durch $-w \cdot \cos \alpha$ bestimmt. Ist v_0 die Schallgeschwindigkeit in ruhender Luft, und breitet sich der Schall der Luftströmung entgegen aus, so ist seine Geschwindigkeit

$$v = v_0 - \frac{w_0 \cdot \cos \alpha}{1 + by^2}. \qquad (2)$$

Sind dx und dy die Komponenten eines Bahnelements der Kurve, die der Schallstrahl beschreibt, so ist $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$, und man kann Formel (2) in der Form schreiben:

$$v = v_0 - \frac{w_0}{(1 + by^2)\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}. \qquad (3)$$

Andererseits ergibt das Brechungsgesetz die Bedingung, daß längs eines Schallstrahls

$$\frac{v}{\cos \alpha} = \text{const} = a \qquad (4)$$

sein muß[1]). Die Konstante a soll dadurch gegeben sein, daß für $y = 0$, $\alpha = \alpha_0$ sein soll, d. h. der Strahl soll die Abszissenachse unter dem Winkel α_0 schneiden. Denkt man sich die Schallquelle in der Abszissenachse gelegen, so würde α_0 der Parameter sein, der die verschiedenen von der Schallquelle ausgehenden Schallstrahlen charakterisiert. Auf Grund dieser Festsetzung der Konstanten kann man (4) in der Form schreiben:

$$v = \left(\frac{v_0}{\cos \alpha_0} - w_0\right) \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}. \qquad (5)$$

Dann folgt aus (3) und (5) als Gleichung des Schallstrahls:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left[\frac{1}{\cos \alpha_0} - \frac{w_0}{v_0} + \frac{w_0}{v_0(1 + by^2)}\right]^2 - 1}} \qquad (6)$$

Die Lösung dieser Gleichung führt auf eine Summe von zwei elliptischen Integralen, wie sich aus folgenden Umrechnungen ergibt. Es kann zunächst die Gleichung (6) auf die Form gebracht werden:

$$dx = \operatorname{ctg} \alpha_0 \cdot \frac{(1 + by^2)\, dy}{\sqrt{(1 + fby^2)(1 - gby^2)}}, \qquad (7)$$

wobei die Konstanten f und g zur Abkürzung für folgende Ausdrücke geschrieben sind:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{(v_0 - w_0)\cos \alpha_0 + v_0}{(1 + \cos \alpha_0) \cdot v_0} \\ g &= \frac{(v_0 + w_0)\cos \alpha_0 - v_0}{(1 - \cos \alpha_0) \cdot v_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

1) Ich verweise auf P. Behrens, Über Refraktion von Schallstrahlen in der Atmosphäre. Diss. Rostock. 1905.

Das Integral der Gleichung (7) läßt sich in eine Summe von zwei Integralen zerlegen:

$$x = \operatorname{ctg} \alpha_0 \frac{f - 1}{f} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 + fby^2)(1 - gby^2)}} +$$
$$+ \operatorname{ctg} \alpha_0 \frac{1}{f} \int_0^y \frac{\sqrt{1 + fby^2}}{\sqrt{1 - gby^2}}\, dy. \qquad (9)$$

Setzt man nun

$$\sqrt{gb} \cdot y = \cos \varphi, \qquad (10)$$

so geht (9) in die Form über:

$$x = -\operatorname{ctg} \alpha_0 \frac{f - 1}{f\sqrt{gb}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{f}{g}\cos^2 \varphi}} -$$
$$- \operatorname{ctg} \alpha_0 \frac{1}{f\sqrt{gb}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \sqrt{1 + \frac{f}{g}\cos^2 \varphi} \cdot d\varphi, \qquad (11)$$

die sich nunmehr leicht in die Normalform der elliptischen Integrale überführen läßt:

$$x = \operatorname{ctg} \alpha_0 \frac{f - 1}{f\sqrt{b(f + g)}} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} +$$
$$\operatorname{ctg} \alpha_0 \frac{\sqrt{f + g}}{f \cdot g \sqrt{b}} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi. \qquad (12)$$

Darin ist:

$$k^2 = \frac{f}{f + g} \qquad (13)$$

gesetzt. In der üblichen Bezeichnungsweise der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung durch die Funktionszeichen F und E läßt sich also die Gleichung des Schallstrahles in der Form schreiben:

$$x = A\left[F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - F(k, \varphi)\right] +$$
$$+ B\left[E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - E(k, \varphi)\right]. \qquad (14)$$

Die Konstanten A, B und k^2 haben nach (8), (12) und (13) folgende Werte:

$$A = -\sqrt{\frac{w_0}{2bv_0}} \frac{\cos \alpha_0}{\frac{v_0 - w_0}{v_0}\cos \alpha_0 + 1},$$

$$B = \sqrt{\frac{w_0}{2b\,v_0}\,\frac{2\cos^2\alpha_0}{\left(\frac{v_0-w_0}{v_0}\cos\alpha_0+1\right)\left(\frac{v_0+w_0}{v_0}\cos\alpha_0-1\right)}},$$

$$k^2=\left(\frac{v_0-w_0}{v_0}\cos\alpha_0+1\right)\frac{v_0}{w_0}\cdot\frac{(1-\cos\alpha_0)}{2\cos^2\alpha_0}\,. \tag{15}$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich sofort, daß $k^2=0$ ist für $\alpha_0=0$, und ferner durch einfache Rechnung, daß $k^2=1$ ist für

$$\cos\,\alpha_0=\frac{v_0}{v_0+w_0}\,. \tag{16}$$

Zwischen 0 und diesem Grenzwert $\overline{\alpha}_0$ liegen diejenigen Strahlrichtungen, für die ein Zurückbiegen des Strahles nach der Abszissenachse stattfindet. Alle Strahlen, die von der Abszissenachse unter Winkeln $\alpha_0 \geq \overline{\alpha}_0$ ausgehen, verlaufen unmittelbar, ohne Periodizität, in die Unendlichkeit. Es ist bemerkenswert, daß der Grenzwinkel $\overline{\alpha}_0$ nur von w_0/v_0 abhängt, aber nicht von b, also nicht von der Art, wie die Strömungsgeschwindigkeit von der Achse aus nach außen hin abnimmt. Für den Strahl, der unter dem Grenzwinkel $\overline{\alpha}_0$ von der Abszissenachse ausgeht, führt Gleichung (6) mittels (16) zu der Differentialgleichung:

$$dx=\frac{v_0}{\sqrt{w_0(2v_0+w_0)}}\cdot\frac{(1+by^2)\,dy}{\sqrt{1+\frac{2v_0}{2v_0+w_0}by^2}}\,, \tag{17}$$

deren Integral lautet:

$$x=\sqrt{\frac{v_0}{2bw_0}}\,\frac{2v_0-w_0}{8v_0}\ln\frac{\sqrt{cy}+\sqrt{1+cy^2}}{\sqrt{cy}-\sqrt{1-cy^2}}+$$
$$+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2v_0+w_0}{w_0}}\,y\sqrt{1+cy^2}, \tag{18}$$

wenn mit c der Faktor $\frac{2v_0 b}{2v_0+w_0}$ bezeichnet wird. Alle Strahlen, die unter einem Winkel $\alpha_0<\overline{\alpha}_0$ von einem Punkte der Abszissenachse ausgehen, verlaufen im Bogen zur Abszissenachse zurück. Die Ordinate y_m des Scheitelpunktes ihrer Bahn folgt unmittelbar aus Gleichung (6) durch die Bedingung: $dy/dx=0$:

$$y_m=\sin\frac{\alpha_0}{2}\sqrt{\frac{2v_0}{b[(v_0+w_0)\cos\alpha_0-v_0]}}\,. \tag{19}$$

Die zugehörige Abszisse x_m ergibt sich aus (12) oder (14), wenn man beachtet, daß nach (10) y seinen größten Wert erreicht für $\varphi=0$. Also ist:

$$x_m=A\cdot F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)+B\cdot E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)\cdot \tag{20}$$

Dann ist $2x_m$ der Abstand des Punktes, in dem der Strahl die Abszissenachse wieder trifft, von seinem Ausgangspunkte. Zur Charakterisierung des Strahlenverlaufs genügt es, die Werte von x_m und y_m anzugeben.

An der Bildung des Wertes von x bzw. x_m sind die beiden Summanden der Gleichung (14) bzw. (20) mit sehr verschiedenen Beträgen beteiligt. Im allgemeinen ist für die in Betracht kommenden Probleme die Strömungsgeschwindigkeit w_0 der Luft klein gegen die Schallgeschwindigkeit v_0. Dann ist A klein und zeigt innerhalb des Bereichs der Zurückkrümmung der Schallstrahlen nur wenig Änderung. Es ist nämlich

$$\text{für } \alpha_0=0 \quad A=-\sqrt{\frac{w_0}{2bv_0}}\cdot\frac{1}{2-w_0/v_0}$$

$$\text{für } \alpha_0=\overline{\alpha}_0 \quad A=-\sqrt{\frac{w_0}{2bv_0}}\cdot\frac{1}{2}\,.$$

Allerdings variiert das erste elliptische Integral, mit dem A multipliziert ist, innerhalb desselben Bereichs von 0 bis ∞. Aber erst in der nächsten Nähe der Grenzkurve und nur in der Nachbarschaft des Scheitelpunktes der Kurve kommt dieses Anwachsen von $F(k,\varphi)$ gegenüber der Kleinheit von A so in Betracht, daß es dem ersten Summanden erhebliche Beträge erteilt. Der Faktor B dagegen ist von Anfang an groß; denn er ist für $\alpha_0=0$

$$B=\sqrt{\frac{w_0}{2bv_0}}\cdot\frac{2v_0}{w_0(2-w_0/v_0)}=-A\cdot\frac{2v_0}{w_0}$$

und er steigt für $\alpha_0=\overline{\alpha}_0$ bis ∞. Das zweite elliptische Integral hat zwar nur Werte, die zwischen 0 und 1,5708 liegen. Aber die Größe von B bewirkt, daß der Wert von x bzw. x_m in der Hauptsache durch den zweiten Summanden bestimmt wird.

Für $\alpha_0=0$ hat x_m seinen kleinsten Wert:

$$x_m=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{v_0}{2bw_0}}\,. \tag{21}$$

Um von dem Verlauf dieser krummlinigen Strahlenbrechung eine Anschauung zu geben, will ich die Ergebnisse der Rechnung für einen bestimmten Fall mitteilen. Ich will die Schallgeschwindigkeit in der ruhenden Luft zu 340 m/sec annehmen, und die Windgeschwindigkeit in der Achse der Lamelle w_0 zu 5,5 m/sec. Dann ist $\overline{\alpha}_0=10^0{,}2$. Ferner soll im ungefähren Anschluß an die Messungen, die Herr Dr. Rieth in seiner Dissertation mitgeteilt hat, der Abfall der Strömungsgeschwindigkeit von der Achse der Lamelle aus nach der Seite so groß angenommen werden, daß in 1 mm Abstand von der Achse die Windgeschwindigkeit nur noch 1 m/sec beträgt. Dann ist in Gleichung (1) $b=4{,}5$ [1/mm²] zu setzen. Der Abfall der

α_0 0	A	B	k^2	$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$	$E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$	x_m mm	y_m mm
0	0,02137	2,6422	0,0000	1,5708	1,5708	4,117	0,000
1	0,02137	2,6674	0,0093	1,5747	1,5669	4,146	0,046
2	0,02136	2,7426	0,0374	1,5863	1,5555	4,232	0,093
3	0,02135	2,8877	0,0842	1,6063	1,5366	4,403	0,144
4	0,02134	3,1084	0,1499	1,6361	1,5095	4,657	0,199
5	0,02133	3,4548	0,2347	1,6783	1,4738	5,056	0,263
6	0,02131	3,9989	0,3387	1,7379	1,4277	5,672	0,339
7	0,02129	4,0141	0,4517	1,8168	1,3741	6,714	0,439
8	0,02126	6,7063	0,6056	1,9574	1,2952	8,644	0,586
9	0,02124	11,4182	0,7692	2,1956	1,1990	13,644	0,863
10	0,02121	56,6712	0,9533	2,9625	1,0581	59,902	2,126

Geschwindigkeit ist dann durch folgende Zahlen charakterisiert:

$y =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5 mm
$w =$	5,5	5,26	4,66	3,92	3,20	2,47 m/sec
$y =$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0 mm	
$w =$	2,02	1,69	1,42	1,18	1,00 m/sec.	

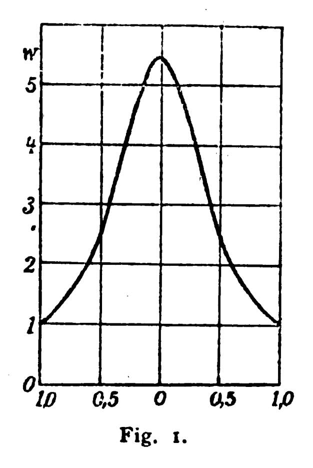


Fig. 1.

Fig. 1 gibt eine graphische Darstellung dieses Verlaufs. Ich habe für die Werte $\alpha_0 = 0^0$, 1^0, 2^0 usw. bis 10^0 nach (15) die Größen A, B und k^2 berechnet, zu k^2 aus den Funktionentafeln von Jahnke und Emde[1]) die Werte von $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ und $E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ entnommen und damit nach (20) x_m, außerdem nach (19) y_m berechnet. Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind in der obigen Tabelle zusammengestellt.

Die beiden letzten Spalten dieser Tabelle enthalten die Werte der Abszisse und der Ordinate des Scheitelpunktes der Bahnkurve. Der unter dem Winkel α_0 von einem Punkte der Abszissenachse ausgehende Strahl schneidet die Abszissenachse wieder im Abstande $2\,x_m$ von seinem Ausgangspunkte. Man ersieht aus der vorletzten Spalte, daß die x_m-Werte anfangs mit wachsendem α_0 nur sehr langsam zunehmen. Dieser Verlauf der x_m-Werte ist in Fig. 2 graphisch dargestellt; als Abszissen sind die Werte von α_0, als Ordinaten die zugehörigen Werte

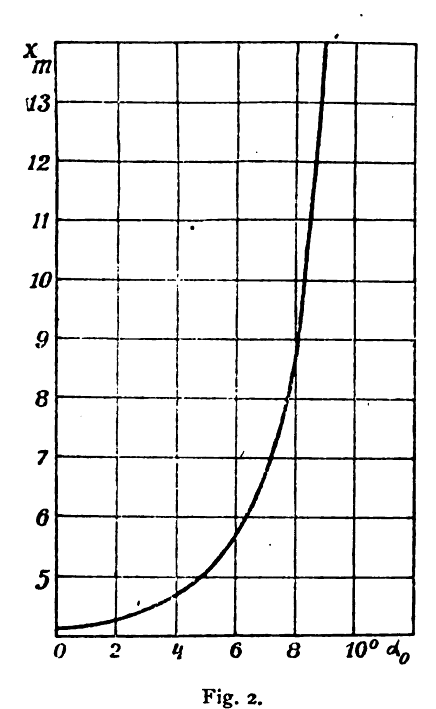


Fig. 2.

von x_m eingetragen. Befindet sich also eine Schallquelle auf der Abszissenachse, so kann man sagen, daß die innerhalb eines Winkelbereichs von etwa 8^0 — 4^0 beiderseits der Achse — von ihr ausgehende Schallenergie nahezu in einem zweiten Punkte der Achse, der ungefähr 8 mm vom Ausgangspunkt entfernt ist, wieder vereinigt wird, genauer in dem Raume zwischen 8,2 und 9,3 mm Abstand von dem Ausgangspunkt, und dasselbe würde sich wiederholen im doppelten, dreifachen Abstande usw., wobei allerdings mit fortschreitender Wiederholung der Vereinigungsraum immer breiter und verwaschener wird. Der Querschnitt dieses auseinander- und dann wieder zusammengehenden Strahlen-

1) E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig, B. G. Teubner, 1909.

bündels würde an seiner breitesten Stelle allerdings nur 0,4 mm betragen, wenn man sich auf die Strahlen innerhalb 4^0 beiderseits der Achse beschränkt.

Diese Angaben über Lage und Höhe des Scheitelpunktes mögen zur Charakterisierung der Bahnen genügen. Ihren Verlauf im einzelnen zu berechnen, hat kein Interesse. Ob es denkbar wäre, daß die Ergebnisse dieser Rechnungen für die Erklärung der Besonderheiten der Schneidentöne in Betracht kommen könnten, soll an anderem Ort erörtert werden.

Gießen, November 1918.

(Eingegangen 31. Januar 1919.)

Schallgeber und Schallempfänger. II.

Von W. Hahnemann und H. Hecht.

Der elektro-mechanische Transformator als Schallempfänger.

Im ersten Teil unserer Arbeit haben wir[1]) einen elektro-magnetischen Schallgeber, wie er beispielsweise in einem gewöhnlichen Telephon vorliegt, als elektro-mechanischen Transformator behandelt und eine Theorie seiner Wirkungsweise gegeben. Wir haben auf Grund der aufgestellten Diagramme Beziehungen zwischen seinem Wirkungsgrad, Dämpfung und Verlustwinkel abgeleitet und gefunden, daß diese drei Größen das Verhalten des Schallgebers in weitgehendem Maße bestimmen. Im folgenden soll die Theorie für seine Anwendung als Empfänger gegeben werden. Es wird sich im Laufe der Untersuchung zeigen, daß die gleichen Größen für ihn auch als Empfänger von ausschlaggebender Bedeutung sind.

1. Das Diagramm.

Wir denken uns im folgenden den elektromechanischen Transformator, dem wir als Geber durch eine Spule elektrische Energie zuführten und von dessen schwingendem Anker wir unter Vermittlung einer Membran mechanisch-akustische Energie ausstrahlen ließen, nach Entfernung der erregenden Maschine in ein Schallfeld gebracht; alsdann werden beide, Membran und Anker, in Schwingungen versetzt werden, deren Energie wir einem Nutzwiderstande, der im besonderen ein Hörtelephon sein kann, zuführen wollen.

Wir machen bei der Betrachtung des elektromechanischen Transformators als Empfänger von demselben Gedankenexperiment wie beim Geber Gebrauch und denken uns den Anker nicht mehr schwingend und mit mechanisch-akustischer Energie gespeist, sondern festgehalten und von einer Spule umschlossen, der elektrische Energie zugeführt wird. Das für den Geber gültige Schema erfährt insofern eine Änderung, als die antreibende Energiequelle statt im Spulenkreis 1 im Spulenkreis 2 liegt, und an ihre Stelle im Spulenkreis 1 die Abbremswiderstände treten. Auf diese Weise erhalten wir das Schema der Fig. 1, in der, wie

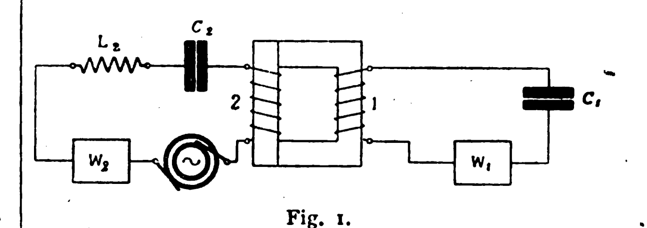


Fig. 1.

früher beim Geber, der elektro-magnetische Arbeitsvorgang im Spulenkreis 2 an die Stelle des mechanisch-akustischen Arbeitsvorganges der Ankerbewegung getreten ist, und insbesondere, wie wir früher bereits gesehen haben, L_2, C_2 und w_2 Äquivalente der Membranelastizität, der Schwingungsmasse und des mechanischen Reibungs- und akustischen Strahlungswiderstandes sind. Die Spule 1 gibt in den äußeren Schließungskreis, der beispielsweise aus Widerstand w_1 und Kapazität C_1 bestehen möge, elektrische Energie ab. Wir betrachten von vornherein den allgemeineren Fall, in dem der Empfänger nicht durch Ohmschen Widerstand allein, sondern auch durch einen Kondensator geschlossen ist, da sich später zeigen wird, daß es in den häufigsten Fällen der Praxis nur so gelingt, nennenswerte Energie dem Schallfelde zu entziehen[1]).

Nehmen wir, um das Diagramm möglichst einfach und übersichtlich zu gestalten wie schon beim Geber an, daß die beiden Spulen 1 und 2 keine Streuung, d. h. eine magnetische Kopplung von 100 Proz. besitzen, und vernachlässigen den Ohmschen Spannungsabfall in den Spulen, so stellt Fig. 2 das Diagramm des durch Ohmschen Widerstand und Kapazität geschlossenen Empfängers dar.

Ist OF Richtung und Größe von i_2, das unter entsprechender Übersetzung aus dem Elektrischen ins Mechanische der mechanischen

---

1) W. Hahnemann und H. Hecht, Schallgeber und Schallempfänger I, diese Zeitschr. **20**, 104 ff., 1919; im folgenden mit l. c. bezeichnet.

1) Bei Verwendung von Selbstinduktion im äußeren Schließungskreise würde sich der Effekt gegenüber Anwendung von rein Ohmschem Widerstand noch verschlechtern.



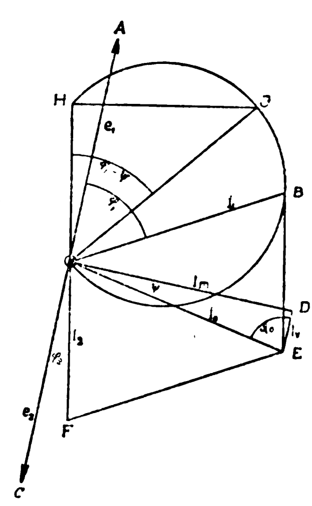


Fig. 2.

Amplitude entsprechen soll, so ist der geometrische Ort für den Endpunkt aller i_1 der im Diagramm ausgezogene Abschnitt eines Kreises, den man um den Mittelpunkt der Strecke OI schlägt. Diese Strecke OI findet man, indem man $OH = i_2$ macht und in H eine Senkrechte errichtet, die den freien Schenkel des an OH angelegten Winkels $\varphi_1 - \psi$ [1]) in I schneidet. Richtung und Größe von i_1 sind dann noch abhängig von φ_2. Man findet sie, indem man zu der Geraden FOH unter dem Winkel φ_2 die Gerade COA durch den Nullpunkt O legt und an OA den Winkel φ_1 anträgt, dessen freier Schenkel den Kreis in B trifft. Richtung von e_2 und e_1 sind durch OC und OA gegeben. Zieht man durch F eine Parallele zu OB und durch B eine Parallele zu OF, so stellt $OBEF$ das Stromparallelogramm dar. Errichtet man auf COA in O eine Senkrechte und fällt von E das Lot ED, so ist OED das Verlustdreieck mit dem Winkel $EOD = \psi = R - \varphi_0$.

Die Richtigkeit der eben geschilderten Konstruktion ergibt sich folgendermaßen: Aus dem Stromdreieck OEF mit den Winkeln

$EOF = \varphi_0 - \varphi_2$ und $OEF = 2R - (\varphi_0 + \varphi_1)$

folgt die Beziehung

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_0 + \varphi_1)}.$$

Dieselbe Gleichung können wir auch aus der Konstruktion des Kreisdiagramms herleiten und damit seine Richtigkeit nachweisen. Es ist nämlich Winkel $IOH = \varphi_1 - \psi$ und Winkel $BOI = \varphi_2 + \psi$ und, da Dreieck OIB ein rechtwinkliges, so ist

$$\cos(\varphi_1 - \psi) = \frac{i_2}{OI} \text{ und } \cos(\varphi_2 + \psi) = \frac{i_1}{OI}.$$

Nach Einführung des Winkels φ_0 erhalten wir durch Division dieselbe Beziehung wie oben. Im Falle der rein Ohmschen Belastung, in der $\varphi_1 = 0$ ist, würde OI unter dem Winkel ψ, im Falle von gleichzeitiger Belastung mit Selbstinduktion unter dem Winkel $\psi + \varphi_1$ links von OH liegen. Der geometrische Ort für den Endpunkt aller i_1, die möglich sind, ist der Kreisbogen rechts von OH. Dieser Abschnitt wird aber beim Übergang von einer Belastung mit Kapazität zu solcher mit Selbstinduktion immer kleiner und läßt schon hieraus die Nachteile der Belastung mit nacheilendem Strom erkennen.

Hält man in Fig. 2 nicht den Winkel φ_1 sondern den Winkel φ_2 konstant, so ist der geometrische Ort für den Endpunkt aller i_1 eine Gerade, die durch den Punkt H unter dem Winkel $\varphi_0 - \varphi_2$ gegen OH nach rechts verläuft. In besonderen Fällen kann dies Diagramm nützlicher sein als das Kreisdiagramm.

Das Kreisdiagramm der Fig. 2 gilt für ein konstantes i_2 und für einen festen, unveränderlichen Winkel φ_1 im Schließungskreise des Empfängers und für veränderliche φ_2 oder i_1, d. h. verschiedene Belastungen. Der Endpunkt des veränderlichen i_1 kann dabei alle Punkte des Kreisbogens OBH durchlaufen, insbesondere stellen die beiden Grenzfälle die Fälle des offenen und kurz geschlossenen Empfängers dar. Fällt B nach O, so wird $i_1 = 0$ und die Spannung liegt, da jetzt i_0 mit i_2 identisch ist, unter dem Winkel $R - \psi = \varphi_0$ voreilend zu i_2. Das sich hieraus ergebende Leerlaufdiagramm gleicht vollständig demjenigen des Senders. Die abgenommene Leistung ist Null, da der Strom Null ist.

Im Grenzfall des Kurzschlusses fällt B mit H zusammen. Die Richtung von i_0 nähert sich bei allmählichem Eintritt in den Kurzschluß derjenigen der Tangente im Punkte H, um im Grenzfall, in dem $i_0 = 0$ wird, mit dieser zusammen zu fallen. Da der Sehnentangentenwinkel $R - \psi + \varphi_1$ ist, und da die Spannung dem Strom i_0 immer um den Winkel $R - \psi$ vorauseilt, so eilt im Falle des Kurzschlusses die Spannung e_2 dem Strom i_2 um den Winkel φ_1 nach. Auch in diesem Grenzfall ist die abgenommene Leistung Null, da i_0 und damit das Feld und die Spannung Null geworden sind.

Zwischen diesen beiden Grenzfällen, in denen

1) Der Winkel φ_1 ist in Wirklichkeit, da Stromvoreilung herrscht, negativ. Für das Diagramm ist die Drehrichtung im Sinne des Uhrzeigers angenommen. Die aus der Fig. 2 abgeleiteten Formeln gelten mit positiven φ_1-Werten für Kapazitäts-, mit negativen für Selbstinduktions-Belastung.

keine Energie nutzbar gemacht wird, liegt das Optimum, das wir aufsuchen wollen; denn abgesehen von gelegentlichen Sonderfällen, wird wohl weitaus am häufigsten in der Praxis die wichtigste Frage sein: wie soll man den Empfänger schließen, um von einem gegebenen Schallfelde das Maximum an Energie in einem Nutzwiderstande absorbieren zu können?

2. Dämpfung und Nutzleistung.

Betrachten wir die Dämpfung des Empfängers, so finden wir, daß dieselbe stets größer sein muß, als seine Senderdämpfung, da die letztere nur durch die von der Ankeramplitude abhängige mechanisch-akustische Leistung bedingt ist, während beim Empfänger zu dieser Leistung noch die Eisenverluste[1]) und die Nutzleistung hinzutreten. Beim Sender existiert das Senderkraftfeld[2]) auch bei ruhendem Anker, und die Eisenverluste treten unabhängig von der Ankerbewegung auf, beeinflussen daher die Dämpfung nicht, sondern machen sich nur beim Wirkungsgrad geltend. Anders liegen die Verhältnisse beim Empfänger. Bei diesem entsteht das Kraftfeld erst durch die Ankerbewegung, und damit werden Verluste und Nutzleistung von der Ankerbewegung abhängig und gehen in die Dämpfung ein.

Nennen wir die mechanische oder Senderdämpfung $\mathfrak{d}_s$ und die Empfängerdämpfung $\mathfrak{d}_e$ und die Anteile, die Verluste und Nutzleistung hieran haben, $\mathfrak{d}_v$ und $\mathfrak{d}_n$, so ist

$$\mathfrak{d}_e = \mathfrak{d}_s + \mathfrak{d}_v + \mathfrak{d}_n.$$

Die den Dämpfungen entsprechenden Leistungen nennen wir

$$W_s,\ W_v \text{ und } W_n.$$

Da sich die Dämpfungsanteile wie die entsprechenden Leistungen verhalten, so ist die Nutzleistung, die wir zu einem Maximum machen wollen,

$$W_n = \frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s} \cdot W_s.$$

Bezeichnet i_{20} die Amplitude des mit Gleichstrom noch nicht erregten und offenen Empfängers, i_2 diejenige des erregten und geschlossenen Empfängers, so besteht zwischen der mechanischen Leistung des offenen und geschlossenen Empfängers die Beziehung

$$W_{so} = \left(\frac{i_{20}}{i_2}\right)^2 \cdot W_s.$$

Befindet sich der Empfänger in einem konstanten Schallfelde, d. h. ist er mit konstanter Kraft erregt, so ist

$$\frac{i_{20}}{i_2} = \frac{\mathfrak{d}_s + \mathfrak{d}_v + \mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s}.$$

Hieraus finden wir

$$W_n = \frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s} \cdot \left(\frac{\mathfrak{d}_s}{\mathfrak{d}_s + \mathfrak{d}_v + \mathfrak{d}_n}\right)^2 W_{so}$$

oder auch

$$W_n = \frac{\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s}}{\left(1 + \frac{\mathfrak{d}_n + \mathfrak{d}_v}{\mathfrak{d}_s}\right)^2} W_{so}.$$

Solange $\frac{\mathfrak{d}_n + \mathfrak{d}_v}{\mathfrak{d}_s}$ klein gegen 1 ist, stellt

$$W_n = \frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s} W_{so}$$

mit genügender Genauigkeit die Nutzleistung dar. Wir wollen zunächst diesen einfacheren Fall betrachten und uns später dem allgemeineren zuwenden.

Unter der soeben gemachten Voraussetzung ist die Nutzleistung dem Werte $\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s}$ proportional, und die Aufgabe, möglichst viel Nutzleistung zu entziehen, ist identisch mit der Aufgabe $\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s} = \frac{W_n}{W_s}$, d. h. die Nutzdämpfung zu einem Maximum zu machen. Wir wollen daher zunächst die Werte für W_n und W_s an Hand des Empfänger- und Sender-Diagramms berechnen.

Die Nutzleistung ist $W_n = e_1 i_1 \cos\varphi_1$.

In den Ausdruck für

$$e_1 = i_m \omega L_0\,^{1)} = i_0 \sin\varphi_0 \omega L_0$$

führen wir den aus dem Stromdreieck des Diagramms, Fig. 2 sich ergebenden Wert für

$$i_0 = i_1 \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin(\varphi_0 + \varphi_1)}$$

ein und erhalten unter Berücksichtigung der früher abgeleiteten Beziehung zwischen i_1 und i_2 den Wert für

$$W_n = \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \sin(\varphi_0 - \varphi_2) \sin\varphi_0 \cos\varphi_1}{\sin^2(\varphi_0 + \varphi_1)} \omega L_0 i_2^2.$$

1) Da wir bei Aufstellung des Diagramms den Ohmschen Spannungsabfall in den Spulen zu Null angenommen haben, müssen wir dies jetzt konsequenterweise auch für die Spulenverluste tun. Sind dieselben nur gering, so ändert sich das Diagramm nicht wesentlich; ihrem Einfluß auf die Dämpfung können wir aber trotzdem dadurch Rechnung tragen, daß wir sie in Gedanken zunächst zur Nutzleistung schlagen und dann hinterher wieder abziehen.

2) Unter Kraftfeld schlechthin wird immer nur das Wechselfeld verstanden. Das konstante, durch Gleichstromerregung hervorgerufene Kraftfeld ist beim Empfänger gleich groß, wie beim Sender angenommen.

1) Feldspannung = Magnetisierungsstrom $\times 2\pi n \times$ Selbstinduktion.



Die mechanisch-akustische Leistung W_s für die Amplitude i_2 finden wir aus dem Senderdiagramm[1]) zu $W_s = e_{2s} i_2$ oder, da

$$e_{2s} = i_{ms}\,\omega L_0 = i_{vs}\,\text{tg}\,\varphi_0\,\omega L_0$$

und

$$\frac{i_{vs}}{i_2} = \frac{1-\eta}{\eta}$$

ist,

$$W_s = \frac{1-\eta}{\eta}\,tg\,\varphi_0\,\omega L_0\,i_2^2.$$

Durch Division der beiden Ausdrücke für W_n und W_s erhalten wir

$$\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s} = \frac{\eta}{1-\eta} \cdot \frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)\sin(\varphi_0-\varphi_2)\cos\varphi_0\cos\varphi_1}{\sin^2(\varphi_0+\varphi_1)}.$$

Wir müssen nun die Bedingungen aufsuchen, unter denen dieser Ausdruck ein Maximum wird. Er ist, wie auch nicht anders zu erwarten, sowohl von φ_1 wie φ_2 abhängig. Für ein konstantes φ_1 d. h. ein bestimmtes Kreisdiagramm und ein veränderliches φ_2 d. h. veränderliches i_1 finden wir durch Differentiation des Ausdruckes $\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s}$ nach φ_2 die Bedingung

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}.$$

Wollen wir nun unter allen möglichen Kreisen denjenigen finden, der für dieses φ_2 das Maximum von $\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s}$ liefert, so haben wir diesen Wert in den Ausdruck für $\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s}$ einzusetzen und nach φ_1 zu differenzieren. Wir erhalten dann als zweite Bedingungsgleichung

$$\varphi_1 = \varphi_0,$$

die in Kombination mit der ersten die weitere Bedingung

$$\varphi_2 = 0\,^{2)}$$

liefert. Berechnen wir mit diesen Werten für φ_1 und φ_2 das Maximum von $\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s}$, so finden wir

$$\left(\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s}\right)_{max} = \frac{1}{4}\,\frac{\eta}{1-\eta}.$$

Um uns davon zu überzeugen, wie weit in den einzelnen Fällen die gemachte Annahme $\frac{\mathfrak{d}_n+\mathfrak{d}_v}{\mathfrak{d}_s} \ll 1$ zutrifft, berechnen wir in ganz ähnlicher Weise die Verlustleistung und Verlustdämpfung und finden

$$W_v = \frac{\sin^2(\varphi_1+\varphi_2)\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{\sin^2(\varphi_0+\varphi_1)}\,\omega L_0\,i_2^2$$

und

$$\frac{\mathfrak{d}_v}{\mathfrak{d}_s} = \frac{\eta}{1-\eta}\,\frac{\sin^2(\varphi_1+\varphi_2)\cos^2\varphi_0}{\sin^2(\varphi_0+\varphi_1)},$$

woraus wir für die Bedingungen des maximalen $\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s}$ den Wert finden

$$\frac{\mathfrak{d}_v}{\mathfrak{d}_s} = \frac{1}{4}\,\frac{\eta}{1-\eta}$$

und daher

$$\frac{\mathfrak{d}_n+\mathfrak{d}_v}{\mathfrak{d}_s} = \frac{1}{2}\,\frac{\eta}{1-\eta}.$$

Wenn der Empfänger nur durch Ohmschen Widerstand geschlossen wird, ist $\varphi_1 = 0$; es lautet dann die Bedingung des maximalen $\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s}$ $\varphi_2 = \frac{1}{2}\varphi_0$, woraus der Wert

$$\left(\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s}\right)_{max} = \frac{\eta}{1-\eta}\,\frac{\cos\varphi_0}{2(1+\cos\varphi_0)}$$

und der diesem entsprechende Wert für

$$\frac{\mathfrak{d}_v}{\mathfrak{d}_s} = \frac{\eta}{1-\eta}\,\frac{\cos^2\varphi_0}{2(1+\cos\varphi_0)}$$

folgt. Hieraus ergibt sich als Gesamtbetrag:

$$\frac{\mathfrak{d}_n+\mathfrak{d}_v}{\mathfrak{d}_s} = \frac{1}{2}\,\frac{\eta}{1-\eta}\cos\varphi_0.$$

Wir sehen also, daß die Bedingungen der maximalen Nutzdämpfung identisch sind mit der Bedingung der maximalen Nutzleistung, solange bei kapazitiver Belastung $\frac{1}{2}\frac{\eta}{1-\eta}$ und bei rein Ohmscher Belastung $\frac{1}{2}\frac{\eta}{1-\eta}\cos\varphi_0$ klein gegen 1 ist. Im allgemeinen werden diese Beträge wohl nur gering sein, besonders gering im Falle der rein Ohmschen Belastung. Dies ist auch der Grund, weshalb wir von vornherein die kapazitiv Ohmsche Belastung gewählt haben, da sie größere Leistungen dem Empfänger zu entziehen gestattet. Die Kleinheit des Betrages an möglicher Energieentziehung aus dem Schallfelde durch den Empfänger bei Ohmscher Belastung beruht darauf, daß ähnlich wie bei gewöhnlichen Wechselstrommaschinen[1]) der entstehende Strom das durch die Ankerbewegung hervorgerufene Feld aufzuheben sucht. Dieser entmagnetisierenden Wir-

1) l. c., Figur 6.

2) Dies ist, wie wir später sehen werden, die Bedingung für eine Abstimmungsfrequenz des Empfängers, die der mechanischen oder Sender-Resonanz entspricht.

1) Der Empfänger ist gewissermaßen eine Wechselstrommaschine, in der die Rotation des Ankers durch eine einfache Schwingung ersetzt ist.

kung des Stromes kann man entgegenarbeiten, wenn man dem Strom i_1 eine Phasenvoreilung vor e_1 gibt, d. h. den Empfänger anstatt nur durch Ohmschen Widerstand auch durch eine geeignete Kapazität schließt.

Der Widerstand des Schließungskreises 1 ist

$$\frac{e_1}{i_1} = \frac{\sin\varphi_0 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin(\varphi_0 - \varphi_2)}\,\omega L_0$$

oder im Falle größter Nutzdämpfung

$$w = \sin\varphi_0\,\omega_R L_0{}^{1)},$$

wovon $\omega_R L_0 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0$ Ohmscher Widerstand und $\omega_R L_0 \sin^2\varphi_0$ kapazitiver Widerstand sind. L_0 ist die wahre Selbstinduktion des Apparats und wird gelegentlich der Aufnahme der Senderresonanzkurve durch Messungen bei ruhendem Anker — oder elektrisch gesprochen — bei offenem Transformator gefunden.

Im Falle der Belastung durch Ohmschen Widerstand allein ist

$$\frac{e_1}{i_1} = \frac{\sin\varphi_0 \sin\varphi_2}{\sin(\varphi_0 - \varphi_2)}\,\omega L_0$$

oder für die größte Nutzdämpfung ebenfalls

$$w = \sin\varphi_0\,\omega_R L_0{}^{2)}.$$

Die Dämpfungserhöhungen, die bei Schliessung des Empfängers durch diese Widerstände eintreten müssen, betragen bei kapazitiver bzw. rein Ohmscher Belastung, wenn wir mit

$$\frac{\eta \mathfrak{d}_s}{1-\eta} = K$$

die bei Untersuchung des Senders aufgetretene Apparatkonstante K wieder einführen,

$$\frac{K}{2} \text{ bzw. } \frac{K}{2}\cos\varphi_0.$$

Diese Dämpfungserhöhungen sind einer einfachen experimentellen Messung zugänglich und gestatten die theoretisch abgeleiteten Resultate zu bestätigen[3]).

Mit der Bedingung größter Nutzdämpfung ist, wie wir sahen, die Erreichung größter Nutzleistung identisch, solange

$$\frac{1}{2}\,\frac{\eta}{1-\eta} \text{ bzw. } \frac{1}{2}\,\frac{\eta}{1-\eta}\cos\varphi_0$$

klein gegen 1 ist. Dies wird — wir können wohl sagen leider — in den meisten Fällen der Praxis zutreffen. Benutzt man aber Empfänger mit Apparatekonstanten, wie sie unseren Angaben zugrunde liegen, in Medien sehr kleiner Dämpfung, d. h. bei großen Wirkungsgraden oder gelingt es, bessere Apparate d. h. solche mit größeren Konstanten K zu bauen, so müßten wir, um die größte Nutzleistung zu erhalten, den Wert

$$\frac{\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s}}{\left(1 + \frac{\mathfrak{d}_n + \mathfrak{d}_v}{\mathfrak{d}_s}\right)^2}$$

zu einem Maximum werden lassen[1]). Die analytische Behandlung dieser Aufgabe führt zu sehr unübersichtlichen Ausdrücken, welche nicht gestatten, die für die angewandte Akustik notwendigen Formeln und Resultate klar genug herausspringen zu lassen. Man wird daher besser in konkreten Fällen immer auf die diagrammatische und graphische Behandlung zurückgreifen und kann so die vorliegende Aufgabe mit jeder gewünschten Genauigkeit lösen.

Beschränken wir uns aber auf den Fall der mechanischen oder Sender-Resonanz, d. h. $\varphi_2 = 0$[2]), so liefert uns die Rechnung eine einfache Beziehung zwischen φ_1, η und φ_0, die besagt, wie man den Empfänger schließen muß, um stets das Maximum an Nutzleistung zu erhalten. Die Beschränkung ist praktisch nicht sehr groß, da wir ja unserer jetzigen Überlegung einen Empfänger zugrunde gelegt haben, der, sozusagen, zu viel abgebremst und dadurch schallhärter[3]) als das Medium werden kann. Einen solchen Empfänger kann man aber jederzeit leicht in den Zustand günstigsten Energieentzuges einstellen.

Drücken wir $\frac{\mathfrak{d}_v}{\mathfrak{d}_s}$ durch $\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s}$ aus und setzen $\varphi_2 = 0$, so erhalten wir nach einfacher Rechnung für diesen besonderen Fall

$$W_n = \frac{\eta}{1-\eta}\;\frac{\frac{\sin 2\varphi_1}{2}\cdot\frac{\sin 2\varphi_0}{2}}{\left(\sin(\varphi_0+\varphi_1) + \frac{\eta}{1-\eta}\sin\varphi_1\cos\varphi_0\right)^2}\cdot W_{so}.$$

Differenzieren wir diesen Ausdruck nach φ_1 und setzen ihn gleich null, so erhalten wir zur

---

1) Die Widerstandsoptima sind experimentell festgestellt worden.

2) Die Widerstandsoptima sind experimentell festgestellt worden.

3) Für Apparate mit den Werten $K = 0{,}2$ und $\cos\varphi = 0{,}2$, wie wir sie in unserer ersten Arbeit erwähnt haben, beträgt die Dämpfungserhöhung für Ohmsche bzw. kapazitive Belastung 0,02 bzw. 0,1 und ist experimentell mit hinreichender Übereinstimmung nachweisbar gewesen.

1) Für konstante Verluste, d. h. konstantes $\mathfrak{d}_v$, liefert die Differentiation dieses Ausdruckes nach $\mathfrak{d}_n$ die bekannte Bedingung, daß $\mathfrak{d}_n = \mathfrak{d}_s + \mathfrak{d}_v$, d. h. Nutzdämpfung = Strahlungsdämpfung + Verlustdämpfung sein muß.

2) Siehe Kapitel 3.

3) Siehe W. Hahnemann und H. Hecht, Schallfelder und Schallantennen I, diese Zeitschr. 17, 603, 1916.

Bestimmung von φ_1 im Falle des Maximums der Nutzleistung die Bedingungsgleichung

$$\frac{1}{1-\eta}\,\mathrm{tg}^3\varphi_1 - \mathrm{tg}\,\varphi_0\,\mathrm{tg}^2\varphi_1 + \\ + \frac{1}{1-\eta}\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 - \mathrm{tg}\,\varphi_0 = 0\,.$$

Diese Gleichung zerlegt sich wie folgt:

$$\left(\mathrm{tg}^2\varphi_1 + 1\right)\left(\frac{1}{1-\eta}\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 - \mathrm{tg}\,\varphi_0\right) = 0$$

und hat eine reelle Wurzel

$$\mathrm{tg}\,\varphi_1 = (1-\eta)\,\mathrm{tg}\,\varphi_0.$$

Hieraus ersehen wir nun, wie wir abhängig vom Wirkungsgrade den Empfänger schließen müssen, um im Falle der mechanischen oder Sender-Resonanz das Maximum der Nutzleistung zu erhalten. Die beiden Grenzfälle $\eta = 1$ und $\eta = 0$ ergeben $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_1 = \varphi_0$ und besagen praktisch, daß wir bei Empfängern größter Wirkungsgrade mit rein Ohmscher Belastung auskommen, um die größtmögliche Nutzleistung zu erhalten, und daß wir bei kleiner werdenden Wirkungsgraden ihn kapazitiv schließen müssen, bis wir im Grenzfalle zu einer Phasenverschiebung von φ_0 Grad gelangen. Dies letztere Resultat entspricht dem früher erhaltenen, wonach bei geringen Dämpfungserhöhungen das Maximum der Nutzdämpfung und damit der Nutzleistung bei einem Phasenwinkel $\varphi_1 = \varphi_0$ eintrat.

Widerstand und Kapazität, durch die der Empfänger im vorliegenden Falle geschlossen werden muß, finden wir, indem man in die früher abgeleiteten Ausdrücke für $\frac{e_1}{i_1}\cos\varphi_1$ bzw. $\frac{e_1}{i_1}\sin\varphi_1$ die Werte $\varphi_2 = 0$ und den aus der obigen Maximumsbedingung sich ergebenden Wert von φ_1 einsetzt. Es wird dann

$$\frac{e_1}{i_1}\cos\varphi_1 = \sin\varphi_1\cos\varphi_1\,\omega_R L_0 = \\ = \frac{(1-\eta)\,\mathrm{tg}\,\varphi_0}{1+(1-\eta)^2\,\mathrm{tg}^2\varphi_0}\,\omega_R L_0$$

und

$$\frac{e_1}{i_1}\sin\varphi_1 = \sin^2\varphi_1\,\omega_R L_0 = \\ = \frac{(1-\eta)^2\,\mathrm{tg}^2\varphi_0}{1+(1-\eta)^2\,\mathrm{tg}^2\varphi_0}\,\omega_R L_0.$$

Für $\eta = 0$ gehen diese Ausdrücke in die früher erhaltenen über, die für maximale Nutzdämpfung bei an sich geringer Dämpfungserhöhung d. h. für kleine Wirkungsgrade abgeleitet waren.

3. Die Abstimmung.

Aus dem bei der Aufstellung des Diagramms Gesagten und aus der Betrachtung der Fig. 1 erkennt man, daß die Abstimmung des Empfängers von seinem Schließungszustande abhängig sein muß. Beim Übergang vom Sender zum Empfänger tritt, wie wir früher sahen, die erregende Maschine aus dem Kreis 1 in den Kreis 2, und wir haben es in der Hand, durch entsprechende Belastung den Kreis 1 transformatorisch in den Kreis 2 als Selbstinduktion, Kapazität, rein Ohmschen Widerstand oder eine Kombination dieser Größen einlaufen zu lassen, und damit seine Resonanzfrequenz zu verschieben. Die Empfänger- und Senderresonanz werden nur dann übereinstimmen, wenn beim Empfänger wie beim Sender an den Klemmen der Spule 2 keine Phasenverschiebung von Strom gegen Spannung herrscht, d. h. $\varphi_2 = 0$ ist. Dagegen wird die Empfängerresonanz tiefer sein, wenn wir eine zusätzliche Selbstinduktion, höher, wenn wir eine zusätzliche Kapazität haben.

Im allgemeinen werden sich die Quadrate von Empfängerresonanz ω_e und Senderresonanz ω_R umgekehrt verhalten wie die wattlos schwingenden Energien. Bezeichnen wir bei konstant bleibender Amplitude i_2 mit A_s die wattlos schwingende Energie im äußersten Schließungskreise 2, deren Wattleistung W_s war, und mit A_{v+n} die wattlos schwingende Energie an den Klemmen der Spule 2, deren Wattleistung $W_v + W_n$ war, so bestehen die Gleichungen

$$\frac{A_s}{\frac{1}{\omega_R}W_s} = \frac{\pi}{\mathfrak{d}_s}$$

und

$$\frac{A_{v+n}}{\frac{1}{\omega_R}(W_v + W_n)} = \mathrm{tg}\,\varphi_2\,.$$

Aus

$$\left(\frac{\omega_R}{\omega_e}\right)^2 = \frac{A_s + A_{v+n}}{A_s}$$

folgt

$$\left(\frac{\omega_R}{\omega_e}\right)^2 = 1 + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi_2\cdot\mathfrak{d}_s}{\pi}\cdot\frac{W_v + W_n}{W_s}$$

oder, wenn wir statt der Leistungen die entsprechenden Dämpfungen setzen, deren Werte früher berechnet sind,

$$\left(\frac{\omega_R}{\omega_e}\right)^2 = 1 + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi_2}{\pi}(\mathfrak{d}_v + \mathfrak{d}_n).$$

Wie wir bei Ableitung des Diagramms gesehen haben, ändert sich bei Belastung mit einer Kapazität vom Phasenwinkel φ_1 der Winkel φ_2 vom kapazitiven Kurzschluß bis zur

vollen Öffnung des Transformators von $-\varphi_1$ bis $+\varphi_0$, woraus für den Fall der Ohmschen Belastung sich die Werte o und $+\varphi_0$ ergeben. Wir können nun leicht angeben, was dies für die Lage der Resonanz bedeutet.

Bei Ohmschem Kurzschluß haben wir, wie wir schon früher gesehen, wegen $\varphi_2 = 0$ den Fall der Senderresonanz, während für den Fall des offenen Empfängers $\varphi_2 = \varphi_0$, $\mathfrak{d}_n = 0$ und

$$\frac{\mathfrak{d}_v}{\mathfrak{d}_s} = \frac{\eta}{1-\eta} \cos^2 \varphi_0$$

ist. Nennen wir die Frequenz des offenen Empfängers ω_0, so ist

$$\left(\frac{\omega_R}{\omega_0}\right)^2 = 1 + \frac{\eta \cdot \mathfrak{d}_s}{1-\eta} \cdot \frac{\cos \varphi_0}{\pi}$$

oder nach Einführung der Apparatekonstanten K und wenn $\frac{K \cos \varphi_0}{\pi}$ klein gegen 1 ist,

$$\frac{\omega_R}{\omega_0} = 1 + \frac{K \cos \varphi_0}{2 \cdot \pi} \text{ [1]}.$$

Um den größten Einfluß kapazitiver Belastung auf die Resonanzlage des Empfängers zu finden, nehmen wir von vornherein für die Kapazität C_1 im Schließungskreise der Spule 1 die maximal mögliche Phasenverschiebung von $\varphi_1 = 90^0$ an. Es ist dann $\mathfrak{d}_n = 0$, und das Maximum von $\operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \mathfrak{d}_v$ tritt ein für den Wert $\varphi_2 = -45^0$ und liefert, wenn wir die entsprechende Frequenz ω_c nennen,

$$\left(\frac{\omega_R}{\omega_c}\right)^2 = 1 - \frac{\eta \mathfrak{d}_s}{1-\eta} \frac{1}{2\pi}$$

oder nach Einführung der Apparatekonstanten, und, wenn $\frac{K}{2\pi}$ klein gegen 1 ist,

$$\frac{\omega_R}{\omega_c} = 1 - \frac{K}{4\pi} \text{ [2]}.$$

Die Kapazität, durch die man die Spule 1 schließen muß, um diese Erhöhung der Resonanzlage zu erhalten, berechnet sich aus dem früher abgeleiteten Wert von $\frac{e_1}{i_1} \sin \varphi_1$, wenn man $\varphi_1 = 90^0$ und $\varphi_2 = -45^0$ setzt. Als Widerstand dieser Kapazität findet man daher

$$\frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0} \omega L_0$$

oder, wenn man $\sin \varphi_0 = 1$ setzen darf,

$$\frac{\omega L_0}{1 + \cos \varphi_0}.$$

Wir haben hier den theoretisch und experimentell sehr interessanten Fall vorliegen, daß wir durch rein elektrische Maßnahmen mechanisch-akustische Schwingungsgebilde in ihrer Abstimmung beeinflussen können. Der Effekt wird erzielt, indem leer oder wattlos schwingende elektrische Energien zu solchen mechanischer Art hinzugefügt werden. Daß umgekehrt das Auftreten mechanisch leerschwingender Energien in elektrischen Kreisen die elektrischen Schwingungsgrößen nennenswert beeinflussen kann, haben wir sehr deutlich an dem Verhalten des Senders gesehen, der unter Umständen aus einer elektrischen Selbstinduktion zu einem elektrischen Kondensator werden kann.

Zusammenfassung.

Im Vorstehenden ist gezeigt worden, daß ein elektro-mechanischer Transformator, wie er beispielsweise in einem gewöhnlichen Telephon vorliegt, in seiner Eigenschaft als Schallempfänger entsprechend der in einer früheren Abhandlung erfolgten Untersuchung als Schallgeber theoretisch als rein-elektrischer Transformator behandelt werden kann, indem die mechanische Wirkung der Ankerbewegung durch elektrische Vorgänge gedanklich ersetzt wird.

Es ist das Strom- und Spannungsdiagramm des Empfängers aufgestellt und die Bedingung für größte Nutzleistung abgeleitet worden, die im allgemeinen nur bei kapazitiver Belastung erhalten werden kann. Die Resonanzlage erscheint abhängig vom Schließungszustand, indem wattlos schwingende elektrische Energien zu den mechanischen hinzutreten und die Abstimmung beeinflussen. Die hierdurch eintretenden Verstimmungen sind berechnet worden.

Die theoretischen Resultate sind durch gelegentliche, kurz mitgeteilte experimentelle Ergebnisse gestützt.

Kiel, im Januar und Februar 1919.

(Eingegangen 14. Februar 1919.)

[1] Für $K = 0,2$ und $\cos \varphi_0 = 0,2$ berechnet sich dieses Verhältnis zu $1 + 0,006$. Diese „Verstimmungen" des Empfängers sind zuerst von Herrn L. Adelmann experimentell gefunden worden. Diese Untersuchung wie auch die übrigen in unseren bisherigen Veröffentlichungen mitgeteilten sind in den Laboratorien und auf den Versuchsständen der Signal-Ges. m. b. H. Kiel angestellt worden.

[2] Dieser Einfluß ist entsprechend der Berechnung experimentell richtig bestätigt worden.

Über die Absorptionsgrenzfrequenzen der Röntgenstrahlen bei den schwereren Elementen, besonders bei den seltenen Erden.

Von Manne Siegbahn und Edv. Jönsson.

1. Einleitung.

An dem ersten publizierten Röntgenspek-

trogramme — von M. de Broglie[1]) — waren, außer einer Reihe dem Antikathodenmaterial entstammenden Spektrallinien, noch zwei scharfe Schwärzungsgrenzen vorhanden. Diese wurden zuerst von de Broglie als Köpfe von Bandenspektren gedeutet. Ein Vergleich ihrer Wellenlängen mit den Erregungsfrequenzen der charakteristischen *K*-Strahlungen von *Ag* und *Br* zeigte aber, wie von Bragg und dem einen von uns bemerkt[2]) wurde, daß die diskontinuierlichen Schwärzungsänderungen dem Bromsilber der Platte zuzuschreiben seien. Weitere Versuche von M. de Broglie und E. Wagner bestätigten dies und führten zu einer einfachen Methode zur Aufnahme von „Absorptionsspektren" der chemischen Elemente. Wesentlich ist dabei, daß die Absorption nicht — wie früher angenommen wurde — einer allmählichen Änderung über ein allerdings kleines Wellenlängengebiet unterzogen ist, sondern in einem außerordentlich kleinen Frequenzbereich (von der Breite einer Spektrallinie) von einem Mindestwert zu einem Höchstwert diskontinuierlich überspringt.

Die Werte dieser Grenzfrequenzen sind ein ebenso charakteristisches Merkmal eines chemischen Elements, wie z. B. die Röntgenspektrallinien. Allerdings ist die Ermittelung einer Schwärzungsgrenze am Spektrogramm aus technischen Gründen nicht mit derselben Genauigkeit wie die einer scharfen Spektrallinie auszuführen. Wenigstens ist dazu ein weit umständlicheres Verfahren (z. B. Photometrieren) nötig als bei den Linien. Die erreichbare Genauigkeit in der Frequenzbestimmung der Absorptionsgrenze ist aber vollkommen hinreichend, wenn es gilt das absorbierende Element zu identifizieren. Für Analysezwecke scheint diese Methode ihrer Einfachheit wegen, und da sie sehr wenig Substanz beansprucht, in gewissen Fällen verwendbar zu sein. In der Tat haben die Verfasser diese Analysemethode zur Aussuchung eines genügend reinen *Ce*-Präparates aus der zur Verfügung stehenden Präparatensammlung benutzt. Die verschiedenen Spektrogramme zeigen sofort, welche Verunreinigungen in merkbarer Menge vorhanden sind.

2. Frühere Messungen in der *K*-Reihe.

Ausgedehnte Messungen von Absorptionsgrenzfrequenzen liegen von M. de Broglie[3]), E. Wagner[1]) und Blake und Duane[2]) vor. Die beiden erstgenannten Forscher bedienen sich im wesentlichen derselben Methodik: Das weiße Spektrum von einem technischen Röntgenrohr wird unter Zwischenschaltung des betreffenden Stoffes photographisch aufgenommen. Spalt und Platte befinden sich dabei angenähert im gleichen Abstand von der Drehungsachse des Kristalls; letzterer ist so orientiert, daß die reflektierende Spaltfläche (Steinsalz) in der Drehungsachse liegt. Die Elemente von *Fe* ($N = 26$) bis *Nd* ($N = 60$) wurden von E. Wagner untersucht, was dem Wellenlängengebiet $1{,}759 \cdot 10^{-8}$ cm bis $0{,}282 \cdot 10^{-8}$ cm ($0{,}227 \cdot 10^{-8}$ für *Er-Ho*) entspricht, dies deckt sich etwa mit dem Wellenlängenbereich von einem gasgefüllten, technischen Röntgenrohr. Sehr bemerkenswert ist die Angabe von Wagner, daß es ihm trotz zahlreicher Versuche nicht gelungen ist, mit einem solchen Rohr weder die Absorptionskante von *Ta* ($N=73$) noch das Emissionsspektrum von Wolfram (*K*-Reihe, $N=74$) zu erzeugen.

Weit länger nach den kürzeren Wellenlängen kann man mit den gasfreien Röhren kommen, wie die Untersuchungen von M. de Broglie, Hull, Lilienfeld und Seemann u. a. zeigen. de Broglie hat bis *Bi* ($N=83$, $\lambda=0{,}133 \cdot 10^{-8}$) Messungen von Absorptionsspektren ausgeführt und auch noch die Kanten von *Th* und *U* nachgewiesen.

Neuerdings haben Blake und Duane nach einer Ionisationsmethode die Grenzfrequenzen im Gebiete *Ag* bis *Ce* ermittelt. Sie glauben aus ihren Messungen schließen zu können, daß die von de Broglie (und E. Wagner) benutzte Methode falsche Werte ergebe, die mit abnehmender Wellenlänge immer größer werden sollten. Die Ursache dazu würde in der Eindringung der Röntgenstrahlen in den Kristall liegen, wodurch die Reflexion nicht in der äußeren Spaltebene, sondern in der tiefer liegenden Atomebene erfolgen sollte.

Da der Zweck der vorliegenden Arbeit die Untersuchung der Absorptionsspektren der seltenen Erden[3]) war, würden die systematischen Fehler der de Broglie-Wagnerschen Methode, wenn vorhanden, noch mehr ins Gewicht fallen wegen der hohen Frequenzen in diesem Gebiete. Die gewählte Methode, welche frei ist von dem obigen Einwand, gestattet zugleich eine Entscheidung über die Berechtigung der von Blake und Duane ausgeübten

1) M. de Broglie, C. R. Dez. 1913.
2) M. de Broglie, C. R. Mai 1914.
3) M. de Broglie, Journ. d. Physique, Mai—Juni, 1916.

1) E. Wagner, Bayr. Akad. d. Wiss. März 1916.
2) Blake und Duane, Phys. Rev. 1917.
3) Die untersuchte Sammlung wurde in liebenswürdigster Weise von dem Freiherrn Dr. Auer v. Welsbach zur Verfügung gestellt.

Kritik. Dies war um so mehr von Bedeutung, als man geneigt sein konnte, die Einwendung gegen die photographisch-spektrographische Methode auch bei der Aufnahme von Linienspektren zutreffend zu glauben. Das würde bedeuten, daß sämtliche vorliegende Messungen mehr oder weniger falsch wären. Es sei das Resultat vorweggenommen, daß eine solche Vermutung vollständig unberechtigt ist.

3. Spektrograph.

Um der ev. Fälschung durch unkontrollierbare Eindringung in den Kristall bei der Reflexion zu entgehen, wurde ein Spektrograph von der in Fig. 1 wiedergegebenen Art gewählt.

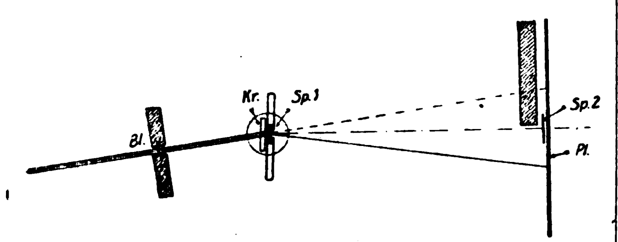


Fig. 1.

Die Reflexion geschieht in den inneren Atomebenen eines dünnen (etwa 2 mm dicken) Kristallstücks ((Kr.) aus Steinsalz oder Kalkspat, wie es für spektroskopische Zwecke wohl zuerst von Rutherford[1]) angegeben worden ist. Der Spalt[2]) (Sp. 1) mit Goldschneiden liegt dicht an der Hinterfläche des Kristalls. Plattenhalter (Pl.) und Spalt nebst Kristallen sind auf einer gemeinsamen Platte montiert, die um eine Achse senkrecht zur Zeichenebene durch die Spaltmitte drehbar angeordnet ist. Die Drehung dieses Spektrographenteils ist an einer Kreisteilung ablesbar (siehe Fig. 2). Schließlich ist noch ein zweiter Spalt (Sp. 2) dicht an der photographischen Platte angebracht, welcher den Zweck hat, eine Nullinie in jedes Spektrogramm einzutragen. Dies wird einfach in der Weise ausgeführt, daß der drehbare Spektrographenteil in seine Nullage (Bl — Sp. 1 — Sp. 2 in gerader Linie) gestellt und dann etwa 20 Sekunden mit Röntgenstrahlen exponiert wird. Zwei verschiebbare Bleischütze (in Fig. 1 ist der eine von diesen zu sehen) blenden ungewollte Strahlung ab.

1) Rutherford u. Andrade, Phil. Mag. (6) **27**, 854, 1914.

2) Prinzipiell schließt sich dieser Spektrograph denen von H. Seemann angegebenen nahe an. Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn Seemann an den einen von uns zu urteilen, arbeitet er jetzt gemeinschaftlich mit Herrn Friedrich mit einem Spektrographen, der im wesentlichen mit dem hier benutzten übereinstimmt.

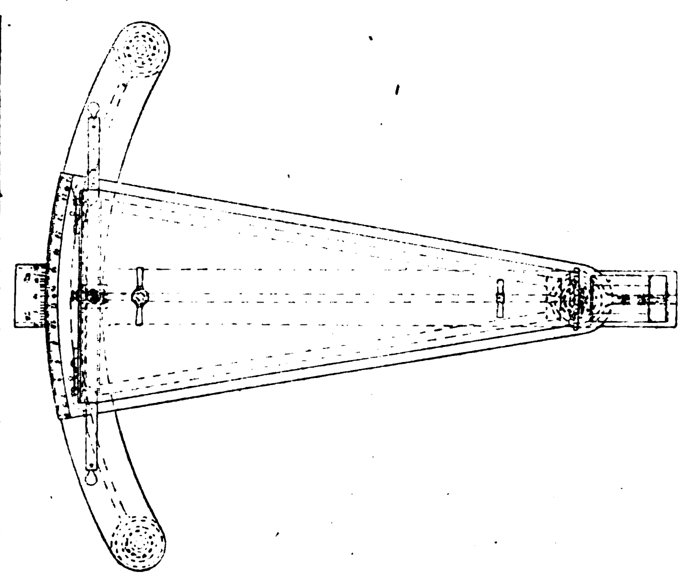


Fig. 2.

Der Spalt 2 wird vor Inbetriebnahme des Spektrographen mit optischen Hilfsmitteln so einjustiert, daß das Lot von dem Spalt 1 auf die photographische Platte gefällt eben durch Spalt 2 geht. Ferner wird der Kristall mittels doppelseitiger monochromatischer Röntgenaufnahmen (z. B. mit $W\,K\alpha$-Strahlung) so eingestellt, daß die reflektierenden Ebenen nahezu parallel diesem Lote stehen. Wenn dies richtig getroffen ist, liegt die Nullmarke gerade in Mitte zwischen der linken und rechten Seite der monochromatischen Spektrallinie. Da diese Justierung selbstverständlich nicht vollkommen richtig getroffen werden kann, erhält man aber durch Ausmessung der drei Linien die nötige Korrektionsgröße. Nachdem einmal diese Korrektion bestimmt worden ist, genügt es nur die eine Hälfte der Platte zu exponieren, um die Wellenlängen mit derselben Genauigkeit wie ohne Nullinie mit doppelseitiger Aufnahme ermitteln zu können.

Die praktische Ausführung der skizzierten Anordnung ist aus Fig. 2 u. 3 zu sehen. Spalt und

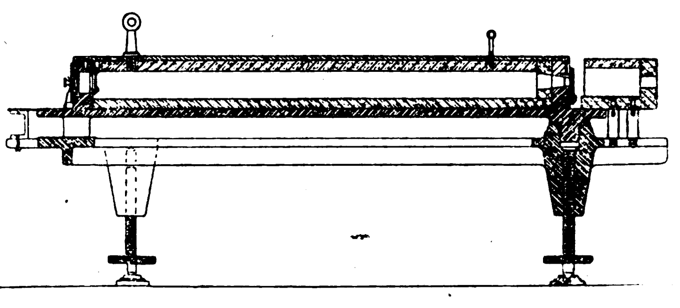


Fig. 3.

Plattenhalter sind in einem gußeisernen Kasten montiert, dessen Inneres mit 10 mm dickem Blei bekleidet ist. Um nötige Justierungen zu gestatten, ist der obere Deckel abnehmbar. Wichtig ist, daß die Schichtseite der photographischen Platte immer in demselben gut definierten Abstand von Spalt 1 gestellt werden kann, was durch die Konstruktion erreicht worden ist. Dieser Abstand wurde mit Hilfe eines besonders hergestellten Schiebmaßes am Normalmeter ausgemessen. In einer gefrästen Spur vor der Kassette laufen die beiden Bleistäbe, mit deren Hilfe die Platte vor der direkten Strahlung geschützt werden kann.

Nachdem die obige einmalige Justierung des Spektrographen mit optischen Hilfsmitteln ausgeführt ist und die Nullpunkte an der Kreisteilung also bekannt sind (d. h. die Lage, bei welcher Bl—Sp 1—Sp 2 in gerader Linie liegen), ist die Einstellung für Spektralaufnahmen sehr einfach: Mit Hilfe eines fluoreszierenden Schirmes wird so eingestellt, daß die Strahlen durch Bl und Sp 1 (Fig. 1) gehen. Der Spektrograph ist dann betriebsbereit. Zuerst wird die Nullinie (in etwa 20 Sek.) aufgenommen und danach der drehbare Teil um den fraglichen Reflexionswinkel gedreht. Mit der Röhre, die für die folgende Untersuchung benutzt wurde (Glühkathodenröhre der Firma Siemens-Schuckert, sogenannte Therapieröhre), war der Winkelbereich, der mit stillstehender Platte exponiert wurde, etwa 40′. Dies genügt vollkommen, um die Absorptionskante eines Stoffes hervortreten zu lassen. Allerdings ist es nützlich, um Ungleichheiten in dem Brennfleck auszugleichen, den Spektrographen von Zeit zu Zeit während der Exposition zu drehen.

Die untenstehenden Messungen geben kein gutes Maß für die mit diesem Spektrographen erreichbare Genauigkeit, weil sie zum größten Teil mit einem verhältnismäßig schlechten Steinsalzkristall aufgenommen sind. Leider war in unserer Sammlung ein genügend gutes Exemplar nicht zu finden, weshalb wir später zum Kalkspat übergingen, der zwar kleineres Reflexionsvermögen besitzt, aber in guten Exemplaren leicht zu erhalten ist. Im Vergleich mit dem hier früher benutzten Spektrographen erfordert der jetzt beschriebene weit bessere Kristallexemplare, was sich darin zeigte, daß derselbe Kristall, der bei dem erstgenannten Spektrographen völlig befriedigende Schärfe gegeben hatte, bei dem letzteren nicht gut verwandt werden konnte.

Über die Leistungsfähigkeit in bezug auf die Meßgenauigkeit wird eine demnächst erscheinende Arbeit über Linienspektra besseren Aufschluß geben.

Sämtliche Spektrogramme in dieser Arbeit sind — wie erwähnt — mit einer Glühkathodenröhre — Therapieröhre — der Firma Siemens-Schuckert aufgenommen. Zum Betrieb der Röhre diente ein Hochspannungsgleichrichter (für max 120 K.V.) derselben Firma. Die Betriebsspannung wurde je nach dem absorbierenden Stoffe gewählt; bei den schwersten Elementen wurde mit 120 K.V. und 3 M.A. gearbeitet. Das würde nach der experimentell verifizierten Einsteinschen Formel

$$eV = h\nu$$

oder

$$\lambda_{\text{Å.E.}} = \frac{12{,}3}{V_{\text{K.V.}}}$$

etwa 0,1 Å.-E. entsprechen, d. h. eine Spannung an der Röhre von 120 K.V. erzeugt ein kontinuierliches Spektrum, das gegen kürzere Wellen bei 0,1 Å.-E. endet. Da die Absorptionsgrenzwellenlänge von Uran eben 0,1 Å.-E. ist, wäre daher 120 K.V. kaum hinreichend, um die Grenzen hervortreten zu lassen. Da aber die Röhre mit einer Wechselspannung im Effektivwerte von 120 K.V. betrieben wurde und die Spannungskurve daher weit höhere Spannungswerte einschließt, konnte auch diese bis jetzt kürzeste Wellenlänge der Röntgenspektren (entsprechend der β_2-Linie der K-Reihe von Uran) erzeugt und gemessen werden.

Der absorbierende Stoff (gleichgültig in welcher Form oder Verbindung) wurde in eine kleine Küvette aus Karton (0,2—0,5 mm dicke Schicht) dicht an der Blende (Bl.) im Strahlenwege eingeführt. Die Expositionszeiten betrugen 1—5 Stunden, das letztere bei den schwersten Elementen.

II. Ergebnisse.

Die erhaltenen Absorptionsgrenzwellenlängen für Elemente zwischen *Cd* (48) und *U* (92) sind in der Tabelle auf S. 255 zusammengestellt. In der Tabelle finden sich noch die sich teilweise überdeckenden Messungsergebnisse von de Broglie, E. Wagner und Blake und Duane. Die Übereinstimmung mit den Messungen von Blake und Duane, welche nach der Ionisationsmethode ausgeführt sind, ist innerhalb der Fehlergrenzen eine vollständige. Ferner zeigt die Tabelle ebenso wie die graphische Darstellung der entsprechenden Werte, daß unsere Werte mit denen von E. Wagner genau übereinstimmen.

	N	de Broglie λ	E. Wagner λ	Blake u. Duane λ	Siegbahn u. Jönsson λ	Siegbahn u. Jönsson $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$
Ag	47	0,482	0,490	0,4850		
Cd	48	0,460	0,468	0,4632	0,4629	1,470
In	49			0,4434		
Sn	50	0,421	0,425	0,4242	0,4231	1,537
Sb	51	0,401	0,405	0,4065		
Te	52	0,385	0,383	0,3896	0,3877	1,606
J	53	0,369	0,369	0,3727	0,3715	1,641
Cs	55	0,340		0,3444	0,3436	1,706
Ba	56	0,327	0,331	0,3307	0,3306	1,739
La	57	0,313		0,3188	0,3186	1,772
Ce	58	0,300	(0,298)	0,3073	0,3064	1,807
Pr	59				0,2946	1,843
Nd	60		0,282		0,2835	1,878
Sa	62				0,2636	1,948
Eu	63				0,2543	1,983
Gd	64				0,2456	2,018
Dy	66				0,2294	2,088
Ho	67				0,2214	2,125
Pt	78	0,152			0,1578	2,518
Au	79	0,149			0,1524	2,561
Hg	80	0,146			0,1479	2,601
Tl	81	0,142			0,1427	2,647
Pb	82	0,138			0,1385	2,687
Bi	83	0,133			0,1346	2,725
Th	90				0,1127	2,979
U	92				0,1048	3,089

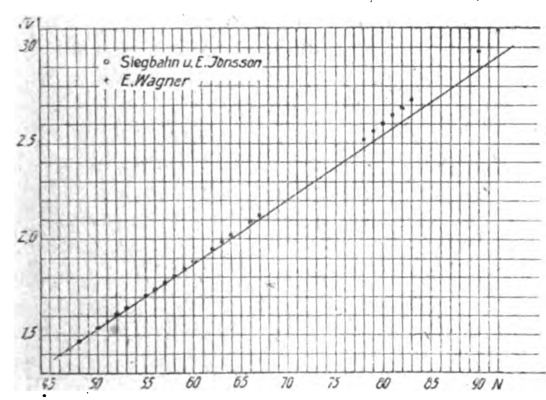


Fig. 4.

Die Werte von de Broglie haben wir unter Anbringung einer Exzentrizitätskorrektion[1]) von 1,5′ aus den Winkelwerten im Journal de Physique (loc. cit.) berechnet. Wie Blake und Duane bemerken, zeigen die Wellenlängenwerte von de Broglie eine mit steigendem Atomgewicht wachsende Abweichung von ihren (und somit auch von unseren) Werten bis *Ce* (58), was diese Verfasser in einer methodischen Fehlerquelle — Eindringung in den Kristall — begründet sehen wollen. Hierzu ist aber zu bemerken, daß die Wagnerschen Werte, die nach derselben Methode erhalten worden sind, diese Abweichungen nicht zeigen. Noch wichtiger für die Beurteilung dieser Frage ist aber der weitere Vergleich bei noch höheren Elementen, welcher mit unseren Messungen möglich ist: nämlich zwischen *Pt* (74) und *Bi* (83). Hier verlaufen die Abweichungen in umgekehrter Richtung, bis sie bei 81—83 verschwinden. Die kleinen Abweichungen bei de Broglie sind daher gar nicht systematischer Natur und können auch nicht als Unterlage einer Kritik gegen die Drehkristallmethode herangezogen werden. — Wir bemerken noch, daß die oben angegebene Korrektion von 1,5′ bei den schwersten Elementen *Pt*—*Bi*, wo die schrittweise Änderung von Element zu Element etwa 2′ beträgt, relativ eine sehr beträchtliche Größe hat.

1) Von de Broglie in einem uns zugesandten Sonderdrucke schriftlich bemerkt.

Wie die Tabelle zeigt, sind die seltenen Erden bis *Ho* (67) untersucht worden, dann sind weiter die Elemente von *Pt* (78) bis *U* (92) aufgenommen. Die Elemente zwischen *Ho* und *Pt* konnten wegen des in diese Gegend fallenden Linienspektrums des Wolframs nicht gut mit diesem Rohre untersucht werden. Es ist beabsichtigt, diese Lücke später mit Hilfe eines Rohres mit *Pt*-Antikathode auszufüllen.

Die graphische Darstellung zeigt die durch die variable Elektronenmasse bedingte Abweichung im $\sqrt{\nu}/N$-Diagramm von der geraden Linie — was übrigens bei Hinzunahme der

Messungen an leichteren Elementen[1]) noch deutlicher hervortritt (vgl. Blake und Duane loc. cit.).

1) Messungen bis herab zu *Mg* mit Hilfe des von dem einen von uns konstruierten Vakuumspektrographen sind im hiesigen Institut ausgeführt und werden demnächst veröffentlicht.

Lund, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 15. Februar 1919.)

Doppelbrechung des Lanolins.

Von Hermann Rohmann.

Gelegentlich der Bestimmung von Brechungsexponenten durch Totalreflexion an einem Flintprisma untersuchte ich auch eine Salbe aus einer etwas offenen Zinntube, die sich zufällig in meinem Arbeitszimmer befand und die dort offenbar längere Zeit unberührt gelegen hatte. Dabei zeigte sich, daß diese Substanz zwei scharfe Grenzen der Totalreflexion gab, wenn ich die Salbe mit dem Finger in einer Richtung parallel zu den Prismenkanten auf die Glasflächen aufgestrichen hatte; daß sie dagegen nur eine scharfe Grenze gab, wenn ich sie in der Richtung senkrecht zu den Kanten aufstrich. Hin- und Herstreichen der Salbe gab stets entsprechende, bleibende Veränderungen, auch dann, wenn das Verstreichen in bestimmter Richtung durch ein aufgebrachtes Deckglas bewirkt wurde.

Die Brechungsexponenten für die beobachteten Grenzlinien bestimmten sich zu 1,4995 und 1,4968 (Streichbewegung parallel zur Kante) bzw. 1,4996 (Streichbewegung senkrecht zur Kante), für *Na*licht bei ca. 30 Grad C. Die verstrichene Substanz verhält sich also wie ein einaxiger, negativer Kristall, dessen optische Achse parallel zur Strichrichtung liegt.

Herr Prof. Weinland, den ich über die Natur der Salbe um Rat fragte, war so freundlich, sie durch einige Reaktionen zu prüfen und fand, daß sie in der Hauptsache aus Wollfett (Lanolin) bestehen müsse. Wahrscheinlich handelt es sich um eine Tube gewöhnlichen Lanolins, wie es früher zur Hautpflege usw. verwandt wurde, das durch längeres Lagern etwas ranzig geworden ist.

Da Lanolin aus Cholesterinestern besteht, von denen eine ganze Anzahl flüssige Kristalle bilden, wird damit die beobachtete Erscheinung vielleicht verständlich als erzwungene Homöotropie im Sinne von O. Lehmann, Ann. d. Phys. (4) **50**, 555, 1916.

Eine weiterhin untersuchte Probe reinen Wollfetts aus dem hiesigen Chemischen Institut zeigte zwar Doppelbrechung, aber nicht die Abhängigkeit von der Streichrichtung; dagegen erhielt ich aus der Schmidschen Apotheke eine Probe Lanolin, das den gefundenen Effekt wenigstens annähernd zeigt. Dasselbe ist nach einer freundlichen Auskunft von Herrn Apotheker O. Trapp vor mehreren Jahren als reinstes Lanolinum anhydricum[1]) bezogen und war in einem Porzellantiegel aufbewahrt.

Im Gegensatz zu der zuerst untersuchten Probe gibt dieses Lanolin beim Streichen senkrecht zur Prismenkante nicht eine einzige scharfe Grenze, es nähert sich nur die weniger abgelenkte Grenze der andern um etwa die Hälfte der Entfernung, die sie bei der Streichrichtung parallel zur Prismenkante hat (Brechungsexponenten für *Na*licht etwa 1,4978 und 1,4955 bei paralleler Streichrichtung). Im ganzen sind die Grenzen etwas weniger scharf als bei der erstuntersuchten Substanz.

Eine Probe Adeps lanae II von der Firma Merck, Darmstadt, zeigt ebenfalls eine solche Veränderung der zweiten Grenze beim Streichen, aber in noch geringerem Betrage (ca. $^1/_3$ des Abstandes).

Beim Erwärmen und Schmelzen der verschiedenen Proben verschwindet die Doppelbrechung. Nach dem Wiedererstarren sind die Effekte wesentlich verringert. Ähnlich wirkt Lösen in Xylol, Aceton usw.

Das gleiche Resultat wie die Untersuchung der Totalreflexion liefert die Betrachtung des zwischen Objektträger und Deckglas verstrichenen Lanolins im Polarisationsmikroskop. Die wirksamen Proben verhalten sich in allen wesentlichen Beziehungen wie parallel zur optischen Achse geschnittene einaxige Kristallplatten mit der Achse in der Streichrichtung bzw. wie Kristallplatten mit gegen die Oberfläche geneigter Achse. Die Auslöschung ist recht vollkommen, obgleich die Substanzen ein wenig trübe sind. Ganz geringe Verschiebungen des Deckglases in entsprechender Richtung bewirken schon Aufhellung des Gesichtsfeldes. Der Effekt ist auch bei sehr kleinen Schichtdicken gut beobachtbar, wenn man durch den Kondensor den Faden einer Glühlampe etwas unterhalb des Präparats abbildet und das Mikroskop auf dieses scharfe Bild einstellt.

Das einmal gestrichene Präparat bleibt anscheinend unbegrenzt lange, jedenfalls aber mehrere Tage lang in seinem doppelbrechenden Zustand. Dort, wo durch eingebettete Luftblasen oder andere Hindernisse die Bewegungs-

1) Das meist verkaufte undurchsichtige Lanolin wird aus dem Anhydricum durch Verreiben mit Öl und Wasser hergestellt.



richtung der Substanz verändert wird, finden sich Aufhellungen und Auslöschungen, die die Bewegungsrichtung bis ins Detail verfolgen lassen.

Ganz besonders eignet sich zur Demonstration ein Präparat, bei dem das Deckglas um eine bestimmte Achse rotiert wurde. Zwischen gekreuzten Nikols sieht man dann ein schwarzes Kreuz, das mit scharfen Spitzen von dem Drehungspunkt ausläuft. Wenn die Drehung des Deckglases nicht ganz vollkommen ist (aus freier Hand gelingt sie kaum), so resultiert ein deformiertes Kreuz, aus dem die letzte Bewegung gut zu entnehmen ist. Diese Eigenschaften des Lanolins werden zur Untersuchung mancher Bewegungsvorgänge wahrscheinlich nützlich sein können.

Unter dem Mikroskop in dünner Schicht mit stärkeren Objektiven untersucht, zeigen die wirksamen Lanolinproben eine ziemlich einheitliche klare Masse, die der Träger der untersuchten Eigenschaft ist. In ihr befinden sich bei der ersten Probe ölartige Tröpfchen, die zwischen gekreuzten Nikols anscheinend unabhängig von der Streichrichtung immer Aufhellung und Farben zeigen, bei den andern Lanolinsorten kleine Kriställchen.

In dickeren Schichten bei relativ schwacher Vergrößerung zeigt die Substanz zunächst eine Art Gerinnsel, das sich beim Hin- und Herbewegen des Deckglases bewegt und nach und nach verschwindet.

Da zurzeit im armen Deutschland Lanolin eine seltene Substanz geworden ist und ich nicht hoffen kann, in absehbarer Zeit größere als zur mikroskopischen Beobachtung ausreichende Mengen des wirksamen Materials zu erhalten, muß ich weitere Beobachtungen über die Natur der Kräfte, welche die Doppelbrechung bzw. die Richtung der betreffenden kleinsten Teilchen bewirken, zunächst noch zurückstellen.

Tübingen, 20. Februar 1919, Physikal. Institut.

(Eingegangen 22. Februar 1919.)

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Leiden Dr. A. Koreraar für chemische Technologie, an der Universität Königsberg Dr. Franz Lehmann für pharmazeutische Chemie, an der Universität Münster Dr. Ernst Weitz für Chemie (vgl. dazu **20**, 144, 1919), an der Technischen Hochschule Delft der Dozent für chemische Technologie in Tilburg H. C. I. C. Gelissen für Farbstoff- und Färbereichemie, an der Universität Zürich Dr. Paul Epstein (früher an der Universität Moskau) für Physik.

Ernannt: Dr. H. J. Watermann zum ord. Professor für chemische Technologie an der Technischen Hochschule Delft, Dr. A. S. Russell zum Dozenten für Physikalische Chemie an der Universität Sheffield, der Professor für Physik an der Universität Manchester Sir Ernest Rutherford zum Cavendish-Professor für Experimentalphysik an der Universität Cambridge (England), der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Wien Dr. Heinrich Paweck zum ord. Professor der technischen Elektrochemie ebenda, Dr. Frederick Soddy zum ord. Professor der Chemie an der Universität Oxford.

Berufen: Der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Breslau Geh. Regierungsrat Dr. Gerhard Hessenberg in gleicher Eigenschaft an die Universität Königsberg, der ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule München, Dr. Heinrich Wieland in gleicher Eigenschaft an die Technische Hochschule Karlsruhe.

Verliehen: Den Privatdozenten an der Technischen Hochschule Wien Dr. Isidor Klimont (Organische Chemie) und Dr. Karl Oettinger (Technische Warenkunde) der Titel a. o. Professor.

Neuer Lehrauftrag: Professor Dr. Edgar Wedekind (bisher an der Universität Straßburg) für organische Chemie an der Universität Frankfurt a/M., dem Redakteur der Chemikerzeitung Dr. Walther Roth am Polytechnikum in Cöthen für Geschichte der Chemie.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Physik an der Technischen Hochschule Karlsruhe Geheimer Rat Dr. Otto Lehmann, der ord. Professor der Chemie an der Universität Zürich Dr. Alfred Werner.

Gestorben: Der etatsmäßige Professor der technischen Chemie an der Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Max Delbrück, der frühere ord. Professor der Mathematik an der Universität Gießen Geh. Hofrat Dr. Eugen Netto.

Berichtigung: In der Berichtigung auf Seite 192 dieser Zeitschrift **19** muß es Telegrafenberg statt Trachenberg heißen.

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1919.

Universität Frankfurt/M.

Wachsmuth: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Ausgewählte Kapitel der Elektrizität, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium (mit Born), 14 tägig, 2 *g*; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 6, für Fortgeschrittene, halbtägig oder ganztägig; Handfertigkeitspraktikum (mit Seddig), 3; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig. — **Born**: Analytische Mechanik, 4, Übungen, 1; Quantentheorie, 2; Einführung in die theoretische Physik, besonders für Kriegsteilnehmer, 2 *g*. — **Seddig**: Repetitorium der Experimentalphysik, besonders für Kriegsteilnehmer, 3; Leitung selbständiger Arbeiten aus dem Gebiete der wissenschaftlichen Photographie, nach Verabredung; Photographisches Praktikum, 4 oder 8. — **Stein**: Molekulartheorie I: Kinetische Gastheorie, 2. — **Déguisne**: Der elektrische Wechselstrom (Experimentalvorlesung), 2; Wechselstrommessungen, 1; Einführung in die Röntgentechnik, 1 *g*; Kolloquium über die neuere Literatur der angewandten Physik, 14 tägig, 2 *g*; Kleines elektrotechnisches Praktikum I: Meßtechnik, Photometrie, 3, II: Maschinen, Transformatoren, 3; Elektrotechnisches Praktikum für Vorgeschrittene, halbtägig oder ganztägig; Wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig. — **Linke**: Allgemeine Meteorologie, 2; Erdmagnetismus, 1 *g*; Meteorologisch-geophysikalische Übungen, 2. —

Freund: Anorganische Experimentalchemie, $3^3/_4$; Kolloquium über neue chemische Literatur, 14 tägig,

$1^1/_2$ *g*; Großes chemisches Praktikum und Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten: a) in der organischen Abteilung (mit Mayer, Fleischer und Speyer), b) in der anorganischen Abteilung (mit Hahn und Ebler), ganz- und halbtägig; Kleines chemisches Praktikum für Anfänger (mit Ebler), zweimal halbtägig; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Ebler), 6; Chemisches Praktikum für Angehörige der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät (mit Speyer), zweimal halbtägig; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum (mit Brandt), tägl. — **Mayer**: Einführung in die organische Chemie auf elementarer Grundlage, 1; Chemie und Technologie der Teerfarbstoffe, 2; Praktische Übungen in der Färberei der Textilfasern, 2. — **Fleischer**: Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie, 2; Über neuere Arzneimittel, 1. — **Ebler**: Analytische Chemie II, 2; Gasanalyse und Gasvolumetrie, 1; Radioaktivität und radioaktive Substanzen, 1; Praktische Übungen im Arbeiten mit Gasen, 4; Kolloquium über anorganische Chemie, 1 *g*. — **Speyer**: Chemische Technologie III: Anorganische Prozesse, 2. — **Hahn**: Neuere Anschauungen in der anorganischen Chemie: Valenz- und Strukturlehre, 1. — **Brandt**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 2. — **Tillmans**: Nahrungsmittelchemie, 2 *g*; Praktikum der Nahrungsmittelchemie oder Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie, halbtägig. — **Lorenz**: Elektrochemie, 3; Technische Elektrochemie: Schmelzflußelektrolyse, Alkalimetalle, Kalzium, Magnesium, Aluminium, 1 *g*; Großes physikalisch-chemisches Praktikum (mit Fraenkel), halbtägig oder ganztägig; Kleines Praktikum der physikalischen Chemie und Elektrochemie (mit Fraenkel), tägl. außer Sonnabend; Wissenschaftliche Arbeiten (mit Fraenkel), ganztägig; Metallographisches Praktikum (mit Fraenkel), 3 — **Fraenkel**: Anwendung physikalisch-chemischer Theorien auf technische Probleme, 1: Kupfer, Zink, Messing, 1. — **Fester**: Brennstoffe, 1; Werdegang der chemischen Großindustrie, 1. — **Becker**: Angewandte Chemie und Bakteriologie in Industrie, Handel und Gewerbe; Chemisch-technische Warenkunde, Chemie und Industrie der Ersatzstoffe, mit Exkursionen, I, $1^1/_2$, II, $1^1/_2$; Chemisches Praktikum: Übungen in der Untersuchung und Beurteilung von Handelswaren (Chemisch-technische Analyse), bakteriologische Kurse für Apotheker (Desinfektion und Sterilisation), 5. —

Schoenflies: Analytische Geometrie, 4, Übungen (mit Szasz), 1; Liniengeometrie, 2. — **v. Mises**: Differential- und Integralrechnung I, mit Übungen, 5; Fluglehre in elementarer Darstellung, 3; Fluglehre, 3. — **Hellinger**: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 2; Elementarmathematik vom höheren Standpunkt, 3. — **Szasz**: Differentialgeometrie, 4, Übungen, 1. — **Bieberbach**: Partielle Differentialgleichungen, 4, Übungen, 1; Höhere Funktionentheorie, 2; Graphische Methoden, mit Übungen, 2; Mathematisches Seminar: Lektüre mathematischer Klassiker (mit Hellinger, Schoenflies und Szasz), 2. — **Brendel**: Theoretisch- und praktisch-astronomische Übungen (mit Labitzke), nach Verabredung; Seminar für Versicherungswissenschaft: Übungen zur höheren Mathematik, 2. — **Brill**: Ausgewählte Kapitel der Astronomie, 3. —

Bergakademie Freiberg.

Brion: Elektrotechnik, mit Maschinenuntersuchungen und seminaristischen Übungen, 4; Elektrotechnisches Praktikum, 2; Experimentalphysik, mit Repetitorium, 5; Physikalisches Praktikum, 2. — **Ludewig**: Grundlagen der wissenschaftlichen Photographie, 1; Radiumkunde, 2, Übungen, 3. —

Brunck: Anorganische Chemie, 4; Analytische Chemie I: Qualitative Analyse, Übungen, tägl. außer Sonnabend, II: Quantitative Analyse, tägl. außer Sonnabend, Übungen, 1. — **Döring**: Angewandte Chemie: Eisenprobierkunde, 1, Übungen, 1 Nachmittag; Technisch-chemische Gasanalyse, Übungen, 2; Chemische Untersuchung von Grubenwettern, Übungen, 2; Chemische Technologie, 2; Salinenkunde und Kalisalzverarbeitung, 1. — **Ebert**: Organische Chemie, 1. — **v. Walther**: Einführung in die organische Chemie, 2; Die Chemie der Braunkohle; Übungen im organisch-chemischen Laboratorium — **Heike**: Übungen zur Metallographie, 2; Ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie, 1. —

Papperitz: Höhere Mathematik I: Analytische Geometrie, 6, II, 2; Darstellende Geometrie, 2, Übungen, 3; Sphärische Trigonometrie, 2; Algebra: Determinanten und Gleichungen, 2; Mathematisches Praktikum, 1. — **Wandhoff**: Markscheidekunde und Geodäsie, 4; Ausgewählte Kapitel aus der Vermessungskunde, 2; Markscheiden und Feldmessen, Übungen, 5; Feldmeßübungen für Hüttenleute, 4; Plan- und Rißzeichnen und Rechenübung, 2. —

Universität Freiburg i. B.

Himstedt: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrizität, Optik, Elektrooptik, 5; Übungen aus der theoretischen Physik, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*; Physikalisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Koenigsberger**: Übungen in den Elementen der mathematischen Physik, 1; Mathematische Physik, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Gaede**: Anleitung zu selbständigen Arbeiten im technisch-physikalischen Institut, tägl. *g* — **Friedrich**: Elektrizitätsdurchgang in Gasen: Kathoden-, Kanal- und Röntgenstrahlen, mit Vorführungen, 2; Die Physik der Röntgenstrahlen, mit Vorführungen, 1; Physikalisches Seminar, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus dem Gebiet der Experimentalphysik, tägl. —

Gattermann: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum, ganz- und halbtägig (mit Fromm, Meigen, Skita und Schwarz), tägl. außer Sonnabend. — **Riesenfeld**: Anorganische Experimentalchemie, 5; Kolloidchemie, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im technologischen Institut, tägl. — **Meyer**: Physikalische Chemie, 3, für Mediziner, 1; Photographie, 2; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum, 2; Selbständige physikalisch-chemische Arbeiten, nach Verabredung. — **Fromm**: Organische Technologie mit Exkursionen, 2; Repetitorium der organischen Chemie für Mediziner, 2, Repetition, 1. — **Meigen**: Qualitative Analyse, 3; Gasanalyse, 1; Seminar für analytische Chemie, 2. — **Skita**: Methoden der organischen Chemie: Ergänzung des Kollegs über organische Chemie, 3; Chemie der Teerfarbstoffe, mit Exkursionen, 2; Übungen im Färben von Gespinstfasern, 2. — **Madelung**: Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie, als Ergänzung des Kollegs über organische Chemie, 2. — **Schwarz**: Ausgewählte Kapitel der anorganischen Chemie, 1; Seminar (Repetitorium) für anorganische Chemie, 1; Theoretische Grundlagen der quantitativen Analyse, 1. —

Loewy: Analytische Geometrie der Ebene, mit Übungen, 5; Über die Grundlagen der Geometrie, 2. — **Heffter**: Differential- und Integralrechnung II, mit Übungen, 5; Einführung in die höhere Algebra, 4; Mathematisches Seminar: Algebra, 2 *g*. — **Stickelberger**: Differentialgeometrie, 3; Analytische Mechanik, 4; Mechanik, 1. — **Bolza**: Variationsrechnung mit Übungen, 4. — **Seith**: Darstellende Geometrie, 2, Übungen, 2 *g*. — **Ansel**: Einführung in die theoretische Astronomie, 3; Numerische und graphische Methoden der angewandten Mathematik, 3. —

Universität Freiburg (Schweiz).

Gockel: Experimentalphysik, 5, Mathematische Ergänzungen, 1; Physik der Atmosphäre II, 2; Physikalisches Kolloquium, 1; Physikalisches Praktikum für Mediziner und Pharmazeuten (mit v. Hauer), 6; Arbeiten im Laboratorium, tägl. — **Joye**: Elektrizität (Fortsetzung), 3, Mathematische Ergänzungen, 3; Physikalisches Semi-

nar, 1; Praktische physikalische Übungen für Anfänger und Chemiker, 8; Physikalisches Laboratorium für Fortgeschrittene, tägl. außer Montag; Untersuchungsarbeiten im Laboratorium, tägl. — **v. Hauer**: Thermodynamik II, einschl. kinetische Gastheorie, 4; Repetitorium der Physik, 2. —

Bistrzycki: Organische Chemie für Anfänger und Mediziner, 6; Analytisches Praktikum für Chemiker und Pharmazeuten, sowie Anleitung zu selbständigen organisch-chemischen Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Analytisch-chemisches Praktikum für Mediziner, 14. — **v. Estreicher**: Chemie der Schwermetalle, 3; Ausgewählte Kapitel der allgemeinen Chemie, 2; Repetitorium über anorganische Chemie, 1; Praktische Übungen für Naturwissenschaftler und Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend. —

Plancherel: Differential- und Integralrechnung, 4; Analytische Geometrie, 2; Differentialgleichungen, 3; Übungen in Geometrie und Integralrechnung, 4. —

Universität Gießen.

König: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6, für Fortgeschrittene, nach Verabredung, für Chemiker, Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3; Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten, tägl.; Physikalisches Seminar für Lehramtskandidaten: Übungen in Demonstrationsversuchen und Behandlung einfacher theoretischer Hausaufgaben (mit Cermak), 14tägig, 2*g*; Physikalisches Kolloquium (mit Fromme), 14tägig, 2. — **Fromme**: Elektromagnetische Theorie des Lichtes, 2; Theoretisch physikalische Übungen, 1; Niedere Geodäsie 3; Praktische Übungen, 1 Nachmittag. — **Cermak**: Handfertigkeitspraktikum, 3; Das Schwingungsproblem im Gesamtgebiet der Physik, 1. — **Uller**: Einführung in die mathematische Behandlung physikalischer Probleme, 1. — **Jentzsch**: Die optischen Grundlagen der Malerei, 1 *g*; Ausgewählte Kapitel der Physiologischen Optik, 1. — **Peppler**: Wetter und Wettervoraussage, 2. —

Elbs: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum, tägl.; Chemische Übungen für Landwirte, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner und Veterinärmediziner (mit Brand), 5; Übungen in Unterrichtsversuchen für Lehramtskandidaten (mit Brand), 14tägig, 2 *g*. — **Schaum**: Einführung in die physikalische Chemie, 2; Neuere Theorien der physikalischen Chemie, 1; Physikalisch-chemische Übungen, 3; Optische Übungen: Ultramikroskopie, Polarisationsmikroskopie, Spektroskopie, 3; Physikalisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Brand**: Chemische Technologie II: Technologie organischer Stoffe, mit Besichtigungen chemischer Betriebe, 2; Technologie der Farbstoff- und Heizmittelzwischenprodukte, 1. — **v. Liebig**: Grenzfragen der Chemie, 1 *g*. — **Feist**: Pharmazeutische Präparate, anorganischer Teil, 3; Pharmazeutisch-chemische und nahrungsmittelchemische Übungen (mit Elbs), tägl.; Die menschlichen Genußmittel und ihre Verfälschungen unter Berücksichtigung der Kriegszeit, 1; Gesetzeskunde für Apotheker und Nahrungsmittelchemiker, 1. —

Engel: Differentialrechnung, 4, Übungen, 1; Funktionentheorie, 4; Mathematisches Seminar: Differentialgleichungen, 2. — **Schlesinger**: Analytische Geometrie, 4, Übungen, 1; Theorie der krummen Linien und Flächen: Differentialgeometrie 4; Mathematische Übungen für mittlere Semester, besonders Kriegsteilnehmer, 2; Mathematisches Seminar: Funktionentheorie, 1. — **Graßmann**: Projektive Geometrie der Ebene in analytischer Behandlung, 4; Darstellende Geometrie II, mit Übungen, 4; Mathematisches Seminar: Über projektive Geometrie, 14tägig, 1. — **Männchen**: Mathematischer Ergänzungskurs, 3. —

Universität Göttingen.

Debye: Experimentalphysik II: Elektrizität (für Physiker und Mathematiker) 4; Physikalisches Praktikum, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Voigt und Pohl), 2 *g*; Ausgewählte Kapitel der kinetischen Gastheorie, 2. — **Voigt**: Grundbegriffe der theoretischen Physik, 4; Mathematisch-physikalisches Seminar: Ausgewählte Kapitel der theoretischen Physik, mit Übungen, 2 *g*. — **Wiechert**: Meteorologie, Ebbe und Flut und ihre Beziehungen zu anderen kosmischen Erscheinungen, 1; Einführung ins Vermessungswesen durch praktische Übungen, 3; Wetter und Wettervorhersage, 1 *g*; Geophysikalisches Praktikum, nach Verabredung *g*; Besprechung geophysikalischer Fragen, 1. — **N. N.**: Angewandte Elektrizitätslehre, mit Demonstrationen, 4; Elektrotechnisches Praktikum, 3; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. — **Prandtl**: Kolloquium über Fragen der Luftfahrt, 2 *g*; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Mechanik, einschließlich Aerodynamik und Hydrodynamik, tägl.; Einführung in die Mechanik, 4, Übungen, 2. — **Pohl**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme (für Mediziner), 4; Physikalisches Praktikum (mit Madelung), 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. — **Hertz**: Potentialtheorie, 4; Einführung in die Relativitätstheorie, 2. — **Madelung**: Theoretische Elektrizitätslehre, 4; Kolloquium und Übungen über spezielle Fragen der theoretischen Physik, für Anfänger und Vorgeschrittene, 1 *g*. — **Rausch v. Traubenberg**: Physikalisch-philosophische Grenzprobleme, 2. — **Reich**: Drahtlose Telegraphie, mit Experimenten, 1. — **Scherrer**: Radioaktivität, 2. — **Winkler**: Übungen in physikalisch-technischer Handfertigkeit, 4. —

Windaus: Allgemeine Chemie I: Anorganische Chemie, 5; Chemisches Kolloquium für Fortgeschrittene, 1 *g*; Seminar für Lehramtskandidaten (mit Koetz), nach Verabredung *g*; Chemische Übungen (mit Koetz, Borsche, Sielisch und Wienhaus), tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Wienhaus), 6. — **Tammann**: Elektrochemie, 2; Über Mischkristalle, 1 *g*; Kolloquium, 1 *g*; Praktikum für Anfänger, 4 Wochen; Physikalisch-chemische Arbeiten, ganz- und halbtägig. — **Coehn**: Einführung in die Photochemie, mit Demonstrationen, 2; Photographisches Praktikum: a) für Anfänger, b) für Fortgeschrittene, 3; Photochemische Arbeiten, ganz- und halbtägig. — **Kötz**: Analytische Chemie, mit Experimenten, 2; Chemische Technologie anorganischer Stoffe I, 1; Chemisches Konversatorium, 1. — **Borsche**: Farbstoffchemie, 2; Färbereichemische Übungen, 3. — **Zsigmondy**: Anorganische Kolloide I, 1 *g*; Über Gasanalyse, 1; Praktikum der anorganischen und Kolloidchemie, ganz- und halbtägig; Kleines Praktikum der Gasanalyse (mit Jander), 14 Tage. — **Mannich**: Die Auffindung der Gifte, 1; Pharmazeutische Chemie: Organischer Teil, 2; Kolloquium über pharmazeutische Chemie, 1 *g*; Praktische Übungen in pharmazeutischer und toxikologischer Chemie, tägl. außer Sonnabend. — **Vogel**: Einführung in die Lehre vom heterogenen Gleichgewicht, 1; Metallographisches Praktikum, 1. — **Wienhaus**: Einführung in das Chemische Praktikum für Mediziner, 2; Chemische Untersuchungen über Tier- und Pflanzenstoffe: Kohlehydrate, Glykoside, ätherische Öle, Harze, Lipoide, Farbstoffe u. dgl., 2. — **Sielisch**: Übersicht über die organische Chemie, 2. — **Wilke-Dörfurt**: Seltene Elemente, mit besonderer Berücksichtigung ihrer technischen Anwendungen, 1. — **Bachmann**: Angewandte Kolloidchemie, 1 *g*. —

Landau: Repetitorium der Elementarmathematik und Einführung in die höhere Mathematik; Analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung, mit Übungen, 8; Mathematische Unterhaltungen und Spiele, 1 *g*. — **Runge**: Numerisches Rechnen, 6; Übungen zur Elementarmathematik, 2 *g*. — **Hilbert**: Zahlbegriff und Quadratur des Kreises, 4; Denkmethoden in den exakten Wissenschaften, 1; Integralgleichungen (mit Frl. Noether), 4; Mathematisch-physikalisches Seminar über Struktur der Materie (mit Debye), 2 *g*. — **Klein**: Ausgewählte Fragen der neueren Mathematik, nach Verabredung *g*. — **Hecke**: Zahlentheorie, 4; Elliptische Funktionen, 4; Seminar für

mittlere Semester, 2 *g*. — **N. N.**: Darstellende Geometrie. — **Courant**: Einführung in die höhere Geometrie: Analytische und projektive Geometrie, 4; Differentialgleichungen, 4. — **Bernstein**: Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3; Politische Arithmetik mit schriftlichen Übungen, 2; Versicherungsrechnung mit schriftlichen Übungen, 2; Resultate der Biostatistik, 1 *g*; Seminar-Vorträge über ausgewählte Gegenstände der mathematischen Statistik, 2 *g*. — **Schmeidler**: Algebra, 4; Theorie der Elementarteiler, 2. — **Bernays**: Variationsrechnung, mit Berücksichtigung der Einsteinschen Gravitationstheorie, 4. — **Hartmann**: Allgemeine Einführung in die Astronomie, 2; Anleitung zu astronomischen und astrophysikalischen Arbeiten, für Fortgeschrittene, 12; Astronomisches Seminar, 2 *g*. — **Ambronn**: Sphärische Astronomie, 3; Astronomische Übungen für Anfänger, 8; Leitung selbständiger astronomischer Arbeiten für Fortgeschrittene, tägl. —

Universität Graz.

Benndorf: Experimentalphysik II, 4, Physikalische Übungen I, für Chemiker und Naturhistoriker, 6 *g*, II, für Mathematiker und Physiker, 9 *g*; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend, *g*; Besprechung physikalischer Fragen (mit Radakovic), 2 *g*. — **Streintz**: Akustik, 2. — **Rosenberg**: Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche, 3 *g*. — **Waßmuth**: Galvanometrie mit Demonstrationen, 1 *g*. — **Radakovic**: Mechanik, 5; Seminar für theoretische Physik, 2 *g*. — **Brell**: Elastizitätstheorie, 3. — **v. Ficker**: Thermodynamik der Atmosphäre, 2; Klima und Wetterverhältnisse der Alpen, 2; Anleitung zur Ausführung meteorologischer Arbeiten, 2. —

Skrabal: Organische Experimentalchemie, 5; Chemische Übungen für Anfänger, tägl. außer Sonnabend, für Vorgeschrittene, tägl., auch für Lehramtskandidaten, für Mediziner, 4. — **Kremann**: Elektrochemie (Fortsetzung), 3; Physikalisch-chemische Rechenmethoden, 2; Physikalisch-chemisches Praktikum, für Vorgeschrittene, tägl. — **v. Hemmelmayr**: Ausgewählte Kapitel aus der chemischen Technologie: Explosivstoffe, Zellstoff und Kunstseide, Gerberei mit Besuch von Fabrikanlagen, 2; Experimentierübungen (chemische Schulversuche), 2. —

v. Dantscher: Integralrechnung, Funktionentheorie (Fortsetzung), 5; Mathematisches Seminar, 2 *g*. — **v. Daublebsky**: Algebra (Fortsetzung), 2; Differentialgeometrie, 3; Elementarmathematik II, 2; Mathematisches Seminar, 2 *g*. — **Streißler**: Darstellende Geometrie, 3. — **Hillebrand**: Praktische Astronomie, 3; Interpolationsrechnung und numerische Integration, 2. —

Universität Greifswald.

Stark: Experimentalphysik I: Allgemeine Dynamik, Elastodynamik, 4; Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl.; Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler (mit Bestelmeyer), 6, für Mediziner und Pharmazeuten (mit Seeliger), 2; Besprechung neuer physikalischer Arbeiten (mit Seeliger und Bestelmeyer), 1 *g*. — **Bestelmeyer**: Angewandte Physik I, 2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Physik, tägl. — **Seeliger**: Einführung in die theoretische Physik I: Mechanik, Elastizität, Hydrodynamik, 3, Übungen, 1; Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Optik, 2 *g*; Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus dem Gebiet der theoretischen Physik, tägl. —

Meisenheimer: Anorganische Experimentalchemie, 6; Chemisches Praktikum: a) anorganische Abteilung, ganz- und halbtägig, b) organische Abteilung (mit Posner), ganztägig, c) für Pharmazeuten und Nahrungsmittelchemiker, ganz- und halbtägig, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 4, Erläuterungen, $^1/_2$ *g*. — **N. N.**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 3; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Sterilisationskursus für Pharmazeuten, 2; Pharmazeutisches Kolloquium, 1 *g*. — **Roth**: Physikalische Chemie I, mit Experimenten, 2; Physikalisch-chemische Übungen, $3^1/_2$—7; Analytische Chemie, qualitativer Teil, 2; Chemie, Krieg und Wirtschaft, 1 *g*. — **Posner**: Synthetische Methoden der organischen Chemie, 2; Chemische Technologie I: Technologie der anorganischen Stoffe, 2; Technologische Exkursionen zur Besichtigung chemischer Fabriken, nach Verabredung, *g*. —

Vahlen: Analytische Geometrie des Raumes, 4, Übungen, 1 *g*; Seminaristische Übungen: Algebraische Gleichungen, 1 *g*. — **Hausdorff**: Differentialrechnung, 4, Übungen, 2 *g*; Differentialgeometrie: Kurven und Flächen, 4. — **Thaer**: Mathematischer Ergänzungskursus für Not-Abiturienten, mit Übungen, 6; Graphische Statik, 2, Übungen, nach Verabredung *g*. —

Universität Halle.

Mie: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Moleküle und Atome, 1 *g*; Physikalische Übungen für Naturwissenschaftler, 6; Kleines physikalisches Praktikum für Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3; Leitung selbständiger physikalischer Untersuchungen, tägl. — **Schmidt**: Theoretische Optik, 4; Übungspraktikum für angewandte Physik, 4; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Wigand**: Über Elektronen und Ionen, 1. — **Herweg**: Die drahtlose Telegraphie, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Entwicklung in den Kriegsjahren, 1. — **Bernstein**: Kraftmaschinen, 2 *g*. —

Vorländer: Allgemeine Experimentalchemie II: Organische Chemie, 5; Über Doppel- und Komplexsalze, 1 *g*; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium, tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Schulze), 7. — **Tubandt**: Physikalische Chemie I, 2; Kleines physikound elektrochemisches Praktikum, 3; Übungen in der Elektroanalyse, 14 Tage; Übungen und Anleitung zu selbständigen Arbeiten im physikalisch-chemischen und elektrochemischen Laboratorium, tägl.; Theoretische Ergänzungen zum physikalisch-chemischen Praktikum, 1 *g*. — — **Schulze**: Darstellung und Prüfung der Arzneimittel, anorganischer Teil, 2; Chemisches Praktikum für Pharmazeuten, tägl.; Sterilisationsübungen für Pharmazeuten, 6 *g*. — **Beschke**: Besprechung neuerer chemischer Arbeiten, 1. — **Baumert**: Die wichtigsten Lebensmittel und deren Verfälschungen, 1 *g*; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Praktische Übungen im Laboratorium für Nahrungsmittelchemie, tägl. außer Sonnabend. — **Erdmann**: Chemische Technologie I: Wärmeerzeugung, Kälteerzeugung, chemische Großindustrie, 2; Ausgewählte Kapitel aus der chemischen Technologie, 1 *g*; Praktische Übungen im Laboratorium für angewandte Chemie, tägl. außer Sonnabend. —

Gutzmer: Differentialrechnung, mit Übungen, 5; Variationsrechnung, 3; Übungen des Mathematischen Seminars, 1 *g*. — **Langheineken**: Theorie der Abstimmung und der Verhältniswahl, mit Übungen, 1 *g*. — **Eberhard**: Analytische Geometrie der Ebene, 4, Übungen, 1 *g*. — **Grammel**: Darstellende Geometrie I, 3, Übungen, 2 *g*; Mechanik der Flüssigkeiten und Gase: Hydro- und Aerodynamik, 2. — **Wangerin**: Analytische Mechanik I, 4; Potentialtheorie II, 1; Übungen des Mathematischen Seminars, 1 *g*. — **Martiny**: Feldmessen, Nivellieren und Planzeichnen, 2 *g*. — **Buchholz**: Grundlagen der Astronomie I, 2; Spezielle Störungen, 2 *g*. —

Universität Heidelberg.

Lenard: Experimentalphysik: Optik, Elektrizität und Magnetismus, 4; Physikalisches Praktikum (mit Becker und Ramsauer)), 6; Physikalisches Seminar und Kolloquium, 1 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten im physikalischen und radiologischen Laboratorium (mit Becker und Ramsauer), tägl. außer Sonnabend. — **Becker**: Wärmetheorie, 4; Elemente der Vektorenrechnung, 1; Theoretisch-physikalische Übungen, 1 *g*. — **Ramsauer**:



Radiologie: Kathodenstrahlen, 2. — **Schmidt**: Photographische Kurse für Anfänger und Vorgeschrittene, 2. —

Curtius: Experimentalchemie I: Allgemeine Chemie und Metalloide, 4; Ausgewähltes aus der Chemie des Stickstoffs für Fortgeschrittenere, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Anfänger und Geübtere in anorganischer, organischer, physikalischer, analytischer und pharmazeutischer Chemie (mit Knoevenagel, Trautz, Stollé, Muckermann, Müller und Wilke), tägl. außer Sonnabend, für Lehramtskandidaten, halbtägig, für Mediziner, 4. — **Krafft**: Organische Chemie, 4; Praktisch-chemische Arbeiten und Übungen im Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Anfänger, tägl. außer Sonnabend. — **Knoevenagel**: Organische Experimentalchemie: Verbindungen der Fettreihe, 3; Chemische Technologie: Anorganische Prozesse, mit Ausflügen, 2; Praktische Anwendung organischer Farbstoffe in der Färberei und Druckerei, 4—6 Wochen. — **Trautz**: Physikalische Chemie: Photochemie, Reaktionsgeschwindigkeit und Katalyse, 3, Übungen, 1; Physikalisch-chemisches Kolloquium, 2; Struktur- und Valenzlehre: Bau der Moleküle und Atome, 2; Praktische Einführung in die physikalische und Elektrochemie, 4—6 Wochen. — **Stollé**: Pharmazeutische Chemie I: Anorganischer Teil, 2; Analytische Methoden der organischen Chemie, 1. — **Mohr**: Besprechung neuerer organisch-chemischer Arbeiten, 1. — **Muckermann**: Nahrungsmittelchemie, 2; Ausmittelung der Gifte, 1; Über neuere Arzneimittel, 1; Praktische Einführung in die Nahrungsmittelchemie. — **Müller**: Gasanalyse und Gasvolumetrie, 1, Praktische Übungen, 2; Spektralanalyse und Kolorimetrie, 1, — **Wilke**: Neuere Gebiete der Elektrochemie: Dunkle Entladung, Wechselströme, Elektrobiologie usw., 2. —

Stäckel: Einführung in die analytische Mechanik, 4, Übungen, 1; Mathematisches Oberseminar (mit Perron), 2. — **Perron**: Differential- und Integralrechnung II, mit Einschluß der gewöhnlichen Differentialgleichungen, 6; Ausgewählte Kapitel aus der elementaren Geometrie, 3; Mathematisches Unterseminar, 1. — **Koehler**: Synthetische Geometrie der Ebene, 3. — **Pfeiffer**: Darstellende Geometrie, 3, Übungen, 2; Graphische und numerische Methoden, 2, Übungen, 1. — **Bopp**: Geschichte der Mathematik, Übersicht über das Gesamtgebiet, 2 bis 3. — **Wolf**: Elemente der Astronomie III, 2 *g*. — **Kopff**: Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung: Methode der kleinsten Quadrate, 2. —

Universität Innsbruck.

v. Schweidler: Experimentalphysik II, 4; Einführung in die messende Physik (Fortsetzung), 1; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6; Wissenschaftliche Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. *g*. — — **v. Lerch**: Ausgewählte Kapitel aus dem Gebiete der Elektrizitätslehre, 3; Ausgewählte Kapitel aus dem Gebiete der Strahlungslehre, 2. — **Tumlirz**: Theoretische Mechanik II, 5; Übungen im mathematisch-physikalischen Seminar, 2 *g*. — **Hammerl**: Elektrische Energieverteilung: Licht und Kraft, Hochspannungsanlagen, elektrische Bahnen, 2 *g*. —

Brunner: Allgemeine Chemie II: Organische Chemie, 5; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend, für Lehramtskandidaten, halbtägig; Chemische Übungen für Mediziner, 6. — **Hopfgartner**: Pharmazeutische Chemie, 5. — **Zehenter**: Chemische Technologie der organischen Stoffe II: Technologie der tierischen Rohstoffe, mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse des Nahrungsmittelchemikers, 2 *g*. — **March**: Theorie der Kapillarität, 2. —

Gmeiner: Differentialgeometrie I: Ebene Kurven, 3; Variationsrechnung, 2; Übungen im mathematischen Seminar, 2 *g*. — **Zindler**: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes II, mit Übungen, 6; Mathematisches Seminar für Anfänger: Einführung in die Differential- und Integralrechnung, 1 *g*. — **Menger**: Einführung in die projektive Geometrie (Fortsetzung), 2 *g*. —

Universität Jena.

Wien: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 4; Praktikum (mit Pauli), für Mathematiker und Physiker, 6, für Chemiker und Pharmazeuten, 4, für Mediziner, 4; Leitung physikalischer Spezialarbeiten (mit Auerbach, Straubel und Pauli), tägl.; Physikalisches Kolloquium, *g*. — **Pauli**: Experimentalphysik III: Mechanik, Akustik, Wärme, für Fortgeschrittene, 2. — **Auerbach**: Mechanik der festen, flüssigen und gasigen Körper, 4; Einführung in die theoretische Physik: Begriffe, Prinzipien, Methoden, 4; Übersicht über die Tatsachen, Gesetze und Theorien der Physik, 2; Die graphische Darstellung, 1. — **Straubel**: Abbildungstheorie, 1. — **Ambronn**: Benutzung des Polarisationsmikroskops bei histologischen Untersuchungen, 1; Übungen in der Handhabung des Mikroskops und seiner Nebenapparate, 2; Übungen zur Dunkelfeldbeleuchtung und Ultramikroskopie, nur für Fortgeschrittene, 1. —

Knorr: Allgemeine Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 5; Analytisch-chemisches Praktikum: a) Vollpraktikum, 30, b) Halbpraktikum, 15, c) Mediziner-Vollpraktikum, 6, d) Mediziner-Halbpraktikum, 3; Chemisches Praktikum im organischen Laboratorium und Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten (mit Schneider), 40. — **N. N.**: Analytische Chemie II: Maßanalyse und Nichtmetalle, 2; Elektrolyse und elektrolytisches Praktikum, 2. — **Schneider**: Chemie der aromatischen Verbindungen, 2. — **Kaufmann**: Über Molekularbau und Isomerie, 1; Chemisches Repetitorium, 3. — **Hirsch**: Chemie und physikalische Chemie der Eiweißkörper, 2; Einführung in die Kolloidchemie, 1. — **Keller**: Pharmazeutische Chemie II: Organische Chemie, $2^1/_2$; Pharmazeutisch-chemische Übungen: Darstellung chemisch-pharmazeutischer Präparate, Untersuchung chemischer und galenischer Arzneimittel, Ausmittelung der Gifte, 15; Praktische und theoretische Übungen aus dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie, tägl. außer Sonnabend; Vorlesungen und Übungen über Keimfreimachung von Arznei- und Verbandmitteln, Harn- usw. Untersuchungen, 3. — **Vongerichten**: Technologie der Teerfarben und verwandter Industriezweige mit Ausflügen, 2; Technisch-chemisches Praktikum, tägl. —

Haußner: Ausgewählte Gebiete der Elementarmathematik (zur Einführung in das Studium der Mathematik), 3; Synthetische Geometrie, 3; Theorie der Raumkurven und krummen Flächen I, 5; Differential- und Integralrechnung I, mit Übungen, 5; Mathematisches Proseminar: Elementarmathematik, 2; Mathematisches Seminar, 1. — **Koebe**: Analytische Geometrie der Ebene, mit Determinanten, 4, zur Ergänzung: Elementarmathematik, 1 *g*; Allgemeine Funktionentheorie, 4; Mathematisches Proseminar: Analytische Geometrie, 14tägig, 2; Mathematisches Seminar, 1. — **Winkelmann**: Darstellende Geometrie II: Krummlinige Gebilde, Axonometrie, Perspektive, 2, Übungen, 2; Technische Mechanik I: Grundlagen, Stereomechanik, mit Übungen, 4. — **Knopf**: Sphärische Astronomie, 3; Zeit- und Ortsbestimmung mit praktischen Übungen auf der Sternwarte, 4; Geodäsie mit praktischen Übungen: Geländeaufnahme, Nivellieren usw., 2. —

Technische Hochschule Karlsruhe.

Lehmann: Physik, 4, Ergänzungen, 2; Physikalisches Laboratorium (mit Schachenmeier), 6; Seminar für Experimentalphysik (mit Schachenmeier), 2 *g*; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im physikalischen Laboratorium, nach Verabredung. — **Schachenmeier**: Mathematische Physik, 3; Repetitorium der Physik, 2; Optik mit besonderer Berücksichtigung der Elektronentheorie, 2. — **Thomälen**: Theorie der Wechselströme, 2, Übungen, 2. — **Schmidt**: Photographische Kurse, für Anfänger und Vorgeschrittene, 2; Exkursionen, 1 Nachmittag. — **Richter**: Elektromaschinenbau II, 5, III, 3; Übungen im Konstruieren elektrischer Maschinen und Apparate, 4; Elektrotechnisches Laboratorium II, 6, für

Vorgeschrittene (mit Schleiermacher, Schwaiger und Hausrath), 8; Exkursionen zur Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Verabredung. — **Schleiermacher**: Grundlagen der Elektrotechnik und Meßkunde, 2; Theoretische Elektrizitätslehre, 4; Elektrotechnisches Laboratorium I (mit Hausrath), 6. — **Schwaiger**: Elektromotorische Betriebe, einschließlich Bahnen, 2; Elektrische Kraftwerke und Schaltanlagen, 2; Schalt- und Regulierapparate, 1; Hochspannungstechnik, 1, Übungen, 2; Exkursionen zur Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Verabredung. — **Teichmüller**: Allgemeine Elektrotechnik, 2; Elektrotechnisches Seminar, 2; Übertragung und Verteilung elektrischer Energie, 1, Übungen, 2; Elektrische Beleuchtung, 2; Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Verabredung. — **Hausrath**: Instrumente- und Apparatebau, 2; Theoretische Telegraphie, 1; Hochfrequenzmessungen, 1. —

Engler: Organische Chemie I, 4; Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie, 1; Organisch-chemisches Kolloquium (mit Franzen), 1; Chemisches Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **Bredig**: Physikalische Chemie II, 2; Ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie und ihrer Anwendungen, 1; Demonstrationen technisch-elektrochemischer Prozesse (mit Askenasy), 3; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Kolloquium für Vorgeschrittene, 2; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Physikalisch-chemischer und elektrochemischer Einführungskurs. — **Bunte**: Chemische Technologie I, 2, II, 2; Übungen in der technischen Analyse (mit Eitner), 4, 3 und tägl.; Arbeiten im chemisch-technischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Technologische Exkursionen. — **Franzen**: Organische Chemie II, 2; Ausgewählte Kapitel der theoretischen Chemie, 1; Repetitorium der organischen Chemie, 2. — **Askenasy**: Prozesse der elektrochemischen Großindustrie I, 2. — **Bunte**: Gasfeuerungen, 1, Übungen: Betriebskontrollen, Prüfung von Gasverbrauchsapparaten in der Lehr- und Versuchs-Gasanstalt, 3. — **Dieckhoff**: Anorganische pharmazeutische Chemie, 2; Analytische Chemie I, 2. — **Eitner**: Methoden der technischen Analyse, 2; Ausgewählte Kapitel der technischen Analyse, 1; Spezielle Technologie der Gasbeleuchtung I und II, 1, Übungen, 4. — **Koenig**: Chemie der Metalle, 2; Elektrochemie der Gase, 2. — **Reis**: Photochemie: Wirkungen des Lichtes, 1. — **Terres**: Ausgewählte Kapitel der chemischen Technologie, 1; Wiederholungskurs der chemischen Technologie, nach Verabredung. — **Ubbelohde**: Industrie des Petroleums, 1; Über Kunststoffe, 1. — **N. N.**: Chemie der Faserstoffe und Farbstoffe II, 2; Übungen in Färberei und Druckerei, 2. —

Böhm: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 2. — **Heun**: Mechanik I und II, 4, Übungen, 2; Mechanisches Seminar, 3 *g*. — **Krazer**: Grundlehren der höheren Mathematik, 4; Höhere Mathematik II, 2. — **N. N.**: Darstellende Geometrie I und II, 4, Übungen, 4; Konstruktive Übungen der Perspektive, 3. — **Brandt**: Elementare und analytische Geometrie der Ebene und des Raumes I und II, 3, Übungen, 1; Graphisches und numerisches Rechnen, 2, Übungen, 1. — **Haupt**: Übungen in den Grundlehren der höheren Mathematik, 2; Ergänzungen zur Arithmetik und Algebra, 1; Determinantentheorie, 2. — **Noether**: Elemente der Mechanik, 3, Übungen, 1; Hydromechanik und Aeromechanik, 2. — **Wellstein**: Projektionslehre, 2, Übungen, 4. — **Näbauer**: Geodätisches Praktikum, 6 und 3; Größere Vermessungsübung, 2 Wochen. — **Stutz**: Katastervermessung und Feldbereinigung, 3, Übungen, 2. —

Universität Kiel.

Dieterici: Experimentalphysik II: Optik, Elektrizität, Magnetismus, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 8 und 4, für Doktoranden, tägl. — **N. N.**: Potentialtheorie und Elektrostatik, 4; Theorie physikalischer Meßapparate, mit Übungen, 1; Ausgewählte physikalische Untersuchungen, tägl. außer Sonnabend; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Zahn**: Repetitorium der theoretischen Physik für Kriegsteilnehmer, 2. — **Martienssen**: Radioaktivität und verwandte Erscheinungen, 1; Elastizitätstheorie, 1. — **Schmidt**: Repetitorium der Experimentalphysik für Kriegsteilnehmer, 2. —

Diels: Anorganische Experimentalchemie, 5; Kolloquium über neuere chemische Arbeiten (mit Feist, Mumm, Horrmann, Preuner und Freudenberg, 1½ *g*; Chemisches Praktikum I, anorganische Abteilung (mit Mumm), tägl. außer Sonnabend, II, organische Abteilung, tägl., für Mediziner (mit Feist), 4. — **Mumm**: Analytische Chemie, 2. — **Horrmann**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 3; Maßanalyse, 1; Über Alkaloide und deren Ermittelung bei Vergiftungsfällen, 1; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Stoehr**: Über Alkaloide, 1. — **Preuner**: Physikalische Chemie mit einigen Sätzen aus der Differentialrechnung als Einleitung, 3. — **Freudenberg**: Arbeitsmethoden der organischen Chemie, 1; Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie, 1. —

Pochhammer: Funktionentheorie, 4; Einleitung in die Theorie der Determinanten, 3; Übungen im mathematischen Seminar, 1 *g*. — **Harzer**: Geographische Ortsbestimmungen, 3, Übungen, nach Verabredung *g*. — **Jung**: Analytische Geometrie I, mit Übungen, 5; Analytische Mechanik, mit Übungen, 5; Mathematisches Seminar, 1 *g*. — **Kobold**: Einleitung in die höhere Geodäsie, 2; Geodätische Übungen, 2 *g*. — **Toeplitz**: Proben mathematischer Forschung, 1; Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen, 2; Höhere Geometrie, 4, Übungen, 2; Seminar, nach Verabredung *g*. — **Neuendorff**: Graphische und numerische Methoden, mit Übungen, 6; Vorträge und Übungen zur angewandten Mathematik, 1 *g*. —

Universität Königsberg.

Kaufmann: Allgemeine Physik I: Mechanik und Wärme, 5, Ergänzungen, 1 *g*; Seminaristische Übungen zur Geschichte der Experimentalphysik (mit Hoffmann), 2 *g*; Physikalische Übungen, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. *g*. — **Volkmann**: Einführung in das Studium der theoretischen Physik, 4, Ergänzungen und Erläuterungen, 1 *g*; Physikalisch-praktische Übungen und Arbeiten für Anfänger und Vorgerückte, 6. — **Hoffmann**: Einführung in die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Fragen. —

Klinger: Allgemeine und anorganische Chemie, 5; Besprechung besonderer Teile der Chemie (mit Blochmann, Eisenlohr und Sonn), 1 *g*; Chemisches Praktikum (mit Blochmann und Eisenlohr), tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Mediziner, 4. — **Eisenlohr**: Einführung in die physikalische Chemie, 2. — **Sonn**: Chemie der Benzolderivate, 2. — **Blochmann**: Einführung in die quantitative Analyse, 2; Die Schätze der Luft, 1 *g*. — **Rupp**: Pharmazeutische Chemie, 3; Chemische Übungen für Pharmazeuten und Nahrungsmittelchemiker, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-wissenschaftliches Kolloquium, 1 *g*. —

Meyer: Analytische Geometrie der Ebene I, 4; Einführung in die höhere Geometrie der Ebene, 4; Neuere russische Mathematik I: Differenzenrechnung, *g*; Übungen im mathematischen Seminar, *g*. — **N. N.**: Differentialrechnung, 4; Algebra I, 3; Geometrie Riemanns, 1. — **Kaluza**: Wahrscheinlichkeitsrechnung, 4; Einführung in die Relativitätstheorie, 2. — **Falckenberg**: Darstellende Geometrie mit Übungen, 4; Differentialgleichungen, 2. — **Blaschke**: Aufgabenseminar über Algebra, Vortragsseminar über Elementarmathematik (mit Falckenberg), 2 *g*. — **Battermann**: Einleitung in die Mechanik des Himmels: Theorie der Bewegung und der Störungen der Himmelskörper, 2; Einleitung in die Fehlertheorie und in die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 1; Einleitung in die astronomische Chronologie, 1; Geographisch-astronomische Ortsbestimmung, 2, Übungen, 1½ *g*; Theorie der astronomischen Instrumente II:

Theorie des Äquatorials und des Heliometers, für Fortgeschrittene, 1/2, Übungen, 2 *g*. —

Universität Leipzig.

Wiener: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, Akustik, 5; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Scholl), tägl.; Physikalische Übungen, 6, für Mediziner und Pharmazeuten (mit Scholl), 3; Physikalisches Kolloquium (mit Des Coudres), 2 *g*. — **Des Coudres**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Selbständige Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Fredenhagen), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Wiener), 2 *g*. — **v. Oettingen**: Harmonielehre, nach reiner Stimmung, 1 *g*. — **Scholl**: Entwicklung der Elektrotechnik und ihrer Anwendungsgebiete mit Berücksichtigung wirtschaftlicher Fragen, 2. — **Wenger**: Einführung in die Meteorologie: Geschichte, Organisation, Instrumente und Beobachtungen, 2; Arbeiten im Geophysikalischen Institut, tägl.; Geophysikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Marx**: Radioaktivität, 1. — **Haas**: Quantentheorie, 2; Geschichte der Physik vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis zur Gegenwart, 14tägig, 2 *g*; Selbständige geschichtlich-physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene, nach Verabredung, *g*. — **Lilienfeld**: Erzeugung und Anwendung tiefer Temperaturen, 1 *g*. —

Hantzsch: Anorganische Experimentalchemie, 5, Ergänzung, 1 *g*; Analytische und anorganisch-chemische Übungen für Chemiker, Pharmazeuten, Mathematiker, Naturwissenschaftler und Landwirte (mit Schaefer), tägl.; Organisch-präparative Übungen (mit Reddelien), tägl.; Chemische Übungen für Mediziner und Zahnärzte (mit Schaefer), 6; Selbständige Arbeiten für Fortgeschrittene (mit Stobbe, Rassow, Schaefer und Reddelien), tägl. — **Le Blanc**: Physikalische Chemie II: Thermochemie und Elektrochemie, mit Demonstrationen unter Berücksichtigung der Technik, 4; Chemische Arbeiten für Anfänger: Analytische und präparative, anorganische und organische Arbeiten (mit Böttger), tägl.; Physikalisch-chemische Arbeiten: Photochemisch-photographische (mit Weigert), elektrochemische und kolloid-chemische für Fortgeschrittene, tägl.; Physikalisch-chemischer Einführungskurs, auch für Mediziner, auf Wunsch Darstellung elektrochemischer Präparate (mit Schall und Drucker), 4 oder 8. — **Paal**: Organische Experimentalchemie, 5; Chemische Übungen, analytisch, anorganisch und organisch, auch für Anfänger, für Chemiker, Mathematiker, Naturwissenschaftler und Landwirte (mit Deußen), tägl.; Arbeiten auf dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie (mit Deußen), tägl.; Pharmazeutisch-chemisch-toxikologische Übungen (mit Deußen), tägl.; Chemische Übungen für Mediziner und Zahnärzte, 6; Chemische Arbeiten für Vorgerücktere (mit Heller, Deußen und Scheiber), tägl.; Chemisch-technische Übungen (mit Heller), tägl. — **Stobbe**: Spezielle organische Chemie: Die aromatischen Verbindungen, 2; Wiederholungskursus der organischen Chemie, nach Verabredung, *g*. — **Wagner**: Methodische Übersicht der wichtigsten anorganischen Verbindungen mit Rücksicht auf die Bedürfnisse des Schulunterrichts, 1; Technik der Experimentalchemie unter vorzugsweiser Berücksichtigung von Lehrversuchen, 1 *g*; Chemische Übungen für Lehrer: Schulversuche, Analyse und Präparate, tägl.; Besprechungen: Grundlagen der präparativen Chemie (Massenwirkung), 1 *g*; Übungen im Entwerfen zu Präparationen für den Unterricht in der Chemie, nach Verabredung, *g*. — **Rassow**: Chemische Technologie, Brenn- und Leuchtstoffe, sowie ausgewählte anorganische Betriebe, 2; Technologische Ausflüge, nach Verabredung, *g*; Die Silikatindustrie: Glas, Keramik und Zemente, mit Demonstrationen, 1 *g*; Chemisch-technologische Übungen, tägl. — **Weigert**: Photochemie, 1; Photochemische und photographische Übungen, 4; Photochemische und photographische Arbeitsmethoden, 1 *g*. — **Schall**: Über elektrolytische Methoden und Kunstgriffe sowie deren technische Verwendung, 1. — **Böttger**: Elektroanalyse, 1; Übungen unter besonderer Berücksichtigung der Schnellmethoden, 3. — **Heller**: Allgemeine und technische Chemie, anorganischer Teil, zugleich Repetitorium der anorganischen Chemie, 2. — **Drucker**: Physikalisch-chemische Meßmethoden, 2. — **Schaefer**: Analytische Chemie, mit Versuchen, 2. — **Scheiber**: Methoden organisch-chemischer Forschung, 1. — **Ostwald**: Einführung in die Kolloidchemie, 1. — **Deußen**: Unsere wichtigsten Nahrungsmittel, 1; Übungen im Sterilisieren für Pharmazeuten, nach Verabredung. — **Wilke**: Einführung in das Materialprüfungswesen, 1; Maschinenzeichnen, 1. —

Hölder: Allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 5; Mathematisches Seminar: Übungen in Funktionentheorie, 1 *g*. — **Bruns**: Allgemeine Astronomie, 4; Praktikum der Instrumentenkunde, nach Verabredung; Praktische Arbeiten in der Sternwarte, nach Verabredung, *g* — **Rohn**: Analytische Geometrie der Ebene, 4, Übungen, 1 *g*; Projektive Geometrie, 2, Übungen, 1 *g*. — **Herglotz**: Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4; Elemente der Zahlentheorie, 3. — **Schnee**: Algebraische Gleichungen, 4, Übungen, 1 *g*; Algebraische Analysis, 2. —

Universität Marburg.

Richarz: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Optik, 5, Elementarmathematische Ergänzungen, mit Versuchen, 1; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*; Physikalisches Praktikum (mit Feußner und Schulze), 6; Leitung eigener Untersuchungen, tägl. — **N. N.**: Theoretische Physik: Elektrizität und Magnetismus, 4; Theoretisch-physikalisches Seminar, 2 *g*. — **Feußner**: Interferenz und Beugung des Lichtes (theoretisch), 2; Die neuesten Fortschritte der Physik, 2. — **Schulze**: Relativitätstheorie, 2. — **Take**: Über die neuen elektrischen Strahlungsarten: Kathoden-, Anoden-, Kanal-, Röntgen- und Becquerelstrahlen, mit Versuchen, 1; Physikalische Technologie mit Vorführungen und Ausflügen, 1 1/2. — **Wegener**: Optische Erscheinungen der Atmosphäre, 2. —

v. Auwers: Anorganische Experimentalchemie, für Chemiker und Mediziner, 6; Chemisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*; Chemisches Praktikum (mit Strecker), ganz- und halbtägig, tägl. außer Sonnabend, für Vorgerückte, tägl.; Chemische Übungen für Mediziner (mit Strecker), tägl. außer Sonnabend; Praktisch-chemischer Kursus für Mediziner (mit Strecker): Theoretische Einführung mit Versuchen, 1/2, Praktikum, 3 1/2. — **Schmidt**: Praktische Übungen in der analytischen und forensischen Chemie, sowie in der Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel und selbständige Arbeiten, tägl., im Anschluß: Qualitative Analyse, *g*. — **Strecker**: Gewichtsanalyse, 2; Titrieranalyse, 1; Element und Atom, 1 *g*; Chemisches Repetitorium für Mediziner, 2; Gasanalytisches Praktikum, 3. — **Thiel**: Physikalische Chemie I, 3; Theoretische Übungen über ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie, 1 *g*; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, tägl.; Photochemisches und photographisches Praktikum, für Anfänger und Fortgeschrittene (mit Stuchtey), 2. —

Neumann: Differential- und Integralrechnung I, 4; Analytische Mechanik, 4; Mathematisches Proseminar (zur Differentialrechnung), 1 *g*. — **Hensel**: Analytische Geometrie der Ebene, 4; Elementare Algebra, 4; Mathematisches Seminar, 1 *g*. — **v. Dalwigk**: Darstellende Geometrie mit Übungen, 3; Funktionentheorie, 4; Konforme Abbildung, 1; Höhere Kapitel aus der Analysis, 2. — — **Fraenkel**: Elementarmathematik von höherem Standpunkte aus, 3; Einführung in die Mengenlehre, 3; Einführung in die Mathematik der Lebensversicherung, 1 bis 2. —

Universität München.

Röntgen: Experimentalphysik II: Wärme und Elektrizität, 5; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Praktische Übungen im Physikalischen Laboratorium (mit Koch und Wagner), 4. — **Sommerfeld**: Partielle Differentialgleichungen der Physik, 4; Repetitorium für

Kriegsteilnehmer (mit Lenz und Ewald), nach Verabredung; Seminar: Vorträge der Teilnehmer aus verschiedenen Gebieten der theoretischen Physik, 2 *g*; Relativitätstheorie, 2: Selbständige Arbeiten im Institut für theoretische Physik, 24. — **Graetz**: Experimentalphysik II: Mechanik, Akustik, Optik, 5; Physikalisches Praktikum: a) Übungen in physikalischen Messungen, b) Übungen in physikalischen Demonstrationen, 4; Einleitung in die theoretische Physik II, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus der Physik, nach Verabredung, *g*. — **Schmauß**: Die Wettervorhersage, mit Übungen an der Wetterkarte, 2; Physikalische Erdbebenforschung, 1; Ausgewählte Kapitel der meteorologischen Optik, 1. — **Koch**: Photographie, als Hilfsmittel der Forschung, mit Vorweisungen, 1. — **Wagner**: Die Wege zur Bestimmung der atomistischen Größen, 1. — **Donle**: Doppelbrechung und damit zusammenhängende Erscheinungen, 2. —

Willstätter: Organische Experimentalchemie, 5; Praktische Arbeiten im Chemischen Laboratorium, unorganische Abteilung (mit Hönigschmid, Prandtl und Vanino), tägl. außer Sonnabend, organische Abteilung (mit Meyer und Dieckmann), tägl., physikalisch-chemische Abteilung (mit Fajans), tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Vanino), 4; Arbeiten im Chemischen Laboratorium für fortgeschrittene Mediziner, halb- oder ganztägig; Physikalisch-chemisches Praktikum (mit Fajans), A, 1 Tag, B, 1/2 Tag; Kolloquium der organischen Chemie (mit Meyer, Dieckmann, Pummerer und Kalb), 1 *g*. — **Paul**: Anorganische Chemie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung, 5; Nahrungsmittelchemie I, 2; Pharmazeutisch-chemische Präparatenkunde (organische Präparate), 3; Chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich physikalisch-chemischer, elektro-chemischer und nahrungsmittelchemischer Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich der Übungen in den für den Apotheker wichtigen Sterilisationsverfahren, tägl. außer Sonnabend. — **Hönigschmid**: Analytische Chemie I, 3; Elektrolytisches Praktikum, ganztägig; Kolloquium für physikalische und anorganische Chemie (mit Prandtl und Fajans), 1 1/2 *g*. — **Prandtl**: Spezielle unorganische Experimentalchemie: 1. bis 4. Gruppe des periodischen Systems, 4; Praktikum für Gasanalyse, 4. — **K. Meyer**: Chemie der Teerfarbstoffe, 2. — **Dieckmann**: Stereochemie, 1 *g*. — **Fajans**: Physikalische Chemie I, 2; Radioaktivität, 1. — **Pummerer**: Chemische Technologie organischer Verbindungen: Öle, Kohlehydrate, Gärungsgewerbe und Sprengstoffe, 2, mit Exkursionen; Einführung in die Kenntnis der Faserstoffe und Färberei mit Färbereipraktikum, 3. — **Kalb**: Repetitorium der organischen Chemie II: Aromatische und heterozyklische Verbindungen, 1. — **Bleyer**: Neuere Arzneimittel, 1. —

Lindemann: Integralrechnung, 5; Theorie der linearen Differentialgleichungen und der konformen Abbildung, 4; Über das Problem der Quadratur des Kreises, 2; Übungen und Vorträge im Mathematischen Seminar, 1 1/2 *g*. — **v. Seeliger**: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate, 4. — **Voß**: Analytische Geometrie des Raumes, 4; Übungen: Differentialgeometrie der Flächen und Kurven, 2 *g*. — **Pringsheim**: Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der analytischen Funktionen, 4; Algebra II, 4. — **Brunn**: Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der Eigebilde: Konvexe Formen, 2. — **Hartogs**: Darstellende Geometrie II, 5, Übungen, 3. — **Großmann**: Übungen an den Instrumenten der Sternwarte, nach Verabredung. — **Böhm**: Differentialrechnung, 4; Die statistischen und rechnerischen Grundlagen der Sozialversicherung (Reichsversicherungsordnung), 2; Seminar für Statistik und Versicherungswissenschaft (mit v. Mayr und Zahn). — **Dingler**: Methodik der mathematischen Naturphilosophie, mit Kolloquium, 2. — **Rosenthal**: Algebraische Analysis, für Anfänger, 4; Seminar: Übungen über höhere Mathematik, 2. — **Lenz**: Mathematische Einleitung in die physikalische Chemie, 3; Quantentheorie, 2. — **Ewald**: Vektorrechnung als Grundlage für die theoretische Physik, mit Übungen, 3. —

Universität Prag.

Lampa: Experimentalphysik II, 5; Physikalisches Praktikum II, 6 bzw. 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. *g*. — **Frank**: Thermodynamik, 3; Allgemeine Relativitätstheorie (Fortsetzung), 2; Die Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie, 2 *g*. — **Spitaler**: Meteorologische Instrumente, Beobachtung und Berechnung, 4; Meteorologisches Praktikum, 1. —

Meyer: Organische Chemie, 5; Chemische Übungen, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, halbtägig; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen, für Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend. — **Rothmund**: Physikalische Chemie II, 4; Physikalisch-chemisches Praktikum, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. außer Sonnabend. — **Wagner**: Physikalisch-chemische Meßmethoden, 1. — **Kirpal**: Chemische Großindustrie, 3. — **Morgenstern**: Über die Konstitutionsermittlung der wichtigsten Pflanzenalkaloide, 3. — **Sigmund**: Die Enzyme und ihre Bedeutung in der Physiologie und Technik, 1. —

Pick: Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4; Geometrisches zur elementaren Zahlentheorie, 1; Übungen: Konforme Abbildung, 2. — **Kowalewski**: Differential- und Integralrechnung II, 4; Differentialinvarianten, 1; Übungen, 2. — **Funk**: Fouriersche Reihen, 2. — **Mack**: Kurs für geometrisches Zeichnen und darstellende Geometrie, 3. — **Prey**: Theorie der astronomischen Instrumente, 3; Veränderliche Sterne, 2. —

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

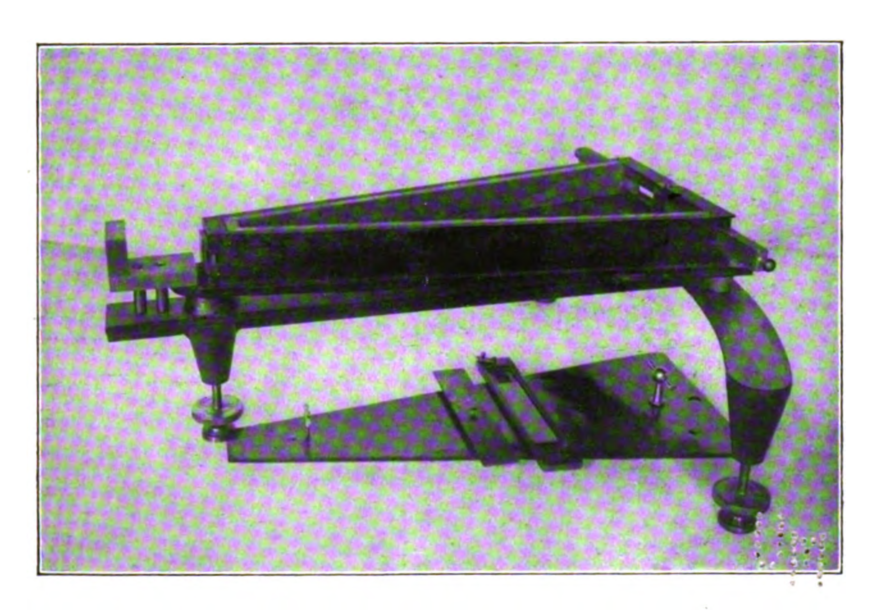


Fig. 3.

M. Siegbahn u. E. Jönsson, Über die Absorptionsgrenzfrequenzen der Röntgenstrahlen bei den schwereren Elementen, besonders bei den seltenen Erden.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und H. Th. Simon



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 41 Mark, im Ausland 46 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstraße 2.

No. 12. 15. Juni 1919. No. 544. 20. Jahrgang.

Inhaltsverzeichnis:

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 12. 15. Juni 1919. Redaktionsschluß für No. 14 am 25. Juni 1919. 20. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Zusammensetzung des Atomkerns und seine Neigung zum Zerfall.

Von W. Kossel.

Im periodischen System findet es sich bekanntlich häufig, daß Elemente, die in der Ordnungszahl um 2 Einheiten differieren, sich im Atomgewicht um 4 Einheiten[1]) unterscheiden. Sie unterscheiden sich also in beiden um die dem Heliumkern zukommenden Größen und verhalten sich, als seien sie durch einen α-Zerfall verbunden. Da der Habitus der Atomgewichte so mit der einzigen Art von Kerntrennung übereinstimmt, die wir bisher kennen, liegt es nahe, die Folgen der Annahme zu betrachten, die Atomkerne seien völlig oder ganz überwiegend aus *He*-Kernen aufgebaut. Wir betrachten zwei Folgerungen aus dieser Annahme.

I.

Der Aufbau aus *He*-Kernen läßt sich glatt bei einer Reihe von Elementen aus dem Anfang des Systems durchführen, bei denen Ordnungszahl und Gewicht übereinstimmende *He*-Multipla sind:

	C	*O*	*Ne*	*Mg*	*Si*	*S*	
N	6	8	10	12	14	16	
A	12	16	20	24	28	32	
d. i. =	3	4	5	6	7	8	*He*-Einh.

Diese Reihe kann demnach rein aus *He* bestehen und auch auseinander durch α-Zerfall hervorgegangen sein. Das nächsthöhere Glied weicht ab. Das reine 9fache *He*-Multiplum ist nicht mehr beobachtet. Zum Gewicht von 10 *He* ($A = 40$) finden sich zwei Vertreter, dies Multiplum erscheint nur z. T. richtig mit der Ordnungszahl 20 als Calcium, zum anderen Teil ist die Ordnungszahl um zwei Einheiten zu niedrig, es erscheint als Argon an der Stelle 18. Da dessen Gewicht deutlich auf ein *He*-Multiplum hinweist, nehmen wir an, daß dieser Kern aus 10 *He* besteht, aber außerdem 2 Elektronen enthält. Der Platz 18, der bei Fortsetzung der reinen *He*-Multipla, die nur α-Strahlung abgeben können, das Gewicht 36 enthalten sollte, enthält also ganz überwiegend eine β-strahlungsfähige Isotope vom Gewicht 40. Mit diesem ersten Auftreten von Isotopen ist die Möglichkeit von Gemischen gegeben und so tritt bald nachdem die einfachen *He*-Multipla (die Übereinstimmung in Grundzahl und Gewicht) verlassen sind, rasch eine weitgehende Verwischung der Ganzzahligkeit auch in den Gewichten für sich auf[1]). Eine Strecke weit ist die Multiplizität mit 4 immerhin noch deutlich zu erkennen, es folgt auf das obige:

	Ca	*Ti*	*Cr*	*Fe*	
A	40,1	48,1	52,0	55,8	
d. i.	10	12	13	14	*He*-Gewichte
N	20	22	24	26	
d. i.	10	11	12	13	*He*-Ladungen
also	0	2	2	2	Kern-Elektronen,

worauf sich die Gewichte noch mehr verwischen und bald die Annahme von noch mehr Kern-Elektronen nötig wird. Wegen der einfachen Additivität aller Größen läßt sich indessen auch aus einem Gemisch, von dem jede Komponente aus *He*-Kernen und Elektronen aufgebaut ist, ein „mittlerer" Elektronengehalt ebenso berechnen, wie aus dem reinen Element. Wir erhalten daraus also dennoch den Elektronen-

1) Rydberg, Zeitschr. f. anorg. Chem. 14, 80, 1890.

1) Hier liegt meiner Meinung nach der Grund für die von Harkins bei einem ähnlichen Versuch (Harkins u. Hull, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 95, 20, 1916) beanstandete „plötzliche Änderung beim Atomgewicht 59", „deren Ursache nicht ersichtlich" sei. Dies Verhalten entspricht so völlig dem, worauf man mit der Möglichkeit von Isotopen gefaßt sein muß, daß es kein Grund sein darf, sich von der Untersuchung der Konsequenzen reinen *He*-Aufbaus abhalten zu lassen.

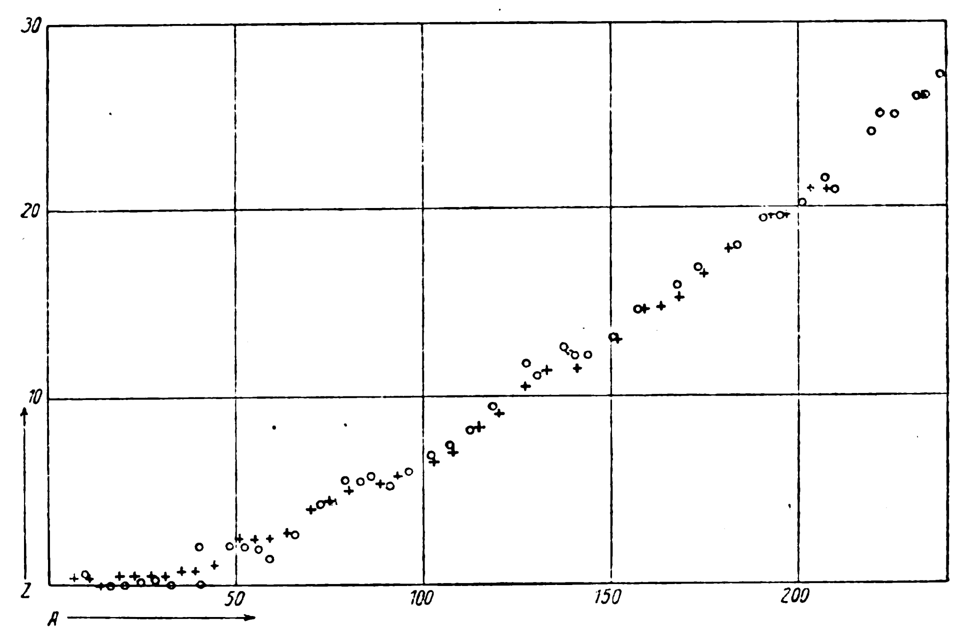


Fig. 1.

gehalt als Funktion des Gewichts und auf diese Funktion, die uns aussagt, wieviel Elektronen ein aus einer bestimmten Anzahl von *He*-Kernen aufgebauter Kern an sich zu ziehen pflegt, kommt es uns an.

Wir benutzen nun dazu auch die ungerade Reihe, da der ursprüngliche fremdartige Bestandteil $A = 3$, $N = 1$, auf den sich, vom N abgesehen, nachher lauter *He*-Einheiten aufzubauen scheinen:

	Li	*B*	*N*	*F*	*Na*	*Al*	*P*	*Cl*	*K*
$N=$	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$A=$	6,94	11,0	14,0	19,0	23,0	27,1	31,0	35,5	39,1
Diff.		1	2		1	1	1	1	1 *He*-Einh.

nur eine kleine Korrektion ausmacht, über deren Größe man sich jederzeit Rechenschaft ablegen kann. Wir wollen hier so rechnen, als sei auch bei ihm, wie beim *He* und seinen Multipla, $N = \frac{A}{2}$.

Ganz allgemein gibt dann das Zurückbleiben des N hinter der einem reinen *He*-Komplex zukommenden Kernladung $\frac{A}{2}$ die Zahl der neutralisierenden Elektronen an.

Die Fig. 1 gibt $z = \frac{A}{2} - N$, den Elektronengehalt, als Funktion des Atomgewichts A. Während bei den chemischen, optischen und allen den anderen Eigenschaften, die von den äußeren Elektronen abhängen, deren Zahl N die bestimmende unabhängige Variable ist, hat hier wieder in der früher gewohnten Weise das Atomgewicht A als unabhängige Variable zu gelten, da es die Zahl der *He*-Bestandteile mißt. Elemente mit geradem und ungeradem N sind mit verschiedenen Zeichen eingetragen, da beide Reihen jedenfalls in sich enger zusammenhängen, als eine mit der anderen. Es ist also von Bedeutung, daß sie, einzeln betrachtet — wie man besonders deutlich an getrennter Zeichnung erkennt — einen ganz analogen Verlauf des z ergeben, sogar in Einzelheiten.

Wir stellen fest:

1. z ist eine ganz bestimmte Funktion des Atomgewichts. Sie zeigt eine bemerkenswerte geringe Streuung. Zu einem bestimmten Atomgewicht, einer bestimmten Anzahl von *He*-Bausteinen, stellt sich jeweils eine bestimmte Durchschnittszahl von Kern-Elektronen mit bemerkenswerter Genauigkeit ein. Dies weist darauf hin, daß im Kerninnern gewisse Gleichgewichtsbedingungen zwischen positiven und negativen Bestandteilen zu erfüllen sind.

2. Der Verlauf der Funktion im einzelnen zeigt zunächst bei niedrigen A eine Reihe von Elementen, die keine Elektronen enthalten. Sie können also keines β-Zerfalls fähig sein. Dies kann erst etwa vom Atomgewicht 40 an eintreten, wo die ersten Kernelektronen auftauchen und eben hier steht der erste beobachtete β-Strahler, Kalium[1]).

1) Schon vor einigen Jahren erfuhr ich von Herrn Swinne, dem ich von diesem Zusammentreffen erzählte, daß es ihm ebenfalls bereits aufgefallen sei und daß er es bereits in einem Vortrage in der Chem. Gesellsch. zu Heidelberg 1914 erwähnt habe. Obwohl sich nicht mehr feststellen ließ, wer zuerst darauf gekommen ist, hat demnach jedenfalls Hr. Swinne diesen Zusammenhang zuerst öffentlich ausgesprochen.

Der hier in Betracht kommende Zerfall ist:

$$\underset{43}{K} \xrightarrow{\beta} \underset{43}{Ca} \xrightarrow{\beta} \underset{43}{Sc} \xrightarrow{\alpha} \underset{39}{K}$$

Das beobachtete K ($A = 39{,}1$) würde, wenn nur die Glieder der ungeraden Reihe zu ihm beitrügen, $^1/_{40}$ der schwereren Komponente enthalten. Nach der Häufigkeit doppelter β-Zerlegungen und der daraus folgenden und durch andere Indizien (relativ hohe Reinheit der Gewichte, Häufigkeit des Vorkommens) bestätigten Abneigung der geraden und ungeraden Reihe ineinander überzugehen, ist dieser Zerfallsweg als wahrscheinlichster vorwiegend in Betracht zu ziehen. Es fragt sich also auch, ob nicht (analog allen anderen Doppel-β-Zerlegungen, z. B. den Verhältnissen zwischen den beiden Uran) die beim K beobachtete β-Aktivität dem Verlust des zweiten Elektrons, die hervortretendere, raschere β-Strahlung einer kurzlebigeren Komponente, hier also einem kurzlebigen Ca-Isotop zuzuordnen ist. Es erscheint ferner wichtig, daß Sc sorgfältig auf α-Aktivität untersucht wird, was, soviel dem Verfasser bekannt, bisher noch nicht geschehen ist.

3. Der Anstieg ist, roh genommen, linear, eine von der Abszisse $A = 53$ ausgehende Gerade, nach der auf etwa 7,2 Atomgewichtseinheiten ein Zuwachs um ein Elektron erfolgt, approximiert den Verlauf bei höheren Gewichten (etwa von $A = 90$ an) bereits ziemlich weitgehend. Indes ist auch in diesem Gebiet eine leichte Krümmung nicht zu verkennen, die den bei niedrigen Gewichten begonnenen Verlauf fortsetzt. Rein empirisch gibt eine Funktion $(z - 28)^2 = 0{,}04 A^2 + 784$ (eine Hyperbel) gute Näherung.

4. Die Störung des kontinuierlichen Verlaufs rührt von einer gewissen Neigung zur Stufenbildung her. Reine Elemente könnten, wegen der Ganzzahligkeit der dargestellten Größe, überhaupt nur eine Treppe ergeben. Es ist bemerkenswert, daß auch die Gemische dergleichen erkennen lassen und zwar, wie an Einzelzeichnungen klar hervortritt, in beiden Elementreihen übereinstimmend. Ganz klar tritt in beiden eine Stufe $z = 2$ hervor, — hier haben wir offenbar noch sehr reine Elemente — weiterhin erscheint $z = 6$ und, weniger deutlich, aber wegen der Übereinstimmung in beiden Reihen doch beachtenswert, $z = 12$ hervor. Dies Auftreten ausgeprägter Stufen zeigt, daß bestimmte Kernelektronen-Zahlen bevorzugt sind, also offenbar wegen besonderer Stabilität besondere Langlebigkeit besitzen und deshalb auch in der Häufigkeit hervortreten. Alle bevorzugten Zahlen sind Multipla von 2. Dies steht offenbar damit in Zusammenhang, daß beim beobachtbaren Zerfall auf eine erste β-Abgabe stets rasch eine zweite folgt, — die Elektronen pflegen das Kerninnere paarweise zu verlassen, sind im Kern also anscheinend paarweise gebunden. Die Unbeeinflußbarkeit des Materials, die Unmöglichkeit damit zu experimentieren, zwingt uns hier, ähnlich wie in der Astronomie, auf jede derartige Einzelheit aufmerksam zu sein.

2.

Wenn, wie unsere Statistik der stabileren Elemente nahe legt, die relative Elektronenzahl im Kern von einem bestimmten Gleichgewichtsgesetz beherrscht wird, fragt sich, ob die Rücksicht auf dies Gleichgewicht nicht auch in den Gesetzen des rascheren, für uns beobachtbaren radioaktiven Zerfalls zu erkennen ist. Bis jetzt besitzen wir noch gar keinen rationellen Zusammenhang der Zerfallskonstanten mit irgendwelchen Vorstellungen über die Kernzusammensetzung.

Nach dem Gedanken, den wir verfolgen, besteht der Kern aller Elemente (bis auf eine für die radioaktiven Atomgewichte verschwindende Zufügung in der ungeraden Reihe) nur aus He-Einheiten und Elektronen. Die beobachteten Zerfallsarten (α und β) erlauben also vollständigen Abbau des Kernmaterials. In unserer Darstellungsweise, mit der wir nun nochmals das Gebiet höchster Atomgewichte in größerem Maßstabe vornehmen (Fig. 2) repräsentiert also die Lage einer Atomart völlig ihre Zusammensetzung, da jede Komponente durch eine Koordinate wiedergegeben wird. Wählen wir nun die Maßstäbe so, daß in beiden gemeinsam die Elementarladung die Einheit bildet, so ist ein α-Zerfall, als Verlust zweier positiver Elementarquanten, durch einen Schritt um zwei Einheiten nach links, ein β-Zerfall, als Verlust eines negativen Elementarquantums, durch einen Schritt um eine Einheit abwärts darzustellen. Man erhält so für die Uran-Radium- und die Thorium-Reihe (die Ac-Reihe können wir wegen der Zweifel über das Atomgewicht noch nicht benutzen) die eingezeichneten Linienzüge. Isotopen erscheinen auf unter 45^0 geneigten Geraden. Diese sind mit der Nummer der Spalte bezeichnet, die die Plejade im periodischen System einnimmt. a ist die Gerade, die im Gebiet der mittleren Atomgewichte den Verlauf von z genügend genau darstellt, die genauere Darstellung (b) verläuft etwas höher, von der Gruppe $Hg\ Tl\ Pb$ auf Ur I zu.

Zunächst ist allgemein festzustellen, daß der Abbau sich sehr nahe um den Verlauf des mittleren Elektronengehalts herumbewegt, den die langlebigsten Elemente zeigen und der das Verhalten der leichteren, stabilen Elemente fort-

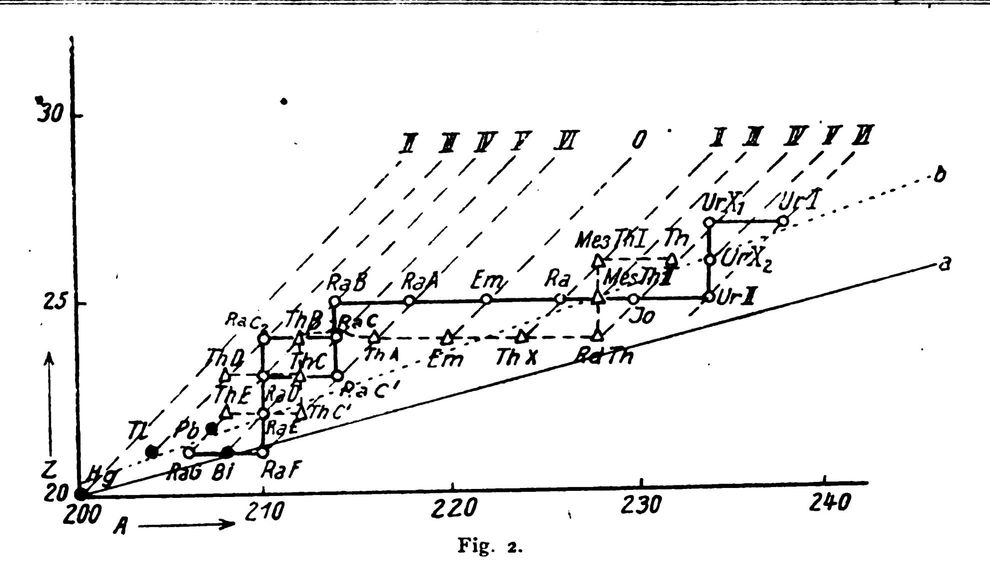


Fig. 2.

setzt. Insbesondere sind die Endprodukte, nach allgemein zu hohem Elektronengehalt im Gebiet der aktiven Niederschläge, wieder völlig normal.

Da jedes Element beide Bestandteile enthält, ist prinzipiell jedes sowohl α- als β-Strahler. Die Zerfallsgeschwindigkeit haben wir nun als Maß der Wahrscheinlichkeit zu betrachten, mit der ein bestimmter Zerfall erfolgt. Im allgemeinen überwiegt eine Art völlig, so daß das Element schlechthin als α- oder β-Strahler gilt. Nur die Elemente an den Verzweigungsstellen, bei denen die Wahrscheinlichkeiten für beide Möglichkeiten von vergleichbarer Größenordnung sind, lassen die Allgemeinheit beider Wege erkennen. Herr Fajans hat, indem er auf die Notwendigkeit solcher Auffassung nachdrücklich hinwies, hier die Einzelwahrscheinlichkeiten für beide Wege aus dem Verzweigungsverhältnis berechnet.

Hängt nun die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Zerfall einer Art eintritt, mit der Abweichung des Elements vom normalen Elektronengehalt irgendwie zusammen? — Man könnte zunächst etwa allgemein das Bestreben erwarten, Abweichungen um so rascher rückgängig zu machen, je größer sie sind. In der Tat wird diese Erwartung bestätigt, wenn man bei der Betrachtung ganze Gruppen einander folgender Elemente betrachtet: die hohe Geschwindigkeit etwa, mit der jeweils das Gebiet der aktiven Niederschläge passiert wird, stimmt damit überein, daß hier die maximalen Abweichungen vom normalen Verlauf des Elektronengehalts vorliegen. Indes reicht dies Prinzip nicht hin, das Verhalten des einzelnen Elements zu bestimmen, — man braucht etwa nur die Reihe einander folgender α-Strahler vom *Ur* II bis zum *RaA* ins Auge zu fassen, in der die Zerfallsgeschwindigkeit stets steigt, obwohl dadurch die Abweichung vom normalen Verlauf naturgemäß immer rascher zunimmt, um zu erkennen, daß es zwischen einzelnen Elementen, wenigstens solchen verschiedener Ordnungszahl, nicht zutrifft.

Vergleicht man aber Elemente gleicher Gesamtladung des Kerns, Isotope, untereinander, so erhält man das Erwartete. Der relative Elektronengehalt, d. h. das Verhältnis $\frac{\text{Zahl der } \beta\text{-Teilchen}}{\text{Zahl der } \alpha\text{-Teilchen}}$ im Kern, das mit $\frac{z}{A}$ proportional ist, ist auch hier von Element zu Element verschieden (steigt mit dem Atomgewicht). Die bekannten Zerfallsgeschwindigkeiten ergeben nun den Satz:

„Je höher der relative Elektronengehalt eines Atomkerns, desto rascher erfolgt ein Zerfall, der ihn herabsetzt (β) und desto unwahrscheinlicher wird ein Zerfall, der ihn noch mehr erhöht (α)".

Z. B. ist von der Thorium-Plejade das Glied mit dem höchsten relativen Elektronengehalt β-Strahler (UrX_1, $\tau = 23{,}6$ Tage), das nächste bereits α-Strahler, indes noch sehr langsam (*Th*, $\tau = 2{,}5 \cdot 10^{10}$ Jahre), während die beiden folgenden, deren relativer Elektronengehalt immer niedriger wird, durch immer rascheren α-Zerfall ihn zu erhöhen streben (*Io*, $\tau = 1{,}4 \cdot 10^5$ Jahre und *RdTh*, $\tau = 2{,}9$ Jahre).

Die Glieder einer Plejade scheinen also statistisch unter einheitlicheren Bedingungen zu stehen. Unser Satz faßt die Tatsachen ebenso zusammen, wie die bekannte empirische Regel von Fajans[1]) über den Zusammenhang von Atomgewicht und Lebensdauer in der Plejade. Er erleidet demnach auch die Ausnahme

1) K. Fajans, Le Radium **10**, 171, 1913; diese Zeitschr. **14**, 950, 1913.

bei RaF. In ihr liegt ohne Zweifel eine Mahnung, an Einzelheiten des Aufbaus zu denken. Dennoch scheint mir in der weitgehenden Geltung des oben ausgesprochenen Zusammenhangs ein starker Hinweis darauf zu liegen, daß analoge statistische Prinzipien, wie wir sie in der molekularen Welt mit Erfolg anwenden dürfen, auch in den Vorgängen innerhalb des Atomkerns tätig sind.

(Eingegangen 18. Februar 1919.)

Ultrarote Eigenfrequenzen zweiatomiger Bohrscher Gasmoleküle und die spezifische Wärme bei hohen Temperaturen.

Von Gerda Laski.

Einleitung.

Das Bohr-Debyesche Wasserstoffmolekül war bisher das einzige Molekülmodell, an dem verschiedene Erscheinungen durchgerechnet und mit Erfahrungsresultaten übereinstimmend gefunden werden konnten.

Die Auswahl der Hypothesen über die Konstitution anderer Molekülmodelle wird mit wachsender Ordnungszahl der beteiligten Elemente erheblich größer und dementsprechend die quantitative Behandlung physikalischer Fragen komplizierter. Ein verhältnismäßig einfaches Problem jedoch stellt die Berechnung jener Eigenfrequenzen dar, welche auf die Schwingung der Kernmassen im Innern zweiatomiger Moleküle zurückzuführen sind; hier bietet sich auch die Möglichkeit einer Prüfung an der Erfahrung.

Diese Eigenschwingungszahlen lassen sich nämlich bei jenen Substanzen, welche ultrarote Absorptionsbanden zeigen, mit den Schwingungszahlen der Absorptionslinien identifizieren. Aber auch dann, wenn keine solchen Absorptionslinien vorhanden sind, können Molekülschwingungen von ähnlicher Frequenz existieren. Allerdings überzeugt man sich leicht, daß eine solche Schwingung nur dann optisch beobachtbar wird, wenn das Molekül eine elektrische Asymmetrie derart zeigt, daß es während jener Schwingung als Dipol vom periodisch veränderlichen Moment angesehen werden kann.

Stellt man sich auf den Boden der Rutherford-Bohrschen Theorie, dann ist es aber auch bei den symmetrischen Molekülen möglich, auf Grund des jener Theorie entsprechenden Molekülmodells die ultrarote Frequenz zu berechnen. Ein Vergleich der mit Hilfe dieser Frequenz berechneten spezifischen Wärme und der Erfahrungswerte ergibt dann auch hier die Möglichkeit, das Modell auf seine Richtigkeit hin zu prüfen.

Diese Prüfung wird im folgenden vorerst ausgeführt für das bekannte Modell des Wasserstoffmoleküls; dann werden auch Modelle anderer zweiatomiger Gase (Stickstoff und Sauerstoff) in diesem Zusammenhang herangezogen. Beim Modell des Stickstoffs werden sämtliche Möglichkeiten der Elektronenanordnung im äußeren Ringe diskutiert und gezeigt, daß nur jenes Molekülmodell zu einer Übereinstimmung mit der Erfahrung führt, dessen Konfiguration der Anordnung von Elektronen im Stickstoffatom entspricht, wie sie ursprünglich Bohr, später Kossel und schließlich Vegard aus verschiedenen Gesichtspunkten vorgeschlagen haben. Dabei ergibt sich mit zwingender Notwendigkeit die Annahme, daß die inneren Ringe als einquantig, der äußere als zweiquantig anzusetzen sind, genau im Einklang mit der entsprechenden Forderung, die Vegard[1]) auf Grund der Berechnung der Röntgenfrequenzen für das Stickstoffatom stellt. Für das Sauerstoffmolekül werden analoge Betrachtungen durchgeführt.

Ferner wird im folgenden, ohne auf eine Erörterung über Dispersionstheorie einzugehen, nur kurz auf die Tatsache hingewiesen, daß die Sommerfeldschen Dispersionsformeln auf Grund der hier betrachteten Molekülmodelle von Stickstoff und Sauerstoff zu einer besseren Übereinstimmung zwischen dem quantentheoretisch berechneten und dem sogenannten „empirischen" Wert der Umlaufgeschwindigkeit der Elektronen führen, als sie mit Hilfe der Sommerfeldschen Annahme über die Konstitution dieser Moleküle erreicht werden konnte.

§ 1. Die spezifische Wärme c_v der Gase bei hohen Temperaturen.

Nimmt man an, daß die gesamte einem Gase zugeführte Wärmemenge zur Erhöhung der äußeren lebendigen Kraft der Moleküle verwendet wird, so resultiert nach der kinetischen Gastheorie der Betrag $\frac{nR}{2}$ für die bei konstantem Volumen gemessene spezifische Wärme c_v mehratomiger Gase, wobei n die Zahl der Freiheitsgrade der Translation und Rotation, R die Gaskonstante bedeutet. Schreibt man also den zweiatomigen Gasmolekülen temperaturabhängige Rotation in zwei Richtungen zu, so beträgt demnach die spezifische Wärme zweiatomiger Gase:

1) L. Vegard, Verhandl. d. Deutsch. phys. Ges. 19, 343, 1917.

$$\frac{5R}{2} = 4{,}963 \text{ cal.}$$

Dieser Wert stimmt bekanntlich nur für ein gewisses mittleres Temperaturintervall mit der Erfahrung überein. Für tiefe Temperaturen fällt die spezifische Wärme allmählich ab, und zwar im Falle des Wasserstoffs nach den Euckenschen Messungen bis zum Betrage von 2,98 cal, wird also gleich der eines einatomigen Gases. Dieser Abfall der spezifischen Wärme bei tiefen Temperaturen läßt sich nach Einstein-Stern und Ehrenfest durch Quantenansätze für die Energie der Rotation, welche das Molekül als Ganzes ausführt, erklären.

Andererseits zeigen jedoch die Versuche ein allmähliches Ansteigen der spezifischen Wärme mehratomiger Gase bei hohen Temperaturen über den oben angegebenen Wert. Man muß nach Nernst und Bjerrum annehmen, daß demnach bei hohen Temperaturen auch die Energie der intramolekularen Schwingungen der Atome zur Geltung kommt, deren Betrag nach der Planckschen Formel für die Energie eines Oszillators genau so angesetzt werden kann, wie in der ursprünglichen Theorie der spezifischen Wärme fester Körper von Einstein.

Jede aus der Bewegung der Atommassen resultierende Eigenschwingung des Moleküls mit der Schwingungszahl ν_i liefert also zur Gesamtenergie der Volumeinheit den Beitrag:

$$E_i = N \frac{h\nu_i}{e^{\frac{h\nu_i}{kT}} - 1}$$

(N = Loschmidtsche Zahl, h = Plancksches Wirkungsquantum, k = Boltzmannsche Konstante, T = absolute Temperatur) und den Zuwachs der spezifischen Wärme:

$$c_v' = \sum_1^{n'} i \frac{dE_i}{dT},$$

wenn n' die Zahl der in Betracht kommenden Eigenfrequenzen bedeutet.

Danach berechnet sich die spezifische Wärme zweiatomiger Gase mit einer Eigenschwingung der Atommassen bei hohen Temperaturen nach der Formel:

$$c_v = 4{,}963 + 1{,}985 \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2}. \qquad (1)$$

§ 2. Berechnung der ultraroten Eigenfrequenzen zweiatomiger symmetrischer Moleküle.

Man denke sich ein Bohrsches Molekül, bestehend aus zwei gleichen Kernen 1 und 2 der Masse m und der Ladung $p\varepsilon$ und einem Ringe von $n = 2p$ Elektronen der Masse μ und der Ladung ε, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotieren. Die Verbindungslinien der beiden Kerne stehen senkrecht auf der Ringebene und fallen in die Richtung der Z-Achse. Unter den möglichen Bewegungen des Systems betrachten wir nun diejenige, bei der sich die beiden Kerne periodisch längs der Z-Achse gegeneinander bewegen, wobei sie sich um die kleinen Beträge z_1 und z_2 aus der Ruhelage entfernen. Dann führt das ganze System kleine Schwingungen aus, bei denen sich im Rhythmus der Kernbewegung der Elektronenring erweitert und zusammenzieht; entsprechend wird die Umlaufsgeschwindigkeit ω beeinflußt. Dann ändert sich der Radius a des Ringes um den Betrag r, der Polarwinkel φ_k der Elektronen um φ. Diese Störungsgrößen r und φ werden für alle Elektronen als gleich betrachtet.

Handelt es sich um Systeme von drei Elektronenringen, einem äußeren und zwei inneren, wobei jeder der letzteren nur eine kleine Zahl von Elektronen enthält, so kann man bekanntlich in erster Näherung, da der Radius der inneren Ringe und ihr Abstand vom benachbarten Kerne sehr klein ist gegenüber den entsprechenden Größen beim äußeren Ringe, sich die Ladung der inneren Ringe mit dem Kerne vereinigt denken, so daß der positive Kern nach außen um die negative innere Ringladung „abgeschirmt" wird. Mit diesem abgeschirmten Ersatzkern darf man dann näherungsweise so rechnen wie beim System mit nur einem einzigen Ringe.

Die Schwingungszahl ν berechnen wir im folgenden auf Grund der klassischen Mechanik aus den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen und führen erst zum Schlusse für die unbekannte Winkelgeschwindigkeit ω ihren quantentheoretischen Wert ein, der aus der Quantenbedingung für den Impuls:

$$\mu a^2 \omega = \frac{kh}{2\pi} \qquad (2)$$

folgt, in der die ganze Zahl $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Quantenzahl des Ringes bedeutet.

Bezeichnet d den Abstand eines Kernes von der Ringebene im Ruhezustand, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

a) für die Kerne:

$$\frac{n^2\varepsilon^2}{4(2d)^2} = \frac{n^2\varepsilon^2}{2(a^2+d^2)} \cdot \frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}},$$

b) für ein Elektron: $\mu a w^2 +$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{4a^2} \sum_1^n k \frac{1}{\sin \frac{\pi k}{n}} = \frac{n\varepsilon^2}{a^2+d^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}. \qquad (3)$$

Daraus berechnet sich: $\delta = \frac{d}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Um Dimensionsgleichheit zu erreichen, führen wir noch statt der Störungsgrößen die Bezeichnungen ein:

$$\varrho = \frac{r}{a}, \quad \xi_1 = \frac{z_1}{a}, \quad \xi_2 = \frac{z_2}{a}.$$

Dann ist die kinetische Energie des Systems:

$$T = \frac{n\mu a^2}{2}\left(\dot{\varrho}^2 + (1+\varrho)^2(\omega + \dot{\varphi})^2\right) + \\ + \frac{ma^2}{2}\dot{\xi}_1^2 + \frac{ma^2}{2}\dot{\xi}_2^2. \tag{4}$$

Der Ausdruck für die potentielle Energie lautet in den einzelnen Teilen ihrer Wirkung:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Ring: } U_R = \frac{n\varepsilon^2}{4a} \cdot \frac{1}{1+\varrho} \cdot \sum_1^{n-1}{}_k \frac{1}{\sin\frac{\pi k}{n}}, \\ &\text{Kern-Ring: } U_{mR} = -\frac{n\varepsilon^2}{2a}\left[(1+\varrho)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\delta + \frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)^2\right]^{-1/2}, \\ &\text{Kern-Kern: } U_{mm} = \frac{n^2\varepsilon^2}{4a} \frac{1}{2\delta + \xi_2 - \xi_1}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wir entwickeln nun nach den Störungsgrößen und vernachlässigen alle zweiten Potenzen dieser kleinen Beträge: Ebenso vernachlässigen wir das Produkt der kleinen Elektronenmasse μ in eine der Störungsgrößen, außer wenn dieses Produkt mit der großen Winkelgeschwindigkeit ω multipliziert ist.

Somit lauten die Bewegungsgleichungen des Systems:

$$\left.\begin{aligned} &1.\ n\mu a^2\omega(2\dot{\varphi} + \varrho\omega) = \frac{n\varepsilon^2}{2a}\sum_1^{n-1}{}_k \frac{1}{\sin\frac{\pi k}{n}} \cdot \varrho + \frac{n^2\varepsilon^2}{a(1+\delta^2)^{3/2}}\left(1 - \frac{3}{1+\delta^2}\varrho,\right. \\ &\qquad - \frac{3n^2\varepsilon^2}{2a} \cdot \frac{\delta}{(1+\delta^2)^{5/2}} \cdot (\xi_2 - \xi_1). \\ &2.\ 2\dot{\varrho}n + \ddot{\varphi} = 0. \\ &3.\ ma^2\ddot{\xi}_1 = -\frac{n^2\varepsilon^2}{2a}\left\{\frac{3\delta}{(1+\delta^2)^{5/2}} \cdot \varrho + \frac{1}{(1+\delta^2)^{3/2}}\left(\frac{3\delta^2}{1+\delta^2} - 1\right)\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right\} + \frac{n^2\varepsilon^2}{16a}\frac{\xi_2 - \xi_1}{\delta^3}, \\ &4.\ ma^2\ddot{\xi}_2 = \frac{n^2\varepsilon^2}{2a}\left\{\frac{3\delta}{(1+\delta^2)^{5/2}} \cdot \varrho + \frac{1}{(1+\delta^2)^{3/2}} \cdot \left(\frac{3\delta^2}{1+\delta^2} - 1\right)\frac{\xi_1+\zeta_2}{2}\right\} - \frac{n^2\varepsilon^2}{16a} \cdot \frac{\xi_2 - \xi_1}{\delta^3}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Durch Elimination und Benutzung der Beziehung (3b) erhalten wir eine Differentialgleichung für die Unbekannte $\xi_2 - \xi_1$, deren periodische Lösung für die Eigenfrequenz die Beziehung:

$$2\pi\nu = \frac{3n}{2}\sqrt{\frac{\mu}{m}} \cdot \omega\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}\frac{n}{2} - \sum_1^{n-1}{}_k \frac{1}{\sin\frac{\pi k}{n}}} \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{27}{21\sqrt{3} - \frac{8}{n}\sum_1^{n-1}{}_k \frac{1}{\sin\frac{\pi k}{n}}}\right)} \tag{7}$$

bzw.

$$\nu = c_n \cdot \omega\sqrt{\frac{\mu}{m}}$$

ergibt.

Die Umlaufsgeschwindigkeit ω berechnet sich aus der Quantenbedingung (2) und der Gleichgewichtsbedingung (3b) zu:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\pi^3 e^4 \mu}{2h^3k^3}\left(3\sqrt{3}\frac{n}{2} - \sum_1^{n-1}{}_k \frac{1}{\sin\frac{\pi k}{n}}\right)^2 = \\ &= \frac{2{,}608}{k^3} \cdot 10^{15}\left(3\sqrt{3}\frac{n}{2} - \sum_1^{n-1}{}_k \frac{1}{\sin\frac{\pi k}{n}}\right)^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Aus Gleichung (7) und (8) erhellt, daß die Schwingungszahl ν indirekt proportional ist der Quadratwurzel aus dem Atomgewicht, wobei der Proportionalitätsfaktor nur eine Funktion der Elektronenzahl n und der Quantenzahl k im Ringe ist. Bei gleicher Elektronen- und Quantenzahl im Ringe würden nach dieser Berechnung die Eigenschwingungen mit steigendem Atomgewicht gegen längere Wellen rücken; das bedeutet aber nach (1), daß der Zuwachs der spezifischen Wärmen bei tieferen Temperaturen merklich wird.

Wir stellen in folgender Tabelle I die quantentheoretisch berechneten Umlaufsgeschwindigkeiten ω und die Proportionalitätsfaktoren $c' = c_n\omega$ für die Elektronenzahlen $n = 2$ bis $n = 16$ und die Quantenzahl $k = 1$ zusammen.

Tabelle I.

n	2	4	6	8	10	12	14	16
$\omega \cdot 10^{-16}$	4,59	11,1	17,1	24,3	28,9	33,0	36,0	37,5
$\left(c' = \nu \sqrt{\frac{m}{\mu}}\right) 10^{-16}$	0,876	3,18	6,46	10,51	14,44	18,30	21,80	23,01

§ 3. Anwendung auf Wasserstoff.

Das Bohr-Debyesche Wasserstoffmolekül besteht aus zwei einfach geladenen Atomkernen und einem Ringe mit zwei Elektronen. Aus der Quantentheorie folgt für $n = 2$, $k = 1$ für ω der Wert $4,59 \cdot 10$. Unter Zugrundelegung dieses Wertes resultiert eine ultrarote Eigenschwingungszahl:

$$\nu = 2,04 \cdot 10^{14}.$$

Benutzen wir hingegen den von Debye[1]) aus Dispersionsmessungen an H_2 berechneten Wert $\omega = 4,21 \cdot 10^{16}$, dann wird

$$\nu = 1,87 \cdot 10^{14}.$$

Zu demselben Wert gelangt J. Rubinowicz[2]) bei Berechnung sämtlicher Eigenfrequenzen des Wasserstoffmoleküls. Die hier betrachtete Schwingung erweist sich durch Vergleich mit Rubinowicz als die einzige des Wasserstoffs, welche im kurzwelligen ultraroten Gebiete liegt. Mit den beiden angegebenen Werten von ν wurden die spezifischen Wärmen vom Wasserstoff bei hohen Temperaturen berechnet (Tabelle II). In der Tabelle sind zum Vergleich die Messungsresultate von M. Pier[3]) beigefügt.

Tabelle II.

T	C_v beob.	C_v berechnet	
		mit ω_{quant}	mit $\omega_{\text{Dispersion}}$
500°			4,965
1473			5,13
1686	5,34	5,17	5,24
1865	5,42	5,25	5,35
2108	5,52	5,39	5,49
2290	5,61	5,48	5,60
2541	5,72	5,62	5,76

Es ergibt sich also eine gute Übereinstimmung zwischen dem Verlauf der berechneten und gemessenen spezifischen Wärme des Wasserstoffs.

§ 4. Die spezifische Wärme und die Molekülmodelle von N_2 und O_2.

Die Ordnungszahl des Stickstoffs im periodischen System ist 7. Wir werden also im Stickstoffmolekül 14 Elektronen unterzubringen haben. Diese sind der Bohrschen Vorstellung gemäß in drei planparallelen Ringen anzuordnen, deren Zentren auf der Verbindungsgeraden der beiden Kerne liegen. Der mittlere, „äußere" Ring trage die Elektronenzahl $n = 2p$, die inneren mit der Elektronenzahl q liegen so nahe an den Kernen, mit der Ladung $(p + q)\,\varepsilon = 7\,\varepsilon$, daß man infolge Kompensation eines Teiles der positiven Kernladung mit der negativen Ladung des benachbarten inneren Ringes Ersatzkerne von der Ladung $p\,\varepsilon = \frac{n}{2}\,\varepsilon$ einführen kann.

Ehe wir unter dieser Voraussetzung die Eigenfrequenz des aus einem Ringe und zwei Ersatzkernen bestehenden Systems nach den obigen Vorschriften berechnen, suchen wir einen Überblick über die experimentellen Daten für die spezifische Wärme zu gewinnen, um uns zu orientieren, in welchem Intervall die Schwingungszahlen des Stickstoffs liegen müssen. Schließen wir also, indem wir die Zuwächse der spezifischen Wärme bei hoher Temperatur nach der Einsteinschen Formel als Funktion von $\frac{h\nu}{kT}$ graphisch darstellen[1]), aus den experimentell gemessenen c_v von N_2 auf die Schwingungszahlen ν, dann ergibt sich aus den Messungen von Pier für N_2 folgender Zusammenhang:

Tabelle III.

„Empirische" Schwingungszahlen von N_2.

T	C_v beob.	$\nu \cdot 10^{-14}$	C_v ber. (mit $\nu = 1,59 \cdot 10^{14}$)
473°	4,73		
903	4,91		
1273	5,25	1,40	5,15
1660	5,31	1,72	5,40
2273	5,78	1,62	5,81
2773	5,93	1,76	6,06

Demnach würde nach den Experimenten die ultrarote Schwingungszahl des Stickstoffs im Intervall 1,4 bis $1,8 \cdot 10^{14}$ liegen, entsprechend

1) P. Debye, Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. 1915, S. 1.

2) J. Rubinowicz, diese Zeitschr. **18**, 187, 1917.

3) M. Pier, Zeitschr. f. Elektroch. **16**, 897, 1910.

1) Vgl. die Tabelle bei Nernst, Grundlagen des neuen Wärmesatzes, Halle 1918, S. 200. Als Ordinaten ist der dritte Teil der dort angegebenen Funktionswerte zu nehmen.

Tabelle IV.
Berechnete Schwingungszahlen von N_2.

	n	2	4	6	8	10	12	14
$k=1$	$\nu \cdot 10^{-14}$	0,771	2,80	5,68	9,25	12,70	16,20	19,18
$k=2$	$\nu \cdot 10^{-14}$	0,097	0,35	0,71	1,16	1,59	2,02	2,40
$k=3$	$\nu \cdot 10^{-14}$	0,028	0,10	0,21	0,34	0,47	0,60	0,71

den Wellenlängen $\lambda = 2,14 - 1,70 \cdot 10^{-4}$ cm. Die experimentellen Werte weisen also selbst untereinander Abweichungen von etwa 22 Proz. auf.

Besehen wir dagegen den Verlauf der Schwingungszahlen ν, welche sich für Stickstoff ergeben, wenn wir für die Ringelektronen versuchsweise nacheinander die geraden Zahlen 2—14 und für diese Elektronenzahlen entsprechend der Reihe nach zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit im Impulsmoment (2) die Quantenzahlen $k = 1, 2, 3$ annehmen. (Tab. IV.) Die Schwingungszahlen steigen also mit zu-

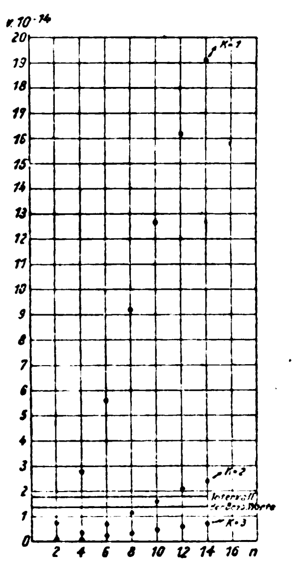


Fig. 1.

nehmendem n kontinuierlich an; dabei nehmen sie mit steigender Quantenzahl k im Verhältnis k^3 ab.

Es erhellt aus der angegebenen Tabelle, daß unter allen bei den verschiedensten Konfigurationen und Quantenzahlen überhaupt möglichen Werten die Schwingungszahl $\nu = 1,59 \cdot 10^{14}$ die einzige ist, welche in das Intervall der aus dem Experiment berechneten Frequenzen fällt. Diese Frequenz liefert ein Molekül mit einem äußeren zweiquantigen Ringe von 10 Elektronen. Die graphische Darstellung in Fig. 1, in der die Schwingungsfrequenzen als Funktion der Elektronenzahlen aufgetragen sind, läßt diese Sachlage noch deutlicher hervortreten.

Für Sauerstoff liegen wegen der Schwierigkeit der Experimente keine vollkommen einwandfreien Beobachtungen vor[1]). Mit Sicherheit kann Pier nur behaupten, daß die Kurve für den Verlauf der spezifischen Wärmen von O_2 zwischen den Kurven von N_2 und von H_2 liegt. Die Atomnummer von O_2 ist 8. Das Molekül enthält also 16 Elektronen.

Eine analoge Rechnung wie oben, die hier nicht in extenso wiederholt zu werden braucht, führt nun zu dem Ergebnis, daß die einzige mögliche Eigenfrequenz von O_2 die dieser Bedingung entsprechenden spezifischen Wärmen liefert, nämlich $\nu = 1,90 \cdot 10^{-14}$ aus der Annahme der Elektronenzahl $n = 12$ und der Quantenzahl $k = 2$ im äußeren Ringe entspringt.

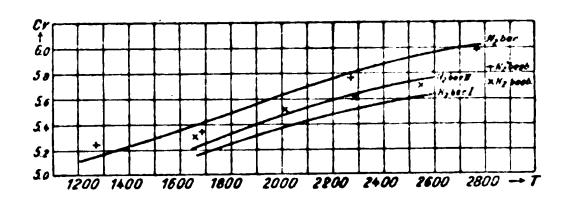


Fig. 2.

Fig. 2 veranschaulicht in Kurven den Gang der berechneten spezifischen Wärmen von H_2, N_2, O_2, wobei die Kreuze die Beobachtungswerte bezeichnen. (Für N_2 vgl. letzte Kolonne von Tab. III.)

§ 5. Bemerkung über die Moleküldimensionen und Umlaufsgeschwindigkeiten.

P. Debye[2]) entwickelte bekanntlich die Dispersionstheorie des Wasserstoffmoleküls auf Grund elektromagnetischer Überlegungen, wobei er die einzelnen Teile seiner Dispersionsformel mit der Cauchyschen Dispersionsformel

$$u - 1 = A\left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right),$$

worin u den Brechungsexponenten, A und B empirisch gemessene Konstanten bedeuten, identifizieren konnte. Auf diesem Wege gelang es ihm, aus seiner Theorie mit Hilfe der empirisch

1) M. Pier, l. c.
2) P. Debye, l. c.

gemessenen Dispersionskonstanten die Umlaufsgeschwindigkeit der Elektronen im äußeren Ringe zu berechnen. Er fand eine sehr gute Übereinstimmung zwischen diesen empirischen Werten der Umlaufsfrequenz mit dem quantentheoretischen Wert. A. Sommerfeld[1]) entwickelte nach denselben Voraussetzungen die Dispersionstheorie für beliebige Moleküle und wandte seine Formeln auf die Berechnung der Dispersion von Stickstoff und Sauerstoff an. Dabei ging er auf Grund von Valenzüberlegungen von anderen Molekülmodellen aus, als sie in vorliegender Notiz betrachtet wurden.

Berechnet man hingegen auf Grund der Sommerfeldschen Dispersionsformeln die Umlaufsgeschwindigkeiten der Elektronen im äußeren Ringe der in vorliegender Notiz betrachteten Molekülmodelle von Stickstoff und Sauerstoff (aus der Konstante A), und vergleicht sie mit den quantentheoretisch berechneten Werten, so ergibt sich, wie folgende Tabelle V zeigt, eine bessere Übereinstimmung als bei den Sommerfeldschen Molekülmodellen.

Tabelle V.

	N_2	O_2
$\omega_{\text{quant.}} \cdot 10^{-16}$	3,65	4,05
$\omega_{\text{Dispersion}} \cdot 10^{-16}$	3,51	3,65
Werte von Sommerfeld		
$\omega_{\text{quant.}} \cdot 10^{-16}$	17,7	11,1
$\omega_{\text{Dispersion}} \cdot 10^{-16}$	3,40	3,48

Die Moleküldimensionen, die sich aus den hier benutzten Modellen berechnen (Durchmesser des äußeren Ringes und Kernabstand), sowie die zugehörigen Trägheitsmomente sind in Tabelle VI zusammengestellt.

Tabelle VI.

	H_2	N_2	O_2
Durchmesser $2a \cdot 10^8$	1,05	1,61	1,50
Kernabstand $d \cdot 10^8$	0,59	0,91	0,87
Trägheitsmoment $J \cdot 10^{40}$	0,29	10,06	7,51

Daraus geht hervor, daß das Trägheitsmoment des Stickstoffs und ebenso das des Sauerstoffs dasjenige des Wasserstoffs um ein beträchtliches Vielfaches überragt.

Zusammenfassend können wir also sagen: Stützt man sich auf die Voraussetzungen und Ergebnisse der vorliegenden Berechnungen, so kann man — mit allem Vorbehalt — im Sinne der Bohrschen Theorie folgende Annahmen über die Molekülmodelle des Stickstoffs und Sauerstoffs machen: Das Modell des Stickstoffmoleküls besteht aus 2 positiven Kernen der Ladung 7ε, im Abstande $d = 9{,}1 \cdot 10^{-9}$ cm voneinander. Nahe an jedem Kerne liegt ein „innerer" Ring von 2 Elektronen, mit sehr kleinem Radius. Der äußere Ring von 10 Elektronen ist zweiquantig und hat den Radius $a = 8{,}05 \cdot 10^{-9}$ cm. Seine Ebene teilt das Molekül in zwei symmetrische Hälften.

Diesem Molekülmodell entspricht ein Atommodell des Stickstoffs, in dem um den Kern sich ein innerer einquantiger Ring von 2 Elektronen und um diesen konzentrisch ein zweiquantiger Ring von 5 Elektronen schließt.

Das Sauerstoffmolekül würde demnach entsprechend aus zwei Kernen von der Ladung 8ε, zwei inneren Ringen von je zwei Elektronen und einem äußeren zweiquantigen Ringe von 12 Elektronen bestehen. Analog wie oben könnte man sich das Sauerstoffatom aus einem einquantigen Ringe von zwei Elektronen und einem zweiquantigen Ringe von sechs Elektronen aufgebaut denken.

Göttingen, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 23. April 1919.)

1) A. Sommerfeld, Elster-Geitel-Festschrift 583 und Ann. d. Phys. 53, 497, 1917.

Schwerefeld und Krümmung.

Von F. Jung.

I.

Auf der linken Seite der Einsteinschen Schwerefeldgleichungen[1]) steht der Tensor

$$R_{\mu\nu} = -\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \sum_{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \mu\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}\, \partial x^{\nu}} - \sum_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}},$$

wo $g = |g_{\mu\nu}|$ die Determinante des „Fundamentaltensors" $g_{\mu\nu}$ ist. Er wird erhalten aus dem Riemann-Christoffelschen Krümmungsaffinor

$$R^{\varrho}_{\mu\sigma\tau} = -\frac{\partial}{\partial x^{\tau}} \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \varrho \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left\{ \begin{matrix} \mu\tau \\ \varrho \end{matrix} \right\} - \sum_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\tau \\ \varrho \end{matrix} \right\} + \sum_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} \mu\tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \varrho \end{matrix} \right\}$$

durch „Verjüngung" bezüglich τ und ϱ. In einer früheren Mitteilung[2]) habe ich gezeigt,

1) Einstein, Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, Leipzig 1916.

2) F. Jung, Zur Ableitung der Schwerefeldgleichungen, diese Zeitschr. 19, 61, 1918. Die dortige Bezeichnungsweise wird auch hier verwendet.

daß sich aus dem Hauptaffinor $\overline{\overline{A}}$ durch zweimalige Bildung der Feldableitung ein Tensor $\nabla \overset{1}{\underset{2}{||}} (\nabla, \overline{\overline{A}})$ gewinnen läßt, welcher sich von $R_{\mu\nu}$ unterscheidet nur durch den Mangel des dritten Gliedes im obigen Ausdrucke. Für $\sqrt{-g} = 1$ stimmen beide überein. Die Bildung $\nabla \overset{1}{\underset{2}{||}} (\nabla, \overline{\overline{A}})$ erscheint unmittelbar als Verallgemeinerung von $\nabla | (\nabla \varphi)$, was als linke Seite der Laplace-Poissonschen Gleichung auftritt, wenn φ das Potential bedeutet. Daher liegt es nahe, $\nabla \overset{1}{\underset{2}{||}} (\nabla, \overline{\overline{A}})$ zur linken Seite der Schwerefeldgleichung zu machen und es fragt sich nun, in welcher Beziehung diese Größe steht zum Riemann-Christoffelschen Affinor. Um den Zusammenhang zu übersehen, müssen wir kurz zurückkommen auf die Bildung des Affinors $\overline{\overline{A}}$ und der Feldableitung.

In einem geraden ebenen Ausdehnungsgebiete m-ter Stufe X_m (Raum von m Ausdehnungen) kann für jeden Punkt ein Verein (Satz) von m Vektoren $\bar{a}_1, \cdots \bar{a}_m$, den Längsvektoren, so angenommen werden, daß kein $\bar{a}_i$ in das Gebiet der übrigen fällt. Ist das Gebiet X_m krumm, so kann man wenigstens m Richtungen oder Linienelemente der genannten Art annehmen. Die endlichen Vektoren in diesen Richtungen werden dann X_m berühren. Der Verein der $\bar{a}_i$ bildet das Längskant des Punktes und dieses ist demnach eine Funktion des Ortes in X_m. Ist das Gebiet X_m krumm, so bestimmt jedes seiner Elemente ein gerades Gebiet m-ter Stufe X'_m, welches X_m berührt und das Längskant $\bar{a}_i$ enthält.

Das krumme Ausdehnungsgebiet X_m können wir uns stets gelegen denken in einem geraden Ausdehnungsgebiete X_n von genügend hoher Stufe n. Innerhalb dieses errichten wir zu jedem Gebiete X_m' im Berührungspunkte das senkrechte gerade Gebiet X'_{n-m} von $(n-m)$-ter Stufe und nehmen in ihm n weitere Vektoren $\bar{a}_{m+1}, \cdots \bar{a}_n$ an, wieder von der Art, daß keiner in das Gebiet der übrigen fällt. $\bar{a}_1, \cdots \bar{a}_n$ bilden dann das Längskant des Berührungspunktes in X_n.

Zu den $\bar{a}_i$ fügen wir im Gebiete X_n hinzu n neue Vektoren $\bar{a}^i$, die Quervektoren, derart, daß $\bar{a}^i$ senkrecht steht auf allen $\bar{a}_k$ außer $\bar{a}_i$, also

$$\bar{a}^i | \bar{a}_k = 0, \quad i \neq k, \tag{1}$$

und von solcher Größe, daß

$$\bar{a}^i | \bar{a}_i = 1.$$

Ihr Verein bildet das Querkant des Berührungspunktes, die $\bar{a}_i$ und $\bar{a}^i$ sind seine Hauptvektoren. Die Quervektoren $\bar{a}^1, \cdots \bar{a}^m$ fallen in das Berührungsgebiet X_m', denn mit $i = 1, \cdots m$ ist die Gleichung (1) befriedigt für

$$k = m+1, \cdots n,$$

die Vektoren $\bar{a}^1, \cdots \bar{a}^m$ stehen somit senkrecht auf $\bar{a}_{m+1}, \cdots \bar{a}_n$, d. h. dem Gebiete X'_{n-m}. Größen, welche ganz in X'_m liegen, werden sich demnach darstellen lassen durch die Vektoren $\bar{a}_1, \cdots \bar{a}_m$ oder $\bar{a}^1, \cdots \bar{a}^m$ allein.

Nach dem Gesagten ist der Einheits- oder Hauptaffinor für X'_m

$$\overline{\overline{A}}_m = \bar{a}^1, \bar{a}_1 + \cdots + \bar{a}^m, \bar{a}_m, \tag{2}$$

für X_n aber

$$\overline{\overline{A}}_n = \bar{a}^1, \bar{a}_1 + \cdots + \bar{a}^m, \bar{a}_m + \cdots + \bar{a}^n, \bar{a}_n, \tag{2'}$$

die Feldableitung in X'_m wird erhalten durch Anwendung von

$$\nabla_m = \bar{a}^1, \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \bar{a}^m, \frac{\partial}{\partial x^m}, \tag{3}$$

in X_n dagegen von

$$\nabla_n = \bar{a}^1, \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \bar{a}^m, \frac{\partial}{\partial x^m} + \cdots + \bar{a}^n, \frac{\partial}{\partial x^n}. \tag{3'}$$

Bildet man also nach irgendwelchen gleichen Vorschriften Größen einerseits in X_n, andererseits nur in den Berührungsgebieten X'_m allein, so erhält man die letzteren aus den ersteren durch Weglassung der Glieder mit jenen Zeigern, welche über m hinausgehen.

Nun sei C eine Größe, welche Funktion des Ortes ist. Dann wird ihre dyadische Feldableitung erster Ordnung

$$\nabla, C = \sum_i \bar{a}^i, \frac{\partial C}{\partial x^i}, \tag{4}$$

die dyadische Feldableitung zweiter Ordnung

$$\nabla, (\nabla, C) = \sum_k \bar{a}^k, \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sum_i \bar{a}^i, \frac{\partial C}{\partial x^i} \right).$$

Bei Ausführung der Differentiation ist zu setzen

$$\frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} = - \sum_l \begin{Bmatrix} l\,k \\ i \end{Bmatrix} \bar{a}^l, \tag{4'}$$

nach (14) und (15) der früheren Mitteilung und daher wird

$$\nabla, (\nabla, C) = \sum_{l\,k} \bar{a}^k, \bar{a}^l, \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^k \partial x^l} - \right.$$
$$\left. - \sum_i \begin{Bmatrix} l\,k \\ i \end{Bmatrix} \frac{\partial C}{\partial x^i} \right). \tag{5}$$

Soll die äußere Feldableitung von ∇, C gefunden werden, also $\nabla \wedge (\nabla, C)$, so haben wir in dem vorigen Ausdrucke das Zeichen $\wedge$ zu

setzen statt des ersten Beistriches und können wegen

$$\bar{a}^k \wedge \bar{a}^l = -\bar{a}^l \wedge \bar{a}^k = \bar{a}^{kl}$$

die Glieder paarweise zusammenziehen. Da jedoch

$$\left\{ {lk \atop i} \right\} = \left\{ {kl \atop i} \right\}$$

nach (16) a. a. O., so heben einander die Glieder der einen Summe weg und es bleibt

$$\nabla \wedge (\nabla, C) = \sum_{ik} \bar{a}^{ki}, \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 C}{\partial x^i \partial x^k} \right). \quad (6)$$

Die Formeln (4), (5), (6) zeigen den Zusammenhang der Feldableitungen der Größe C mit ihren Ableitungen nach den Koordinaten.

Für den Längsvektor $\bar{a}_r$ sind die Feldableitungen.

$$\nabla, \bar{a}_r, \quad \nabla, (\nabla, \bar{a}_r) \text{ und } \nabla_2^1 (\nabla, \bar{a}_r)$$

a. a. O. bestimmt worden. Aus der zweiten ergibt sich wie oben $\nabla \wedge (\nabla, \bar{a}_r)$. Um jedoch die Beziehungen dieser Größen zu den Ableitungen

$$\frac{\partial \bar{a}_r}{\partial x^i} \text{ und } \frac{\partial^2 \bar{a}_r}{\partial x^k \partial x^i}$$

deutlich hervortreten zu lassen, wollen wir sie hier auf Grund der Formeln (4), (5), (6) berechnen. Nach (14) a. a. O. ist

$$\frac{\partial \bar{a}_r}{\partial x^i} = \sum_q \begin{bmatrix} ri \\ q \end{bmatrix} \bar{a}^q = \sum_q \left\{ {ri \atop q} \right\} \bar{a}_q \quad (7)$$

und daher wird

$$\frac{\partial^2 \bar{a}_r}{\partial x^k \partial x^i} = \sum_q \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \begin{bmatrix} ri \\ q \end{bmatrix} - \sum_p \begin{bmatrix} ri \\ p \end{bmatrix} \left\{ {qk \atop p} \right\} \right) \bar{a}^q$$

$$= \sum_q \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ {ri \atop q} \right\} + \sum_p \left\{ {ri \atop p} \right\} \left\{ {pk \atop q} \right\} \right) \bar{a}_q, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{a}_r}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 \bar{a}_r}{\partial x^i \partial x^k} = \sum_q \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \begin{bmatrix} rk \\ q \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x^i} \begin{bmatrix} rk \\ q \end{bmatrix} + \sum_p \begin{bmatrix} rk \\ p \end{bmatrix} \left\{ {qi \atop p} \right\} - \sum_p \begin{bmatrix} ri \\ p \end{bmatrix} \left\{ {qk \atop p} \right\} \right) \bar{a}^q. \quad (8')$$

Man sieht, daß im letzten Ausdrucke die Koeffizienten der a^q (Komponentenbeiwerte) nichts anderes sind als die Riemann-Christoffelschen Vierzeigergrößen erster Art

$$(rq, ik) = \frac{\partial}{\partial x^k} \begin{bmatrix} ri \\ q \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^i} \begin{bmatrix} rk \\ q \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_p \begin{bmatrix} rk \\ p \end{bmatrix} \left\{ {qi \atop p} \right\} - \sum_p \begin{bmatrix} ri \\ p \end{bmatrix} \left\{ {qk \atop p} \right\}, \quad (9)$$

daß also

$$\frac{\partial^2 \bar{a}_r}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \bar{a}_r}{\partial x^k \partial x^i} = \sum_q (rq, ik) \bar{a}^q. \quad (10)$$

Durch Einsetzen in (4), (5), (6) ergibt sich

$$\nabla, \bar{a}_r = \sum_{iq} \begin{bmatrix} ri \\ q \end{bmatrix} \bar{a}^i, \bar{a}^q = \sum_{iq} \left\{ {ri \atop q} \right\} \bar{a}_i, \bar{a}_q, \quad (11)$$

$$\nabla, (\nabla, \bar{a}_r) = \sum_{klq} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \begin{bmatrix} rl \\ q \end{bmatrix} - \sum_p \begin{bmatrix} rl \\ p \end{bmatrix} \left\{ {qk \atop p} \right\} - \right.$$

$$\left. - \sum_p \left\{ {lk \atop p} \right\} \begin{bmatrix} rp \\ q \end{bmatrix} \right) \bar{a}^k, \bar{a}^l, \bar{a}^q,$$

$$= \sum_{klq} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ {rl \atop q} \right\} + \sum_p \left\{ {rl \atop p} \right\} \left\{ {pk \atop q} \right\} - \right.$$

$$\left. - \sum_p \left\{ {lk \atop p} \right\} \left\{ {rp \atop q} \right\} \right) \bar{a}^k, \bar{a}^l, \bar{a}_q, \quad (12)$$

$$\nabla \wedge (\nabla, \bar{a}_r) = \sum_{klq} (rq, lk) \bar{a}^{kl} \bar{a}^q. \quad (13)$$

Wie a. a. O. gezeigt ist, kann man hier den Hauptaffinor $\bar{\bar{A}}$ einführen, dessen Rechtsfaktoren konstant gehalten werden. Nach (25), (26) a. a. O. ist

$$\nabla \smile \bar{\bar{A}} = \sum_r (\nabla \smile \bar{a}_r), \bar{a}^r$$

$$\nabla \smile (\nabla \smile \bar{\bar{A}}) = \sum_r [\nabla (\nabla \smile \bar{a}_r)], \bar{a}^r.$$

Demnach haben wir

$$\nabla \wedge (\nabla, \bar{\bar{A}}) = \sum_{klqr} (rq, lk) \bar{a}^{kl}, \bar{a}^q, \bar{a}^r \quad (14)$$

und dies ist offenbar der Riemann-Christoffelsche Krümmungsaffinor $\bar{\bar{K}}$ des Ausdehnungsgebietes, also

$$\bar{\bar{K}} = \nabla \wedge (\nabla, A). \quad (14')$$

Die Ableitungen von $\bar{a}_r$, gebildet in den Berührungsgebieten von X_m, erhalten wir gemäß einer früheren Bemerkung aus jenen für X_n durch Weglassung gewisser Glieder. Trennen wir die auf die Berührungsgebiete X'_m bezüglichen Summanden von den anderen, so ist nach (7) und (8)

$$\frac{\partial \bar{a}_r}{\partial x^i} = \sum_q \begin{bmatrix} ri \\ q \end{bmatrix} \bar{a}^q + \sum_s \begin{bmatrix} ri \\ s \end{bmatrix} \bar{a}^s,$$

$$\frac{\partial^2 \bar{a}_r}{\partial x^k \partial x^i} = \sum_q \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \begin{bmatrix} ri \\ q \end{bmatrix} - \sum_p \begin{bmatrix} ri \\ p \end{bmatrix} \left\{ {qk \atop p} \right\} - \right.$$

$$\left. - \sum_s \begin{bmatrix} ri \\ s \end{bmatrix} \left\{ {qk \atop s} \right\} \right) \bar{a}^q,$$

$$+ \sum_s \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \begin{bmatrix} ri \\ s \end{bmatrix} - \sum_p \begin{bmatrix} ri \\ p \end{bmatrix} \left\{ {qk \atop p} \right\} - \right.$$

$$-\sum_s \begin{bmatrix} r\,i \\ s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q\,k \\ s \end{Bmatrix} \Big) \bar{a}^s,$$

$$i, k, r, p, q = 1, \cdots m,$$
$$s = m + 1, \cdots n.$$

Bleibt man in X'_m, so sind alle Glieder wegzulassen, welche den Zeiger s enthalten. Diese Ausdrücke gestatten es, deutlich zu erkennen, wieso das Verschwinden des Krümmungsaffinors $\overline{\overline{\underset{n}{K}}}$ in X_n nicht das Gleiche nach sich zu ziehen braucht für $\overline{\overline{\underset{m}{K}}}$ in X_m, da die Größen $(rq, ik)_m$ für X_m aus den $(rq, ik)_n$ für X_m durch Wegfall von Summanden hervorgehen. Es ist ja für die obigen Zeigerwerte

$$(rq, ik)_n = (rq, ik)_m - \sum_s \begin{bmatrix} r\,i \\ s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q\,k \\ r \end{Bmatrix} + \\ + \sum_s \begin{bmatrix} r\,k \\ s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q\,i \\ s \end{Bmatrix}.$$

Verschwinden die $(rq, ik)_n$, so folgen für die $(rq, ik)_m$ die Ausdrücke

$$(rq, ik)_m = \sum_s \left(\begin{bmatrix} r\,i \\ s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q\,k \\ s \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} r\,k \\ s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q\,i \\ s \end{Bmatrix} \right). \quad (15)$$

Es wurde nun a. a. O. gezeigt, daß die linke Seite der Schwerefeldgleichungen gegeben ist durch $\nabla \overset{1}{\underset{2}{\shortparallel}} (\nabla, \overline{\overline{A}})$, hier fanden wir für den Krümmungsaffinor $\nabla \wedge (\nabla, \overline{\overline{A}})$. Die Beziehung der beiden Größen zueinander liegt also darin, daß beide erhalten werden aus dem Hauptaffinor des Ausdehnungsgebietes als Feldableitungen zweiter Ordnung, jedoch in verschiedener Art. Die dyadische Feldableitung erster Ordnung des Hauptaffinors gibt bei nochmaliger Bildung der äußeren Feldableitung den Krümmungsaffinor, dagegen bei Bildung der mehrfaltigen inneren Feldableitung die linke Seite der Schwerefeldgleichung. Aus den vorstehenden Ausführungen ist ersichtlich, daß die Verteilung des Einheits- oder Hauptaffinors

$$\overline{\overline{A}} = \sum_i \bar{a}^i, \bar{a}_i = \sum_i \bar{a}_i, \bar{a}^i$$

kennzeichnend ist für die Beschaffenheit des Ausdehnungsgebietes. Wegen

$$\bar{a}^i = \bar{a}^i \,|\, \overline{\overline{A}} = \sum_k (\bar{a}^i \,|\, \bar{a}^k)\, \bar{a}_k,$$

$$\bar{a}_i = \bar{a}_i \,|\, \overline{\overline{A}} = \sum_k (\bar{a}_i \,|\, \bar{a}_k)\, \bar{a}^k,$$

kann $\overline{\overline{A}}$ auch in die Formen

$$\overline{\overline{A}} = \sum_{ik} (\bar{a}^i \,|\, \bar{a}^k)\, \bar{a}_i, \bar{a}_k = \sum_{ik} (\bar{a}_i \,|\, \bar{a}_k)\, \bar{a}^i, \bar{a}^k$$

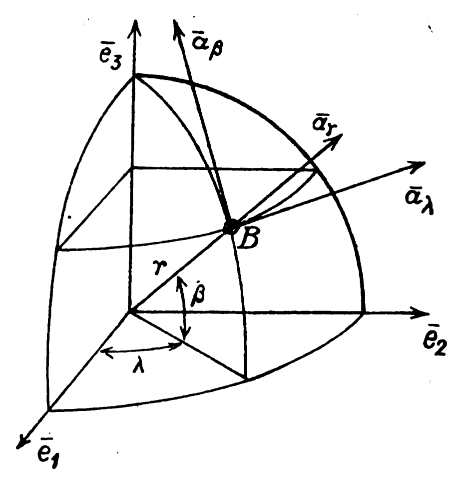
gebracht werden. Es ist der Einstein-Großmannsche „Fundamentaltensor"[1]).

II.

Als Beispiel für die im vorhergehenden allgemein durchgeführten Rechnungen wollen wir in einem geometrisch einfachen und übersichtlichen Falle die verschiedenen oben behandelten Größen ermitteln, nämlich für eine Kugelfläche als X_m. Es wird dabei der Zusammenhang gleichbedeutender Größen in den Gebieten X_n und X_m, hier also im Raume und in der Kugelfläche, noch deutlicher werden.

Der Ort eines Raumpunktes B sei gegeben durch die Polarkoordinaten r, λ, β. Sind $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ zueinander senkrechte Einheitsvektoren, deren Richtungen aus der Figur ersichtlich sind, so hat man

$$\bar{r} = r \cos\lambda \cos\beta\, \bar{e}_1 + r \cos\lambda \sin\beta\, \bar{e}_2 + r \sin\beta\, \bar{e}_3. \quad (15)$$



Auf der Kugelfläche

$$r = \text{const}$$

sind λ, β rechtwinkelige Koordinaten. Wir machen die Vektoren

$$\bar{a}_\lambda = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \lambda}, \quad \bar{a}_\beta = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta} \quad (16)$$

zum Längskant des Punktes B der Kugel X_2 und erhalten durch Hinzufügung von

$$\bar{a}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} \quad (16')$$

das Längskant im Raume X_3. Aus (15) folgt

1) Hier sei hingewiesen auf eine kürzlich erschienene Abhandlung von Schouten, Die direkte Analyse der neueren Relativitätstheorie (Verh. d. Kon. Akad. van Wetensch. te Amsterdam, XII), in welcher auf anderen Wegen ebenfalls der Zusammenhang des Hauptaffinors mit dem Krümmungsaffinor und den Schwerefeldgleichungen untersucht wird.

$$\left.\begin{aligned}\bar{a}_\lambda &= -r\sin\lambda\cos\beta\,\bar{e}_1 + r\cos\lambda\cos\beta\,\bar{e}_2\\ \bar{a}_\beta &= -r\cos\lambda\sin\beta\,\bar{e}_1 - r\sin\lambda\sin\beta\,\bar{e}_2 +\\ &\quad + r\cos\beta\,\bar{e}_3,\\ \bar{a}_r &= \cos\lambda\cos\beta\,\bar{e}_1 + \sin\lambda\cos\beta\,\bar{e}_2 +\\ &\quad + \sin\beta\,\bar{e}_3,\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

woraus sich die Werte der Längsvektoren ergeben

$$a_\lambda = r\cos\beta,\quad a_\beta = r,\quad a_r = 1. \qquad (17')$$

Da die Längsvektoren hier senkrecht zueinanderstehen, fallen die Quervektoren $\bar{a}^\lambda$, a^β, $\bar{a}^r$ mit ihnen zusammen und haben die reziproken Werte, also

$$\left.\begin{aligned}\bar{a}^\lambda &= \frac{1}{r\cos\beta}\bar{e}_\lambda = \frac{1}{r^2\cos\beta}\bar{a}_\lambda,\\ \bar{a}^\beta &= \frac{1}{r}\bar{e}_\beta = \frac{1}{r^2}\bar{a}_\beta,\\ \bar{a}^r &= 1\,\bar{e}_r = \bar{a}_r,\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

wo $\bar{e}_\lambda$, $\bar{e}_\beta$, $\bar{e}_r$ die Einheitsvektoren in den Richtungen $\bar{a}_\lambda, \cdots$ sind. Durch Einsetzen erhält man

$$\left.\begin{aligned}\bar{a}^\lambda &= -\frac{\sin\lambda}{r\cos\beta}\bar{e}_1 + \frac{\cos\lambda}{r\cos\beta}\bar{e}_2,\\ \bar{a}^\beta &= -\frac{\cos\lambda\sin\beta}{r}\bar{e}_1 - \frac{\sin\lambda\sin\beta}{r}\bar{e}_2 + \frac{\cos\beta}{r}\bar{e}_3,\\ \bar{a}^r &= \cos\lambda\cos\beta\,\bar{e}_1 + \sin\lambda\cos\beta\,\bar{e}_2 + \sin\beta\,\bar{e}_3,\end{aligned}\right\}\quad(18')$$

Aus den Formeln (17) folgt

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\bar{a}_\lambda}{\partial\lambda} &= -r\cos\lambda\cos\beta\,\bar{e}_1 - r\sin\lambda\cos\beta\,\bar{e}_2,\\ \frac{\partial\bar{a}_\lambda}{\partial\beta} = \frac{\partial\bar{a}_\beta}{\partial\lambda} &= r\sin\lambda\sin\beta\,\bar{e}_1 - r\cos\lambda\sin\beta\,\bar{e}_2,\\ \frac{\partial\bar{a}_\lambda}{\partial r} = \frac{\partial\bar{a}_r}{\partial\lambda} &= -\sin\lambda\cos\beta\,\bar{e}_1 + \cos\lambda\cos\beta\,\bar{e}_2,\\ \frac{\partial\bar{a}_\beta}{\partial\beta} &= -r\cos\lambda\cos\beta\,\bar{e}_1\\ &\quad + r\sin\lambda\cos\beta\,\bar{e}_2 - r\sin\beta\,\bar{e}_3,\\ \frac{\partial\bar{a}_\beta}{\partial r} = \frac{\partial\bar{a}_r}{\partial\beta} &= -\cos\lambda\cos\beta\,\bar{e}_1\\ &\quad + \sin\lambda\sin\beta\,\bar{e}_2 + \cos\beta\,\bar{e}_3,\\ \frac{\partial\bar{a}_r}{\partial r} &= 0.\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

Für die Christoffelschen Größen erster und zweiter Art haben wir nach (13) a. a. O. die Ausdrücke

$$\begin{bmatrix} i\,k\\ p\end{bmatrix} = \frac{\partial\bar{a}_i}{\partial x^k}\,|\,\bar{a}^p,\qquad \begin{Bmatrix} i\,k\\ p\end{Bmatrix} = \frac{\partial\bar{a}_i}{\partial x^k}\bar{a}_p$$

und daher im vorliegenden Falle aus den vorangehenden Formeln

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}\lambda\lambda\\ \beta\end{bmatrix} &= r^2\sin\beta\cos\beta, & \begin{Bmatrix}\lambda\lambda\\ \beta\end{Bmatrix} &= \sin\beta\cos\beta,\\ \begin{bmatrix}\lambda\lambda\\ r\end{bmatrix} &= -r\cos^2\beta, & \begin{Bmatrix}\lambda\lambda\\ r\end{Bmatrix} &= -r\cos^2\beta,\\ \begin{bmatrix}\lambda\beta\\ \lambda\end{bmatrix} &= -r^2\sin\beta\cos\beta, & \begin{Bmatrix}\lambda\beta\\ \lambda\end{Bmatrix} &= -\operatorname{tg}\beta,\\ \begin{bmatrix}\lambda r\\ \lambda\end{bmatrix} &= r\cos^2\beta, & \begin{Bmatrix}\lambda r\\ \lambda\end{Bmatrix} &= \frac{1}{r},\\ \begin{bmatrix}\beta\beta\\ r\end{bmatrix} &= -r, & \begin{Bmatrix}\beta\beta\\ r\end{Bmatrix} &= -r,\\ \begin{bmatrix}\beta r\\ \beta\end{bmatrix} &= r, & \begin{Bmatrix}\beta r\\ \beta\end{Bmatrix} &= \frac{1}{r}.\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

Alle übrigen verschwinden. Bleiben wir bei der Bildung dieser Größen in der Berührungsebene der Kugel, so behalten wir nach früherem nur

$$\begin{bmatrix}\lambda\lambda\\ r\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\lambda\beta\\ \lambda\end{bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\lambda\lambda\\ \beta\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\lambda\beta\\ \lambda\end{Bmatrix}$$

übrig, welche den Zeiger r nicht enthalten.

Als Ausdrücke für die Ableitungen der Hauptvektoren in den Hauptkanten ergeben sich nach (7) und (4') (siehe unten Gl. 21 u. 21'). Die unterklammerten Glieder entsprechen jenen Summanden in den Formeln (7) und (4'), welche den Zeiger r nicht enthalten. Sie sind also allein beizubehalten, wenn man in der Berührungsebene der Kugel bleibt.

Wir bilden nun die Ableitungen zweiter Ordnung der Längsvektoren $\bar{a}_\lambda$ und $\bar{a}_\beta$ und deuten wieder durch Unterklammern an, welche

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\bar{a}_\lambda}{\partial\lambda} = \underline{\sin\beta\cos\beta\,\bar{a}_\beta} - r\cos^2\beta\,\bar{a}_r, & &\frac{\partial\bar{a}_\beta}{\partial\beta} = -r\,\bar{a}_r,\\ &\frac{\partial\bar{a}_\lambda}{\partial\beta} = \frac{\partial\bar{a}_\beta}{\partial\lambda} = \underline{-\operatorname{tg}\beta\,\bar{a}_\lambda}, & &\frac{\partial\bar{a}_\beta}{\partial r} = \frac{\partial\bar{a}_r}{\partial\beta} = \frac{1}{r}\bar{a}_\beta,\\ &\frac{\partial\bar{a}_\lambda}{\partial r} = \frac{\partial\bar{a}_r}{\partial\lambda} = \frac{1}{r}\bar{a}_\lambda, & &\frac{\partial\bar{a}_r}{\partial r} = 0,\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial a^\lambda}{\partial\lambda} = \underline{\operatorname{tg}\beta\,\bar{a}^\beta} - \frac{1}{r}\bar{a}^r, & &\frac{\partial\bar{a}^\beta}{\partial\lambda} = \underline{\operatorname{tg}\beta\,\bar{a}^\lambda}, & &\frac{\partial\bar{a}^r}{\partial\lambda} = r\cos^2\beta\,\bar{a}^\lambda,\\ &\frac{\partial\bar{a}^\lambda}{\partial\beta} = \underline{\operatorname{tg}\beta\,\bar{a}^\lambda}, & &\frac{\partial\bar{a}^\beta}{\partial\beta} = -\frac{1}{r}\bar{a}^r, & &\frac{\partial\bar{a}^r}{\partial\beta} = r\bar{a}^\beta - \frac{1}{r}\bar{a}^r,\\ &\frac{\partial\bar{a}^\lambda}{\partial r} = -\frac{1}{r}\bar{a}^\lambda, & &\frac{\partial\bar{a}^\beta}{\partial r} = -\frac{1}{r}\bar{a}^\beta, & &\frac{\partial\bar{a}^r}{\partial r} = 0.\end{aligned}\right\}\quad(21')$$

Glieder zu belassen sind bei Beschränkung auf die Berührungsebene

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial\bar{a}_\lambda}{\partial\lambda}=\frac{\partial}{\partial\beta}(\sin\beta\cos\beta\,\bar{a}_\beta)-\frac{\partial}{\partial\beta}(r\cos^2\beta\,\bar{a}_r)$$
$$=(\cos^2\beta-\sin^2\beta)\,\bar{a}_\beta+\sin\beta\cos\beta\frac{\partial\bar{a}_\beta}{\partial\beta}$$
$$+2r\cos\beta\sin\beta\,\bar{a}_r-r\cos^2\beta\frac{\partial\bar{a}_r}{\partial\beta}$$
$$=(\cos^2\beta-\sin^2\beta)\,\bar{a}_\beta-\cos^2\beta\,\bar{a}_\beta+$$
$$+r\sin\beta\cos\bar{a}_r, \qquad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\bar{a}_\lambda}{\partial\beta}=\frac{\partial}{\partial\lambda}(-\operatorname{tg}\beta\,\bar{a}_\lambda)$$
$$=-\operatorname{tg}\beta\frac{\partial\bar{a}_\lambda}{\partial\lambda}$$
$$=-\sin^2\beta\,\bar{a}_\beta+r\sin\beta\cos\beta\,\bar{a}_r.$$

Daher wird

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial\bar{a}_\lambda}{\partial\lambda}-\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\bar{a}_\lambda}{\partial\beta}=\cos^2\beta\,\bar{a}_\beta-\cos^2\beta\,\bar{a}_\beta. \qquad (23)$$

Für den Raum folgt also

$$\frac{\partial^2\bar{a}_\lambda}{\partial\beta\,\partial\lambda}-\frac{\partial^2\bar{a}_\lambda}{\partial\lambda\,\partial\beta}=0,$$

für die Berührungsebene dagegen

$$\frac{\partial^2\bar{a}_\lambda}{\partial\beta\,\partial\lambda}-\frac{\partial^2\bar{a}_\lambda}{\partial\lambda\,\partial\beta}=\cos^2\beta\,\bar{a}_\beta=r^2\cos^2\beta\,\bar{a}^\beta. \qquad (23')$$

Ebenso erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial\bar{a}_\beta}{\partial\lambda}=\frac{\partial}{\partial\beta}(-\operatorname{tg}\beta\,\bar{a}_\lambda)$$
$$=\frac{1}{\cos^2\beta}\bar{a}_\lambda+\operatorname{tg}^2\beta\,\bar{a}_\lambda$$
$$=-\bar{a}_\lambda, \qquad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\bar{a}_\beta}{\partial\beta}=\frac{\partial}{\partial\lambda}(-r\,\bar{a}_r)$$
$$=-r\frac{\partial\bar{a}_r}{\partial_r}$$
$$=\bar{a}_\lambda, \qquad (24')$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial\bar{a}_\beta}{\partial\lambda}-\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\bar{a}_\beta}{\partial\beta}=-\bar{a}_\lambda+\bar{a}_\lambda, \qquad (25)$$

also für den Raum

$$\frac{\partial^2\bar{a}_\beta}{\partial\beta\,\partial\lambda}-\frac{\partial^2\bar{a}_\beta}{\partial\lambda\,\partial\beta}=0,$$

für die Berührungsebene

$$\frac{\partial^2\bar{a}_\beta}{\partial\beta\,\partial\lambda}-\frac{\partial^2\bar{a}_\beta}{\partial\beta\,\partial\lambda}=-\bar{a}_\lambda=-r^2\cos^2\beta\,\bar{a}^\lambda. \qquad (25')$$

Da bekanntlich die Vierzeigergrößen verschwinden, wenn die Zeiger des ersten oder zweiten Paares übereinstimmen, (was aus

$$(\beta\lambda,\ \lambda\beta)=-(\lambda\beta,\ \lambda\beta)$$

folgt), so ist für die Berührungsebene

$$\frac{\partial^2\bar{a}_\lambda}{\partial\beta\,\partial\lambda}-\frac{\partial^2\bar{a}_\lambda}{\partial\lambda\,\partial\beta}=(\lambda\beta,\ \lambda\beta)\,\bar{a}^\beta,$$
$$\frac{\partial^2\bar{a}_\beta}{\partial\beta\partial\lambda}-\frac{\partial^2\bar{a}_\beta}{\partial\lambda\,\partial\beta}=(\beta\lambda,\ \lambda\beta)\,\bar{a}^\lambda.$$

Durch Vergleich mit (23') und (24') erhalten wir übereinstimmend

$$(\lambda\beta,\ \lambda\beta)=r^2\cos^2\beta. \qquad (26)$$

Mit Hilfe dieser Größe läßt sich das Krümmungsmaß K des Gebietes X_2, hier der Kugelfläche, berechnen. Es ist[1])

$$K=\frac{(\lambda\beta,\ \lambda\beta)}{\bar{a}^{\lambda\beta}\,|\,\bar{a}^{\lambda\beta}}.$$

Aus (18) erhalten wir

$$\bar{a}^{\lambda\beta}=\frac{1}{r^2\cos\beta}e_{\lambda\beta},$$
$$\bar{a}^{\lambda\beta}\,|\,\bar{a}^{\lambda\beta}=\frac{1}{r^4\cos^2\beta}.$$

Also ergibt sich

$$K=\frac{1}{r^2},$$

wie es in der Tat zutrifft.

Es mögen noch die Feldableitungen der Längsvektoren $\bar{a}_\lambda$, $\bar{a}_\beta$ für die Kugelfläche gebildet werden, also bei Beschränkung auf die Berührungsebene. Einfacher als durch Anwendung der allgemeinen Formeln (11), (12) findet man sie in unserem einfachen Falle durch unmittelbare Rechnung. Mit Benützung der früheren Ausdrücke bekommt man

$$\left.\begin{aligned}
\nabla,\bar{a}_\lambda&=\left(\bar{a}^\lambda,\frac{\partial}{\partial\lambda}+\bar{a}^\beta,\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\bar{a}_\lambda\\
&=\bar{a}^\lambda,\ \bar{a}_\beta\sin\beta\cos\beta-\bar{a}^\beta,\ \bar{a}_\lambda\operatorname{tg}\beta,\\
\nabla,\bar{a}_\beta&=\left(\bar{a}^\lambda,\frac{\partial}{\partial\lambda}+\bar{a}^\beta,\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\bar{a}_\beta\\
&=-\bar{a}^\lambda,\ \bar{a}_\lambda\operatorname{tg}\beta,\\
\nabla,(\nabla,\bar{a}_\lambda)&=\left(\bar{a}^\lambda,\frac{\partial}{\partial\lambda}+\bar{a}^\beta,\frac{\partial}{\partial\beta}\right)(\bar{a}^\lambda,\ \bar{a}_\beta\sin\beta\\
&\qquad\cos\beta-\bar{a}^\beta,\ \bar{a}_\lambda\operatorname{tg}\beta)\\
&=-\bar{a}^\lambda,\ \bar{a}^\lambda,\ \bar{a}_\lambda(\sin^2\beta+\operatorname{tg}^2\beta)\\
&\quad+\bar{a}^\beta,(\bar{a}^\lambda,\ \bar{a}_\beta\cos^2\beta-\bar{a}^\beta,\ \bar{a}_\lambda),\\
\nabla,(\nabla,\bar{a}_\beta)&=\left(\bar{a}^\lambda,\frac{\partial}{\partial\lambda}+\bar{a}^\beta,\frac{\partial}{\partial\beta}\right)(-\bar{a}^\lambda,\bar{a}_\lambda,\operatorname{tg}\beta)\\
&=-\bar{a}^\lambda,(\bar{a}^\beta,\bar{a}_\lambda\operatorname{tg}^2\beta+\bar{a}^\lambda,\bar{a}_\beta\sin^2\beta)\\
&\quad-\bar{a}^\beta,\ \bar{a}^\lambda,\ \bar{a}_\lambda\frac{1}{\cos^2\beta}.
\end{aligned}\right\}(27)$$

---

1) Vgl. z. B. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsch von Lukat, Leipzig, 1899, S. 52.

Aus diesen Formeln folgt

$$\left.\begin{aligned}
\nabla \overset{1}{\underset{2}{\|}} (\nabla, \overline{a}_\lambda) &= \overline{a}^\lambda(\cos^2\beta - \sin^2\beta - \mathrm{tg}^2\beta), \\
\nabla \overset{1}{\underset{2}{\|}} (\nabla, \overline{a}_\beta) &= \overline{a}_\beta \, \mathrm{tg}^2\beta, \\
\nabla \wedge (\nabla, \overline{a}_\gamma) &= -\overline{a}^{\lambda\beta}, \; \overline{a}_\beta \cos^2\beta, \\
\nabla \wedge (\nabla, \overline{a}_\beta) &= -\overline{a}^{\lambda\beta}, \; \overline{a}_\lambda,
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

wo die letzten beiden Ausdrücke in Übereinstimmung stehen mit den Formeln (23′) und (25′) mit Rücksicht auf die Beziehung (6).

Wien, März 1919.

(Eingegangen 10. März 1919.)

Die sichtbare Strahlung des Brennfleckes von Röntgenröhren.

Von J. E. Lilienfeld.

(Mit Tafel IX.)

Es kann an jeder Röntgenröhre beobachtet werden, daß die Fläche, in welcher die Kathodenstrahlen auf die Antikathode auftreffen, ein Licht aussendet, dessen Helligkeit reichlich genügt, um eine ganz bestimmte Farbenempfindung hervorzurufen, und zwar diejenige eines bläulichen Graus. Diese sichtbare Strahlung hat mit der Wärmestrahlung des Antikathodenspiegels nichts Gemeinsames. Sie ist bereits bei ganz geringer spezifischer Belastung des Brennfleckes gut erkennbar, bei einer Belastung, deren Vielfaches erst den Brennfleck genügend erhitzen würde, um das Spiegelmaterial in ihm auf dunkle Rotglut zu bringen. Die Frage nach der Beschaffenheit dieses blaugrauen Lichtes ist meines Wissens nicht aufgeworfen worden. Das ist erklärlich, sofern es sich um Röntgenröhren der ursprünglichen Art handelt, also um gashaltige Röntgenröhren. Denn bei diesen leuchtet die Glaswand der Röhre in einer hellgrünen Fluoreszenz auf. Außerdem sendet der Gasinhalt auf dem Wege der Kathodenstrahlen, aber auch sonst sein Spektrum aus. Dadurch wird die Aufmerksamkeit von dem Leuchten auf der Antikathode abgewendet, und gleichzeitig seine Untersuchung erschwert, da alle die genannten Strahlungen sich übereinander lagern und erst auf Grund einer eigenen Analyse auseinandergehalten werden könnten.

Anders ist es bei den sogenannten Hochvakuum-Röntgenröhren, in welchen die Gasionisation keine Rolle spielt. In diesen Röhren fehlt[1])[2])[3]) sowohl die Fluoreszenz der Glaswand, als auch das Leuchten des Gasrestes, und so hat man grundsätzlich die Möglichkeit, das Aufleuchten am Brennfleck ungestört näher zu untersuchen. Freilich wirkt störend der von dem Glühdrahte kommende intensive Lichtschein. In der Tat befindet sich der Glühfaden bei einer dieser Röhren, nämlich bei der Coolidgeröhre, in der nächsten Nähe der Antikathode, und es ist nicht ausführbar, die Antikathode gegen sein Licht abzuschatten. Hingegen ist eine solche Abschattung sehr wohl möglich bei der von allem Anfang an von mir angegebenen Röhrenform[1]). Bei dieser ist die Lage der Glühlampe von keinem Einfluß auf die Entladung des eigentlichen Teiles der Röntgenröhre, da nicht die Windungen des Glühdrahtes, sondern die Bohrungswände der Kathode K (Fig. 1) Ausgangspunkt der

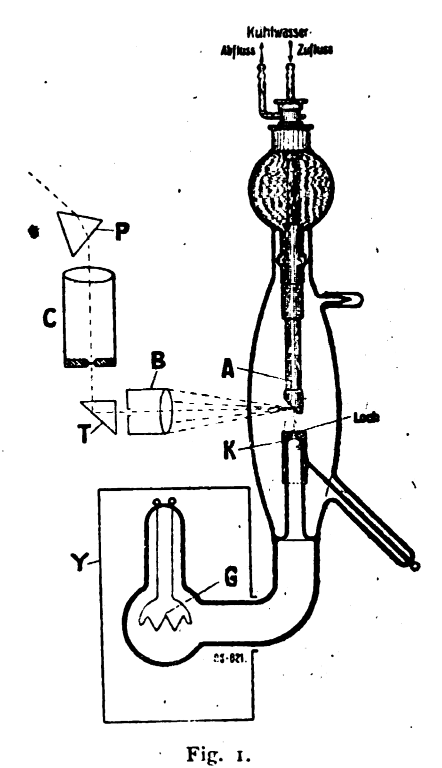


Fig. 1.

Kathodenstrahlen sind. Deshalb ist es möglich, die Glühlampe G in der aus der Figur ersichtlichen Weise seitlich anzubringen und sie durch den Lichtschutzkasten Y derartig abzuschirmen, daß so gut wie gar kein Licht von der Glühlampe auf die Antikathode A gelangt. Die gesamte Röntgenröhre einschließlich des Lichtschutzes Y wird in einen, in der Figur nicht wiedergegebenen, Bleischutz eingebaut, auf welchem als einzige Verbindung nach außen der Bleitubus B sitzt, der einerseits durch eine Bleiblende, auf der der Röhre zugekehrten Seite aber durch eine Linse von kurzer Brennweite abgeschlossen ist. Strahlen vom Brennfleck — sowohl Röntgenstrahlen, als Strahlen des sichtbaren Lichtes — können demnach nur durch

die Ausblendung in B austreten. Die sichtbaren Strahlen werden mit Hilfe des total reflektierenden Prismas T gespiegelt, so daß ein reelles Bild des Brennfleckes auf dem Spalte des Kollimatorrohres C entsteht. Röntgenstrahlen gelangen hingegen durch den Spalt nur in verschwindend geringer Menge, wie man unmittelbar sieht, nur diejenigen, die im total reflektierenden Prisma T gestreut werden. Das Kollimatorrohr ist Bestandteil eines äußerst lichtstarken, mit einem großen Rutherford-Prisma P versehenen Steinheilschen Spektrographen. Das Spektrum wird mit Hilfe eines Tele-Objektivs auf die photographische Platte entworfen. Die Platte ist in der üblichen Art vertikal verschiebbar, so daß eine größere Anzahl Spektren übereinander photographiert werden kann.

Die Abblendung gegen sichtbares Licht sowohl wie die gegen Röntgenstrahlen ist so vollkommen, daß eine einstündige Expositionszeit keinerlei Schwärzungen auf der Platte verursacht, wenn nicht das Spektrum des Brennfleckes auf sie projiziert wird. Geschieht das aber, so erhält man in einer halbstündigen bis einstündigen Expositionszeit ein vollständig durchgearbeitetes Spektrum des Brennfleckes, welcher in der Tafel IX wiedergegeben ist*). Das Spektrum verläuft in der Gestalt zweier paralleler, schmaler Streifen, entsprechend der Form des Brennfleckes, der nicht kreisförmig, sondern ringförmig ist, und zwar ein Ring von ziemlich geringer Breite. Gemäß der Einstellung entwirft nämlich die in B gefaßte Linse das reelle Bild dieses Brennfleckes derartig auf den Spalt, daß er sich mit dem größten Durchmesser der Brennfleck-Ellipse deckt. Die vom Spalte punktförmig ausgeschnittenen Teile des Ringes ergeben folglich nach erfolgter Brechung im Prisma P die beiden aus dem Bilde ersichtlichen schmalen horizontalen Striche.

Zur Orientierung ist unterhalb des Brennfleck-Spektrums das Spektrum einer leuchtenden Flamme, und weiter darunter das Spektrum des Heliums aufgenommen worden. Man erkennt ohne weiteres, daß das Spektrum der sichtbaren blaugrauen Strahlung des Brennfleckes ein typisches Temperaturspektrum ohne jegliche selektive Strahlung ist. Der Vergleich seiner Energieverteilung mit derjenigen einer Strahlung bekannter Temperatur — etwa des abgebildeten Flammenspektrums — soll demnächst quantitativ ausgeführt und einer Temperaturschätzung zugrunde gelegt werden. Jedenfalls erscheint aber schon auf den ersten Blick das Intensitätsmaximum des Brennfleckspektrums im Vergleich mit demjenigen der bekannten Temperaturspektren außerordentlich nach der kurzwelligen Seite zu verschoben. Freilich läßt sich aus dem Spektrogramm nicht entnehmen, bei welcher Wellenlänge das Intensitätsmaximum zu finden ist, offenbar wegen der Undurchlässigkeit des Glases der Röhrenwandung sowie der optischen Apparatur für kurze Wellenlängen. Es deutet aber die vom Auge blaugrau empfundene Farbe darauf hin, daß das Spektrum einer ungewöhnlich hohen Temperatur entspricht.

Die beschriebenen Tatsachen sind aus mehreren Gründen bemerkenswert. Nicht nur, weil auf den ersten Anblick die Annahme näher gelegen hätte, daß die blaugraue Strahlung des Brennfleckes selektiver Natur sein müsse, sondern auch wegen der hohen Temperatur, auf deren Bestehen die Strahlung hinweist. Es ist eingangs gesagt worden, daß das blaugraue Licht nicht einer Erhitzung des Materials der Antikathode entsprechen kann, da dieses erst bei einer sehr viel höheren Belastung in sichtbare Rotglut gerät. Demnach wird man als eigentlichen Träger der Temperaturbewegung eine Schicht anzusprechen haben, die dem Metall der Antikathode vorgelagert ist. Es wird dadurch nahegelegt, an den Elektronenschwarm zu denken, der eine jede Metallfläche umgibt und gewissermaßen — letzthin infolge der Untersuchungen von Rother[4]) — innerhalb des Bereiches der unmittelbaren Anschauung liegt. Im vorliegenden Falle wäre dieser Elektronenschwarm als durch die aufprallenden Kathodenstrahlen in lebhafte Temperaturbewegung versetzt vorzustellen.

Es trägt zur Klärung der Vorstellungen bei, sich zu vergegenwärtigen, daß Elektronen von großer Geschwindigkeit, nämlich reflektierte und sekundäre Kathodenstrahlen, vom Brennfleck nach allen Richtungen fortstreben. Bei den ursprünglichen, gashaltigen Röntgenröhren trifft ein Teil dieser Elektronen auf die Glaswandung der Röhre auf und verursacht hier die bekannte intensive gelbgrüne Fluoreszenz sowie die Erhitzung der Glaswandung. Bei den gasfreien Röntgenröhren werden aber sämtliche Elektronen im Brennfleck festgehalten, so daß die Fluoreszenz und Erhitzung der Glaswand ausbleibt[1, 2, 3]). Ich habe diese Erscheinung auf das Bestehen einer Doppelschicht im Brennfleck zurückgeführt, durch welche ein die Elektronen auf den Brennfleck zurücklenkendes, äußerst intensives Feld aufrechterhalten wird. Die hier erörterte Temperaturbewegung spielt sich offen-

*) Da aus äußeren Gründen die Versuche auf einige Zeit unterbrochen werden mußten, rotempfindliche Platten sowie Sensibilatoren aber zurzeit in Dresden nicht erhältlich waren, wurden die Aufnahmen auf handelsüblichen Schleußner-Platten gemacht. — Bei der Wiedergabe durch Autotypie sind die Schwärzungsverhältnisse der drei Spektren etwas gegeneinander verschoben worden, so daß das mittlere, der leuchtenden Flamme entsprechende Spektrum verhältnismäßig etwas geschwächt erscheint.

bar innerhalb dieser Doppelschicht ab, und man wird bei der Betrachtung des sichtbaren Spektrums des Brennflecks, besonders aber der Frage, weshalb die die Strahlung erregende Elektronenwolke sich vom Metall nicht loslöst, die Vorstellung einer solchen Doppelschicht nicht entbehren können.

Aus dem obigen Zusammenhang folgt aber ferner eine gewisse Möglichkeit, einen Teil des Röntgenspektrums gemeinsam mit der sichtbaren Strahlung des Brennflecks einheitlich aufzufassen als von einer Temperaturbewegung der obigen Art herrührend. Demgemäß würden diese gedachten Strahlungen verschiedene Gebiete eines sehr ausgedehnten, aber lückenlos zusammenhängenden Spektralbereichs darstellen. Die Wärmebewegung innerhalb der die Strahlung aussendenden Schicht und folglich die Beschaffenheit des Spektrums wäre dabei in einem erheblichen Maße nicht nur durch die Geschwindigkeit der aufprallenden Kathodenstrahlen, sondern auch durch ihre Dichte bestimmt. Nun habe ich bereits in einer früheren Arbeit[5]) die experimentell gefundene Tatsache beschrieben, daß — gleiche Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen vorausgesetzt — die Erhöhung ihrer Flächendichte im Brennfleck eine Verschiebung des Intensitätsmaximums der Röntgenstrahlung nach dem kurzwelligen Ende des Spektrums zu bedingt. Jener experimentelle Befund wird durch die hier angedeutete Auffassung dem physikalischen Verständnis näher gebracht. Bei dieser Gelegenheit sei wiederholt hervorgehoben, daß die seinerzeitigen Untersuchungen es nicht gestatteten, die Frage zu beantworten, ob die genannte Intensitätsverschiebung auch von einer Verschiebung der kürzesten Grenzwellenlänge begleitet sei. Aus der obigen Auffassung heraus wäre eine solche Verschiebung auch der Grenzwellenlänge insofern nicht undenkbar, als die erörterte Temperaturbewegung auf Schwingungen anderer als mit den Atomen der Antikathode verkoppelter Elektronen hinweist[6]).

Die beschriebenen Versuche sind im Laboratorium der Firma Koch & Sterzel, Dresden, ausgeführt worden.

Literaturzusammenstellung.

1) Lilienfeld, Berichte d. math.-phys. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig **66**, 76—79, 1914.
2) Lilienfeld, Ebenda **23**, 45—56, 1917.
3) Lilienfeld, Fortschritte a. d. Gebiete d. Röntgenstrahlen **23**, 383—385, 1915.
4) Rother, Ann. d. Phys. **44**, 1238—1272, 1914.
5) Lilienfeld, obige Berichte **69**, 226—261, 1917.
6) Lilienfeld, diese Ztschr. **19**, 263—269 u. 514—516, 1918.

Leipzig, Physikal. Institut der Universität, 16. April 1919.

(Eingegangen 24. April 1919.)

Objektive Demonstration der Eigenschaften trüber Medien an leuchtenden Kohlenstoffflammen.

Von Hermann Senftleben und Elisabeth Benedict.

Im Laufe von Untersuchungen, die wir über die optischen Eigenschaften leuchtender Kohlenstoffflammen ausführten, wurden wir zu der Annahme geführt, daß diese Flammen, in denen Kohlenstoff in fein verteiltem Zustande die lichtaussendenden Partikel bildet, als trübes Medium aufzufassen seien und infolgedessen auch alle charakteristischen Eigenschaften eines solchen zeigen müßten. Zur experimentellen Prüfung dieser Annahme angestellte Versuche zeigten, daß bei genügend intensiver Bestrahlung der Flamme abgebeugtes Licht deutlich wahrnehmbar war, das auch, wie es der eben ausgesprochenen Ansicht entspricht, bestimmte von Richtung zum einfallenden Strahl und Wellenlänge abhängige Intensitäts- und Polarisationseigenschaften aufwies. Diese Erscheinungen, die den Gegenstand eingehender experimenteller und theoretischer Untersuchungen[1]) über die Beugung des Lichtes an den Kohlenstoffteilchen leuchtender Flammen bilden, lassen sich mit verhältnismäßig einfachen Mitteln einem größeren Auditorium objektiv vorführen.

Von leuchtenden Kohlenstofflammen ist für diesen Zweck die Flamme der Hefnerkerze infolge ihrer Konstanz und leichten Herstellbarkeit am geeignetsten; sie muß um das nötige ganz ruhige Brennen zu erzielen, mit nicht zu eng gestellten Glasschutzwänden umgeben sein. Als Lichtquelle zur Bestrahlung erwies sich, um die Beugungserscheinung deutlich sichtbar zu machen, allein eine Bogenlampe als genügend intensiv. Das Licht dieser Bogenlampe, die, um störende Helligkeit im Raume zu vermeiden, in einem möglichst dicht schließenden Gehäuse steht, wird durch geeignet gewählte Linsen mit kurzer Brennweite in einem sehr engen Strahlenbündel auf den hell leuchtendsten Teil der Flamme konzentriert, in der dann der Strahlengang durch die Beugung an den Kohlenstoffteilchen bläulich weiß leuchtend sichtbar wird, eine Erscheinung, die sich, bei nicht zu starker Vergrößerung (nicht über 15 fach) in aller Deutlichkeit auf einem Schirm abbilden läßt (am geeignetsten unter einem Winkel von 90° zum beleuchtenden Strahl). Durch Einschaltung eines nicht zu dunklen blauen bzw. roten Farbfilters zwischen Flamme und Schirm läßt sich zeigen, daß die Intensität des abgebeugten Lichtes nach kürzeren Wellen hin

1) Vgl. eine demnächst in den Annalen der Physik erscheinende Arbeit der Verfasser.



erheblich zunimmt[1]). Die Polarisationseigenschaften dieses zerstreuten Lichtes lassen sich durch ein zwischen Flamme und Schirm eingeschaltetes Nicolsches Prisma sehr deutlich sichtbar machen. Steht die Schwingungsebene des elektrischen Vektors des durch den Nicol gehenden Lichtes senkrecht zur Horizontalebene, so ist das abgebeugte Licht in voller Deutlichkeit sichtbar, während es bei Parallelstellung fast völlig verschwindet. Kann man bei dieser Nicolstellung durch Drehen der Bogenlampe den Winkel zwischen einfallendem Strahl und Projektionsrichtung verändern, so zeigt ein Wiederauftreten des abgebeugten Lichtes bei Winkeln unter- und oberhalb von 90° ein Abnehmen des Polarisationsgrades an, der bei ca 90° sein Maximum mit 85 Proz. erreicht. Um die Deutlichkeit der Sichtbarmachung des zerstreuten Lichtes zu erhöhen, ist es zweckmäßig von vornherein einen Nicol, dessen Schwingungsebene parallel der des abgebeugten Lichtes steht, einzuschalten, da hierdurch das letztere fast gar nicht geschwächt, dagegen die Eigenhelligkeit der Flamme auf die Hälfte herabgesetzt wird.

1) Der sehr stark hervortretende Effekt beruht z. T. auch auf der spektralen Energieverteilung der Flamme selbst.

Breslau, im Februar 1919. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 10. März 1919.)

Beugungsbilder einiger Fälle Fraunhoferscher Partiegitter.

Von Ad. Lindemann.

(Mit Tafel X.)

Partiegitter im Sinne Fraunhofers sind Gitter, bei denen der Abstand der Gitterfurchen nicht stets derselbe ist, sondern periodisch wechselt, und zwar so, daß eine Anzahl Furchen zusammen eine „Partie" bilden, welche dann periodisch wiederkehrt. In neueren Arbeiten werden Gitter dieser Art meist als Gitter mit mehrfach periodischer Teilung bezeichnet. Die Theorie derselben ist bereits von Fraunhofer[1]) und Schwerd[2]) behandelt worden, eine ausführliche Darstellung findet sich in Kaysers Handbuch der Spektroskopie[3]). Aus der Theorie folgt, daß ein Partiegitter ein Beugungsbild erzeugt, das sich von dem, welches man durch ein Gitter erhalten würde, in dem die Partien durch Einzelspalte ersetzt sind, dadurch unterscheidet, daß bei ihm die Intensität der einzelnen Beugungsspektren wechselt entsprechend der Intensität des von der einzelnen Partie in die betreffende Richtung abgebeugten Lichtes. Geht man umgekehrt vom Beugungsbilde der einzelnen Partie aus, so erhält man das des Partiegitters, indem man aus ersterem Stücke ausschneidet durch schmale Fenster, die an den Stellen liegen, wohin die Beugungsspektren des Gitters fallen würden, falls in ihm statt der Partien Einzelspalte vorhanden wären.

1) Gilberts Ann. d. Phys. 74, 370, 1823.
2) F. M. Schwerd, Die Beugungserscheinungen, Mannheim 1835, S. 97.
3) H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie, Band I, S. 434.

Da experimentelle Untersuchungen mit derartigen Gittern fast gar nicht vorliegen, scheinen mir die wiedergegebenen Beugungsbilder von Interesse. Es sind solche Gitter behandelt worden, bei denen periodische Ausfallserscheinungen auftreten, so daß jedes Gitter sein charakteristisches Beugungsbild erhält. Die Gitter wurden mit Tusche auf Papier gezeichnet und in starker Verkleinerung photographiert, meist auf Diapositivplatten wegen des feineren Korns derselben. Das erzielte Negativ diente sodann als Beugungsgitter. Die Beugungsbilder wurden auf gewöhnliche orthochromatische Platten photographiert in homogenem grünem Lichte, das durch spektrale Zerlegung des Lichtes einer kleinen Bogenlampe erhalten wurde. Bei Verwendung blauen Lichtes ist die Einstellung schwieriger, auch stört es, daß die Beugungsstreifen näher aneinanderrücken. Als Objektiv diente ein Brillenglas von 50 cm Brennweite, dessen mangelhafte Optik unter den vorliegenden Verhältnissen wenig stört.

In Fig. 1[1]) und 2 sind die Beugungsbilder wiedergegeben, welche durch Gitter erhalten wurden, bei denen die Partie aus 2 Linien bestand, deren Abstand $1/4$ bzw. $1/6$ des Abstandes korrespondierender Linien benachbarter Partien betrug. Man übersieht leicht, daß in ersterem Falle die Spektra 2., 6., 10.... Ordnung, in letzterem die 3., 9., 15.... Ordnung ausfallen müssen, da für diese der Gangunterschied der das Linienpaar durchsetzenden Strahlen ein ungerades Vielfache von $\lambda/2$ beträgt. Entsprechende Gitter würden sich erhalten lassen für einen Abstand der die Partie bildenden Linien gleich $1/8$, $1/10$... des Abstandes korrespondierender Linien benachbarter Partien. Die Dispersion solcher Gitter kann nur klein sein, wenn

1) Fig. 1 wurde für die Arbeit von W. Hillers: Die Interferenzerscheinungen der Röntgenstrahlen; der bindende Beweis ihrer Wellennatur und zugleich ein Erfolg der Atomistik, Ztschr. für math. u. naturw. Unterricht 45, 438, 1914 zur Verfügung gestellt.



die Partie noch aus 2 getrennten Linien bestehen soll. Das Arbeiten mit denselben ist dementsprechend erheblich erschwert[1]).

Die in den Fig. 3, 5 und 7 dargestellten Beugungsbilder wurden erhalten durch die in den Fig. 4, 6 und 8 angedeuteten Gitter, die als Kombinationen der vorerwähnten Gitter aufgefaßt werden können. Im Gitter Fig. 4 lassen sich die Linien der Partie paarweise so ordnen, daß der Zwischenraum eines solchen Paares $^1/_4$ oder $^1/_6$ des Abstandes korrespondierender Linien benachbarter Partien beträgt, im Beugungsbild Fig. 3 sind mithin die Ausfallserscheinungen der Fig. 1 und 2 kombiniert. Im Gitter Fig. 6 betragen die entsprechenden Abstände $^1/_4$ und $^1/_8$, während sich die 8 Linien der Partie des Gitters Fig. 8 paarweise so ordnen lassen, daß der gegenseitige Abstand eines solchen Paares $^1/_4$, $^1/_6$ oder $^1/_8$ des Abstandes korrespondierender Linien benachbarter Partien beträgt, so daß hier 3 Ausfallserscheinungen sich addieren.

Die wechselnde Stärke der im Beugungsbilde auftretenden Linien entspricht den eingangs erwähnten Anschauungen. In den Kurven Fig. 4, 6 und 8 ist die Intensität des Lichtes für eine Halbperiode des Beugungsbildes der einzelnen Partie wiedergegeben. Sie wurde berechnet unter der Annahme, daß die Spalte als punkt- bzw. linienförmig angenommen werden dürfen. Der daneben gesetzte Ausdruck für J gibt das konstruierte Quadrat der Amplitude unter Fortlassung konstanter Faktoren als Funktion von φ, dem Phasenunterschied zweier Strahlen, welche zwei um die Strecke a voneinander entfernte Gitterfurchen passiert haben. Die Ordinaten, welche den auftretenden Beugungsbildern entsprechen, sind ausgezogen, ausfallende Linien durch kleine Kreise bezeichnet[2]). Der der Kurve entsprechende Abschnitt ist in den Beugungsbildern durch darunter gesetzte vertikale Striche gekennzeichnet.

Die Fig. 9 und 10 dürften nach dem Gesagten ohne weiteres verständlich sein. Hier kann erst auf Grund der Kurve für das Beugungsbild dreier gleicher äquidistanter Spalte der Abstand korrespondierender Linien benachbarter Partien so bemessen werden, daß periodische Ausfallserscheinungen auftreten.

Herrn Professor Konen in Münster und Herrn Professor Anderson in Baltimore spreche ich auch an dieser Stelle für ihre liebenswürdige briefliche Auskunft über den Gegenstand meinen ergebensten Dank aus.

Die Untersuchungen wurden zu Anfang des Jahres 1914 ausgeführt, ihre Veröffentlichung konnte wegen militärischer Inanspruchnahme des Verfassers bisher nicht erfolgen.

Hamburg, Februar 1919.

(Eingegangen 25. Februar 1919.)

1) Vgl. Kaysers Handbuch der Spektroskopie I, S. 435 und Rayleigh, Investigations in Optics usw., Phil. Mag. (5) 9, 55, 1880.

2) In der Reproduktion meist als Punkte wiedergegeben.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Zürich Dr. F. Tank für Physikalische Chemie, an der Universität Frankfurt a/M. Professor Dr. Paul Epstein (bisher in Straßburg) für reine Mathematik und mathematischen Unterricht.

Ernannt: Der Abteilungsvorsteher am Allgemeinen Krankenhaus St. Georg in Hamburg Dr. A. Bornstein zum ord. Professor der Physiologischen Chemie an der Universität Hamburg, der Privatdozent für Chemie an der Universität Frankfurt a/M. Dr. Fritz Mayer zum a. o. Professor ebendaselbst, der Privatdozent an der Universität Gießen Professor Dr. Albert Peppler zum a. o. Professor der Meteorologie an der Technischen Hochschule Karlsruhe, der a. o. Professor an der Universität München Dr. Peter Paul Koch zum ord. Professor der Experimentalphysik und Direktor des Physikalischen Staatslaboratoriums an der Universität Hamburg, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Darmstadt Professor Dr. Viktor Blaeß zum a. o. Professor für Mechanik und zum ord. Honorarprofessor daselbst, der Privatdozent an der Universität Straßburg Professor Dr. Karl Wirtz zum Observator an der Universitätssternwarte in Kiel.

Berufen: Der a. o. Professor an der Universität Berlin Dr. Karl Neuberg zum ord. Professor der Chemie an der Landwirtschaftlichen Hochschule Bonn (an Stelle des in den Ruhestand versetzten Direktors Geh. Regierungsrat Professor Dr. Ulrich Kreusler).

Verliehen: Dem o. ö. Professor der Chemie an der Tierärztlichen Hochschule Wien Dr. Theodor Panzer der Titel Hofrat, den Privatdozenten für Physik an der Wiener Universität Dr. Viktor Heß und Dr. Friedrich Kohlrausch der Titel a. o. Universitätsprofessor.

Ehrungen: Die Akad. d. Wissensch. in Wien hat bei den diesjährigen Preiszuerkennungen verliehen: den Haitinger-Preis (3000 K.) zu gleichen Teilen an Prof. Dr. Bamberger (Wien) und Dr. Zellner (Wien), den Lieben-Preis (2500 K.) an a. o. Professor Dr. Viktor Heß (Wien).

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der Physik und Maschinenkunde an der Landwirtschaftlichen Akademie Bonn Dr. Hans Hollback.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Bonn Geh. Reg.-Rat Dr. Heinrich Kayser, der Observator bei der Erdbebenwarte der Universität Leipzig Bergrat Professor Dr. Franz Etzold, der Professor der chemischen Technologie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Geheimer Rat Dr. Hans Bunte.

Gestorben: Der frühere Leiter des Observatoriums auf dem Montblanc und spätere Kriegsminister der tschechoslowakischen Republik Dr. Stefanik (tödlich abgestürzt), der ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Darmstadt Geh. Hofrat Dr. Wilhelm Staedel, der ord. Professor für Elektromaschinenbau an der Technischen Hochschule Dresden Dr. Wilhelm Kübler.

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1919.

Universität Münster.

Schmidt: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Seminar, 14 tägig, 2 *g*; Repetitorium der Physik für Mediziner und Pharmazeuten, 2; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Szivessy), 3 oder 6, für Fortgeschrittene (mit Konen), tägl. — **Konen**: Einführung in die theoretische Physik, 4; Seminar für theoretische Physik, 2 *g*; Übungen in Demonstrationsversuchen und in der Anfertigung einfacher Apparate, 3 *g*. — **Szivessy**: Einführung in das physikalische Praktikum, 2; Vektorenrechnung und ihre Anwendung in der Physik, 2. —

Schenck: Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 6; Chemisches Kolloquium (mit Ley), 1 *g*; Chemisches Praktikum (mit Ley), tägl. außer Sonnabend; Chemische Übungen für Mediziner (mit Kaßner und Ley), 4. — **Ley**: Physikalische Chemie II, 3. — **Ott**: Analytische Chemie I: Qualitative Analyse, 2, II: Quantitative Analyse, 1. — **Glund**: Chemie der Kohle, 1. — **Kaßner**: Über Gifte und deren Nachweis in Untersuchungsobjekten, 1 *g*; Organische Chemie mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie und Medizin, 4; Kolloquium über pharmazeutische Präparate und die Gegenstände des deutschen Arzneibuchs, 1; Ausgewählte Kapitel der chemischen Technologie mit besonderer Berücksichtigung der Zellulose- und Papierfabrikation und der Zündrequisiten, 1; Pharmazeutisch-chemische, maßanalytische und toxikologische Übungen im Laboratorium, Darstellung chemischer Präparate, Anleitung zur Bearbeitung wissenschaftlicher oder technischer Aufgaben, tägl. außer Sonnabend. — **Bömer**: Allgemeine Nahrungsmittelchemie und -analyse, 2; Chemie und Analyse der Gebrauchsgegenstände, 1 *g*. — **König**: Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Chemie, für Fortgeschrittene (mit Bömer), tägl. —

v. Lilienthal: Differential- und Integralrechnung I, 4; Funktionentheorie, 4; Übungen des mathematischen Oberseminars, 2 *g*. — **Killing**: Analytische Geometrie I, 4, Übungen, 1 *g*; Analytische Mechanik II, 4; Übungen des mathematischen Unterseminars, 2 *g*. — **Geilen**: Höhere Algebra, 3. — **Schewior**: Technische Mechanik I: Graphische Statik, 2, Übungen, 1 *g*, II: Festigkeitslehre, 2, Übungen, 1 *g*; Geodätisches Praktikum, 3; Instrumente der Geodäsie, Topographie und geographischen Ortsbestimmung, 1. — **Plaßmann**: Sphärische Trigonometrie und sphärische Astronomie, 3; Übungen im Beobachten und Rechnen, nach Verabredung *g*; Über den Mond, 2 *g*. —

Universität Rostock.

Heydweiller: Experimentalphysik: Allgemeine Physik, Akustik, Wärme, 5; Physikalische Übungen, 4; Wissenschaftlich-physikalische Arbeiten, tägl.; Physikalisches Seminar (mit Weber), 1. — **Weber**: Analytische Mechanik, 3; Thermodynamik, 2; Übungen zur theoretischen Physik, 1; Vektoranalysis, 1. —

Pfeiffer: Anorganische Chemie, 5; Eiweißchemie, 1; Großes chemisches Praktikum: Analytische und anorganisch-präparative Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Leitung wissenschaftlicher Arbeiten, tägl.; Kleines chemisches Praktikum, halbtägig; Übungen für Mediziner (mit Stoermer), 3, für Nahrungsmittelchemiker (mit Klosmann), halbtägig. — **Stoermer**: Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie, 3; Gerichtliche Chemie, 2; Chemie der Kohlehydrate, 1; Übungen in der organischen Abteilung des chemischen Laboratoriums: a) Großes chemisches Praktikum, b) Leitung wissenschaftlicher Arbeiten, tägl. — **Kümmell**: Elektrochemie, 2. —

Staude: Differential- und Integralrechnung, 4; Analytische Geometrie des Raumes, 4; Mathematisches Seminar, 2. —

Technische Hochschule Stuttgart.

v. Koch: Experimentalphysik: Elektromagnetismus, Induktion, Akustik, Optik, Elektrooptik, 4; Theoretische Physik, mit Einleitung: Mathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik, 2; Physikalisches Praktikum, halbtägig, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu physikalisch-wissenschaftlichen Arbeiten, täglich; Handfertigkeitspraktikum in Physik, für Vorgeschrittene, 2—3; Physikalisches Kolloquium, 2; Meteorologie, ausgewählte Kapitel, 1. — **Veesenmeyer**: Grundlagen der Elektrotechnik: Konstruktionen und Anlagen, 4; Dynamobau I, 1, II, 1; Elektrotechnische Konstruktionselemente (mit Heidenreich), Übungen, 4; Elektrotechnische Maschinenkonstruktionen (mit Heidenreich), Übungen I, 4, II, 8; Elektrische Betriebe, I, 1, II, 1; Einführung in das Projektieren elektrischer Anlagen (mit Heidenreich), Übungen, 4; Projektieren elektrischer Anlagen (mit Heidenreich), Übungen, I, 4, II, 8. — **Emde**: Gleichstromtechnik I, 2, II, 2, Übungen (mit Liebert), I, 8, II, 4. — **N. N.**: Elektrische Meßinstrumente und Meßmethoden I, 1, II, 1, Übungen (mit Streich und Frey), I, 8, II, 4; Schwachstromtechnik II, 2, Übungen (mit Streich und Frey), 4; Drahtlose Telegraphie, 2, Übungen (mit Streich und Frey), 4. —

Gutbier: Technische Chemie I: Anorganisch-chemische Großindustrie, 4; Übungen im Laboratorium für anorganische Chemie und anorganisch-chemische Technologie, tägl. außer Sonnabend. — **Küster**: Organische Experimentalchemie, 5; Pharmazeutische Chemie, Organischer Teil, 2; Toxikologie, 1; Übungen im Laboratorium für organische Chemie, organisch-chemische Technologie und Pharmazie (mit Herrmann), tägl. außer Sonnabend. — **Grube**: Physikalische Chemie, 3; Metallurgie, mit Ausschluß der Eisenhüttenkunde, 1; Übungen im Laboratorium für physikalische Chemie und Elektrochemie (mit Dulk), tägl. außer Sonnabend. — **Kauffmann**: Farbenchemie, unter besonderem Eingehen auf die Chemie mehrkerniger Benzolderivate, 2; Chemische Tagesfragen aus Wissenschaft und Technik, mit Exkursionen, 1. — **Schmidt**: Analytische Chemie, 3; Chemisches Seminar, 2. — **Bauer**: Harnanalyse mit Übungen, 1; Spezielle organische Chemie II, 2. —

Haller: Trigonometrische Übungen, 2. — **Kutta**: Höhere Mathematik II, 4, Übungen, 3, III, 4, Übungen, 2; Mathematisches Seminar, 2. — **Wölffing**: Funktionentheorie II: Elliptische Funktionen, 3; Variationsrechnung, 1 *g*. — **Mehmke**: Darstellende Geometrie, I, 3, Übungen, 4, II, 1, Übungen, 2; Analytische Mechanik, 3, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 1—2; Perspektive, 2—3. — **Kommerell**: Mathematische Geographie, 2: Einführung in die höhere Mathematik, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der Flächentheorie, 3, Übungen, 1; Synthetische Geometrie, 3, Übungen, 1. — **Kriemler**: Technische Mechanik: Dynamik und Hydraulik, 6, Übungen, 6; Statik, einschließl. der Elemente der graphischen Statik, Übungen, 2. — **v. Hammer**: Praktische Geometrie (Vermessungskunde) I, 4, Übungen, 4, II, 5, Messungsübungen, 4, Ausarbeitung der Messungen, 2; Geodätische Schlußübungen, 12 Tage; Ausgleichungsrechnung: Methode der kleinsten Quadrate, 2; Direkte Zeit- und geographische Ortsbestimmung, Übungen, 1; Übungen in praktischer Geometrie (mit Heer), 8. — **Heer**: Geodätische Übungen, 3. — **Köstlin**: Aerostatik und Aerodynamik, 2. — **Baumann**: Flugzeuge und ihre konstruktiven Einzelheiten, 2; Ausführliche Behandlung wichtiger Fragen des Kraftfahrzeugbaues, 2; Motoren für Land-, Wasser- und Luftfahrzeuge, 2; Maschinenkonstruktionen auf dem Gebiet des Luft- und Kraftfahrwesens, 4. —

Universität Tübingen.

Paschen: Experimentalphysik: Mechanik, Optik, 5; Physikalische Übungen für Anfänger, 4, Selbständige



physikalische Untersuchungen, ganztägig. — **Füchtbauer:** Theorie des Lichtes, mit Übungen, 4. —

Wislicenus: Experimentalchemie II: Organische Chemie, 5, Ergänzungen, 1 *g*; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium für Anfänger und Fortgeschrittene, tägl., Voll- und Halbpraktikum, Abgekürztes Praktikum für Mathematiker und Forststudierende (mit Bülow), 2 oder 3 Halbtage, a) Analytisch-chemische Übungen (mit Bülow und Weinland), b) Chemisch-pharmazeutische Übungen (mit Weinland), c) Organisch-präparative Arbeiten (mit Kliegl), d) Physikalisch-chemische Übungen (mit Magnus), 1 Vormittag, e) Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Untersuchungen (mit v. Bülow, Weinland, Kliegl und Magnus). — **Thierfelder:** Physiologische Chemie der Kohlehydrate, Fette und Eiweißstoffe, 2; Praktisch-chemische Übungen für Anfänger I: Qualitative Analyse, 6, II: Quantitative Analyse und physiologisch-chemische Übungen, 6; Physiologisch-chemische Arbeiten für Geübtere, tägl. — **Bülow:** Analytische Chemie II, mit besonderer Berücksichtigung der praktischen Arbeiten im chemischen Laboratorium, $2^1/_4$; Die heterozyklischen Verbindungen, ihre Abkömmlinge und Beziehungen zur chemischen Industrie, 2. — **Weinland:** Chemie der Arzneistoffe, organischer Teil, $2^1/_4$; Maßanalyse, Ionentheorie, $^3/_4$; Chemie der Komplexverbindungen, $1^3/_4$. — **Kliegl:** Zyklische Verbindungen I: Einkernige Benzolderivate, 3. — **Magnus:** Physikalisch-chemisches Kolloquium, 1. — **Brigl:** Die Fermente, 1. —

Maurer: Höhere Analysis II, 4; Höhere Algebra, 3; Übungen im mathematischen Seminar, 2. — **Blaschke:** Analysis I: Differentialrechnung, 4; Flächentheorie, 4; Übungen im mathematischen Seminar, 2. — **König:** Analytische Geometrie des Raumes, 4; Ausgewählte Kapitel aus der analytischen und synthetischen Geometrie, 2. — **Happel:** Niedere Geodäsie: Praktische Geometrie, mit Übungen im Gelände, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie, 2. — **Rosenberg:** Astrophysik, 2, Übungen, 1; Leitung selbständiger astronomischer und astrophysikalischer Arbeiten für Fortgeschrittene, tägl. —

Universität Wien.

Lecher: Experimentalphysik II, 5; Anleitung für wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **Franz Exner:** Physikalisches Praktikum, 6; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl. — **Jäger:** Akustik, 5; Ausgewählte Kapitel der Mechanik, 1 *g*; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten (mit Meyer und Ehrenhaft), 1 *g*. — **Meyer:** Radioaktive Substanzen, 2; Anleitung zu radioaktiven Messungen (mit Heß), 3. — **Ehrenhaft:** Grundzüge der Optik und Strahlungstheorie, 5. — **Haschek:** Über die Grenzen der physikalischen Beobachtungen, 1. — **Przibram:** Die experimentellen Grundlagen der Atomistik (Fortsetzung), 1. — **Kohl:** Grundzüge der Potentialtheorie, 2. — **Nabl:** Theorie der Bildentstehung im Mikroskop, 2. — **Heß:** Über Wechselströme und elektrische Schwingungen, 2. — **Kohlrausch:** Physikalisches Praktikum, 6. — **Schrödinger:** Theorie ausgewählter Versuche des Meßpraktikums, 2. — **Sirk:** Einführung in die kinetische Gastheorie, 2, Übungen, 1. — **Flamm:** Dispersionstheorie, 1. — **Kottler:** Probleme der Beugung, 2. — **Felix v. Exner:** Ausgewählte Kapitel aus der Geophysik II, 3. — **Defant:** Klimatologie der österr. Alpenländer, 1. — **Schmidt:** Erdbebenapparate und ihre Aufzeichnungen, 1. — **Wagner:** Aerologische Meßmethoden, 1. — **Hinterberger:** Photographisches Praktikum, 6 Wochen; Praktischer Kurs über Mikrophotographie, 20. —

Wegscheider: Theoretische und physikalische Chemie II, 5; Chemische Übungen, tägl. außer Sonnabend; Übungen in der chemischen Analyse, tägl. außer Sonnabend; Arbeiten im I. chemischen Laboratorium für Vorgeschrittene, tägl.; Besprechung neuerer physikochemischer Arbeiten (mit Billiter), 1 *g*. — **Schlenk:** Chemie II: Organische Chemie, 5; Chemische Übungen für Anfänger und Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen, tägl. — **Herzig:** Pharmazeutische Chemie, 5, Übungen, tägl. außer Sonnabend. — **Pollak:** Chemische Technologie: Anorganische Großindustrie, 3; Übungen über ausgewählte Kapitel der pharmazeutischen Chemie, 4. — **Franke:** Anleitung zur Ausführung chemisch-wissenschaftlicher Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Analytische Chemie II: Maß- und Gewichtsanalyse, 3. — **M. Kohn:** Besprechung neuerer chemischer Literatur, 1. — **Vortmann:** Chemische Übungen für Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend. — **Abel:** Chemische Kinetik, 2. — **Moßler:** Die Prüfungsmethoden der Pharm. Austr. VIII, 1. — **Kailan:** Ausgewählte Kapitel aus der physikalischen Chemie, 1. — **Zerner:** Probleme der organischen Chemie, 1. — **Klemenc:** Repetitorium der physikalischen Chemie, 2. — **Späth:** Repetitorium der analytischen Chemie, 2. — **Philippi:** Die Farbstoffe des tierischen und pflanzlichen Organismus, 1 *g*. —

v. Escherich: Bestimmte Integrale, 5; Elementarmathematik, 1 *g*; Proseminar für Mathematik, 1 *g*; Seminar für Mathematik, 2 *g*. — **Wirtinger:** Ausgewählte Kapitel der Funktionentheorie, 5; Elementarmathematik mit Übungen, 1 *g*; Mathematisches Seminar, 2 *g*; Mathematisches Proseminar, 1 *g*. — **Eckhart:** Seminar: Kurs über darstellende Geometrie, 3 *g*. — **Furtwängler:** Differential- und Integralrechnung II, 5, Übungen, 1 *g*; Proseminar, 1 *g*; Seminar, 2 *g*. — **Oppenheim:** Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3; Höhere Geodäsie, 3; Theorie der Kometen, 2. — **G. Kohn:** Synthetische Geometrie (Fortsetzung), 4, Übungen, 1 *g*; Invariantentheorie, 2. — **Tauber:** Versicherungsmathematik II: Öffentliche und private Versicherung, 5, Übungen, $1^1/_2$ *g*. — **Blaschke:** Einführung in die mathematische Statistik II, 3. — **v. Schrutka:** Partielle Differentialgleichungen: Elementare Lösungsmethoden, mit physikalischen Anwendungen, 3. — **Roth:** Differentialgeometrie, (Fortsetzung), 2; Ebene algebraische Kurven, 2. — **Radon:** Affine Differentialgeometrie, 2. — **v. Hepperger:** Praktische Astronomie, 4. —

Technische Hochschule Wien.

N. N.: Physik, 3; Ausgewählte Kapitel der Physik, 2. — **Mache:** Physik, 5 und 4. — **Flamm:** Die Feinstruktur der Materie, 1. — **Sahulka:** Elektrotechnik, $4^1/_2$; Elektrotechnische Meßkunde, 2; Elektrotechnik, Praktische Übungen I (mit Reithoffer), 4. — **Reithoffer:** Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2; Übungen zu Elektrische Schwingungen und Wellen, 4; Wechselstromtechnik, 2. — **Stehr:** Dynamobau, 3, Konstruktionsübungen, 6. — **R. Moser:** Kommutatormotoren für Ein- und Mehrphasen-Wechselstrom, 2. — **N. N.:** Elektrotechnik: Praktische Übungen II, 4. — **Hochenegg:** Bau und Betrieb elektrischer Anlagen einschließlich Stromverteilung, 3, Übungen, 4. — **Jüllig:** Elektrische Telegraphie und Eisenbahn-Signalwesen, 2. — **Zelisko:** Die Fernsprechtechnik, 2; Die Telegraphentechnik, 1. —

N. N.: Organische Chemie I, 5. — **Bamberger:** Übungen im Laboratorium der allgemeinen Experimentalchemie, tägl.; Enzyklopädie der technischen Chemie, 3; Praktische Übungen in der Ausführung technischer Proben, 3. — **Vortmann:** Analytische Chemie, 4, Übungen, für Anfänger, tägl. außer Sonnabend, für Vorgeschrittene, tägl. — **L. Moser:** Die technische Analyse anorganischer Stoffe, 2. — **Weißenberger:** Die Isotopie der Elemente, 2. — **v. Jüptner:** Theoretische und physikalische Chemie I, $1^1/_2$, II, 2, Übungen, 4; Chemische Technologie anorganischer Stoffe, 5, Übungen, 20. — **Praetorius:** Thermodynamik mit Einschluß der neueren Forschungen, 1. — **Zikes:** Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Technische Mykologie, 2, Übungen, 2. — **Böck:** Chemie der synthetischen organischen Arzneimittel, 2;

Chemie der Zellulose, 1. — **Suida**: Die wichtigsten Kapitel aus der Chemie der aromatischen Verbindungen, 2; Chemische Technologie organischer Stoffe, 5, Übungen, tägl. außer Sonnabend. — **Paweck**: Technische Elektrochemie, 3. — **Eder**: Photochemie und angewandte Photographie, 1; Photographisches Praktikum, 4. — **Abel**: Ausgewählte Kapitel aus der physikalischen Chemie, 2. — **Strache**: Beleuchtungsindustrie und Technologie der Heizgase, 2, Übungen, 4. — **Klimont**: Chemische Technologie der Mineralöle, 1; Technische Chemie der Fette, 1. — **Erban**: Chemische Textilindustrie II, 1. — **Oettinger**: Die in der Industrie verwendeten textilen Fasern, 2. — **Rud**: Neuere Verfahren der anorganisch-chemischen Großindustrie, 2; Wirtschaftliche Bedeutung der chemischen Industrie, 1. — **Nußbaum**: Technische Elektrolyse der Alkalichloride, 1. — **Dolch**: Die allgemein-wirtschaftliche Bedeutung der Kohlevergasung, 1. —

Zsigmondy: Mathematik I, 4, Übungen, 1. — **Rothe**: Mathematik I, 5; Einführung in die Funktionentheorie, 2. — **Czuber**: Mathematik II. 4, Übungen, 1. — **Suppantschitsch**: Elemente der höheren Mathematik, 4. — **Radon**: Enzyklopädie der Mathematik, 3; Einführung in die Variationsrechnung, 2. — **Tauber**: Versicherungsmathematik I, 3, II, 3. — **Förster**: Politische Arithmetik, 2. — **Blaschke**: Einführung in die mathematische Statistik, 3. — **Müller**: Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen, 4, Konstruktionsübungen, 6; Schraubflächen, 2, Konstruktionsübungen, 2; Seminar für darstellende Geometrie, 2. — **Schmid**: Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen 4, Konstruktionsübungen, 6; Projektive Geometrie II, 3, Konstruktionsübungen, 2. — **Danzer**: Theorie und konstruktive Behandlung der Regelflächen und Raumkurven 3. und 4. Ordnung, 2. — **Wieghardt**: Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper, 6, Übungen, $1^1/_2$. — **Jung**: Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper, $7^1/_2$, Übungen, 2; Vektoranalysis, 2. — **Wolf**: Einführung in die äußere Ballistik, 1. — **Leon**: Ausgewählte Kapitel der Festigkeitslehre und Materialprüfung, $1^1/_2$. — **Pollack**: Praktische Übungen zu den Elementen der niederen Geodäsie, 5. — **Dolezal**: Niedere Geodäsie, 4 und $5^1/_2$, Übungen, 8; Ausgewählte Kapitel der niederen Geodäsie, $1^1/_2$; Geodätisches Seminar, 2; Photographische Meßkunst, Übungen, 2. — **Dokulil**: Übungen zur niederen Geodäsie, 10; Geodätisches Zeichnen: Situationszeichnen, 4; Technik des Katasterwesens, 2, Übungen, $2^1/_2$; Technische Terrainlehre, 2. — **Schumann**: Sphärische Astronomie, 4; Übungen im Beobachten und Rechnen, $3^1/_2$. —

Universität Würzburg.

Wien: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5; Praktische Übungen (mit Rau), 4 bzw. 8, für Mediziner und Pharmazeuten, 4; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Harms**: Theoretische Physik: Optik und Strahlentheorie, 4, Übungen, 2. — **Rau**: Elektrische Schwingungen, 1. —

Dimroth: Experimentalchemie II: Organische Chemie, 5; Chemisches Kolloquium (mit Emmert, v. Halban und Skraup), 14tägig, 2 *g*; Organisch-chemisches Praktikum, tägl.; Anorganisch-chemisches Praktikum (mit Emmert und Skraup), tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Mediziner und Zahnärzte, 4; Anleitung zu selbständigen Arbeiten (mit Emmert, v. Halban und Skraup), tägl. — **Heiduschka**: Chemische Technologie I, 4; Die Grundlagen der Warenkunde des Welthandels, 2; Pharmazeutische Präparatenkunde II: Organische Präparate und Wertbestimmung von Drogen, 5; Nahrungsmittelchemie I, mit Exkursionen, 2; Chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich technisch-chemischer, gerichtlich-chemischer und nahrungsmittel-chemischer Arbeiten, tägl.; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich der Übungen in den für den Apotheker wichtigen Sterilisationsverfahren, tägl. — **Pauly**: Benzolchemie II: Polyzyklische Verbindungen, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Emmert**: Maßanalyse, unter Berücksichtigung der durch das deutsche Arzneibuch vorgeschriebenen Methoden, 1; Erläuterungen zum chemischen Praktikum für Mediziner und Zahnärzte, 1. — **v. Halban**: Einführung in die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher, besonders chemischer Probleme, 2; Ausgewählte Probleme der physikalischen Chemie, 1; Physikalisch-chemischer Einführungskurs, 4. — **Skraup**: Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie: Tautomerie, Substitutionsproblem, Prinzipien der Konstitutionsbestimmung, 1; Einführung in die Kolloidchemie, 2. —

Rost: Integralrechnung, mit Übungen, 5; Repetitorium der höheren Geometrie II, 3; Anwendungen der Differentialrechnung auf die Theorie der ebenen Kurven, 4 *g*; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten, nach Verabredung *g*. — **v. Weber**: Funktionentheorie, 4; Repetitorium der höheren Analysis II, 3; Repetitorium der analytischen Mechanik II, 2. — **Hilb**: Darstellende Geometrie der krummflächig begrenzten Körper, 4; Repetitorium der Elementarmathematik, einschließlich der Grundlagen der Arithmetik und Geometrie II, 3; Axonometrie und Perspektive, 2. — **Widder**: Analytische und synthetische Geometrie der Kegelschnitte, 4; Übungen zur darstellenden Geometrie II (mit Göpfert), 4 *g*. —

Universität Zürich.

Meyer: Experimentalphysik: Elektrizität und Optik, 5; Ausgewählte Kapitel der Physik, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger, $3^1/_2$, für Vorgerücktere, tägl. außer Sonnabend; Ausführung selbständiger wissenschaftlicher Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Greinacher**: Radiologie IV: Radioaktivität, 1; Radiologisches Praktikum, 4; Die moderne Anschauung über Elektrizität, 1. — **Ratnowsky**: Theorie der Elektrizität, 4, Übungen, 1. — **Wolfke**: Wärmestrahlung und Quantentheorie, 2. — **Tank**: Physikalisches Seminar: Elektrische Meßmethoden, 1. — **Meißner**: Theorie und Anwendung des Mikroskops, 1. —

Werner: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisch-analytisches Praktikum, tägl.; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere: Präparative Arbeiten, Ausführung selbständiger Arbeiten, tägl., Chemisches Halbpraktikum für Naturwissenschaftler. — **Abeljanz**: Quantitative chemische Analyse mit Berücksichtigung der elektrolytischen Methoden, 2; Nahrungsmittelchemie, 1; Anleitung zu chemischen Arbeiten im Laboratorium, 1; Chemisches Kolloquium, 1 *g*; Chemisches Praktikum, 3 Tage, für Lehramtskandidaten, 6; Übungen im Untersuchen von Nahrungs- und Genußmitteln, 4. — **Karrer**: Aromatische Chemie II, 3; Alkaloide, 2. — **Jantsch**: Kohlehydrate, Fette, Wachse und Lipoide, 2. — **Dubsky**: Entwicklungsgeschichte der Chemie im 19. Jahrhundert, 1; Riechstoffe: Chemische Konstitution und Geruch, 1. — **Lifschitz**: Physikalische Chemie III, 2; Kolloidchemie, 2. — **Agthe**: Die technisch wichtigsten Stickstoffverbindungen, 1. —

Fueter: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, 4, Übungen, 1; Die Differentialgleichungen der Physik, 4; Mathematisches Seminar (mit Speiser), 1. — **Speiser**: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 1; Variationsrechnung, 4. — **Bützberger**: Elemente der darstellenden Geometrie mit Übungen, 4. — **Gonseth**: Angewandte Mathematik: Darstellende Geometrie II, 4. — **Wolfer**: Geographische Ortsbestimmung, 3; Übungen im astronomischen Beobachten, 9; Einleitung in die Astrophysik, 2; Grundzüge der geographischen Ortsbestimmung, 3. —

Technische Hochschule Zürich.

Weiß: Physik II, 4, Repetitorium, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Schweitzer), 4, 6 und 8;



Wissenschaftliche Arbeiten in Physik, 8, 12, 24, tägl. — **Schweitzer**: Physik II, 3, Ergänzungen, 1, Repetitorium, 1; Experimentalphysik, 4, Repetitorium, 1. — **Wolfke**: Wärmestrahlung und Quantentheorie, 2 *g*; Einführung in die statistische Mechanik, 2*g*. — **Piccard**: Physik und Chemie der Radio-Elemente, 2*g*. — **Brentano**: Elektronentheorie auf elektrischem und optischem Gebiete, 2*g*. — **Barbieri**: Photographie II, 1 *g*; Photogrammetrie, 1 *g*; Photographisches Praktikum, 2; Mikrophotographie, 1 *g*. — **Kuhlmann**: Theoretische Elektrotechnik I, 4, III, 4; Elektrotechnisches Laboratorium IIa, 4 und 8. — **Tobler**: Schwachstromtechnik II, 2. — **Farny**: Elektrische Maschinen II: Gleichstrom, 3 *g*; Konstruktionsübungen in elektrischen Maschinen, 9. — **N. N.**: Drahtlose Telegraphie und Hochfrequenzmaschinen, 1; Kriegselektrotechnik, 1. — **Wyßling**: Elektrische Anlagen II, 3; Elektrische Bahnen, 3; Diplomarbeiten in elektrischen Anlagen (mit Kuhlmann und Farny). — **Wirz**: Zähler- und Meßwandlerprüfungen nach den gesetzlichen Vorschriften, 1. —

Winterstein: Organische Chemie, 3, Repetitorium, 1; Physiologische Chemie, 2; Anleitung zu dem agrikulturchemischen Praktikum, 1; Agrikulturchemisches Praktikum, 8, für Vorgerücktere, tägl.; Physiologisch-chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Baur**: Physikalische Chemie I, 2, Repetitorium, 1; Technische Elektrochemie, 2, Repetitorium, 1; Physikalisch-chemisches Praktikum, 8; Elektrochemisches Praktikum, 4; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Boßhard**: Anorganische chemische Technologie II: Alkalien, Chlor, Phosphate, 3, Repetitorium, 1, III: Silikate, 2, Repetitorium, 1; Technisch-chemisches Praktikum, 16 und 24; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Eder**: Pharmazeutische Chemie II, 2; Pharmakognosie II, 3; Toxikologie, 2; Ätherische Öle, 1; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum I, 12, II, mit praktischem Kurs in Harnanalyse, 12; Technische Mikroskopierübungen I: Einführung in die mikroskopische Technik und Studium von Stärke und Fasern, 3; Pharmakognostische und pharmazeutisch-chemische Arbeiten für Vorgerücktere, tägl.; Harnanalyse, 1. — **Fierz**: Organische Technologie III: Teerprodukte und Explosivstoffe, 2, IV: Künstliche organische Farbstoffe, 3, Repetitorium, 1, V: Technologie der Kohlehydrate und Gärung, 1; Technisch-chemisches Praktikum, 16 und 24; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Ott**: Chemisch-physikalisches Praktikum für Gasingenieure, 2 Wochen. — **Ruzicka**: Methoden der organischen Chemie, 1. — **Staudinger**: Organische Chemie, 6, Repetitorium, 1; Organische Chemie. Spezieller Teil II, 2, Repetitorium, 1; Chemisches Praktikum, 24, 10 und tägl., für Vorgerücktere, tägl. — **Treadwell**: Analytische Chemie II, 2; Probierkunde mit Übungen, 2; Analytisches Praktikum, 20, 16, 10; Chemisches Praktikum, 2 und 4; Analytisch-chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl.; Thermodynamik technischer Gasreaktionen, 1. —

Hurwitz: Zahlentheorie, 4; Mathematisches Seminar (mit Weyl), 2. — **Amberg**: Einführung in den mathematischen Unterricht, 1—2*g*. — **Baeschlin**: Vermessungskunde I, 3, Übungen I, 3, III, 4, Übungen II, 8; Vermessungsübung, 2 Wochen, Große Vermessungsübung, 3—4 Wochen; Konstruieren geodätischer Instrumente, 2; Diplomarbeit in Vermessungswesen, 6 Wochen. — **Beyel**: Rechenschieber mit Übungen, 1; Darstellende Geometrie: Axonometrie, Oberflächen usw., 2; Projektive Geometrie: Kegelschnitte, 1. — **Franel**: Höhere Mathematik II, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2. — **Gonseth**: Graphische Rechnung, 1, Übungen, 1; Verteilende Rechnungsarten, 2. — **Großmann**: Anwendungen der darstellenden Geometrie, 2, Übungen, 3; Projektive Geometrie, 4. — **Hirsch**: Höhere Mathematik II, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2; Mathematische Übungen, 2. — **Kienast**: Lineare Differentialgleichungen, 2. — **Kollros**: Anwendungen der beschreibenden Geometrie, 2, Übungen, 3; Neuere Geometrie, 2. — **Kraft**: Geometrische Analysis, 3; Kinematik, 2; Die Grundkräfte der Welt, 1. — **Polya**: Einführung in die Analysis reeller Größen II, 2 *g*; Der Zufall, seine Gesetze, seine wissenschaftliche Rolle, 1. — **Rudio**: Anwendungen der höheren Mathematik, 4. — **Weyl**: Funktionentheorie, 4; Elektrizität und Gravitation, 3. — **Wolfer**: Geographische Ortsbestimmung, 3; Übungen im astronomischen Beobachten, 3; Einleitung in die Astrophysik, 2; Grundzüge der geographischen Ortsbestimmung mit Übungen, 2. — **Zwicky**: Vermessungskunde, 5; Feldmessen, 8; Brücken- und Wasserbau, 3, Konstruktionsübungen, 3; Kulturtechnik II, 2, Konstruktionsübungen, 2. —

Angebote.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

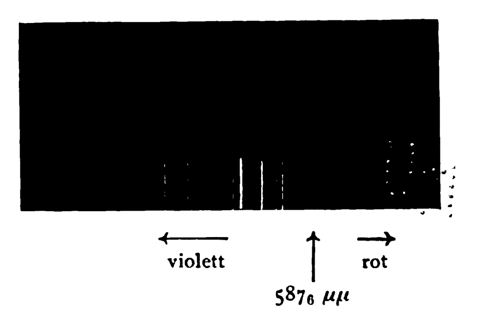


Fig. 2.

J. E. Lilienfeld, Die sichtbare Strahlung des Brennfleckes von Röntgenröhren.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.



Fig. 1.

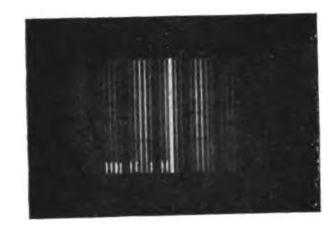


Fig. 2.



Fig. 3.

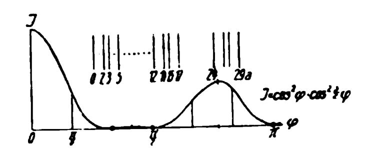


Fig. 4.



Fig. 5.

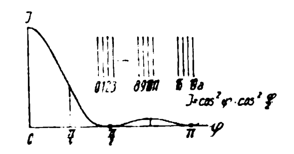


Fig. 6.

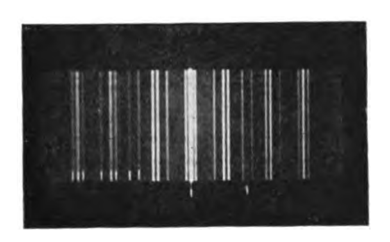


Fig. 7.

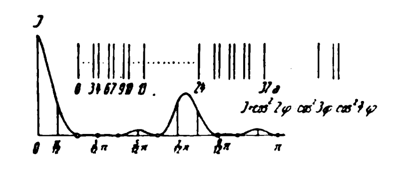


Fig. 8.



Fig. 9.

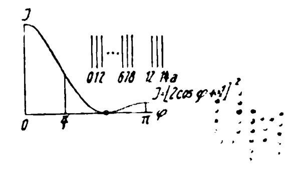


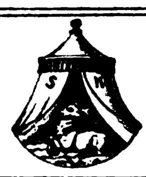
Fig. 10.

Ad. Lindemann, Beugungsbilder einiger Fälle Fraunhoferscher Partiegitter.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und H. Th. Simon



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 41 Mark, im Ausland 46 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstraße 2.

No. 13. 1. Juli 1919. No. 545. 20. Jahrgang.

Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechungen, Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen.)

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 13. 1. Juli 1919. 20. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 15 am 10. Juli 1919.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Bemerkungen zur Frage der Quantelung des Kreisels.

Von Paul S. Epstein.

§ 1. Bis vor kurzem schien es drei verschiedene Arten der Quantelung des asymmetrischen Kreisels zu geben. Bereits in seiner grundlegenden Abhandlung von 1916 hatte Planck[1]) dieses spezielle Beispiel einer ausführlichen Diskussion unterzogen. Etwas später behandelte ich diese Frage[2]) auf eine Weise, welche mir meinen Regeln für die Quantelung separierbarer Systeme am besten zu entsprechen schien. Dabei hielt ich das Problem für nicht separierbar und befand mich mit dieser Annahme im Irrtum: zwei Jahre später hat Reiche[3]) mit Hilfe einer von Kolossoff angegebenen Punkttransformation, welche die Separation ermöglicht, die Quantelung nach den von Schwarzschild und mir aufgestellten Regeln durchgeführt. Er gelangt dabei zu einem sowohl von dem Planckschen als scheinbar auch von dem meinigen verschiedenen Ausdruck für die Energie als Funktion der Quantenzahlen.

Neuerdings hat nun Planck[4]) gezeigt, daß eine Abänderung seiner Behandlungsweise genau auf die Reicheschen Resultate führt. Und zwar ist die neue Art der Behandlung der ursprünglichen vorzuziehen, weil sie im Gegensatz zu jener dem Kriterium der adiabatischen Invarianz standhält. Damit war die einzige wesentliche Diskrepanz, welche zwischen den Ergebnissen der Planckschen Methode der Einschränkung der Bewegungsfreiheit und der Methode der Separation bestand, beseitigt und die praktische Übereinstimmung der beiden Auffassungen[1]) an einem weiteren Beispiel erwiesen. Die Zahl der verschiedenen Lösungen des Kreiselproblems schien demnach auf zwei, die Reiche-Plancksche und die meinige reduziert.

Eine solche Vielfältigkeit der Lösungen wäre an sich durchaus nicht überraschend, da der asymmetrische Kreisel zu den sogenannten entarteten Systemen oder Systemen mit kohärenten Freiheitsgraden gehört, worauf bereits Planck hingewiesen hatte. Darunter werden diejenigen Systeme verstanden[2]), welche nicht von allen ihnen zustehenden Freiheitsgraden Gebrauch machen: Die Lage des Kreisels wird durch drei Koordinaten festgelegt, in der integrierten Bewegungsgleichung treten indessen nicht drei Konstanten, sondern nur zwei auf, und dieser Umstand stempelt das Problem zu einem entarteten. Dasjenige Kennzeichen solcher Systeme, auf welches es in der Quantentheorie vor allem ankommt, besteht darin, daß die Separationsvariablen bei ihnen nicht eindeutig festgelegt sind. Nachdem es also durch Reiche erwiesen war, daß Separation möglich ist, durfte man erwarten, auch mit Hilfe anderer Koordinaten als der Kolossoffschen dasselbe Ziel zu erreichen. In der Tat zeigte es sich, daß man die von mir gefundenen Formeln unter Benutzung einer von Bruns[3]) angegebenen Transformation auch auf dem Wege der Separation erhalten kann, was ich im folgenden näher ausführen möchte.

Es ist ferner eine Eigenschaft der entarteten Systeme, daß die Quantelung in zwei verschiedenen Separationssystemen in der Regel zu demselben Ausdruck der Energie durch die Quanten-

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 50, 385, 1916.
2) P. S. Epstein, Verh. d. D. phys. Ges. 18, 398, 1916.
3) F. Reiche, diese Zeitschr. 19, 394, 1918.
4) M. Planck, Berliner Ber. 1918, S. 1166.

1) P. S. Epstein, Berliner Ber. 1918, S. 435.
2) P. S. Epstein, Ann. d. Phys. 51, 168, 1916.
3) H. Bruns, Leipziger Ber. 1885, S. 55. Für den Hinweis auf diese Abhandlung bin ich Professor E. Hilb zu Dank verpflichtet.

zahlen führt, obwohl den letzteren in den beiden Fällen ein ganz verschiedener geometrischer Sinn zukommt. Diese Regel bestätigt sich auch im Spezialfall des Kreisels: Wir werden sehen, daß die Reiche-Plancksche Endformel mit der 1916 von mir gegebenen identisch ist.

Zugleich ergreife ich die Gelegenheit, um in den §§ 3 und 4 einige ergänzende Bemerkungen zu meinen früheren Ausführungen über die spezifische Wärme des Wasserstoffs zu machen.

§ 2. Es sei die Lage eines starren Körpers mit den Hauptträgheitsmomenten $I<K<L$ durch die drei Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ bestimmt, wobei ψ und ϑ Azimut und Polarwinkel einer der Trägheitsachsen (etwa derjenigen mit dem Trägheitsmoment L) in bezug auf eine geeignet gewählte Polarachse bedeuten. In der erwähnten Untersuchung ließ ich diese Polarachse mit der Richtung des Hauptdrehmomentes zusammenfallen und erhielt für die Impulse die folgenden Werte

$$p_\vartheta = 0, \quad p_\psi = \frac{\sqrt{2T}}{f}, \quad p_\varphi = \frac{\sqrt{2T}}{f}\cos\vartheta, \tag{1}$$

während φ und ϑ durch die Beziehung

$$\left(\frac{\sin^2\varphi}{I} + \frac{\cos^2\varphi}{K}\right)\sin^2\vartheta + \frac{1}{L}\cos^2\vartheta = f^2 \tag{2}$$

verknüpft waren. Dabei sind T und f zwei Konstanten, von denen die erstere die lebendige Kraft bedeutet. Aus den drei letzten dieser Gleichungen können wir f und $\cos\vartheta$ eliminieren und die resultierende Beziehung nach T auflösen:

$$2T = \frac{p^2_\varphi}{L} + \left(p^2_\psi - p^2_\varphi\right)\left(\frac{\sin^2\varphi}{I} + \frac{\cos^2\varphi}{K}\right). \tag{3}$$

Mit Hilfe der anderen l. c. abgeleiteten Beziehungen zwischen Impulsen und Winkeln kann man sich überzeugen, daß der gewonnene Ausdruck für T die Hamiltonsche Funktion des Problems darstellt, wenn man die Größen φ, ψ, p_φ, p_ψ als kanonische Variable benutzt. Ein drittes Koordinatenpaar kommt hier nicht vor, d. h. das Problem ist, entsprechend dem in § 1 über entartete Systeme Gesagten, auf nur zwei Dimensionen zurückgeführt. Der Vorzug der Form (3) der Hamiltonschen Funktion besteht darin, daß das Problem sich sofort durch Separation lösen läßt; denn da sie von ψ unabhängig ist, muß man $p_\psi =$ const setzen, und damit ist die Trennung der Variablen vollzogen. Man erhält genau die Gleichungen (24) meiner erwähnten Note, während diese erst gerechtfertigt werden.

Man kann also nicht mehr daran zweifeln, daß auch die von mir benutzte Art der Quantelung die für separierbare Systeme vorgeschriebene ist. Indessen sind wir zum Ausdruck (3) der Hamiltonschen Funktion auf dem Umweg über eine teilweise Lösung des Problems gelangt, und es erhebt sich die Frage, ob es nicht möglich ist, dasselbe Resultat mittels einer einfachen Koordinatentransformation aus der ursprünglichen Form der Energiegleichung zu erreichen. Wie bereits erwähnt, wurde eine geeignete Transformation in einer älteren Abhandlung von Bruns angegeben: Man wähle als Polarachse unseres Systems der Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ eine willkürliche Richtung, was auf den folgenden Ausdruck für die Hamiltonsche Funktion führt[1])

$$\begin{aligned}2T = \frac{1}{I}\left(p_\vartheta\cos\varphi + \frac{p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\sin\varphi\right)^2 + \\ + \frac{1}{K}\left(p_\vartheta\sin\varphi - \frac{p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\varphi\right)^2 + \\ + \frac{p^2_\varphi}{L}.\end{aligned} \tag{4}$$

Um diesen Ausdruck umzuformen benutzt Bruns den bekannten von Jacobi stammenden Satz: Es seien p_i, q_i ($i = 1, 2, \ldots f$) die kanonisch konjugierten Koordinaten eines Systems. Führt man neue Variable durch die Beziehungen ein

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad q_i' = \frac{\partial W}{\partial p_i'},$$

wo W irgendeine Funktion der Argumente q_i und p_i' bedeutet, so sind diese neuen Variablen gleichfalls kanonisch. Eine solche Umformung bezeichnet man als Berührungsformation.

In unserem Falle wollen wir die neuen Koordinaten und Impulse mit q_1, q_2, q_3 bzw. p_1, p_2, p_3 bezeichnen, so daß man die Beziehungen erhält

$$\begin{aligned}p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial\varphi}, \quad p_\psi = \frac{\partial W}{\partial\psi}, \quad p_\vartheta = \frac{\partial W}{\partial\vartheta}, \\ q_1 = \frac{\partial W}{\partial p_1}, \quad q_2 = \frac{\partial W}{\partial p_2}, \quad q_3 = \frac{\partial W}{\partial p_3}.\end{aligned} \tag{5}$$

Um die Funktion W zu definieren, fassen wir mit Bruns ein sphärisches Dreieck mit den Winkeln Θ, Δ, Z und den gegenüberliegenden Seiten ϑ, 2δ, 2ζ ins Auge. Die zunächst unbestimmten Seiten 2δ, 2ζ legen wir durch die Beziehungen

$$p_1 = p_3\cos 2\delta, \qquad p_2 = p_3\cos 2\zeta \tag{6}$$

fest, wodurch auch die Winkel definiert sind. Die Funktion W habe die Form

$$W = p_3\Theta + p_2(\psi + \Delta) + p_1(\varphi + Z), \tag{7}$$

1) F. Reiche, l. c. S. 395.

wobei man sich Θ, Δ, Z durch ϑ und die Impulse p_1, p_2, p_3 ausgedrückt denken muß. Mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie findet man

$$\frac{\partial Z}{\partial \vartheta}\cos 2\delta + \frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta}\cos 2\zeta + \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} = \sin 2\delta \sin Z,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial \delta}\cos 2\delta + \frac{\partial \Delta}{\partial \delta}\cos 2\zeta + \frac{\partial \Theta}{\partial \delta} = 0,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial \zeta}\cos 2\delta + \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta}\cos 2\zeta + \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = 0,$$

und die Beziehungen (5) schreiben sich nunmehr

$$\left.\begin{array}{ll} p_\varphi = p_1, & q_1 = \varphi + Z, \\ p_\psi = p_2, & q_2 = \psi + \Delta, \\ p_\vartheta = p_3 \sin 2\delta \sin Z, & q_3 = \Theta. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Nach Einsetzen dieser Werte in den Energieausdruck (4) erhält man

$$2T = \frac{p_1^2}{L} + \left(p_2^2 - p_1^2\right)\left(\frac{\sin^2 q_1}{I} + \frac{\cos^2 q_1}{K}\right), \quad (9)$$

was formal mit Gleichung (3) übereinstimmt und daher auf die von mir (l. c.) angegebenen Quantenformeln

$$p_3 = \frac{(n_1 + n_3)h}{2\pi},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{2T}{p_3^2} - \left(\frac{\sin^2 q_1}{I} + \frac{\cos^2 q_1}{K}\right)}{\frac{1}{L} - \left(\frac{\sin^2 q_1}{I} + \frac{\cos^2 q_1}{K}\right)}}\, dq_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_3} \quad (10)$$

führt. Der Ausdruck (9) ist jedoch insofern allgemeiner als (3), als die Richtung der Polarachse des Koordinatensystems willkürlich gewählt ist. Sie fällt mit der Richtung des Hauptträgheitsmomentes zusammen, wenn $p_\vartheta = 0$, d. h. $Z = \Delta = 0$, $\Theta = \pi$ wird; in diesem Grenzfalle ist die Gleichung (9) mit (3) identisch.

Damit ist gezeigt, daß sich das Problem der kräftefreien Bewegung eines starren Körpers, wie dies die allgemeine Theorie voraussehen ließ, in zwei verschiedenen Weisen quanteln läßt. Jedoch ergeben beide Methoden das gleiche Resultat: Die Substitution

$$\cos^2 q_1 = \frac{\cos^2 \chi}{1 + m \sin^2 \chi}, \quad m = -\frac{\frac{1}{I} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{I} - f^2},$$

verwandelt nämlich unsere Gleichung (10) unmittelbar in die Reichesche Endformel

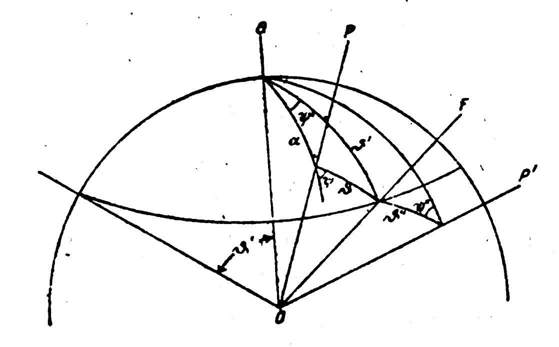
$$\frac{2}{\pi}\frac{\frac{1}{K} - f^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{L}\right)\left(\frac{1}{I} - f^2\right)}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{(1 + m\sin^2\chi)\sqrt{1 - x^2\sin^2\chi}} = \frac{n_1}{n_1 + n_3},$$

wobei

$$x^2 = \frac{\left(f^2 - \frac{1}{L}\right)\left(\frac{1}{I} - \frac{1}{K}\right)}{\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{L}\right)\left(\frac{1}{I} - f^2\right)}$$

gesetzt ist.

§ 3. Wir ergreifen die Gelegenheit um eine etwas knapp gehaltene Bemerkung unserer erwähnten Arbeit[1]), die gelegentlich zu Mißverständnissen Anlaß geben könnte, näher auszuführen. Es handelt sich um die Verallgemeinerung der Betrachtung über die Bewegung des symmetrischen Kreisels, dadurch daß man die Achse des polaren Bezugssystems nicht von vornherein mit der Richtung des Hauptmoments der Bewegungsgröße zusammenfallen läßt. In bezug auf diese Achse OP benutzen wir die in § 2 eingeführten Bezeichnungen φ, ψ, ϑ. Dagegen seien die entsprechenden Eulerschen Winkel in bezug auf die mit dem Hauptträgheitsmoment zusammenfallende Achse OG mit $\varphi', \psi', \vartheta'$ benannt (Figur). In diesem letz-



teren System wurde die Energie T (l. c.) in der folgenden Form angegeben

$$2T = \frac{u_1'^2 - u_2'^2}{I} + \frac{u_2'}{L}, \quad (u_1' \geqq u_2') \quad (1)$$

wo unter u_1', u_2' die Integrale

$$u_1' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_{\psi'}\, d\psi', \quad u_2' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_{\varphi'}\, d\varphi' \quad (2)$$

verstanden sind, während $\vartheta' = \text{const}$ ist. Auch den allgemeineren, von der Achse OP ausgehenden Fall könnte man nach dem vom Verfasser

1) P. S. Epstein, Verhandl. d. D. phys. Ges. 18 402—403, 1916. (Im folgenden mit l. c. zitiert.)

angegebenen Schema behandeln; einfacher gelangt man indessen durch die folgende Überlegung zum Ziele. Die Wirkungsfunktion

$$W = \sum_1^f \int p_i dq_i$$

ist gegenüber beliebigen Punkttransformationen invariant, daher gilt

$$\int p_{\varphi'} d\varphi' + \int p_{\psi'} d\psi' = \int p_\varphi d_\varphi + \int p_\psi d_\psi + \\ + \int p_\vartheta d\vartheta.$$

Nun ist dem physikalischen Sinne nach $p_{\varphi'} = p_\varphi$ (als Projektion des Impulses auf die Figurenachse) und $\varphi + \psi = \varphi' + \psi'$ (als Azimut der Rotation um diese Achse). Ziehen wir die Identität

$$\int p_{\varphi'} d(\varphi' + \psi') = \int p_\varphi d(\varphi + \psi)$$

von der obigen Gleichung ab, so bleibt

$$\int (p_{\psi'} - p_{\varphi'}) d_{\psi'} = \int (p_\psi - p_\varphi) d\psi + \int p_\vartheta d\vartheta. \quad (3)$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden (Fig. 1): 1. Die Bezugsachse OP liegt innerhalb des Präzessionskegels ($p_\psi > p_\varphi$). Dann haben die Winkel ψ', ψ und ϑ die gleiche Periodizität: während sich ϑ vom kleinsten zum größten Wert und wieder zurück ändert, wachsen ψ' und φ' je um 2π. Bezeichnen wir

$$\int_0^{2\pi} p_\psi d\psi = u_1, \; p_\varphi = u_2' = u_2, \\ \oint p_\vartheta d\vartheta = u_3, \quad (4)$$

so folgt aus Gleichung (3)

$$u_1' = u_1 + u_3. \quad (5)$$

2. Die Bezugsachse OP' liegt außerhalb des Präzessionskegels ($p_\psi < p_\varphi$). Der Unterschied gegenüber dem ersten Falle liegt darin, daß jetzt während einer Periode nur ψ' um 2π wächst, während ψ einen bestimmten Winkel zuerst in einer Richtung, dann in der entgegengesetzten durchläuft. Es ist also

$$\oint (p_\psi - p_\varphi) d\psi = (p_\psi - p_\varphi) \oint d\psi = 0,$$

woher nach (3) und (4)

$$u_1' = u_2 + u_3. \quad (5')$$

Die Größen u sind mit dem Faktor $h/2\pi$ den Quantenzahlen n (mit entsprechenden Zeigern) proportional zu setzen. Durch die veränderten Koordinaten entstehen also keine neuen quantentheoretisch zulässigen Werte des Präzessionswinkels, denn der Kosinus desselben ist durch das Verhältnis

$$u_2'/u_1' = u_2/(u_1 + u_3), \text{ bzw. } = u_2/(u_2 + u_3),$$

welches in beiden Fällen die gleichen rationalen Werte annimmt, gegeben. In bezug auf die möglichen Lagen der neuen Bezugsachse OP besteht dabei zwischen den Fällen 1 und 2 ein Unterschied: Liegt nämlich OP innerhalb des Präzessionskegels, so ist die Auswahl der möglichen Werte des Impulses p_ψ durch die Beziehung (4) $p_\psi = u_1$ beschränkt und der Winkel α zwischen OG und OP kann nur einzelne diskrete, der Bedingung $\cos\alpha = u_1/(u_1 + u_3)$ genügende Werte annehmen. Wenn dagegen OP' außerhalb des Präzessionskegels zu liegen kommt, so ist stets $\oint p_\psi d\psi = p_\psi \oint d\psi = 0$. Die erste Quantenbedingung ist also identisch erfüllt, welchen Wert ($p_\psi \leq p_\varphi = u_1$), der Impuls und mit ihm der Winkel zwischen OG und OP' auch annehmen mag, solange er nur größer ist als der Winkel zwischen dem Hauptmoment OG und der Figurenachse OF.

Im zweiten Falle hat also der Durchstoßungspunkt der Bezugsachse auf der Einheitskugel ein flächenhaftes, im ersten Falle ein linienhaftes Gebiet zur Verfügung. Es liegt deshalb nahe, jenen für unendlich wahrscheinlicher zu halten als diesen und von den beiden Energieausdrücken, welche nach (1) und (5) oder (5') die bzw. Form haben

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{(u_1 + u_3)^2 - u_2^2}{I} + \frac{u_2^2}{L}\right], \; (u_1 \geq u_2), \quad (6)$$

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{(u_2 + u_3)^2 - u_2^2}{I} + \frac{u_2^2}{L}\right] \quad (6')$$

nur den zweiten, welcher formal mit (1) übereinstimmt, zu berücksichtigen. Die Übereinstimmung wird eine vollkommene, wenn man in (1) $u_1' = u_2' + u_3'$ bezeichnet, so daß u_3', ebenso wie u_3 in (6'), keiner Beschränkung mehr unterworfen ist. Diesen Sinn hatte meine Bemerkung (l. c. S. 403), daß die allgemeine Wahl der Bezugsachse gerade auf dieselbe Formel führt wie die spezielle. Allerdings wurde zugleich angedeutet, daß man durch eine andere Art der Mittelung im Bereich hoher Temperaturen zur Übereinstimmung mit der Erfahrung gelangen kann.

Sieht man nämlich von diesen geometrischen Verhältnissen ab, so kann man Formel (6') als Spezialfall von (6) für $u_1 = u_2$ ansehen und braucht sie nicht gesondert zu betrachten[1]). Die

1) Man könnte sich davon das folgende anschauliche Bild machen: Physikalisch ist die Lage der Bezugsachse durch eine ausgezeichnete Richtung, etwa durch die Rich-

Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Energiestufe ist von diesem Standpunkt einfach proportional der Zahl der Möglichkeiten die feste Summe der Quantenzahlen $n_1 + n_3 = n_1'$ durch die Wahl verschiedener positiver ganzzahliger Werte der n_1 und n_3 zu verwirklichen, also einfach proportional der Zahl n_1' selbst. Dementsprechend ist jedes Glied der l. c. berechneten Summe $Q(\sigma) - 1$ mit n_1' (bzw. $n' + 1$ in den dort benutzten Bezeichnungen) zu multiplizieren. Nach der Eulerschen Summationsformel ist der Näherungswert dieser Summe für nicht zu große σ

$$\sum_1^\infty n e^{-\sigma n^2} = \frac{1}{2\sigma} - \frac{1}{12} - \frac{\sigma^2}{120},$$

und dies führt zu einer Verdoppelung der von mir angegebenen Werte der spezifischen Wärme, sowohl im Gebiete sehr tiefer als sehr hoher Temperaturen. Damit ist allerdings wenig gewonnen: wenn auch für hohe Temperaturen der Anschluß an die Erfahrung erreicht ist, so bleibt der viel stärkere Widerspruch bei tiefen Temperaturen in ungemindertem Umfange bestehen.

§ 4. Neuerdings ist Sophie Rotszajn[1]), von anderen Voraussetzungen ausgehend, zu einem formal mit dem meinigen übereinstimmenden Ausdruck für die spezifische Wärme gelangt. Jedoch ist die Definition der Konstanten σ in beiden Fällen eine verschiedene, so daß sie bei mir einem viermal größeren Wert hat als bei Frau Rotszajn. Zu einer befriedigenden Übereinstimmung mit der Erfahrung gelangt man, wenn man $\sigma T = 190$ setzt und dies bedeutet in meinem Falle eine größere Diskrepanz mit dem Bohr-Debyeschen Modell des Wasserstoffmoleküls als in dem ihrigen. Dieses Modell liefert nämlich für die nach meiner Festsetzung definierte Größe σT rund 560, nach der Rotszajnschen Definition nur 140; während also bei mir der numerische Wert von σT etwa dreimal zu groß herauskommt, so ist er bei Frau Rotszajn im Verhältnis $^3/_4$ zu klein, stimmt also sehr viel besser mit der Erfahrung überein. Jedoch auch diese Abweichung übersteigt noch immer die Grenzen der Messungsfehler: Zwischen dem Resultat der Theorie der spezifischen Wärmen und den Ergebnissen der Debyeschen Dispersionstheorie besteht in jedem Fall eine bis jetzt unhebbare Diskrepanz, welche man nicht ohne weiteres zugunsten der Theorie der spezifischen Wärmen deuten kann. Es ist nämlich im Auge zu behalten, daß diese Theorie als hypothetisches Element die unbewiesene Voraussetzung enthält, daß man quantentheoretisch das Vierkörpersystem des Wasserstoffmoleküls näherungsweise als starren Körper behandeln darf.

Wenn auch das Resultat der Rotszajnschen Arbeit relativ günstig ist, so scheinen mir die von ihr zugrunde gelegten Voraussetzungen nicht ganz von Einwänden frei zu sein. Es war unzweifelhaft ein glücklicher Gedanke, die kräftefreie Rotation der Moleküle als Grenzfall ihrer Drehung in einem magnetischen Felde aufzufassen und auf diese Weise die Freiheitsgrade des Problems inkohärent zu machen. Jedoch gibt eine bei der Durchführung desselben gemachte, durch mathematische Gründe nicht gebotene Vereinfachung zu ernsten Bedenken Anlaß. Die Schwierigkeiten, welche sich in meiner von Frau Rotszajn mehrfach zitierten Arbeit ergaben, rührten nämlich von der Berücksichtigung des Dralles, welchen das Molekül um seine Figurenachse besitzt, her. Diese Rotationsträgheit ist daran schuld, daß die in Frage kommende Quantenzahl (n') nicht den Wert 0 annehmen kann, was wiederum auf den dreimal zu kleinen Wert der Größe σ führte. Dieselbe Komplikation trat auch bei den Behandlungsweisen von Reiche und Planck auf; von einer neuen Theorie dieses Gegenstandes müßte man also in erster Linie verlangen, daß sie sich mit der erwähnten Schwierigkeit auseinandersetzt. Statt dessen wird der Drall um die Figurenachse bei Frau Rotszajn kurzerhand vernachlässigt; es ist klar, daß ein solches Vorgehen, welches den bestehenden Schwierigkeiten aus dem Wege geht, nicht zur Überwindung derselben führen kann.

Ein anderer Punkt, den ich bei dieser Gelegenheit zur Sprache bringen möchte, betrifft die Behandlung des Gegenstandes vom Standpunkt der zweiten Planckschen Hypothese. Es gehört zweifelsohne zu den wichtigsten Aufgaben der theoretischen Physik, möglichst viel an der Erfahrung prüfbare Fälle sowohl vom Standpunkt der zweiten als der ersten Planckschen Hypothese zu behandeln, um eine Entscheidung zwischen beiden herbeizuführen. Jedoch muß man die einmal gewählte Auffassung konsequent durchführen; persönlich halte ich es wenigstens nicht für folgerichtig, einen Teil der Freiheitsgrade desselben Systems nach der ersten, einen andern Teil nach der

tung eines von den Nachbarmolekülen herrührenden elektrischen oder magnetischen Feldes gegeben. Wird also im Gültigkeitsbereich der Formel (6) das molekulare Feld so erregt, daß es nicht mit einer der als Bezugsachsen möglichen Richtungen zusammenfällt, so muß sich unser Molekül in eine passende Lage drehen; da diese Drehung (wenigstens im Grenzfall verschwindender Feldstärken) ohne Energieabgabe vor sich geht, so ist die Annahme möglich und plausibel, daß das zur Ruhekommen des Moleküls für jeden der quantentheoretisch zulässigen Winkel α gleich wahrscheinlich ist. Die dem zweiten Falle entsprechenden Lagen kann man dabei als mit den zum ersten gehörigen gleichberechtigt ansehen.

1) Sophie Rotszajn, Ann. d. Phys. 57, 81, 1918.

zweiten Planckschen Hypothese zu quanteln. Man könnte sich jedoch fragen, ob es nicht einen Verstoß gegen diese Forderung bedeutet, wenn man die Abmessungen und Trägheitsmomente als für alle Moleküle des Wasserstoffs fest gegeben ansieht, dagegen die Bewegungen dieser als starre Körper aufgefaßten Molekeln nach der zweiten Planckschen Hypothese quantelt. Wir wissen ja, daß nach Bohr die Dimensionen der Molekel selbst durch Quantenbedingungen festgelegt werden und daß dieselben nur bei Zugrundelegung der ersten Planckschen Auffassung einen konstanten Wert annehmen[1]). Bei konsequenter Durchführung des zweiten Standpunktes müßte man, meiner Ansicht nach, auch über alle möglichen Trägheitsmomente mitteln[2]). Wie aus der Form meiner Gleichung l. c. (5) hervorgeht, in welcher dieselbe Quantenzahl, welche das Trägheitsmoment bestimmt (wiederum infolge des Dralls um die Figurenachse), auch für die Präzessionsbewegung eine Rolle spielt, dürften dabei die Rotszajnschen Ausdrücke nicht nur in den numerischen Werten der Konstanten, sondern auch in ihrer Form eine Veränderung erfahren..

1) In welchem Maße derselbe Vorwurf die Resultate von F. Reiche (Ann. d. Phys. **54**, 401, 1917) berührt, läßt sich nicht übersehen, da wir die Konstitution der von ihm einer Statistik unterzogenen Atome (bzw. Moleküle) nicht kennen.

2) Vgl. auch P. S. Epstein, l. c. S. 413.

Zürich, im März 1919. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 22. März 1919.)

Kurze Ableitung der Bewegungsgleichungen des Kreisels.

Von H. Lorenz.

Die große und immer steigende Bedeutung der Kreiselbewegung in der Physik und Technik erweckt den Wunsch nach einer einfachen Herleitung ihrer für den Gebrauch bequemsten Grundformeln möglichst ohne Zuhilfenahme der Methoden der analytischen Mechanik. Wir gehen zu diesem Zwecke von der ebenen Bewegung eines Punktes aus, dessen Bahn in den Polarkoordinaten r und ψ gegeben sein möge. Dann können wir seine Geschwindigkeit v mit ihren Komponenten in radialer Richtung und senkrecht dazu

$$v_r = \dot{r} \qquad v_n = r\dot{\psi} \tag{1}$$

für einen bestimmten Bahnpunkt und den benachbarten in dem Vektordiagramm (Fig. 1) dem sog. Hedographen vereinigen. In diesem

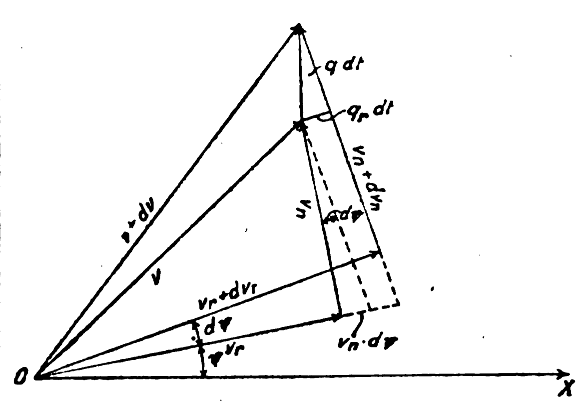


Fig. 1.

stellt die unendlich kleine Verbindung der Endpunkte der benachbarten Geschwindigkeiten v und $v + d\,v$ die mit dem Zeitelement dt multiplizierte resultierende Beschleunigung q dar, deren Projektionen in den Richtungen v_r und v_n die Radialbeschleunigung q_r und die Drehbeschleunigung q_n bedeuten. Aus der Figur liest man sofort die Beziehungen

$$q_r\,dt = d\,v_r - v_n\,d\,\psi$$
$$v_n + q_n\,dt = v_n + dv_n + v_r\,d\psi$$

ab, aus denen sich die Beschleunigungskomponenten selbst zu

$$\begin{aligned} q_r &= \dot{v}_r - v_n\,\dot{\psi} = \ddot{r} - r\dot{\psi}^2 \\ q_n &= \dot{v}_n + v_r\,\dot{\psi} = r\ddot{\psi} + 2\dot{r}\dot{\psi} \end{aligned} \tag{2}$$

ergeben. Die darin enthaltenen Zusatzglieder

$$v_n\,\dot{\psi} = r\,\dot{\psi}^2. \quad v_r\,\dot{\psi} = \dot{r}\dot{\psi} \tag{2a}$$

werden gewöhnlich als Zentripetal- und Cariolisbeschleunigung bezeichnet, und sind ihrerseits Komponenten einer zur Bewegungsrichtung senkrechten Zusatzbeschleunigung.

Nach dieser Vorbemerkung gehen wir zu einem Rotationskörper von der Masse m über, der sich um einen festgehaltenen Punkt O seiner Achse drehen möge. Sehen wir zunächst von der Eigendrehung um diese Achse ab, so können wir uns den Körper durch einen Massenpunkt m im Abstande des Trägheitshalbmessers k um eine zu Om senkrechte Achse durch O ersetzt denken. Legen wir dann durch den Fixpunkt O ein Achsenkreuz $OXYZ$ (Fig. 2), so zerfällt die elementare Bewegung von m auf der Kugel um O in eine Drehung $d\,\psi$ auf dem Parallelkreis um OZ bei konstantem Abstand r und eine Drehung in der Meridianebene mOZ um $d\,\psi$ bei konstantem Abstand k von O, wobei ψ der Winkel des Fahrstrahls gegen die Ebene XOZ und ϑ die Neigung der Achse Om gegen OZ bedeuten. Den beiden elementaren Drehungen entsprechen aber nach (2) mit Rücksicht auf die da-

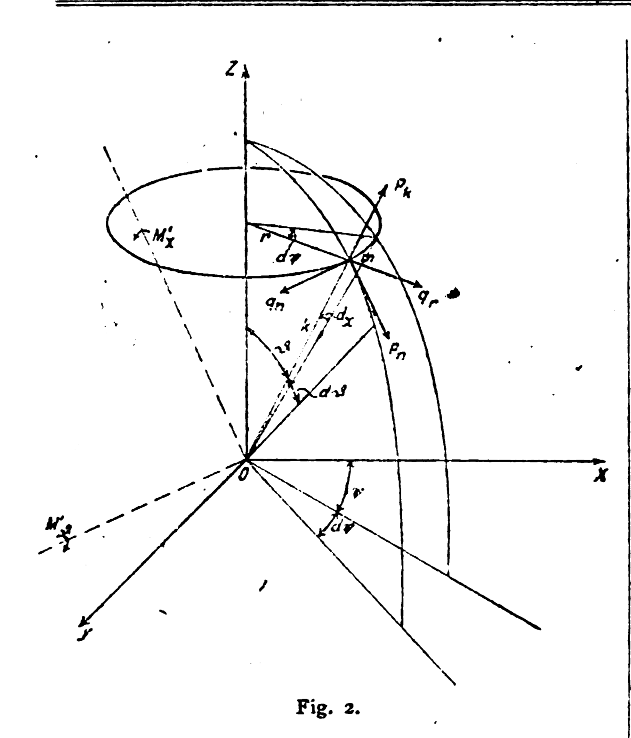


Fig. 2.

bei unveränderlichen Abstände r und k die Beschleunigungskomponenten

$$\begin{aligned} q_r &= -r\dot\psi^2, \quad q_n = r\ddot\psi + 2\dot r\dot\psi \\ p_k &= -k\dot\vartheta^2, \quad p_n = k\ddot\vartheta. \end{aligned} \tag{3}$$

Wegen

$$r = k\sin\vartheta \tag{4}$$

dürfen wir an Stelle der ersten beiden Formeln (3) auch schreiben

$$\begin{aligned} q_r &= -k\dot\psi^2\sin\vartheta, \\ q_n &= k(\ddot\psi\sin\vartheta + 2\dot\psi\dot\vartheta\cos\vartheta), \end{aligned} \tag{3a}$$

und entnehmen aus Fig. 2 mit den Hebelarmen $k\cos\vartheta$ und k zwei Momente um zwei zu q_n bzw. p_n parallele Achsen durch O im Betrage von

$$\left.\begin{aligned} M'_\vartheta &= mk^2(p_n + q_r\cos\vartheta) \\ &= mk^2(\ddot\vartheta - \dot\psi^2\sin\vartheta\cos\vartheta \\ M'_\chi &= mk\,q_n \\ &= mk^2(\ddot\psi\sin\vartheta + 2\dot\psi\dot\vartheta\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Hierin haben wir dem einen Moment den Zeiger χ gegeben, da es eine Drehung der Achse Om um den elementaren Winkel

$$d\chi = d\psi\sin\vartheta \tag{6}$$

laut Fig. 2 zur Folge hat.

Dreht sich nunmehr der Rotationskörper um seine Symmetrieachse Om mit der Winkelgeschwindigkeit ω, so erfordert die Erhöhung derselben mit dem polaren Trägheitsmoment mk_0^2 um diese Achse ein Moment

$$M_0 = mk_0^2\dot\omega = \frac{d}{dt}(mk_0^2\omega) = \frac{dB_0}{dt} \tag{7}$$

wenn wir unter

$$B_0 = mk_0^2\omega \tag{8}$$

das gewöhnlich als Drall bezeichnete Moment der Bewegungsgröße verstehen. Tragen wir dasselbe in Fig. 3 auf der Körperachse

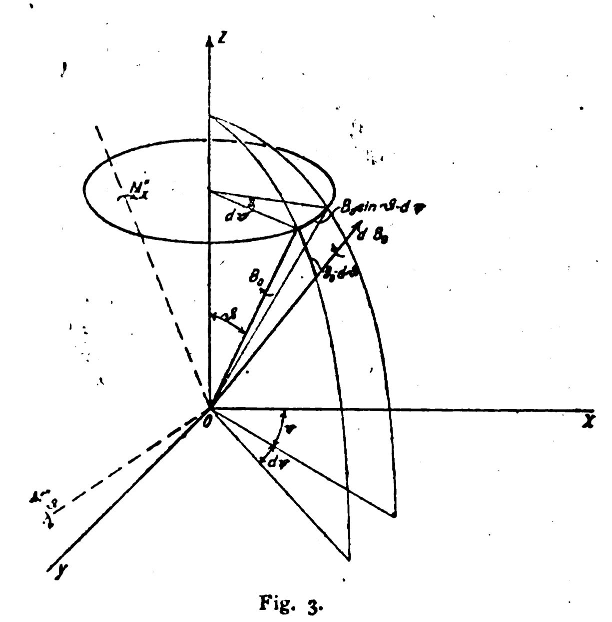


Fig. 3.

als Vektor auf, so werden durch seine Verschiebung um die Elementarwinkel $d\psi$ und $d\vartheta$ zwei neue unendlich kleine Drallvektoren geweckt, die ihrerseits als Ableitung zweier gleichgerichteter Momente M_χ'' und M_ϑ'' derart aufzufassen sind, daß diese mit Rücksicht auf den Drehsinn aus

$$\begin{aligned} B_0 &= \sin\vartheta\,d\psi = M_\vartheta''\,dt, \\ B_0\,d\vartheta &= -M_\chi''\,dt \end{aligned}$$

sich zu

$$\begin{aligned} M_\vartheta'' &= mk_0^2\dot\psi\sin\vartheta \\ M_\chi'' &= -mk_0^2\omega\dot\vartheta \end{aligned} \tag{9}$$

ergeben. Diese Momente haben, wie aus Fig. 3 hervorgeht, dieselben Achsen wie die durch (5) bestimmten und sind diesen darum einfach algebraisch hinzuzufügen, um die Gesamtmomente

$$\begin{aligned} M_\vartheta' + M_\vartheta'' &= M_\vartheta, \\ M_\chi' + M_\chi'' &= M_\chi, \end{aligned} \tag{10}$$

zu erhalten. Nach Ausführung dieser Addition erhalten wir unter gleichzeitiger Hinzunahme des dritten Momentes (7) um die Körperachse sowie mit den Trägheitsmomenten

$$mk^2 = \Theta, \quad mk_0^2 = \Theta_0 \tag{11}$$

die endgültigen Bewegungsgleichungen des Kreisels

$$M_\vartheta = \Theta(\ddot{\vartheta} - \dot{\psi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta) + \Theta_0 \, \omega \, \dot{\psi} \sin\vartheta$$
$$M_\chi = \Theta(\ddot{\psi} \sin\vartheta + 2\,\dot{\psi}\,\dot{\vartheta}\cos\vartheta) - \Theta_0\,\omega\,\dot{\vartheta}$$
$$M_0 = \Theta_0\,\dot{\omega}. \qquad (12)$$

Allerdings beschränkt sich deren Gültigkeit auf Rotationskörper, die aber sowohl in der Physik wie auch in technischen Anwendungen fast ausschließlich vorkommen. Dabei stellt $\dot{\psi}$ die Winkelgeschwindigkeit der Präzession, $\dot{\vartheta}$ diejenige der Nutation dar, die in den meisten Fällen klein gegen die eigentliche Kreiseldrehzahl ω sind. Trifft das nicht zu, so ist nicht zu übersehen, daß die letztere sich aus der Eigendrehzahl ω_0 und einem Anteil der Präzession derart zusammensetzt, daß

$$\omega = \omega_0 + \dot{\psi}\cos\vartheta \qquad (13)$$

wird. Darf diese alsdann gegenüber $\dot{\psi}$ und $\dot{\vartheta}$ meist große Winkelgeschwindigkeit ω als konstant angesehen werden, so fällt die dritte Gleichung (12) fort und man erhält nach Multiplikation der zweiten Formel (12) mit $\sin\vartheta$

$$M_\chi \sin\vartheta = \frac{d}{dt}(\Theta\,\dot{\psi}\sin^2\vartheta + \Theta_0\,\omega\cos\vartheta) = \frac{dB_z}{dt} \qquad (14)$$

worin B_z den Drall des Kreisels um die Achse OZ bedeutet. Ebenso ergibt sich nach Multiplikation der ersten Gleichung (12) mit $d\vartheta$, der zweiten mit $d\chi = d\psi \sin\vartheta$ und der dritten mit $\omega\,dt$ sowie Addition die Energiegleichung

$$M_\vartheta\,d\vartheta + M_\chi\,d\chi + M\,\omega\,dt = $$
$$= \frac{\Theta}{2}\,d(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\vartheta) + \frac{\Theta_0}{2}\,d(\omega^2), \qquad (15)$$

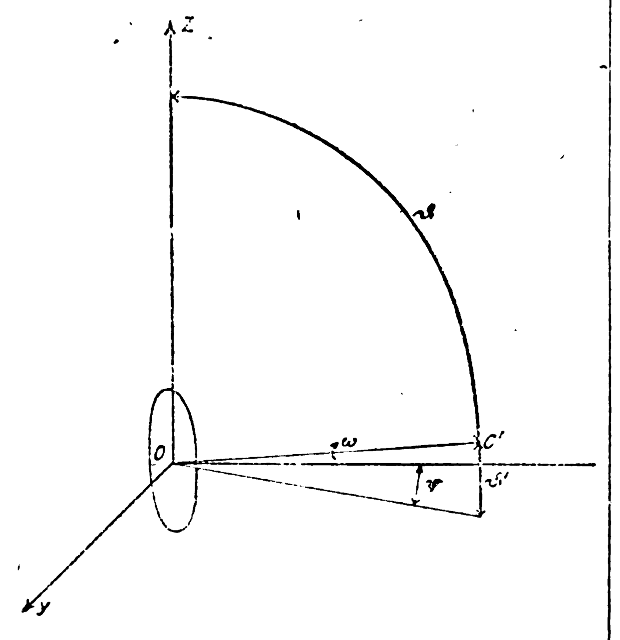


Fig. 4.

die im Verein mit (14) die Gleichungsgruppe (12) ersetzen kann.

Für die reguläre Präzession $\dot{\psi}$ = Konst. vereinfacht sich die erste Gleichung (12) mit

$$\dot{\vartheta} = 0, \quad \ddot{\psi} = 0, \quad \ddot{\vartheta} = 0$$

in

$$M_\vartheta = (\Theta_0\,\omega\,\dot{\psi} - \Theta\,\dot{\psi}^2\cos\vartheta)\sin\vartheta \quad (12a)$$

während M_χ identisch verschwindet, womit (14) in

$$\Theta_0\,\omega\cos\vartheta - \Theta\,\dot{\psi}\sin\vartheta = C \qquad (14a)$$

übergeht.

Handelt es sich um kleine Schwingungen der rasch rotierenden Kreiselachse OC um eine Mittellage, die wir zweckmäßig mit OX zusammenfallen lassen, so werden wir im Anschluß an Fig. 4

$$\vartheta = 90^0 - \vartheta', \qquad \dot{\vartheta} = -\dot{\vartheta}',$$
$$\sin\vartheta = \cos\vartheta' = 1$$

setzen, wodurch nach Unterdrückung von $\dot{\psi}^2$ und $\dot{\psi}\dot{\vartheta}$ als klein von zweiter Ordnung die ersten beiden Formeln (12) übergehen in die vielfach benutzten Ausdrücke

$$M_\vartheta = \Theta_0\,\omega\,\dot{\psi} - \Theta\ddot{\vartheta}'$$
$$M_\chi = \Theta_0\,\omega\,\dot{\vartheta} + \Theta\ddot{\psi}, \qquad (12b)$$

während die dritte Gleichung (12) für konstantes ω sich in diesem Falle erledigt.

(Eingegangen 3. April 1919.)

Bemerkungen zur Leuchtdauer der Serienlinien.

Von Fritz Reiche.

Vor einiger Zeit hat Herr J. Stark[1]) experimentell gefunden, daß bei den Serienlinien des Wasserstoffs, Heliums und Lithiums die Leuchtdauer mit steigender Gliednummer zunimmt.

Aus der Strahlungsdämpfung der klassischen Elektronentheorie läßt sich, wie auch Herr Stark betont, dieses Resultat nicht ableiten. Vielmehr nimmt die Amplitude A eines mit der Frequenz ω quasielastisch schwingenden Elektrons, dessen Schwingungen durch Strahlung gedämpft sind, nach dem Gesetz:

$$A = A_0 \cdot \varepsilon^{-bt} \qquad (1)$$

ab, wobei A_0 die Anfangsamplitude, t die Zeit ist, und

$$b = \frac{e^2\,\omega^2}{3\,m\,c^3} \qquad (2)$$

1) Ann. d. Phys. 49, 731, 1916.

(e und m sind hier Ladung und Masse des Elektrons, c ist die Lichtgeschwindigkeit).

Da mit zunehmender Gliednummer in der Serie ω zunimmt, so sind hiernach die höheren Glieder der Serie stärker gedämpft als die niedrigen. Die Leuchtdauer — etwa als diejenige Zeit definiert, in der die Amplitude der Schwingung auf $\frac{1}{\varepsilon}$ herabsinkt — würde demnach, im Gegensatz zu Starks Befund, mit steigender Gliednummer abnehmen.

Dagegen scheint mir die Quantentheorie des Bohrschen Atommodells einen Hinweis auf eine Erklärungsmöglichkeit der Starkschen Beobachtungen zu enthalten.

Wir wählen das einfachste Modell, das Wasserstoffatom, und betrachten nur Kreisbahnen. Die beim Übergang des Elektrons vom p-ten zum n-ten Quantenkreis emittierte Linie hat die Schwingungszahl:

$$\nu = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right), \tag{3}$$

wo

$$R = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3} \tag{4}$$

die Rydbergsche Zahl ist. Dabei ist h das Plancksche Wirkungsquantum.

Wir setzen

$$p = n + n' \tag{5}$$

und gehen zum Grenzfall hoher Ordnungszahlen n über; es sei also

$$\text{und ferner} \quad \left.\begin{array}{l} n >> 1 \\ n' << n \end{array}\right\}. \tag{6}$$

Dann wird

$$\nu = \frac{2Rn'}{n^3}. \tag{7}$$

Die Umlaufsfrequenz des Elektrons im n-ten Kreis ist:

$$\omega_n = \frac{8\pi^3 e^4 m}{n^3 h^3} = \frac{4\pi R}{n^3}. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt also:

$$2\pi\nu = \omega_n \cdot n'. \tag{9}$$

Nun geht aber für hohe Ordnungszahlen die Bohrsche Theorie in die klassische Elektronentheorie über, ein Umstand, auf den Bohr besonders in seinen jüngsten Veröffentlichungen[1]) mit Betonung hingewiesen hat.

Nach der klassischen Elektronentheorie strahlt ein Elektron, das mit der Umlaufsfrequenz ω_n einen Kreis vom Radius a_n durchläuft, in der Zeit τ die Energie:

$$S = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\omega_n^4 a_n^2 \tau \tag{10}$$

aus, wenn seine Geschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist. Andrerseits ist nach der Bohrschen Quantentheorie die in einem Emissionsakt ausgestrahlte Energie:

$$S = h\nu. \tag{11}$$

Aus (9), (10) und (11) folgt:

$$\tau = \tau_{nn'} = \frac{3hc^3 n'}{4\pi e^2 \omega_n^3 a_n^2}.$$

Setzt man hier für ω_n den Wert aus (8) ein, und für a_n den Wert

$$a_n = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 e^2 m}, \tag{12}$$

so folgt schließlich:

$$\tau_{nn'} = \frac{3h^6 c^3 n^5 n'}{128\pi^6 e^{10} m}. \tag{13}$$

Benutzt man hier die Zahlenwerte

$$h = 6{,}545 \cdot 10^{-27},\ c = 3 \cdot 10^{10};\ e = 4{,}774 \cdot 10^{-10};$$
$$\frac{e}{m} = 5{,}3042 \cdot 10^{17},$$

so wird

$$\tau_{nn'} = 9{,}349 \cdot 10^{-11} \cdot n^5 n'. \tag{14}$$

Für die aufeinanderfolgenden Glieder einer bestimmten Serie ist n konstant, während n' die Werte 1, 2, 3, ... annimmt. Aus (13) und (14) folgt also, daß für die aufeinanderfolgenden Glieder einer bestimmten Serie die „Leuchtdauer" $\tau_{nn'}$, d. h. die Dauer eines Emissionsaktes, mit steigender Gliednummer n' zunimmt, wie es Starks Beobachtungen ergeben.

Hierbei ist allerdings zu bedenken, daß die Ableitung nur für hohe Ordnungszahlen n, d. h. für Serien, die weit im Ultrarot liegen, Gültigkeit beansprucht. Es ist jedoch wahrscheinlich, daß die Beziehung (13), ihrem Sinn nach, auch für niedrige Ordnungszahlen Anwendung findet.

Würde man sie ohne weiteres z. B. auf die Balmerserie ($n = 2$) übetragen, so würde man finden:

$$\tau_{2,n'} \sim 3 \cdot 10^{-9} \cdot n',$$

also z. B. für H_γ ($n' = 3$):

$$\tau_{2,3} \sim 9 \cdot 10^{-9},$$

während Stark[1]) den rund 20 mal größeren Wert $2 \cdot 10^{-7}$ als obere Grenze angibt.

Die Zahl der bei einem Emissionsakt ausgesandten Schwingungen wird:

1) N. Bohr, On the quantum theory of line-spectra I und II. Kopenhagen, D. kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturvidensk. og Mathem. Afd. 8, Raekke IV, 1, 1918.

1) l. c. S. 765.

$$z_{nn'} = \tau_{nn'} \cdot \nu = \frac{\tau_{nn'}\,\omega_n\, n'}{2\pi} = \frac{3\,c^3 h^3 n^2 n'^2}{32\,\pi^4 e^6} = \qquad (15)$$
$$= 6{,}154 \cdot 10^5\, n^2 n'^2.$$

Würde man auch diese Formel ohne weiteres auf den Fall niedriger Ordnungszahlen übertragen, so würde z. B. für H_γ folgen:

$$z_{2,3} \backsim 2 \cdot 10^7.$$

Berlin, Mai 1919.

(Eingegangen 2. Mai 1919.)

Notiz zur Frage nach der Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes.

Von Walther Gerlach.

I.

Im folgenden soll auf einen Punkt hingewiesen werden, der, soweit ich aus der Literatur sehen kann, in der Diskussion über das elektrische Elementarquantum bisher unberücksichtigt geblieben zu sein scheint. Die sogenannte Stokessche Formel[1]), das Bewegungsgesetz einer kleinen Kugel in einem Widerstand leistenden Medium unter dem Einfluß einer konstanten Kraft, wird sowohl bei Millikans wie bei Ehrenhafts Messungen zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums verwendet. Nach theoretischen Betrachtungen E. Cunninghams[2]) muß die Stokessche Formel

$$K = 6\pi\mu a v$$

(K Kraft, welche auf das Teilchen wirkt, μ der Reibungskoeffizient des umgebenden Mediums, a Radius, v Geschwindigkeit des Teilchens), rechts mit einem Zusatzfaktor $\left(1 + A\frac{l}{a}\right)^{-1}$ versehen werden, worin l die freie Weglänge des umgebenden Mediums bedeutet und $A = \frac{1{,}63}{2 - f}$, f das Verhältnis der Zahl der elastischen Zusammenstöße zu der gesamten Zahl der Zusammenstöße des Teilchens mit den Gasmolekülen. Für vollkommen elastische Stöße ist $f = 1$, $A = 1{,}63$, für vollkommen unelastische Stöße $f = 0$, $A = 0{,}815$. Die Größe f steht also zweifellos mit der Beschaffenheit der Oberfläche des Teilchens in Beziehung. Die Gültigkeit der Stokes-Cunninghamschen theoretischen Formel ist nach Millikan auf den Bereich $\frac{l}{a} < 0{,}4$ beschränkt.

1) G. G. Stokes, Math. u. Phys. Paper 1, 41.
2) E. Cunningham, Proc. Roy. Soc. A. 83, 357, 1910.

Ehrenhaft schließt aus dem Vergleich der Resultate verschiedener Methoden zur Größenbestimmung ultramikroskopischer Teilchen auf $f = 0$, also $A = 0{,}815$; Millikan hatte empirisch für Öltröpfchen in Luft $A = 0{,}875$ erhalten, also nahe denselben Wert. Aus den zuletzt veröffentlichten Messungen Millikans[1]) folgt für Öl in Wasserstoff $A = 0{,}811$. Ähnliche Werte fanden Roux, Lee u. a. (A zwischen 0,815 und 1,0). Dagegen berechnet sich aus den Millikanschen Versuchen[1]) mit Hg-Kügelchen in Luft $A = 0{,}711$. (Diese A-Werte sind aus den in Tabelle I—IV und VI—VIII gegebenen Versuchsdaten berechnet:

$$A = \frac{\left(\frac{e_1}{e}\right)^{2/3} - 1}{\frac{l}{a}};$$

die Unsicherheit in der Berechnung des Wertes der freien Weglänge l ändert das Resultat qualitativ nicht.)

Dieser letzte Wert für Hg in Luft, $A = 0{,}711$, ist aber nicht mehr in Beziehung zur Cunninghamschen Theorie zu setzen, denn aus ihm würde folgen $f = -0{,}293$. Ein negativer f-Wert hat aber nach der Definition von f keine physikalische Bedeutung mehr. Er würde einem „überunelastischen Stoß" entsprechen, bei welchem die Gasmoleküle beim Zusammenstoß mit dem Teilchen mehr Energie abgeben, als sie besitzen. Das gleiche Resultat, f negativ, hatten auch E. Meyer und ich[2]) bei der Prüfung des Stokesschen Gesetzes an Metallteilchen gefunden, wo A zu 0,6 (entsprechend $f = -0{,}72$) angenommen werden mußte, um aus den bei ein und demselben Teilchen unter verschiedenen Drucken (700 — 30 mm Hg) bestimmten Fallgeschwindigkeiten einen vom Druck unabhängigen Radius zu erhalten.

Wenn nun bei den Versuchen von E. Meyer und mir die Abweichung wahrscheinlich darauf zurückzuführen ist, daß die im elektrischen Funken oder Bogen hergestellten festen Metallpartikel ein wesentlich kleineres spezifisches Gewicht haben als das feste Metall[3]), so liegt es nahe, auch bei Millikan die Differenzen zwischen dem mit $A = 0{,}815$ ($f = 0$) berechneten und dem nach seiner graphischen Methode bestimmten Teilchenmesser auf den gleichen Umstand zurückzuführen. Hiermit wäre aber eine neue Stütze für die auf schönen experimentellen Unter-

1) R. A. Millikan, Ann. d. Phys. 50, 729, 1916.
2) Edgar Meyer u. Walther Gerlach, Elster-Geitel-Festschrift (Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1915), S. 196.
3) Gründe s. Meyer u. Gerlach, l. c.

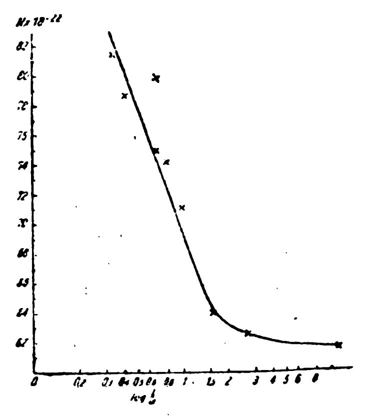
suchungen fußenden Anschauungen von Schidlof und Targonski[1]) gegeben, daß kleine Flüssigkeitsteilchen (auch Hg-Teilchen, wenn sie ganz rein sind) von einer Übergangsschicht Hg—Hg-Dampf—Luft umgeben sind, welche die mittlere Dichte des ganzen Teilchens auf einen niederen als den der reinen Substanz entsprechenden Wert bringt. Schließlich kann darüber hinaus noch das Fallgesetz durch die mit dem festen Teilchen halbstarr verbundene Übergangsschicht wesentlich modifiziert werden.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß auch die Messungen von Knudsen und Weber[2]) zu einem Wert $A = 0{,}683$ führen, welcher ebenfalls unter Zugrundelegung der Cunninghamschen Deutung für A einen negativen f-Wert ($f = -0{,}372$) ergibt.

II.

Auch die Bestimmung der Beweglichkeit der Teilchen aus der Brownschen Bewegung zeigt Ergebnisse, welche theoretisch schwer verständlich sind: Targonski[3]) hat die Loschmidtsche Zahl aus der Brownschen Bewegung von Öl und Quecksilberteilchen bestimmt für sehr verschiedene Werte l/a, wobei sowohl l (also der Druck des Gases) als auch a (die Größe der Teilchen) variiert wurde. Aus seinen Einzelwerten berechnen sich folgende Mittelwerte von N für mittlere Werte von l/a:

$\frac{l}{a}$	0,35	0,41	0,68	0,75	0,79
$N \times 10^{-22}$	81,6	78,5	74,9	79,4	73,6
$\frac{l}{a}$	0,99	1,12	1,59	2,80	11,02
$N \times 10^{-22}$	70,8	67,7	63,5	62,7	61,4



Diese Abhängigkeit von l/a, welche — teils in geringerem Maße — auch in anderen Versuchen (z. B. Fletscher, Eyring) auftritt, ist nach der Theorie der Brownschen Bewegung nicht zu erklären.

Zusammenfassung.

Die experimentelle Bestimmung der Beweglichkeit ultramikroskopischer Teilchen führt zu Resultaten, welche nach den Theorien der Fallgeschwindigkeit kleiner Kugeln (Stokes-Cunningham) und der Brownschen Bewegung nicht zu deuten sind.

Elberfeld, im April 1919. Physikal. Labor. der Farbenfabriken vorm. Fr. Bayer & Co.

(Eingegangen 24. April 1919.)

1) z. B. Arch. d. sc. phys. et nat. **43**, März—Mai 1917.

2) M. Knudsen u. S. Weber, Ann. d. Phys. **36**, 981, 1911.

3) A. Targonski, Arch. d. sc. phys. et nat. **41**, März—Mai 1916.

Über die elektrischen Figuren.

Von Karl Przibram.

(Mit Tafel XI.)

Im folgenden wird eine Deutung der polaren Unterschiede der elektrischen Figuren und damit auch der sie erzeugenden Büschel- bzw. Streifenentladung gegeben, zu der der Verfasser durch eine längere Reihe von Untersuchungen[1]) gelangt ist.

Die gebräuchlichste Anordnung zur Erzeugung elektrischer Figuren besteht darin, daß eine isolierende Platte (Harzkuchen, photographische Platte) auf eine Metallunterlage gelegt, eine Elektrode auf die Oberseite der Platte aufgesetzt und zwischen Elektrode und Metallunterlage plötzlich eine hohe Spannung angelegt wird.

Da die Luft nur eine gewisse elektrische Feldstärke aushalten kann, ohne leitend zu werden, so wird bei genügender Spannung ein Zusammenbruch ihres Isoliervermögens in Form einer leuchtenden Entladung stattfinden, ohne daß die Isolatorplatte, deren elektrische Festigkeit größer ist als die der Luft, durchschlagen wird.

Fände keine Störung des elektrischen Feldes durch die Entladung statt, so würde sich diese so weit von der Elektrode nach außen ausbreiten, als das von der Ladung der Elektrode herrührende Feld jenen, der elektrischen Festigkeit der Luft entsprechenden Wert übersteigt. Nun wandert aber ein Teil der Ladung

1) Wien. Ber. **108**, 1161—1171, 1899 (Umkehrung der Figuren in CO_2); **109**, 902—904, 1900; **110**, 960 bis 963, 1901; **113**, 439—468, 1904; **113**, 1303—1316, 1904 (schlecht leitende Flüssigkeiten); **113**, 1491—1507, 1904; **114**, 1461—1476, 1905 (schlecht leitende Flüssigkeiten); **116**, 557—570, 1907 (A, He); **121**, 2163—2168, 1912 (Chlor); **127**, 395—404, 1918.

infolge des Niederbruchs durch die leitend gewordene Luft in das Feld hinaus und erhöht so die Feldstärke nach außen hin; die Entladung kann sich daher über die durch das ursprüngliche ungestörte Feld gezogene Grenze hinaus noch weiter ausbreiten, sie schiebt, wie M. Toepler[1]), dem wir die Aufklärung der „Gleiterscheinungen" der Entladung verdanken, sagt, das zu ihrer Ausbreitung nötige Gefälle mit sich fort. Der Entladungsvorgang kommt erst dann zum Stillstand, die ihm entsprechende elektrische Figur hat erst dann ihre größte Ausdehnung erreicht, wenn die längs der Entladungsbahnen hinausfließende Ladung nicht mehr imstande ist, das ursprüngliche Feld über den zum Durchbruch erforderlichen Wert zu steigern.

Das Feld am Außenrande des Entladungsgebiets wird nun um so stärker ansteigen und die weitere Ausbreitung daher um so mehr begünstigt werden, je besser leitend die Entladungsbahnen sind und auf je weniger Radien der Leitungsvorgang beschränkt bleibt. Am günstigsten für das Wachstum ist ja offenbar der Fall, daß von der punktförmig gedachten Elektrode eine einzige dünne, gut leitende Entladungsbahn ausgeht; ihr jeweiliger Endpunkt wirkt ja dann als neue, der wirklichen gleichwertige Elektrode. Breitet sich dagegen die Ladung gleichförmig rings um die Elektrode aus, so ist die Steigerung der Feldstärke am Entladungsrande weit geringer, wie eine einfache elektrostatische Überlegung lehrt. Die beiden Bedingungen: gutes Leitvermögen und Lokalisierung längs einzelner Bahnen erscheinen nicht unabhängig voneinander; denn wenn sich einmal eine gut leitende Bahn gebildet hat, längs der ein großer Teil der auf der Elektrode sitzenden Ladung abfließen kann, so wird es weniger leicht zur Ausbildung neuer benachbarter Bahnen kommen.

Ionentheoretisch wird der Niederbruch des Isoliervermögens der Luft durch den Ionenstoß erklärt. Der Vorgang gestaltet sich verschieden, je nachdem die Elektrode negativ oder positiv ist, weil die negativen Ionen unter sonst gleichen Umständen weit wirksamere Ionisatoren sind als die positiven und daher schon bei Feldstärken starke Ionisation bewirken, bei denen die positiven sich noch nicht merklich an der Stoßionisation beteiligen[2]).

1) Vgl. diese Zeitschr. 8, 743—748, 1907.

2) Von der Frage, ob es überhaupt eine definierte Ionisierungsspannung der positiven Ionen gibt, werden die folgenden Überlegungen nicht berührt; es genügt die Tatsache, daß bei schwacher primärer Ionisierung die Stoßwirkung der positiven Ionen im Vergleich zu der der negativen zu vernachlässigen ist. Vgl. J. Franck u. G. Hertz, diese Zeitschr. 17, 414, 1916.

Ist die Elektrode negativ, so wandern die in einer zweifachen Grenzionisierungsschichte an der Elektrode gebildeten negativen Ionen in das Feld hinaus und können bei genügender Feldstärke längs einer größeren Strecke ionisieren, ohne daß gleichzeitig die durch sie gebildeten positiven Ionen auch ionisieren. Ist die Elektrode positiv, wandern also die in der zweifachen Grenzionisierungsschicht an der Elektrode gebildeten positiven Ionen in das Feld hinaus, so werden sie bei einer Feldstärke, bei der im früheren Fall (negative Elektrode) schon längere Ionisierungsstrecken gebildet wurden, noch nicht merklich ionisieren; steigt aber die Feldstärke so stark an, daß die positiven Ionen doch starke Ionisierung bewirken, so werden um so mehr auch die jetzt gebildeten wirksameren negativen Ionen ionisieren, so daß die Leitfähigkeit der so gebildeten Entladungsbahnen größer sein wird als im Falle einer negativen Elektrode.

Die Entladung an der positiven Elektrode wird also erst bei höherer Spannung einsetzen als an der negativen, dafür aber sofort besser leitende Bahnen bilden, wodurch, wie oben gesagt, gleichzeitig die Bedingungen für die weitere Ausbreitung der Entladung und für die Beschränkung auf einzelne wenige Bahnen gegeben sind.

Zu berücksichtigen ist auch die Ionenabwanderung vom Ende des Entladungsgebiets. Die Feldstärke und mit ihr die Neigung der Entladung, weiter zu greifen, wird hier um so größer sein, je plötzlicher der Übergang von der gut leitenden Entladungsbahn zur noch nicht ionisierten Luft ist. Das Hinauswandern der in der Entladungsbahn gebildeten Ionen wird das Gefälle abschwächen, und zwar um so mehr, je beweglicher die betreffenden Ionen sind, was im allgemeinen von den negativen Ionen gilt. Auch der Unterschied der Beweglichkeiten wird also bewirken, daß die positive Figur sich im allgemeinen weiter ausbreiten kann als die negative.

So erklären sich die wichtigsten polaren Unterschiede der elektrischen Figuren aus dem verschiedenen Ionisierungsvermögen und der verschiedenen Beweglichkeit der Ionen beider Vorzeichen; die negative Figur breitet sich gleichmäßiger, aber weniger weit um die Elektrode herum aus, die positive bleibt auf weniger Radien beschränkt, erstreckt sich aber längs dieser Radien weiter: abgerundete Form der kleineren negativen Figur, Strahlenform der größeren positiven Figur.

Auch die Tatsache, daß die negativen Figuren fast durchwegs verschwommen, die posi-

tiven dagegen scharf begrenzt sind, findet durch dieselbe Überlegung eine Erklärung: eine merkliche Ionisierung durch positive Ionen, ohne daß gleichzeitig die dadurch gebildeten negativen Ionen auch ionisieren, ist nicht möglich; hört an der Grenze der positiven Figur die Ionisierung durch die positiven Ionen auf, so fällt auch gleichzeitig die Ionisierung durch die negativen fort; die Ionisierung und mit ihr das Leuchten sinkt also von einem beträchtlichen Wert sofort auf Null herab. Bei der negativen Figur dagegen, bei der auch die negativen Ionen allein ionisieren können, ist ein allmählicher Übergang möglich. Der Unterschied in der Schärfe der Begrenzung wird sehr auffallend bei niedrigen Drucken, bei denen der Strahlencharakter der positiven Figur zurücktritt, vgl. die Fig. 1 und 2, negativ und positiv, bei etwa 50 mm Druck und 2000 Volt Spannung, Glasdicke etwa 1 mm.

Bei Erreichung einer gewissen Spannung verändert sich bekanntlich der Charakter der Figuren: es schießen aus den bei niedrigen Spannungen allein auftretenden regelmäßigen „Polbüscheln"[1]) (Figuren erster Art) die eigentlichen „Gleitbüschel"[2]) mit helleuchtenden Stielen hervor (Figuren zweiter Art). Das helle Leuchten verrät schon eine besonders starke Ionisierung und wir können mit Toepler diesen Stielen eine fallende Charakteristik zuschreiben. Die Ursache hierfür ist wohl die, daß bei wachsender Stromstärke (Erwärmung!) die Ionisierung gefördert wird, die stärkere Ionisierung aber wiederum einen erhöhten Elektrizitätszufluß bewirkt. Dieses Stadium wird um so eher eintreten, je mehr von vornherein die Strömung, wie bei den positiven Figuren, auf einzelne Bahnen beschränkt ist[2]), und es ist daher erklärlich, daß für das Auftreten positiver Gleitbüschel im allgemeinen eine niedrigere Spannung erforderlich ist als für negative Gleitbüschel.

Nach dem bisher Gesagten spielt bei den positiven Figuren die längs einzelner Bahnen hinausströmende Ladung eine größere Rolle als bei den negativen; letztere sind mehr durch das ursprüngliche Feld der Elektrode bestimmt. Dies könnte die Ursache dafür sein, daß die negativen Figuren im allgemeinen weit regelmäßiger sind als die positiven und sich deutlicher als Kraftlinienbilder darstellen als diese, die durch die Felder der hinausströmenden Ladungen stärker deformiert werden; daher die stärkere Schlängelung und Verästelung der positiven Züge.

1) M. Toepler, Ann. d. Phys. 53, 217—234, 1917.

2) So erhält man in schlecht leitenden Flüssigkeiten hauptsächlich Figuren zweiter Art, da hier infolge der hohen elektrischen Festigkeit der Durchbruch nur längs einzelner Linien erfolgt.

Alle angeführten polaren Unterschiede der elektrischen Figuren sind also zurückzuführen auf den Unterschied der Ionen beider Vorzeichen, der wieder auf den Fundamentalunterschied: negatives Elektron — positives Molion zurückgeht. Je geringer in einem Gase der Unterschied der beiden Ionenarten ist, desto mehr müssen die polaren Unterschiede der elektrischen Figuren zurücktreten. Der Unterschied der Ionen hängt aber wiederum von der Elektronenaffinität des betreffenden Gases ab; je größer diese ist, desto rascher erfolgt die Molisierung der zunächst freien Elektronen, desto geringer ist ihre Lebensdauer, desto weniger wird sich also das „mittlere negative Ion" vom positiven unterscheiden.

Nach den Untersuchungen von J. Franck[1]) ordnen sich die Gase nach zunehmender Elektronenaffinität etwa in folgende Reihe: Edelgase, Stickstoff, Wasserstoff, Sauerstoff, Chlor. In derselben Reihe sollten die polaren Unterschiede der elektrischen Figuren abnehmen. Daß dem tatsächlich so ist, geht wohl am deutlichsten aus den vom Verfasser[2]) in den Wiener Berichten veröffentlichten Bildern hervor, die er deshalb hier nochmals zum Abdruck bringen möchte.

Die typischen Unterschiede der Figuren in Luft können als bekannt vorausgesetzt werden (vgl. etwa die Aufnahmen von S. Mikola[3]). In Stickstoff sind die positiven Figuren etwas stärker verästelt als in Luft, insbesondere zeigen ihre Äste an den Enden feine, unter relativ großen Winkeln abgehende Verzweigungen, wie sie in Luft nicht beobachtet werden: Fig. 3, Stickstoff, positiv, 300 mm Druck, 13000 Volt; die negativen Figuren, die denen in Luft im übrigen ähnlich sind, zeigen sehr geringe Neigung zu Gleitbüschelbildung, so daß man sehr große negative Figuren erster Art erhalten kann: Fig. 4, Stickstoff, negativ, Atmosphärendruck, 42000 Volt, während in Luft schon bei 32000 Volt Gleitbüschel hervorschießen: Fig. 5, Luft, negativ, Atmosphärendruck 32000 Volt.

1) J. Franck, Jahrb. d. Rad. u. El. 9, 251, 260, 1912; J. Franck u. G. Hertz, diese Zeitschr. 17, 409, 430, 1916.

2) Wien. Ber. 127, 395—404, 1918. Die Glasdicke betrug bei allen Aufnahmen annähernd 1 mm, nur bei den Aufnahmen in Chlor 5 mm. Mit zunehmender Glasdicke wachsen im allgemeinen die polaren Unterschiede der Figuren.

3) Diese Zeitschr. 18, 158, 1917.

	Radius[1]) in mm der Polbüschel bei 13000 Volt						Spannung in Kilovolt für Gleitbüschelbildung	
	Glasdicke 5 mm			Glasdicke 1 mm			Glasdicke 1 mm	
	+ Fig.	— Fig.	Quot. +/—	+ Fig.	— Fig.	Quot. +/—	+ Fig.	— Fig.
Luft	20	5	4	16	7	2,3	über 13, unter 20	über 24, unter 32
N_2	23	7	3,3	17	8,5	2,0	„ 13, „ 24	„ 42, „ ?
H_2	21,5	8	2,7	17	11	1,5[2])	„ 7, „ 13	„ 13, „ 24
CO_2	6,5	3,5	1,9	5	3	1,7[3])	„ 13, „ 24	„ 13, „ 24
O_2	6,5	3	2,2	4	3,5	1,1[3])	„ 20, „ 22	„ 17, „ 20
Cl_2	5	3	1,7	—	—	—	zirka 24	zirka 24

In Sauerstoff[4]) werden die beiden Figuren einander viel ähnlicher; beide sind ärmlich im Vergleich zu denen in Luft, und insbesondere fehlen die palmettenförmigen Endungen der negativen Gleitbüschel: Fig. 6, positiv, Fig. 7 negativ, Sauerstoff, Atmosphärendruck 24000 Volt. In Chlor sind die Figuren kaum mehr zu unterscheiden, nur eine etwas stärkere Schlängelung und Zerfaserung läßt die positive Figur erkennen: Fig. 8 positiv, Fig. 9 negativ, Chlor, Atmosphärendruck, 32000 Volt. Die negativen Gleitbüschel zeigen hier auch nicht jene fast rechtwinkligen Abknickungen der sonst geraden oder großzügig geschwungenen Stiele, die diese Figuren in Luft und auch noch in Sauerstoff charakterisieren.

Über die Größenverhältnisse gibt obige Tabelle Aufschluß.

Von Luft abgesehen, die wohl als Gasgemisch in bezug auf die Größenverhältnisse, nicht aber in bezug auf die Formunterschiede eine Sonderstellung einnimmt, folgen die Gase im ganzen, auch was das Verhältnis der Figurengrößen anbelangt, der Reihe der Elektronenaffinitäten, wobei noch als weitere Bestätigung daran zu erinnern ist, daß, wie der Verfasser in einer früheren Arbeit[5]) gezeigt hat, der Größenunterschied der beiden Figuren in *He* und *A* noch etwas größer ist als in Luft, also nach obiger Tabelle auch größer als in N_2. Gerade aus seinen Beobachtungen in Argon konnte der Verfasser für dieses Gas eine besonders große Verschiedenheit der beiden Ionenarten vorhersagen, noch ehe J. Franck[1]) die Existenz freier Elektronen in den Edelgasen entdeckt hatte.

Die letzten Spalten der Tabelle zeigen, daß auch die für die negativen Gleitbüschel erforderliche Spannung, soweit sie einigermaßen bestimmbar ist, sich mit zunehmender Elektronenaffinität der im allgemeinen etwas niedrigeren für die positiven Gleitbüschel nähert.

Somit können die auffallendsten polaren Unterschiede der elektrischen Figuren ionentheoretisch gedeutet werden. In Übereinstimmung mit dieser Deutung nehmen sie ab mit zunehmender Elektronenaffinität des Gases, und insofern die Elektronenaffinität mit dem elektrochemischen Charakter zusammenhängt, bestätigt sich die schon von Reitlinger[2]) auf Grund seiner Untersuchungen an Lichtenbergschen Staubfiguren und der Beobachtungen Faradays an Büscheln ausgesprochene Vermutung, daß die polaren Unterschiede mit dem elektrochemischen Charakter des Gases zusammenhängen.

Anmerkung bei der Korrektur (29. Mai 1919): In einer vorläufigen Versuchsreihe hat sich der Verf. durch direkte Messungen überzeugt, daß die bei der Bildung einer positiven Figur auf die Platte übergehende Ladung tatsächlich größer ist als bei der Bildung einer negativen Figur, wie ja schon aus verschiedenen Gründen anzunehmen war. In einer gehaltvollen Arbeit, die dem Verf. erst nach Abschluß dieser Mitteilung zur Kenntnis kam, hat P. O. Pedersen (Danske Vidensk. Selsk. I, Nr. 11, 1919) die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Figuren gemessen und für die positiven zwei- bis viermal so groß gefunden wie für die negativen. Da dieses Verhältnis der Geschwindigkeiten eher größer ist als das der beiden Figurenradien unter gleichen Umständen (kürzere Dauer der positiven Entladung), so folgt aus der größeren

1) Die an beiden Polen angelegten Kapazitäten betrugen etwa je 3000 cm; um den Grenzwert der Büschelgrößen für sehr große Kapazität zu erhalten, sind obige Zahlen etwa um die Hälfte zu erhöhen. (Vgl. Wien. Ber. **127**, 396, 1918.)

2) Nicht streng vergleichbar, da hier Gleitbüschel auftraten.

3) Die infolge der Kleinheit und geringen Deutlichkeit der Büschel unsicheren Werte des Verhältnisses in diesen Gasen werden gestützt durch die Resultate bei niedrigen Drucken (größere Büschelradien).

4) Auf den besten in diesem Gase erhaltenen Figuren erster Art (sie sind im allgemeinen viel undeutlicher als die in Luft aufgenommenen) ist zu erkennen, daß auch der Unterschied zwischen scharfer positiver und verschwommener negativer Begrenzung hier schwindet; auch die positiven Äste endigen verschwommen.

5) Wien. Ber. **116**, 570, 1907.

1) Verh. d. D. phys. Ges. **12**, 291, 1910.

2) Wien. Ber. **43**, 539, 1861.

Ladung der positiven Figuren auch eine größere mittlere Stromstärke bei der Bildung der positiven Figuren bei gleicher angelegter Spannung, und, da der Gesamtquerschnitt der positiven Leitungsbahnen an der Elektrode zumindest nicht größer ist als der der negativen, auch tatsächlich eine größere mittlere Leitfähigkeit der positiven Leitungsbahnen, wie oben gefordert! Daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit der positiven Figuren größer ist als die der negativen, hat übrigens der Verf. schon in seiner Erstlingsarbeit (l. c. 1899) geschlossen.

Wien, 22. März 1919.

(Eingegangen 31. März 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Schwankungserscheinungen in der Physik.

Von Reinhold Fürth.

Einleitung.

Die Entwicklung der physikalischen Forschung in den letzten Jahren hat uns gezeigt, daß wir zu einer, mit den Beobachtungen im Einklang stehenden Theorie der physikalischen Erscheinungen nur dann gelangen können, wenn wir die im Gebiete des Makroskopischen geltende Phänomenologie verlassen und eine Deutung auf Grund einer molekularen Kinetik vornehmen. Der Grund dieser Nötigung liegt darin, wie die Beobachtung der meisten physikalischen Erscheinungen bei Annäherung an mikroskopische Dimensionen gezeigt hat, daß sie im Gegensatz zu ihrem makroskopischen Verhalten gewissen Schwankungen unterworfen sind, die vollkommen nach Gesetzen des Zufalls vor sich gehen und sich desto stärker bemerkbar machen, zu je kleineren Dimensionen die Beobachtung vordringt. Während nun die Phänomenologie bei der Deutung dieser Erscheinungen versagen muß, sind diese durch die kinetischen Theorien von vornherein gefordert, so daß die Auffindung der Schwankungserscheinungen in einem gewissen Sinne direkt als Beweis der Richtigkeit der kinetischen Auffassung dienen kann.

Die kinetische Theorie deutet die einfachen Gesetzmäßigkeiten im Gebiete des Makroskopischen als statistische Massenerscheinungen, bei denen ungeheuer viele Einzelfälle mitwirken, während ein Beobachter im molekularen Gebiete von einer Gesetzmäßigkeit überhaupt nichts bemerken könnte. Es muß nun ein Gebiet geben, wir wollen es das mikroskopische nennen, in dem der Beobachter zwar auch, wie im makroskopischen, nicht die Einzelereignisse, sondern nur die Wirkung einer größeren Anzahl solcher zugleich wahrnehmen kann, aber dennoch die Zahl dieser Einzelereignisse schon so stark reduziert ist, daß die beobachteten Größen unregelmäßigen Schwankungen unterworfen erscheinen. Die Beobachtung dieser Vorgänge ist offenbar für die physikalische Forschung von eminenter Bedeutung, da ihre Messung nach den Prinzipien einer statistischen Untersuchung quantitative Schlüsse auf die nicht direkt beobachteten Vorgänge in den molekularen Dimensionen zuläßt und dadurch zum ersten Male die Möglichkeit gibt, die kinetische Theorie auf realer Basis auf ihre Richtigkeit zu prüfen.

Dazu ist allerdings erst ein Anfang gemacht worden, und ich will im folgenden versuchen, das bis jetzt Erreichte in systematischer Weise zusammenzustellen, um den Überblick über die Tatsachen zu erleichtern.

Um in der Darstellung der einzelnen Schwankungserscheinungen nicht aufgehalten zu sein, will ich zunächst diejenigen mathematischen Hilfsmittel der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, die für alle Schwankungserscheinungen die Grundlage bilden vorausschicken und dann der Reihe nach diejenigen Gebiete der Physik besprechen, auf denen derartige Erscheinungen beobachtet wurden oder zumindest Hoffnung für eine experimentelle Verifikation vorhanden ist.

Ich hoffe durch diese einheitliche Behandlungsweise den innigen Zusammenhang dieser Phänomene, der, wie ich glaube, in der Literatur zu wenig betont zu werden pflegt, zeigen zu können.

Kapitel I. Die Schwankungen vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Entkleidet man die Theorien der verschiedenen physikalischen Schwankungserscheinungen ihres, der jeweiligen Erscheinungsform angepaßten Gewandes und sucht den mathematisch-wahrscheinlichkeitstheoretischen Kern herauszuschälen, so findet man, daß bei den meisten vorliegenden Problemen folgendes altbekannte Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung zugrunde liegt.

Wir betrachten eine Serie, bestehend aus N voneinander unabhängigen Einzelereignissen, deren jedes entweder „günstig“ oder „ungünstig“

ausfallen kann. Die für alle N Einzelereignisse gleiche Wahrscheinlichkeit eines günstigen Ausfalles sei p, die eines ungünstigen $q = 1 - p$. Die Anzahl der günstigen Ereignisse einer solchen Serie sei n. Vorausgesetzt ist nun, daß es in unserem Ermessen steht, beliebig viele solcher Serien nacheinander in unbegrenzter Anzahl zu beobachten. Dabei lassen wir die Möglichkeit offen, daß der günstige oder ungünstige Ausfall eines bestimmten Einzelereignisses in der k-ten Serie auf den Ausfall desselben Ereignisses in der $k+1$ ten Serie irgendeine Nachwirkung ausübt (Wahrscheinlichkeitsnachwirkung). Gefragt ist nun nach den Gesetzmäßigkeiten, nach denen sich die Zahlen n in der Zeit verteilen.

A. Schwankungen ohne Wahrscheinlichkeitsnachwirkung.

Unter diesen Umständen ist der Ausfall irgendeiner Serie von der vorausgegangenen gänzlich unabhängig, wir haben eine „statistische" Reihe im engeren Sinne vor uns.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$W(n)$: Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Zahl n, $N - n = m$, $\nu =$ Mittelwert der Zahl n, λ: jene größte ganze Zahl, die von ν übertroffen wird.

Nach dem Bernoullischen Theorem nennen wir

$$\nu = pN \qquad \delta = \frac{n-\nu}{\nu}$$

„relative Schwankung" von n. Sind n_1 und n_2 zwei aufeinanderfolgende Werte von n, so bezeichnen wir $\Delta = n_1 - n_2$. Folgen die einzelnen Serien in gleichen Zeitabständen τ aufeinander, so heiße „durchschnittliche Dauer des n-Zustandes" die Zeit, während derer im Mittel ununterbrochen die Zahl n auftritt. Sie werde mit T bezeichnet. Ähnlich sei Θ die durchschnittliche Wiederkehrzeit des n-Zustandes.

Es lassen sich leicht folgende Formeln ableiten:

$$W(n) = \binom{N}{n} p^n q^m \text{ (Newtonsche Formel).} \tag{1a}$$

$$\overline{|\delta|} = 2W(\lambda)\left(1 - \frac{\lambda p}{\nu}\right). \tag{2a}$$

Beweis: $n - \nu = n - pN = qn - pm$

$$\nu\overline{|\delta|} = \sum_{n=0}^{N} W(n)|n-\nu| = \sum_{n=0}^{\lambda} \frac{N!}{n!\,(m-1)!} p^{n+1} q^m - \sum_{n=0}^{\lambda} \frac{N!}{(n-1)!\,m!} p^n q^{m+1} + \sum_{n=\lambda+1}^{N} \frac{N!}{(n-1)!\,m!} p^n q^{m+1}$$

$$- \sum_{n=\lambda+1}^{N} \frac{N!}{n!\,(m-1)!} p^{n+1} q^m = \frac{2N!}{\lambda!\,(N-\lambda-1)!} p^{\lambda+1} q^{N-\lambda} = 2W(\lambda)(N-\lambda)p.$$

$$\overline{\delta^2} = \frac{q}{\nu} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{N}. \tag{3a}$$

Beweis:
$$\nu^2\overline{\delta^2} = \sum_{n=0}^{N} W(n)(\nu^2 - 2n\nu + n^2) = \nu^2 - 2\nu Np \sum_{n=1}^{N} \binom{N-1}{n-1} p^{n-1} q^m$$

$$+ N(N-1)p^2 \sum_{n=2}^{N} \binom{N-2}{n-2} p^{n-2} q^m + Np \sum_{n=1}^{N} \binom{N-1}{n-1} p^{n-1} q^m$$

$$= \nu^2 - 2\nu^2 + (\nu^2 - \nu p) + \nu = \nu q = Npq.$$

Die Formeln (2) bzw. (3) wollen wir als Formeln für die „Schwankungsgröße" bezeichnen[5, 6, 7, 8, 9, 10]).

Ferner erhält man sofort bei festgehaltenem n_1

$$\overline{\Delta(n_1)} = (\overline{n_1 - n_2}) = n_1 - \overline{n}_2 = n_1 - \nu.$$

Daher allgemein

$$\overline{\Delta(n)} = n - \nu. \tag{4a}$$

Ferner für willkürliches n_1

$$\overline{\Delta^2} = \overline{(n_1 - n_2)^2} = \overline{(n_1 - \nu)^2} + \overline{(n_2 - \nu)^2}$$
$$- 2\overline{(n_1 - \nu)(n_2 - \nu)} = 2\nu^2\overline{\delta^2}$$

oder mit Benutzung von (3)

$$\overline{\Delta^2} = 2\nu q. \tag{5a}$$

Die Formeln (4) und (5) bezeichnen wir als Formeln für die „Schwankungsgeschwindigkeit"[9, 10]).

Schließlich ergibt eine einfache Überlegung

$$T = \frac{\tau}{1 - W(n)}, \tag{6a}$$

$$\Theta = \frac{\tau}{W(n)}. \tag{7a}$$

Wir wollen nun zwei Grenzfälle betrachten,

in denen unsere Formeln eine in den Anwendungen besonders wichtige Gestalt annehmen.

Grenzfall 1.

Die Zahl N der Ereignisse einer Serie sei so groß, die Wahrscheinlichkeit p des Einzelereignisses dagegen so klein, daß gleichzeitig

$$p << 1, \quad N >> 1, \quad pN = \nu$$

endlich und von Null verschieden, $q \backsim 1$. Unter dieser Annahme ergibt sich bei entsprechender Vernachlässigung

$$W(n) = \frac{N^n}{n!} \cdot p^n \cdot (1-p)^N = \frac{N^n}{n!} \frac{\nu^n}{N^n} e^{-pN}$$

oder

$$W(n) = \frac{e^{-\nu} \nu^n}{n!} \quad \text{(Poissonsche Formel).} \qquad (1a')$$

Unter Benutzung von (1a') erhält man ferner für die Schwankungsgröße die Formeln

$$\overline{|\delta|} = 2W(\lambda) = \frac{2e^{-\nu}\nu^\lambda}{\lambda!}, \qquad (2a')$$

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{\nu}. \qquad (3a')$$

Die Schwankungsgeschwindigkeit wird

$$\overline{\Delta}(n) = n - \nu, \qquad (4a')$$

$$\overline{\Delta^2} = 2\nu. \qquad (5a')$$

T und Θ ergeben sich durch Einsetzen von (1a') in (6a) und (7a).

Grenzfall 2.

Sowohl N als auch ν und n seien so groß, daß man δ als kontinuierliche Veränderliche ansehen kann, ohne daß $p << 1$ ist. Da in diesem Falle größere Abweichungen der n vom Mittelwert ν sehr unwahrscheinlich werden, ist die Annahme zu machen $\delta << 1$, so daß höhere als die zweiten Potenzen in δ gegen 1 vernachlässigt werden können, gleichzeitig aber

$$n - \nu = \nu\delta >> 1.$$

$W(n)$ erhält dann die Gestalt des Gaußschen Fehlergesetzes, und zwar[11])

$$W(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi p q N}} e^{-\frac{\nu^2}{2pqN}\delta^2}. \qquad (1a'')$$

Beweis: Wir setzen $qN = \mu$, daher

$$q\nu = p\mu, \quad N - \nu = \mu,$$

$$W(n) = W(\nu) \frac{(N-\nu)\ldots(N-n+1)}{(\nu+1)\ldots n} p^{n-\nu} q^{m-\mu}$$

$$= W(\nu) \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu\delta+1)}{(\nu+1)\ldots\nu+\nu\delta)} \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu\delta}$$

$$= W(\nu) \frac{\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\left(\frac{2}{\mu}\right)\right)\ldots\left(1-\frac{(\nu\delta-1)}{\mu}\right)}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(1+\frac{2}{\nu}\right)\ldots\left(1+\frac{\nu\delta-1}{\nu}\right)(1+\delta)}$$

$$\log W(n) = \log W(\nu) - \sum_{k=1}^{k=\nu\delta-1} k\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\mu}\right) - \delta$$

$$= \log W(\nu) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\mu}\right)\nu\delta(\nu\delta-1) - \delta$$

$$W(n) = W(\nu) \cdot e^{-\frac{\nu^2\delta^2}{2}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\mu}\right)+\frac{\nu\delta}{2}\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}\right)}.$$

Durch Anwendung der Stirlingschen Formel ergibt sich

$$W(\nu) = \frac{N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}}{\nu^\nu e^{-\nu}\sqrt{2\pi\nu}\cdot\mu^\mu e^{-\mu}\sqrt{2\pi\mu}} \left(\frac{\nu}{N}\right)^\nu \cdot \left(\frac{\mu}{N}\right)^\mu$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi p q N}}.$$

Vernachlässigt man schließlich $\nu\delta$ gegen $(\nu\delta)^2$, so ergibt sich

$$W(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi p q N}} \cdot e^{-\frac{\nu^2}{2pqN}\delta^2}.$$

Da wir δ als kontinuierliche Veränderliche auffassen, so haben wir nun die Wahrscheinlichkeit $W(\delta)$ so zu definieren, daß $W(\delta)\,d\delta$ die Wahrscheinlichkeit bedeuten möge, daß δ zwischen δ und $\delta + d\delta$ liegt. Es wird daher

$$W(\delta)\,d\delta = \nu \cdot W(n)\,d\delta$$

oder

$$W(\delta)\,d\delta = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi q}} \cdot e^{-\frac{\nu}{2q}\delta^2}\,d\delta. \qquad (8a)$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Formel tatsächlich der Bedingung genügt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(\delta)\,d\delta = 1.$$

Man erhält ferner für die Schwankungsgröße

$$\overline{|\delta|} = 2\int_0^\infty \delta \cdot W(\delta)\,d\delta = \sqrt{\frac{2q}{\nu\pi}}, \qquad (2a'')$$

$$\overline{\delta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2 \cdot W(\delta)\,d\delta = \frac{q}{\nu}, \qquad (3a'')$$

welche Formeln man auch direkt aus (2a') und (3a') mittels der Stirlingschen Formel erhalten kann. Die Größen $\overline{|\delta|}$ und $\sqrt{\overline{\delta^2}}$ haben in diesem Falle ein konstantes Verhältnis, nämlich

$$\frac{\overline{|\delta|}}{\sqrt{\overline{\delta^2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}7979\ldots$$

Grenzfall 3.

Die Bedingungen des Grenzfalls (2) bleiben aufrecht, wozu aber noch die des Grenzfalls (1) $p << 1$, oder $\nu << N$ hinzukommt.

Dann ist wieder $q \sim 1$ und man erhält die Formeln[1,8])

$$W(\delta)\,d\delta = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\nu}{2}\delta^2} d\delta, \qquad (8a')$$

während sich die Schwankungsgröße auf

$$\overline{|\delta|} = \sqrt{\frac{2}{\nu\pi}} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\delta^2} = \frac{1}{\nu}$$

reduziert.

In diesem, wie im vorhergehenden Falle verlieren bei kontinuierlicher Variabeln δ die Formeln für die Schwankungsgeschwindigkeit ihren Sinn.

Die in diesem Abschnitt entwickelten Formeln lassen sich selbstredend nicht nur auf physikalische Probleme, sondern auch auf solche allgemein statistischen Charakters, wie z. B. die Schwankungen der monatlichen Geburtenzahl eines Landes u. ä. anwenden. An letzterem Beispiel ist Formel (4a) verifiziert worden[12,13]).

4. Schwankungen bei indirekter Beobachtung.

Wir wollen nun annehmen, daß wir nicht direkt die Zahl n der günstigen Ereignisse einer Serie beobachten können, sondern einen Effekt Q, der der Zahl n proportional sein soll. $Q = kn$, wo k selbst wieder keine konstante, sondern eine um einen Mittelwert $\overline{k}$ zufällig schwankende Größe sein soll.

Wir führen die Bezeichnungen ein

$$\delta_Q = \frac{Q - \overline{Q}}{\overline{Q}}, \qquad \delta_k = \frac{k - \overline{k}}{\overline{k}}.$$

Für das Folgende wird es sich empfehlen, eine von Lexis stammende Bezeichnungsweise einzuführen. Ist eine Größe u aus irgendeinem Grunde unregelmäßigen Schwankungen um einen konstanten Mittelwert $\overline{u}$ unterworfen, so bezeichnen wir die empirisch bestimmte „Dispersion" der u-Werte

$$\overline{\delta_u^2} = \overline{\left(\frac{u - \overline{u}}{\overline{u}}\right)^2}$$

als „normal", „übernormal" oder „unternormal", je nachdem diese Größe gleich, größer oder kleiner ist, als sich aus Formel (3a) für sie ergeben würde.

Wir wollen nun folgende Spezialfälle unterscheiden, wobei wir gemäß Grenzfall 2

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{\nu}$$

als normale Dispersion bezeichnen wollen.

1. Fall

$$\delta_k = 0, \quad \delta_n = 0 \quad \text{daher} \quad \overline{\delta_Q^2} = 0$$

unternormale Dispersion.

2. Fall

$$\delta_k = 0 \quad \delta_n \gtrless 0 \text{ (norm. Disp.)},$$

$$\overline{\delta_Q^2} = \overline{\delta_n^2} = \frac{1}{\nu} = \frac{\overline{k}}{\overline{Q}},$$

daher für $\overline{k} < 1$ unternormale, für $\overline{k} > 1$ übernormale Dispersion.

3. Fall

$$\delta_k \gtrless 0 \quad \text{(norm. Disp.)} \quad \delta_n = 0.$$

Infolge der Unabhängigkeit der aufeinanderfolgenden Serien addieren sich nach einem bekannten Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung die absoluten Schwankungsquadrate, daher

$$\overline{Q}^2\,\overline{\delta_Q^2} = n\overline{k}^2\,\overline{\delta_k^2} \quad \text{oder} \quad \overline{\delta_Q^2} = \frac{1}{n}\overline{\delta_k^2} = \frac{1}{n\overline{k}} = \frac{1}{\overline{Q}}$$

die Q zeigen normale Dispersion.

4. Fall $\delta_k \gtrless 0$, $\delta_n \gtrless 0$ (beide norm. Disp.). In diesem Falle ist die normale Dispersion der Q selbstverständlich, da wir es bei der Beobachtung des Einzeleffektes einfach mit einer Überlagerung zweier Wahrscheinlichkeiten zu tun haben, also

$$\overline{\delta_Q^2} = \frac{1}{\overline{Q}}.$$

Haben schließlich die k-Werte eine anormale Dispersion, so zeigen auch Fall (3) und (4) anormale Dispersion, und zwar bei unternormaler Dispersion der k Zwischenstellungen zwischen 1 und 3 bzw. 2 und 4.

Die Wichtigkeit der vorangehenden Erörterungen geht daraus hervor, daß ihre Außerachtlassung zu zahlreichen Fehlern in der Literatur Anlaß gegeben hat[2,3,4,6]).

B. Schwankungen mit Wahrscheinlichkeitsnachwirkung.

In diesem Abschnitt wollen wir die allgemeine Frage behandeln, wie sich die in A abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten modifizieren, wenn eine Wahrscheinlichkeitsnachwirkung im früher definierten Sinne stattfindet. Wir nehmen an, diese Wirkung beruhe darin, daß der günstige Ausfall eines Einzelereignisses einer Serie ebenfalls begünstigend auf den Ausfall des gleichen

Ereignisses der nächsten Serie einwirken möge. Dabei sollen die Voraussetzungen des Grenzfalls (1), die für die Anwendungspraxis am wichtigsten sind, zutreffen. Es ist von vornherein klar, daß unsere Formeln für Schwankungswahrscheinlichkeit und Schwankungsgröße auch in diesem allgemeinen Falle ihre Gültigkeit behalten, da die Häufigkeit des Auftretens der einzelnen n-Werte bei sehr vielen Serien durch unsere jetzige Annahme nicht geändert werden kann. Dagegen ändern sich die Formeln für die Schwankungsgeschwindigkeit, die nun kurz abgeleitet werden sollen[9, 10].

1. Intermittierende Beobachtung.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: P sei die konstante Wahrscheinlichkeit, daß auf ein günstiges Einzelereignis in der nächsten Serie ein ungünstiges folge, und es sei

$$Q = 1 - P,$$

P' umgekehrt die Wahrscheinlichkeit, daß ein in einer Serie ungünstiges Einzelereignis in der nächsten günstig werde. $W(n_1, n_2)$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß auf eine Zahl n_1 günstiger Ereignisse der einen Serie eine analoge Zahl n_2 in der nächsten Serie folge. $A_n(i)$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß von n günstigen Ereignissen einer Serie bei der nächsten Serie i ungünstig werden; analog $E_n(i)$ die Wahrscheinlichkeit, daß zu n günstigen Ereignissen einer Serie in der nächsten i günstige hinzukommen, während das Schicksal der n vorigen Einzelfälle unbestimmt bleibt.

Offenbar ist nun

$$W(n, n+k) = \sum_{i=0}^{n} A_n(i)\, E_n(i+k);$$

$$W(n, n-k) = \sum_{i=k}^{n} A_n(i)\, E_n(i-k).$$

Ferner ist

$$A_n(i) = \binom{n}{i} P^i Q^{n-i}.$$

Man sieht leicht, daß zwischen p, P und P' die Beziehung bestehen muß

$$pN = \nu(1-P) + (N-\nu)P'$$

oder, da $\nu << N$

$$\nu P = P'N = \nu'.$$

Definitionsgemäß ergibt sich daher für $E_n(i)$

$$E_n(i) = \frac{e^{-\nu'}\nu'^i}{i!} = \frac{e^{-\nu P}(\nu P)^i}{i!}.$$

Setzen wir diese Werte schließlich in unseren Formeln

$$W(n, n+k), \quad W(n, n-k)$$

ein, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} W(n, n+k) &= e^{-\nu P}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} P^i Q^{n-i}\frac{(\nu P)^{i+k}}{(i+k)!} \\ W(n, n-k) &= e^{-\nu P}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i} P^i Q^{n-i}\frac{(\nu P)^{i-k}}{(i-k)!} \end{aligned}\right\} \quad (9\text{b})$$

Ist keine Nachwirkung vorhanden, dann wird

$$P = 1, \quad Q = 0$$

und es fallen alle Glieder der obigen Summen weg bis auf das Glied $i = n$, wodurch sich die Formeln (9b) reduzieren auf

$$W(n, n+k) = \frac{e^{-\nu}\nu^{n+k}}{(n+k)!}, \; W(n, n-k) = \frac{e^{-\nu}\nu^{n-k}}{(n-k)!} \quad (9\text{a})$$

was, da keine Nachwirkung vorhanden ist, von vornherein zu erwarten war.

Vermöge Formel (9b) können wir leicht die Schwankungsgeschwindigkeit berechnen. In der Tat ist

$$\bar{\Delta}_n = \sum_{k=0}^{\infty} k W(n, n+k) - \sum_{k=0}^{n} k W(n, n-k),$$

was nach Ausführung der komplizierten Summation

$$\bar{\Delta}_n = P(n-\nu) \quad (4\text{b})$$

ergibt. Analog erhält man

$$\bar{\Delta}_n^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 W(n, n+k) + \sum_{k=1}^{n} k^2 W(n, n-k)$$
$$= P^2[(n-\nu)^2 - n] + (n+\nu)P$$

und durch neuerliche Mittelbildung über n

$$\bar{\Delta}^2 = 2\nu P. \quad (5\text{b})$$

Im Falle $P = 1$, also ohne Nachwirkung, gehen die Formeln (4b), (5b) in die bereits für diesen Fall früher abgeleiteten (4a'), (5a') über.

Ist die Nachwirkung sehr groß, was man z. B. erreichen kann, wenn man die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Beobachtungen τ sehr klein macht, dann wird $P << 1$, und (9b) geht für $k \gtrless 0$ über in

$$\left.\begin{aligned} W(n, n+k) &= e^{-\nu P}\frac{(\nu P)^k}{k!}, \\ W(n, n-k) &= e^{-\nu P}\binom{n}{k}P^k \end{aligned}\right\} \quad (9\text{c})$$

und ihr Verhältnis im Grenzfall $P = 0$, da nur die Änderung $k = 1$ in Betracht kommt

$$\lim_{P=0}\frac{W(n, n+k)}{W(n, n-k)} = \frac{\nu}{n}, \quad (9\text{c}')$$



worin sich, wie in Formel (4b), die Asymmetrie der Schwankung selbst am Anfang der Beobachtung zeigt.

Trotz dieser Asymmetrie, die aussagt, daß auf einen vom Mittelwert weit entfernten n-Wert mit großer Wahrscheinlichkeit ein dem Mittelwert näherer folgt (Irreversibilität), geht aus unseren Formeln die prinzipielle Umkehrbarkeit der Zeitfolge (Reversibilität) hervor, indem die Wahrscheinlichkeit $H(n, m)$, in der i-ten Serie die Zahl n und in der $i+1$sten Serie die Zahl m anzutreffen, ebenso groß ist, wie die bei umgekehrter Zeitfolge resultierende analoge Wahrscheinlichkeit $H(m, n)$. Es ist nämlich

$$H(n, m) = W(n) \cdot W(n, m) = W(n) \cdot W(n, n+k)$$
$$H(m, n) = W(m) \cdot W(m, n) = W(n+k) \cdot W(n+k, n)$$

und nach Formel (9b) und (1a')

$$W(n) \cdot W(n, n+k) = W(n+k) \cdot W(n+k, n).$$

Wenden wir uns nun der Berechnung der Größen T und Θ zu. Wir bezeichnen einen „Nicht-n-Zustand" mit dem Symbol Nn, es bedeutet dann z. B. $W(n, Nn)$ die Wahrscheinlichkeit, daß auf einen n-Zustand ein beliebiger Nicht-n-Zustand folgt. Analoge Bedeutung haben die Symbole

$$W(Nn, n), \quad W(Nn, Nn).$$

Sei schließlich $\varphi_n(k\tau)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein jetzt vorhandener n-Zustand durch k Intervalle der Länge τ andauert und $\psi_n(k\tau)$ die Wahrscheinlichkeit, daß auf einen beliebigen, jetzt vorhandenen Nicht-n-Zustand erst nach k Intervallen ein n-Zustand folgt. Da wir angenommen haben, daß die Nachwirkung sich immer nur auf die nächstfolgende Serie erstrecken soll, erhalten wir die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n(k\tau) &= W^{k-1}(n, n)(1 - W(n, n)), \\ \psi_n(k\tau) &= W^{k-1}(Nn, Nn) \cdot W(Nn, n) \\ &= \{1 - W(Nn, n)\}^{k-1} \cdot W(Nn, n). \end{aligned}\right\} \quad (10b)$$

Da es nun ebensooft vorkommen muß, daß ein Nicht-n-Zustand in einen n-Zustand übergeht als umgekehrt, so ergibt sich

$$W(Nn, n)(1 - W(n)) = W(n, Nn) \cdot W(n)$$
$$= (1 - W(n, n)) W(n),$$

daher

$$W(Nn, n) = \frac{W(n)}{1 - W(n)}(1 - W(n, n))$$

unter Benutzung dieses Wertes folgt weiter

$$\left.\begin{aligned} \psi_n(k\tau) = &\left\{1 - \frac{W(n)}{1 - W(n)}(1 - W(n, n))\right\}^{k-1} \\ &\cdot \frac{W(n)}{1 - W(n)}(1 - W(n, n)). \end{aligned}\right\} \quad (11b)$$

Die Werte von $W(n)$, $W(n, n)$ sind dabei aus Formel (1a') bzw. (9b) zu entnehmen. Definitionsgemäß folgen aus (10) und (11) für die durchschnittliche Dauer und Wiederkehrzeit

$$\left.\begin{aligned} T(n) &= \tau \sum_{k=0}^{\infty} k \varphi_n(k\tau) \\ &= \tau(1 - W(n, n)) \sum_{k=0}^{\infty} k W^{k-1}(n, n) \\ &= \frac{\tau}{1 - W(n, n)}, \end{aligned}\right\} \quad (6b)$$

$$\left.\begin{aligned} \Theta(n) &= \tau \sum_{k=0}^{\infty} k \psi_n(k\tau) \\ &= \frac{\tau}{W(Nn, n)} = \frac{\tau}{1 - W(n, n)} \\ &\cdot \frac{1 - W(n)}{W(n)} = T(n) \cdot \frac{1 - W(n)}{W(n)}. \end{aligned}\right\} \quad (7b)$$

Ist eine Nachwirkung nicht vorhanden, so wird nach (9a)

$$W(n, n) = W(n)$$
$$W(Nn, n) = W(n)$$

und unsere Formeln gehen über in

$$\varphi_n(k\tau) = W(n)^{k-1}(1 - W(n)), \quad (10a)$$
$$\psi_n(k\tau) = (1 - W(n))^{k-1} \cdot W(n). \quad (11a)$$

(6b) und (7b) gehen über in (6c) und (7c).

Über ein Beispiel zur Illustration der statistischen Reihen mit Wahrscheinlichkeitsnachwirkung aus dem Gebiete der natürlichen Statistik siehe eine in dieser Zeitschrift erschienene Arbeit des Verfassers dieses Berichts[14]).

2. Kontinuierliche Beobachtung.

Wir denken uns nun die Zeit τ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Serien immer mehr verkleinert, während k gleichzeitig so zunehmen soll, daß die Zeit $t = k\tau$ endlich und von Null verschieden ausfällt. Wir sahen bereits, daß im Grenzfalle $P = 0$ gesetzt werden muß, wenn wir uns vorstellen, daß die Nachwirkung eine stetige Funktion der Zeit ist.

Um unsere Formeln (6, 7, 10, 11) diesem Falle anzupassen, müssen wir den Grenzwert von $W(n, n)$ berechnen. Dieser ergibt sich zu

$$\lim_{P=0} W(n, n) = \lim_{P=0} \{(1 - \nu P)(1 - nP)\}$$
$$= \lim_{P=0} \{1 - (n+\nu)P + \ldots\}$$

Wir stellen nun P als Funktion von τ in Form einer Potenzreihe dar von folgender Gestalt

$$P = a_1\tau + a_2\tau^2 + \ldots \quad (12)$$

Dann wird $W(n,n)$ darstellbar in der Form

$$\lim W(n,n) = 1 - b_1\tau - b_2\tau^2 \quad \text{wobei} \quad b_1 = (n+\nu)a_1. \qquad (12')$$

Ist daher $a \gtrless 0$, so folgt für kontinuierliche Beobachtung aus (10b), (11b)

$$\varphi_n(k\tau) = \lim_{\tau=0}(1 - b_1\tau \ldots)^{k-1}(b_1\tau + \ldots) = e^{-b_1 t} b_1 \tau,$$

$$\psi_n(k\tau) = e^{-c_1 t} c_1 \tau \quad \text{wobei} \quad c_1 = \frac{W(n)}{1 - W(n)}(n+\nu)a_1.$$

Bezeichnet nun $\varphi_n(t)dt$ die Wahrscheinlichkeit, daß der n-Zustand nicht kürzer als t und nicht länger als $t + dt$ anhält, analog $\psi_n(t)dt$, so folgt endlich

$$\varphi_n(t)dt = b_1 \cdot e^{-b_1 t} \cdot dt \qquad b_1 = (n+\nu)a_1, \qquad (10c)$$

$$\psi_n(t)dt = c_1 e^{-c_1 t} dt \qquad c_1 = \frac{W(n)}{1 - W(n)}(n+\nu)a_1. \qquad (11c)$$

Durch Umwandlung der Summe in (6b), (7b) in ein Integral, erhält man weiter

$$T(n) = \int_0^\infty t\varphi_n(t)dt = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{a_1(n+\nu)}, \qquad (6c)$$

$$\Theta(n) = \int_0^\infty t\psi_n(t)dt = \frac{1}{c_1} = \frac{1 - W(n)}{W(n)(n+\nu)\cdot a_1}, \qquad (7c)$$

welche Formeln sich auch direkt aus (6b) und (7b) durch Einsetzung aus (12') gewinnen lassen.

3. Schwankungserscheinungen an der Reihe der Wiederkehrzeiten (kontinuierliche Beobachtung).

Wie man sieht, stellen auch die aufeinanderfolgenden Wiederkehrzeiten t eines gewissen n-Zustandes eine statistische Reihe dar, die um einen Mitttelwert Θ schwankt. Man kann auch hier nach der Schwankungsgröße fragen. Diese Art von Schwankungen sind aber insofern prinzipiell von den früher behandelten verschieden, als bei ihnen der Mittelwert der schwankenden Größe mit ihrem wahrscheinlichsten Wert im Gegensatz zu früher nicht zusammenfällt. Das kommt daher, daß in diesem Fall infolge der notwendigen Bedingung $t > 0$ Schwankungen um den wahrscheinlichsten Wert nur nach einer Richtung vor sich gehen können.

In der Tat ist nach (7c)

$$\Theta_n = \frac{1}{c_1},$$

während aus (11c) für den wahrscheinlichsten Wert folgt

$$t_w = 0. \qquad (13)$$

Bezeichnen wir ähnlich wie früher als „relative Schwankung" die Größe

$$\varepsilon = \frac{t - \Theta}{\Theta},$$

dann ergibt deren Einführung in (11c) für die Schwankungswahrscheinlichkeit

$$\varphi(\varepsilon)d\varepsilon = e^{-(1+\varepsilon)}d\varepsilon, \qquad (11c')$$

woraus für die Schwankungsgröße resultiert

$$\overline{|\varepsilon|} = \int_0^\infty \varepsilon\varphi(\varepsilon)d\varepsilon - \int_{-1}^0 \varepsilon\varphi(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2}{e} = 0{,}7358, \qquad (14)$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_{-1}^\infty \varepsilon^2\varphi(\varepsilon)d\varepsilon = 1, \qquad (15)$$

also im Gegensatz zu den „n-Schwankungen" vom Mittelwerte unabhängig.

Die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen positiven ε ist ferner kleiner als die eines negativen ε, indem

$$\left.\begin{aligned} \varphi(+) &= \int_0^\infty \varphi(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{e} = 0{,}3679\ldots \\ \varphi(-) &= \int_{-1}^0 \varphi(\varepsilon)d\varepsilon = 1 - \frac{1}{e} = 0{,}6321\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Mit diesen Betrachtungen wollen wir diesen mathematischen Teil abschließen, und uns den Anwendungen auf die physikalischen Erscheinungen zuwenden.

Literatur zu I.

1) M. v. Smoluchowski, Boltzmann-Festschrift S. 626, 1904.
2) E. v. Schweidler, diese Zeitschr. 11, 614, 1910.
3) E. Meyer, diese Zeitschr. 11, 215, 1910.
4) N. Campbell, Proc. Cambr. Soc. 15, 117 u. 310, diese Zeitschr. 11, 826, 1910.
5) M. v. Smoluchowski, diese Zeitschr. 13, 1069, 1912.
6) L. Bortkievicz, Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen, Berlin 1913.
7) M. v. Smoluchowski, Göttinger Vorträge über kinetische Theorie der Materie und Elektrizität S. 89, Leipzig 1914.
8) Lorenz und Eitel, Zeitschr. f. phys. Chem. 87, 293 und 434, 1914.
9) M. v. Smoluchowski, Wien. Ber. 123 (2a), 2381, 1915; 124 (2a), 339, 1915; diese Zeitschr. 16, 321, 1915; Koll.-Zeitschr. 18, 49, 1916.
10) M. v. Smoluchowski, diese Zeitschr. 17, 557, 1916.
11) H. A. Lorentz, Les théories statistiques en thermodynamique, Leipzig 1916.
12) A. Podjed, diese Zeitschr. 19, 39, 1918.
13) E. Schrödinger, diese Zeitschr. 19, 218, 1918.
14) R. Fürth, diese Zeitschr. 19, 421, 1918; 20, 21, 1919.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

O. Lummer, Grundlagen, Ziele und Grenzen der Leuchttechnik. (Auge und Lichterzeugung.) Neue und bedeutend erweiterte Auflage der „Ziele der Leuchttechnik" 1903. gr. 8°. XVI u. 262 S. mit 87 Abb. im Text u. 1 Tafel. München u. Berlin, R. Oldenbourg, 1918. Geh. M. 12,50, geb. M. 14.—.

Die erste Auflage dieses Werkes, ein schmales Bändchen unter dem Titel „Ziele der Leuchttechnik" war der Abdruck eines Vortrages, den der Verf. im Elektrotechnischen Verein zu Berlin 1902 gehalten hatte, in dem er hauptsächlich über seine und seiner Mitarbeiter Untersuchungen und ihre Bedeutung für die Leuchttechnik berichtete. Inzwischen sind 15 Jahre vergangen und die Leuchttechnik hat sich inzwischen fast genau den Richtlinien entsprechend weiter entwickelt, wie sie in jenem Büchlein vorgezeichnet waren.

Die neue Bearbeitung unterscheidet sich nicht nur im Umfange — es ist ein stattlicher Band von 262 Seiten geworden — von jener ersten, auch der veränderte Titel bringt klar zum Ausdruck, daß es sich hier um eine abschließende Darstellung eines Gebietes handeln soll, dessen Weiterentwicklung sich allem Anscheine nach übersehen und begrenzen läßt.

Der Verf. disponiert seinen Stoff folgendermaßen: I. Lichtmessung; II. Photometrie verschiedenfarbiger Lichtquellen und Spektralphotometrie; III. Wesen des Lichtes und der Lichtquellen; IV. Mechanik des Leuchtens auf Grund der Elektronentheorie; V. Das Auge; VI. Strahlungsgesetze des schwarzen Körpers und des blanken Platins; VII. Beziehung zwischen Flächenhelligkeit und Temperatur; VIII. Messung schwarzer Temperaturen; IX. Bestimmung wahrer Temperaturen; X. Temperatur und Strahlungseigenschaften der Sonne; XI. Herstellung bisher unerreichter Temperaturen; XII. Ziele und Grenzen der Leuchttechnik.

Man erkennt, daß in den ersten Kapiteln eine breite Grundlage gelegt wird, als deren Frucht sich von Kap. VI ab Resultat auf Resultat ergibt, bis die Darstellung schließlich im XII. Kapitel in der Darlegung der Ziele und Grenzen der Leuchttechnik gipfelt. Die Anordnung des ganzen Werkes tritt durch die oben angegebenen Kapitelüberschriften so deutlich hervor, daß ein genaueres Eingehen darauf wohl nicht erforderlich ist. Dagegen wird eine genauere Besprechung der Fortschritte gegenüber der ersten Auflage zweckmäßig sein. Als eine der wichtigsten Errungenschaften ist meines Erachtens zu bezeichnen die genaue Ausmessung der Helligkeitsempfindlichkeitskurve des (normalen und total farbenblinden) menschlichen Auges, die von Schülern des Verfassers (Thürmel 1910, Bender 1913) mit dem von ihm und Pringsheim konstruierten Spektralflimmerphotometer vorgenommen wurde. Eine derartige Messung ist übrigens auch — wie es scheint unabhängig, aber zeitlich später — von Ives vorgenommen worden, mit etwa demselben Resultat, und letzterer Messung wird von Lux der Vorzug gegeben, ohne Angabe von Gründen. Deshalb möchte ich nachdrücklich betonen, daß dazu keinerlei Grund vorliegt, vielmehr sind die Thürmel-Benderschen Messungen mit allem Vertrauen zu betrachten; ihre Methodik ist einwandfrei und die Messungen sind an zahlreichen Versuchspersonen angestellt worden. Auch für die Theorie der Farbenblindheit sind diese Ergebnisse von großem Interesse, wenn dies auch im Hinblick auf die Ziele des Buches etwas in den Hintergrund tritt. Ihr Hauptwert liegt darin, daß sie es ermöglichen, an Stelle des bisherigen etwas unklaren Ausdruckes „Ökonomie" drei scharf gegeneinander abgegrenzte Begriffe, „technische Ökonomie", „energetische Ökonomie", „photometrische Ökonomie", einzuführen, wodurch eine Klassifikation und Beurteilung der Lichtquellen ermöglicht wird, die zum ersten Male wissenschaftlichen Anforderungen genügt. Im VII. Kapitel ermöglicht die Kenntnis der Empfindlichkeit des Auges die theoretische Herleitung eines Zusammenhanges zwischen Flächenhelligkeit und Temperatur (Lummer und Kohn), die bis 8000 Grad für den schwarzen Körper und für blankes Platin tabellarisch angegeben und in einem großen Bereich experimentell verifiziert wird. Während das VIII. Kapitel (Bestimmung schwarzer Temperaturen) nichts prinzipiell Neues bringt und bringen kann, sind im IX. Kapitel eine ganze Reihe von Methoden entwickelt, um wahre Temperaturen zu bestimmen, an Platin-Kohlefaden-Wolframlampen usw. Von diesen sei als besonders geistreich hervorgehoben die von Lummer und Pringsheim erdachte Methode der logarithmischen Isochromaten, die von Benedict im Breslauer Institut ausgeführt wurde. Unter welchen Bedingungen die Schlüsse daraus eindeutig sind, ferner, wie man mittels ihrer Hilfe auch das Absorptionsvermögen der Strahlungsquelle feststellen kann, wird im Anschluß an eine Abhandlung von Schaefer ausführlich besprochen. Nach dieser Methode haben Senftleben und Benedict die wahre Temperatur der Hefnerkerze und ihr Absorptionsvermögen festgestellt. Das XI. Kapitel berichtet über Lummers Untersuchungen über die Temperatur des positiven Kraters der Bogenlampe unter hohem Druck, durch die es gelang, die Temperatur desselben auf etwa 8000° abs. zu erhöhen, also eine Temperatur herzustellen, die erheblich höher als Sonnentemperatur ist, was sicher in Zukunft noch große Bedeutung erlangen wird.

Im letzten Kapitel gipfelt die Darstellung, indem nun die letzten Konsequenzen aus den vorhergehenden Darlegungen gezogen werden (im Anschlusse an eine Abhandlung von Lummer und Kohn). Hier wird grundsätzlich die maximale Leistungsfähigkeit sämtlicher Strahlungsquellen untersucht und das fundamentale Ergebnis ausgesprochen: Niemals kann ein beliebiger Strahler für den Energieverbrauch von 1 Watt mehr als 63,8 HK_0 liefern. Im besondern wird gezeigt, daß durch Verwendung eines schwarzen Körpers oder blanken Platins bzw. einer Substanz, deren Strahlungseigenschaften zwischen diesen Extremen eingeschlossen liegen, niemals mehr als rund 16 Proz. dieses Maximums erzielt werden können; der schwarze Körper muß dazu auf eine Temperatur von 6750°, blankes Platin auf eine solche von 5900° erhitzt werden. Die Erreichung dieser Temperaturen ist ein erstes Ziel der Leuchttechnik.

Man muß von der Benutzung von Temperaturstrahlern absehen, wenn man die maximale Ökonomie von 63,8 HK_0 pro Watt erreichen will. In weiterer Verfolgung dieses Gedankens wird als „idealer Strahler" ein solcher definiert, der die gesamte zugeführte Energie in sichtbare Energie umsetzt, und als Spezialfall wird der „maximal-ideale Strahler" hervorgehoben, der die ganze zugeführte Energie in gelbgrüne Strahlung (0,544 bis 0,550 μ) umsetzt. Dieser letztere erreicht das Maximum der technischen Ökonomie von 63,8 HK_0 pro Watt in der Tat, und zwar

bei relativ niedrigen Temperaturen. Die Berechnung der Messungen von Coblentz über die Strahlung der Feuerfliege ergibt dann wieder das interessante Resultat, daß hier die Natur fast vollständig den maximal-idealen Strahler verwirklicht hat.

Der im vorstehenden gegebene Überblick über den Inhalt des Buches wird nachdrücklicher, als Worte es vermöchten, den Eindruck hervorgerufen haben, daß wir es in der Tat mit einem für lange Zeit abschließenden Werke zu tun haben, das mit souveräner Beherrschung der Materie geschrieben ist. Wir können hinzufügen, daß die Darstellung frisch und temperamentvoll ist, was über gelegentliche Inhomogenitäten gerne hinwegsehen läßt; sie ist für den Physiker leicht, aber auch für den Techniker ohne große Mühe lesbar. So schulden wir dem Verfasser herzlichen Dank für die wertvolle Gabe, die er der Wissenschaft und Technik gleichzeitig dargebracht hat. —

Der Ref. fühlt sich verpflichtet, auf folgendes hinzuweisen: Er hat an dem Buche in gewisser Weise mithelfen dürfen, worüber das Vorwort Auskunft gibt und steht dem Verfasser seit 15 Jahren nahe. Dies hat ihn nach reiflicher Überlegung nicht abgehalten, diese Besprechung zu schreiben, da er sich sagte, daß es derselben nichts schaden könne, wenn sie von jemandem verfaßt sei, der das Buch genau kennt.

Clemens Schaefer.

M. v. Rohr, Das Auge und die Brille. (Aus Natur- und Geisteswelt. 372.) 2. Aufl. 105 S. mit 84 Textabbildungen und einer Lichtdrucktafel. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1918. Geb. M. 1.50 (hierzu Teuerungszuschläge des Verlages und der Buchhandlungen).

Verf., der besonders in seinen „Optischen Instrumenten" in vortrefflicher Weise eine kurze allgemeinverständliche Darstellung der Abbeschen Theorie gegeben hat, stellt sich in dieser kleinen Schrift die Aufgabe, mit der Kenntnis der Brillenfragen auch die Bewertung der Brille in den Fachkreisen zu erhöhen, was ihm wohl gelungen sein dürfte.

Im ersten Abschnitt des Büchleins wird zunächst das Auge als ruhendes optisches System in Kürze erledigt, sodann das Hauptgewicht auf das Sehen mit bewegtem Auge gelegt und darin die Perspektive als die Anschauungsform behandelt, in der die räumliche Anordnung der Außenwelt dem Beobachter zugänglich ist. Sie ergibt sich aus der Einführung des perspektivischen Strahlenbüschels mit der Spitze im Augendrehpunkt.

Im zweiten prinzipiellen Abschnitt werden die für die moderne Brillenlehre wichtigen Ziele berührt, nämlich die Deutlichkeitssteigerung beim Blicken für fehlsichtige Augen und die Änderung der Richtung des Wahrgenommenen. Ohne auf die Beweise für die Aussagen in diesem Abschnitt einzugehen, die in dem umfangreicheren Brillenbuch des Verf. „Die Brille als optisches Instrument" nachgelesen werden können, werden zuerst die allseitig symmetrischen, dann die prismatischen und astigmatischen Brillengläser verfolgt; namentlich soweit die punktuell abbildenden oder die zweckmäßig durchgebogenen Gläser und Systeme in Betracht kommen, spielt bei der zum Schluß kurz behandelten Brille für beide Augen auch die Richtungsänderung eine Rolle. Interessant sind besonders die sinnvollen Bemerkungen über die Gullstrandschen Stargläser und die Fern- und Nahbrille für Linsenlose. Auf die chromatische Aberration wird auch in Kürze eingegangen, so daß man mit gutem Grund eine gewisse Vollständigkeit dem Büchlein nicht absprechen kann.

Im Schlußabschnitt über die Brillenfassung, dem sich eine Beschreibung verschiedener Klemmerformen sowie der wichtigsten Stielbrillen anschließt, wird auf die Oppenheimersche Schrift „Theorie und Praxis der Augengläser" verwiesen, in der diese Fragen eingehender zur Sprache gebracht sind. — Reichliche Illustrationen zeichnen das Werk aus.

Warum die Anwendung von Formeln und die Einführung geometrischer Vorstellungen möglichst eingeschränkt ist, ist nicht einleuchtend; setzt doch die geometrische Optik nur die geringsten mathematischen Kenntnisse voraus, soweit sie praktisch zur Anwendung kommt. Unter dieser Auffassung hat offenbar das Werk gelitten.

H. Falkenhagen.

E. Schwarz, Feuerfeste und hochfeuerfeste Stoffe. gr. 8. VI u. 44 S. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1918. M. 2.—

Der Verfasser gibt eine übersichtliche Darstellung unserer Kenntnisse auf dem Gebiete der feuerfesten Substanzen. Er bespricht zunächst die wichtigsten Anforderungen, die man an ein feuerfestes Material stellen muß, wie Indifferenz gegen chemische Agenzien, Gasdichtigkeit, Festigkeit usw. Dann behandelt er unter Berücksichtigung der neuesten Forschung in drei Abschnitten die feuerfesten Silikate, die Oxyde sowie die Karbide und Nitride und erläutert an einer Reihe von Diagrammen die Abhängigkeit der Erweichungstemperatur von der Zusammensetzung. Die zahlreichen Angaben über spezielle Eigenschaften der feuerfesten Stoffe werden jedem, der mit hohen Temperaturen zu arbeiten hat, von hohem Wert sein. Die kleine Schrift ist eine sehr willkommene Bereicherung der physikalisch-technischen Literatur.

F. Henning.

O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Herausgegeben von G. C. Schmidt. gr. 8°. I1. Mechanik und Meßmethoden. XII u. 384 S. m. 188 Abbildungen. I2. Die Lehre von den gasförmigen, flüssigen und festen Körpern. X u. 424 S. m. 180 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1918. M. 12.— bzw. M. 13.60; geb. M. 14.40 bzw. M. 16.—

Chwolsons treffliches Lehrbuch der Physik, dessen erster Band 1902 in deutscher Übersetzung erschien, ist bei uns bald beliebt geworden. Gerade vor Ausbruch des Krieges sollte eine Neuauflage des schnell vergriffenen Werkes erfolgen, an das Chwolson, manches kürzend, vieles dem schnellen Fortschreiten der physikalischen Wissenschaft gemäß erweiternd, bereits seine geschickte Hand gelegt hatte. Die lange Dauer des Weltbrandes verhinderte die Ausführung infolge des Abschneidens jeglicher Verbindung mit Petersburg. Der nie rastende Verlag Friedr. Vieweg & Sohn setzte sich deshalb mit G. C. Schmidt in Verbindung, der schon an der ersten Auflage mitgewirkt hatte, und dieser hat überaus sorgfältig das Manuskript Chwolsons durchgearbeitet, ergänzt und vor allem verdeutscht.

Bis jetzt liegen von der zweiten Auflage vor: Bd. I_1: Mechanik und Meßmethoden, und Bd. I_2:

Die Lehre von den gasförmigen, flüssigen und festen Körpern. Schon mehrfach ist an dieser Stelle über die erste Auflage des Lehrbuches referiert worden (1904, 1905, 1906, 1913). Die Vorzüge des eigenartigen Werkes, die die früheren Referenten besonders hervorgehoben haben, „die Fülle und Vollständigkeit der Materie, die zahlreichen und gewissenhaften Literaturhinweise, die scharfen, übersichtlichen Figuren, die ausgezeichnete didaktische Anwendung und lichtvolle Klarheit", sie treten im ersten Bande wieder prägnant hervor, so daß wir mit gespanntem Vertrauen den weiteren Teilen entgegensehen. Wir können den Studierenden und denen, die Interesse an der Physik haben, das Lehrbuch von Chwolson nur wärmstens empfehlen. Karl Bergwitz.

F. Auerbach, Das Wesen der Materie. Ordentliche Veröffentlichung der „Pädagogischen Literatur-Gesellschaft Neue Bahnen". gr. 8°. 144 Seiten m. 15 Abbildungen. Leipzig. Dürrsche Buchhandlung 1918. Geh. M. 3.—, geb. M. 4.— u. T.

In knapp 150 Seiten ist hier in großen Zügen die gesamte Physik bis zu den neusten Errungenschaften, wie Quantenlehre, Relativitätsprinzip und Röntgenspektroskopie für den Laien dargestellt. Naturgemäß sind dadurch sehr viele Erscheinungen nur gestreift und oberflächlich behandelt, zumal der Ausgang vom Allereinfachsten im Anfang einen sehr breiten Raum einnimmt. Immerhin dürfte das Buch, da es außerdem jede Formel vermeidet, als populäre Schrift für den Laien nicht uninteressant sein. Für den Wissenschaftler bietet es kein Interesse. P. Neubert.

R. Vater, Die neueren Wärmekraftmaschinen. I. Einführung in die Theorie und den Bau der Gasmaschinen. Aus Natur und Geisteswelt, 21. Bd. VI u. 119 S. mit 41 Abbildungen. 5. Aufl. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1918. — **II. Gaserzeuger, Großgasmaschinen, Dampf- und Gasturbinen.** Aus Natur und Geisteswelt, 86. Bd. VI u. 114 S. mit 43 Abbildungen. 4. Aufl. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1918. Jedes Bändchen M. 1.20, geb. M. 1.50. Teuerungszuschläge 50 Proz., einschl. 10 Proz. Zuschlag der Buchhandlung.

Auf die beiden anregend geschriebenen Schriften konnte schon früher (diese Zeitschrift **15**, 466, 1914) empfehlend hingewiesen werden. Da die Neuauflage noch während des Krieges erfolgte, so durfte über manche auf den hier behandelten Gebieten gemachte Fortschritte nicht berichtet werden. Immerhin ist Verschiedenes, was veraltet war, ausgeschaltet und dafür neue Gestaltungen und Ergebnisse gesetzt worden.

R. Lucas.

A. Lampa, Ernst Mach. Prag 1918, Verlag Deutsche Arbeit.

Die Revision der Grundlagen der Physik, die uns die Relativitätstheorie gebracht hat, geht in ihren ersten Ursprüngen auf Mach zurück; die logischen und psychologischen Mängel des Systems, das seit Galilei und Newton anerkannt war, hat Mach deutlich empfunden und zum Ausdruck gebracht, und diese Sätze seiner Schriften haben Einstein — nach seinem eigenen Bekenntnis — wertvolle Anregungen gegeben. Die vorliegende Schrift ist eine Würdigung des Forschers und des Menschen Ernst Mach, in der die Einheit seiner wissenschaftlichen Persönlichkeit durch die Vielfältigkeit seiner Äußerungen verfolgt und auf eine Wurzel gebracht wird: „Das leidenschaftliche Interesse für die Theorie des Erkennens." Unter diesem Gesichtspunkte wird die Leistung Machs auf den Gebieten der Physik, Sinnesphysiologie, Psychologie, Biologie, Erkenntnistheorie besprochen und ein lebensvolles Bild dieses tiefen Denkers und reinen Menschen entworfen. M. Born.

Angebote.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

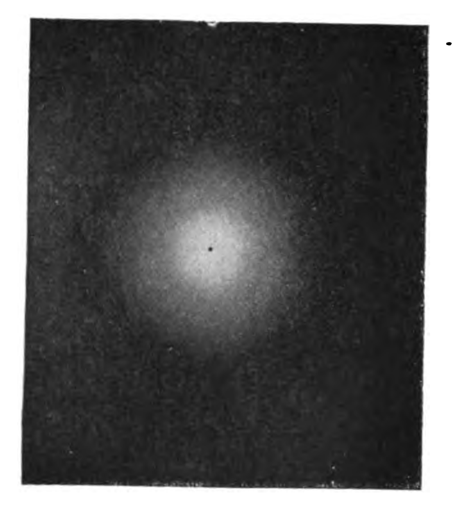


Fig. 1. Luft, negativ. 51 mm Druck, 2000 Volt.

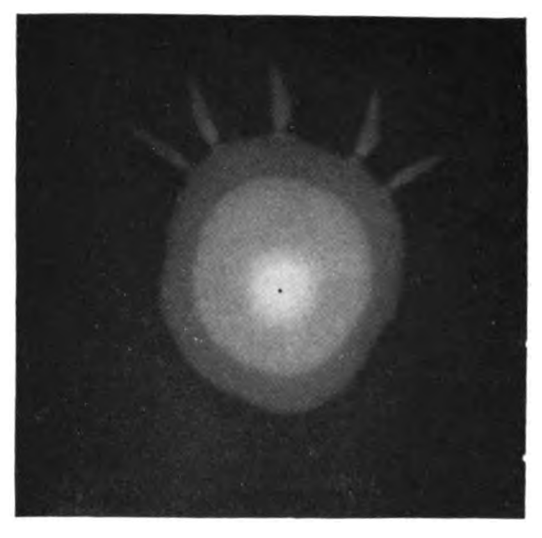


Fig. 2. Luft, positiv. 43 mm Druck, 2000 Volt.

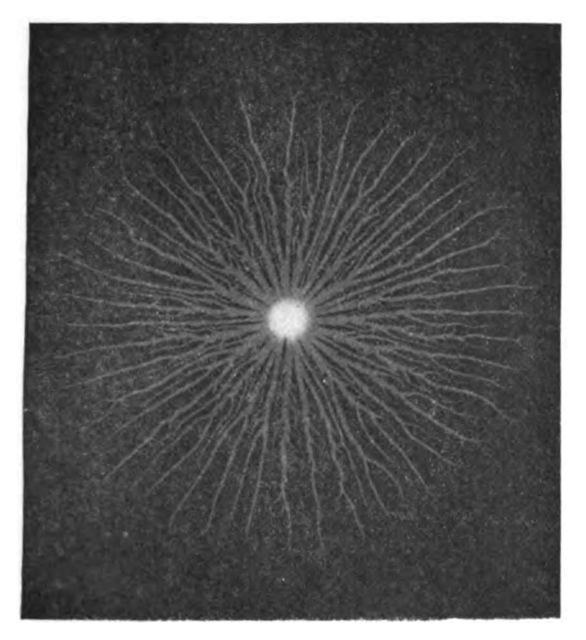


Fig. 3. Stickstoff, positiv. 300 mm Druck, 13000 Volt.

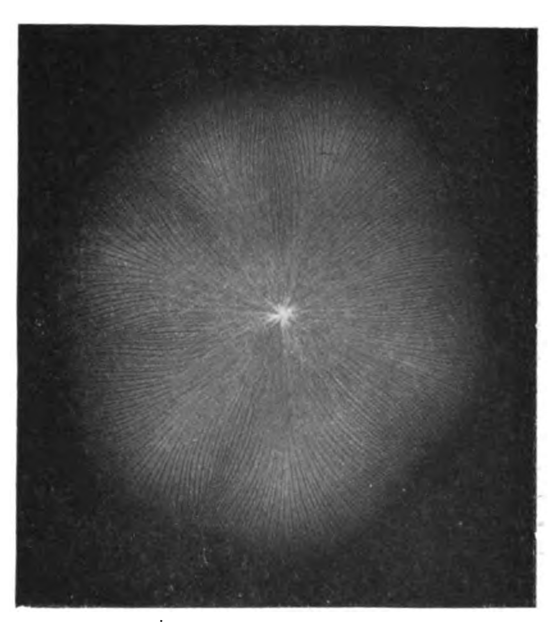


Fig. 4. Stickstoff, negativ, Atm.-Druck, 42000 Volt.

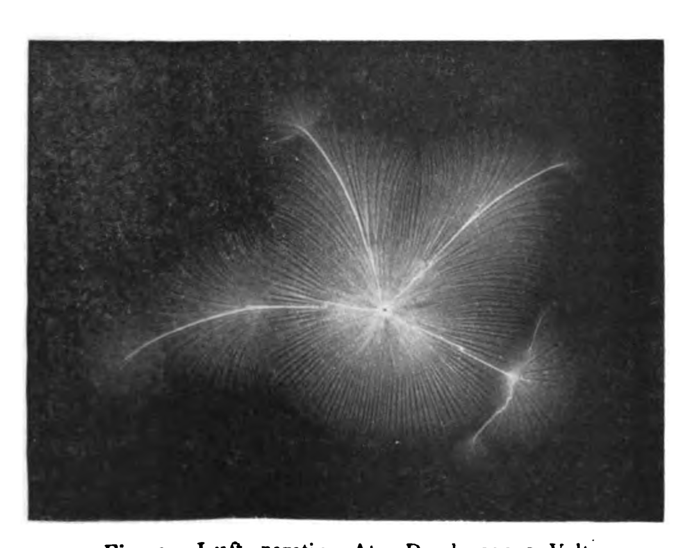


Fig. 5. Luft, negativ. Atm.-Druck, 32000 Volt.

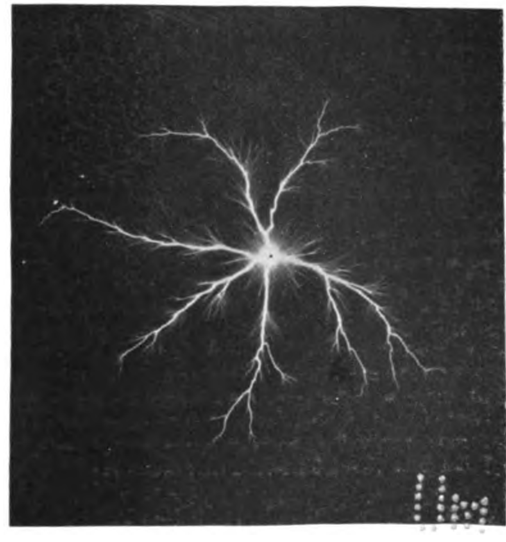


Fig. 6. Sauerstoff, negativ. Atm.-Druck, 24000 Volt.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

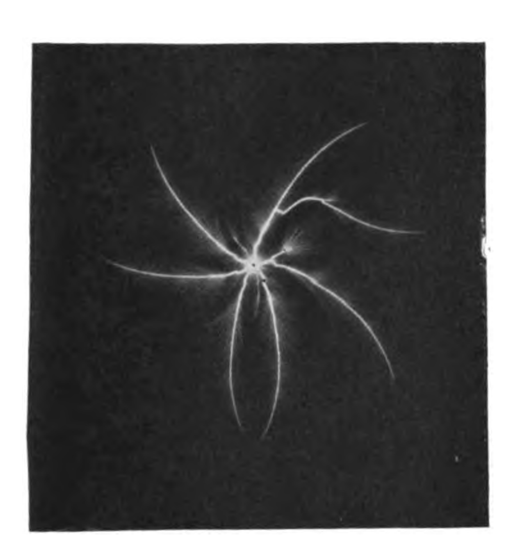


Fig 7. Sauerstoff, negativ. Atm.-Druck, 24000 Volt.



Fig. 8. Chlor, positiv. Atm.-Druck, 32000 Volt.

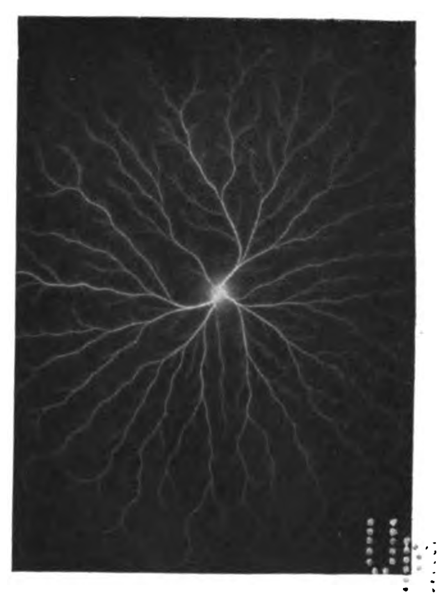


Fig. 9. Chlor, negativ. Atm.-Druck, 32000 Volt.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und **H. Th. Simon**



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 41 Mark, im Ausland 46 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

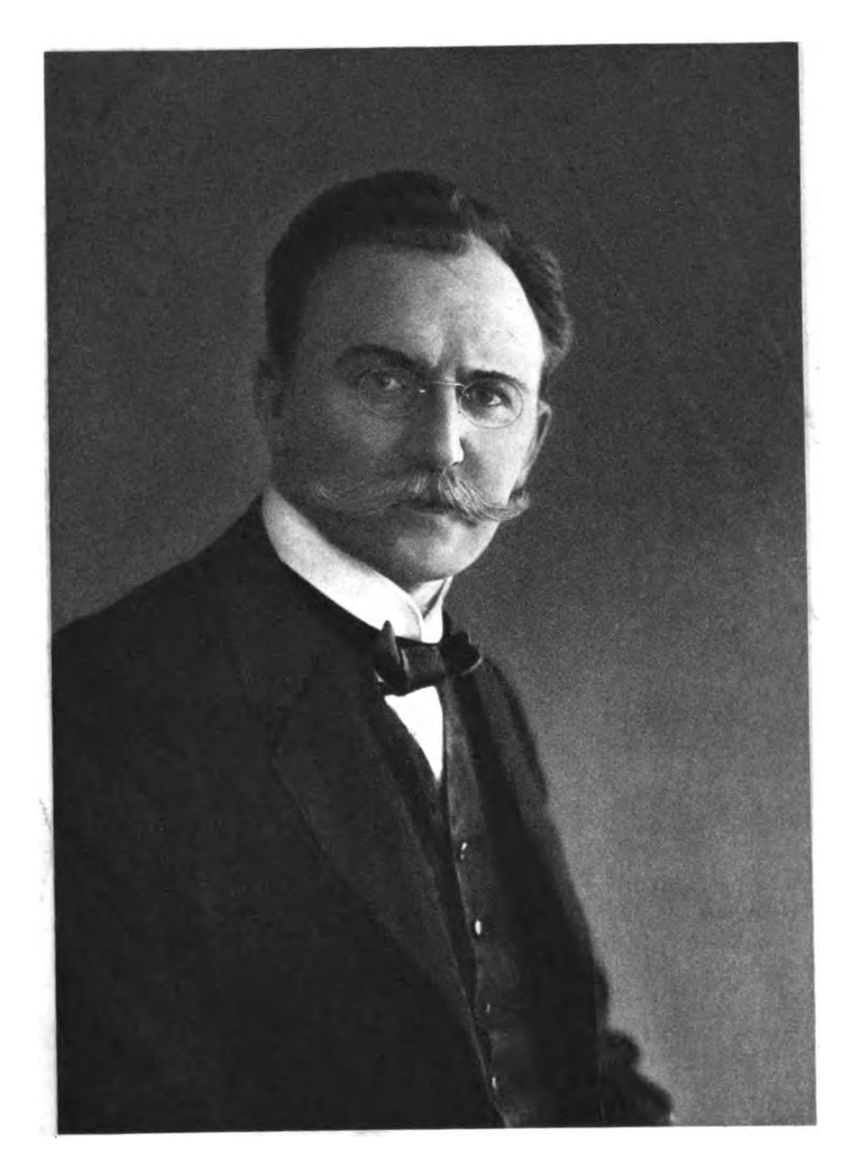
Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

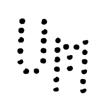
No. 14. 15. Juli 1919. No. 546. **20. Jahrgang.**

Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechungen, Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen.)



H. Th. Simon



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 14. 15. Juli 1919. 20. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 16 am 24. Juli 1919.

INHALT:

Hermann Th. Simon †.

Am 22. Dezember 1918 ist in Göttingen ein herrlicher Mensch gestorben. Seine lichte Art, seine zielbewußte Zähigkeit, sein auch in schlimmen Lagen nie versagender Mut wäre dem Vaterlande unter dem Drucke der gegenwärtigen Verhältnisse doppelt viel wert gewesen.

Als die Physikalische Zeitschrift vor vier Jahren in Eduard Riecke einen ihrer Begründer verlor, da wurde ein in erfolgreichem Wirken ausgelebtes Physikerleben um die verdiente Abendruhe gebracht. Der jetzt abgerufene Mitbegründer stand auf der Höhe seines Schaffens, als ihn plötzlich durch geheimnisvolle Sepsis hervorgerufenes mehrmonatliches Siechtum niederwarf und schließlich überwältigte. Die ihm näher standen und um seine Zukunftspläne und Ideen wußten, erwarteten noch Großes von ihm. Nun können wir nur in Wehmut zurückblicken und uns dankbar der vorliegenden Leistungssumme Hermann Theodor Simons freuen.

Er wurde am 1. Januar 1870 zu Kirn a. d. Nahe geboren. Sein Vater, Kommerzienrat Th. Simon daselbst, war ein bedeutender Mann, ein Mann eigener Kraft, der die in treuer Fortsetzung alter Familientradition mit sechs Arbeitern begonnene Gerberei in 40 Jahren zur Weltfirma Carl Simon Söhne mit Filialen in Böhmen und in Indien erhob. Das Leitmotiv der Erziehung, die er seinen zwölf Kindern zuteil werden ließ, lautete: „Selbst ist der Mann". Nächst dem väterlichen Vorbilde, dankte Hermann Simon die Fähigkeit, trotz warm aufquellenden Gefühles stets ohne lange Überlegung das Rechte zu tun, seinem eigenen Urteile nach, der strengen Zucht jahrhundertelanger Auslese des Geschlechtes der Simon. Daß er auch seine spätere Frau, die Tochter des Landrates Agrikola in Kreuznach, als Jugendliebe im heimischen Kreise fand, hat nachher seinem eigenen Hause einen Geist erfreulicher und behaglich sicherer Wurzelständigkeit gegeben, wie man ihn in der akademischen Welt selten findet.

Die zu Birkenfeld begonnene Gymnasialbildung Hermann Simons kam 1889 in Kreuznach zum Abschluß. In den Ferien hatte er jeweils nicht nur naturwissenschaftliche Spielereien getrieben, sondern auch die Werkstätten der väterlichen Fabrik genützt, um sich solide Handwerksfertigkeiten anzueignen, die ihm später beim Experimentieren viel wert waren.

Während der ersten Studiensemester in Heidelberg fesselte ihn ernstliche Erkrankung wiederholt längere Zeit ans Lager. Trotzdem muß er sich beim Korps Suevia derartig ausgezeichnet haben, daß er in kurzer Zeit Chargierter wurde. Seiner Verdienste um das Korps ist noch bei der Beerdigung mit herzlichen Worten anerkennend ge-

dacht worden. Mit der Anfälligkeit seines Körpers hat Simon überhaupt zeitlebens zu kämpfen gehabt, hat viele schwere und schmerzhafte Krankheiten überstehen müssen. Seine Leistungsfähigkeit, die Frische und der Glanz seiner Persönlichkeit hätten den Außenstehenden dies nicht vermuten lassen, so vollkommen wurde die wundervolle Elastizität seines Wesens und das Feuer seines Geistes immer aller körperlichen Unbilden wieder Herr.

Es folgte das eigentliche Fachstudium auf der Universität Berlin. Hier fand Simon in Kundt „einem der Großmeister mustergültiger exakter Experimentalforschung" den für seine Begabung in jeder Weise geeigneten Lehrer. Die begeisterte Darstellung von Leben und Wirken dieses „deutschen Mannes", die Simon in einer Rede „Zum Gedächtnis an August Kundt" vor der Physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen ein Jahr nach Kundts (1894 erfolgtem) Tode gibt, gehört zum Besten, was über Kundt geschrieben worden ist. Noch auf Anregung Kundts hin unternahm Simon seine erste experimentelle Arbeit, die Arbeit „Über Dispersion ultravioletter Strahlen" und hat mit ihr dann 1894 in Berlin promoviert. Unter Benutzung besonders hergestellter achromatischer Quarz-Flußspat-Objektive waren nach photographischer Prismenmethode zwanzig verschiedene Substanzen untersucht worden. Die umfangreichen Resultate ergänzten das zur Prüfung der Dispersionsformeln vorhandene Material in wertvoller Weise. Die für Flußspat und für Quarz bis zu 0,202 μ herunter von dem Doktoranden damals erhaltenen Brechungsexponenten finden sich noch heute als maßgebende Werte in den neuen Auflagen der Landolt-Börnsteinschen Tabellen verzeichnet.

Nach der Promotion nahm Simon eine Assistentenstelle unter E. Wiedemann am Physikalischen Institute der Universität Erlangen an, heiratete und habilitierte sich 1896 für Physik. Die Habilitationsschrift „Über ein neues photographisches Photometrierverfahren und seine Anwendung auf die Photometrie des ultravioletten Spektralgebietes" zeigt Simon bereits auf der vollen Höhe experimenteller Meisterschaft und konstruktiven Erfindungsgeistes. Die zu vergleichenden Lichtquellen beleuchten je eine Hälfte des Spektralapparatspaltes. Nach der spektralen Zerlegung für eine bestimmte Wellenlänge werden die Helligkeiten auf einer bewegten photographischen Platte registriert, während sich gleichzeitig die Helligkeit der einen Spalthälfte durch eine automatische Vorrichtung kontinuierlich meßbar vermindert. Zur Ermittlung der Stellen gleicher Schwärzung beider so erhaltenen Streifen und damit zur Gewinnung der photometrischen Relativwerte dient ein besonderer sinnreicher Helligkeitskomparator. Der neue Apparat gestattete mit engem Okularspalte, d. h. sehr homogenem Lichte zu arbeiten und gab in jedem photographisch wirksamen Teile des Spektrums dieselbe Genauigkeit, wie man sie vorher nur in dem günstigsten Teile des sichtbaren Gebietes erreicht hatte. Nach Veröffentlichung einer einfachen Methode, die graphische Öffnungszeit von Momentverschlüssen mit Hilfe eines an konischem Pendel befestigten Spiegels zu ermitteln, bricht Simons eigene rein wissenschaftliche Beschäftigung mit optischen Dingen ab. Ein noch in die Erlanger Zeit fallender glücklicher Fund entführte ihn dem Gebiete seiner ersten Forschungen dauernd. Nur unter künstlerischen Gesichtspunkten ist er der Beschäftigung mit der Photographie immer treu geblieben und seine Leistungen auf dem Gebiete des photographischen Stimmungsbildes sind mehrfach auf Ausstellungen mit Preisen ausgezeichnet worden.

Von Kundt wird der Ausspruch berichtet, Haupterfordernis für einen Phy-



siker sei, sich im rechten Augenblicke wundern zu können. Im Herbste 1897 wunderte sich Simon über „ein intensives knatterndes Geräusch" in dem Lichtbogen, als er mit einer Bogenlampe arbeitete, während in einem benachbarten Zimmer ein Induktorium in Gang war. Mit hellsichtigem Auge ging er der Erscheinung nach. Er erkannte sie sogleich richtig als Wärmewirkung von Induktionsströmen. Er entdeckte, daß der Flammenbogen periodische Stromschwankungen, die sich über seinen Hauptstrom lagern, bis in alle Einzelheiten der Klangfarbe in Töne verwandelt. Er suchte und fand auch das umgekehrte Phänomen, daß der Flammenbogen ebenso als Telephongeber verwandt werden kann. Mit dem „redenden" und „lauschenden" Flammenbogen war ein Problem gelöst, das damals schon manchem vorgeschwebt haben mag, der es für grundsätzlich irrationell hielt, daß beim Bellschen Telephon zur elektrischen Übertragung von Luftwellen erst träge Eisenmassen in Bewegung gesetzt werden. Die lautsprechende Bogenlampe wird ihre Wirkung bei physikalischen Vorführungen vor großem Publikum nie verfehlen. Als sie auch in Institutskreisen noch den Reiz der Neuheit hatte, ließ man wohl gelegentlich von entferntem Zimmer aus den Anfang einer Kollegstunde vor den erstaunten Zuhörern durch einen auf dem Experimentiertisch brennenden Simonschen Bogen sprechen. Aber auch ein allgemeineres theoretisches Interesse wohnt der schallübermittelnden Bogenlampe inne. Sie stellt eines der nicht häufigen Beispiele dar, wo sich eine kleine Größe δ erst dadurch bemerkbar macht, daß sie in der Form $(I+\delta)^2$ zur Wirkung kommt, so daß der Effekt $2I\delta$ mit Vergrößerung von I (hier der Lampenhauptstromstärke) prinzipiell beliebig gesteigert werden kann. Hierauf hat Ferdinand Braun zuerst aufmerksam gemacht. Simon selbst als Vater der sprechenden Bogenlampe gewann durch sie nicht nur einen frühzeitig in weiteste Kreise dringenden wissenschaftlichen Namen, sondern er wurde durch seine Entdeckung auch auf denjenigen Gegenstand hingelenkt, dem der größte Teil seiner physikalischen Forschungsarbeit gewidmet werden sollte: den elektrischen Lichtbogen.

Im Jahre 1898 folgte Simon einer Aufforderung Rieckes, die bei ihm frei gewordene Assistentenstelle anzunehmen, und habilitierte sich nach Göttingen um. Der junge Dozent übertraf die in ihn gesetzten Erwartungen, und es knüpften sich rasch nahe Freundschaftsverhältnisse, die sich im Laufe der Jahre immer mehr vertieften. Sein innerlicher, verständnisvoller Sinn für alles Schöne in Natur und Kunst, seine dichterische Begabung, sein froher Humor, die Vielseitigkeit seiner Interessen zogen gar bald weite Kreise in ihren Bann. Aber auch Simon anderseits ist nie müde geworden zu betonen, von wie grundlegender Bedeutung die Übersiedelung nach Göttingen für seine wissenschaftliche Entwicklung gewesen ist. Es war die Zeit der Gründung der Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik. Eine unter diesen Verhältnissen auf Göttinger Boden entstandene Zeitschrift dürfte nicht der Ort sein, den damaligen Göttinger Geist und seine besondere Vertretung durch Klein zu rühmen. Als erste Frucht jenes Sinnes für gewissenhafte und exakte prinzipielle Fragestellungen auch technischem empirischen Approximationsmateriale gegenüber, den man wohl als Salbung mit einem Tropfen Gaußischem Öles bezeichnet hat, erscheint Simons mustergültige Arbeit „Das Wirkungsgesetz des Wehneltunterbrechers". Sie weist nach, daß es sich bei dem „elektrolytischen Unterbrecher" nicht um eine elektrolytische, sondern um Wärmewirkung des Stromes handelt, und entwickelt eine Formel, welche die angestellten Beobachtungen auch quantitativ mit großer Genauigkeit wiedergibt. Die einseitige Wirk-

samkeit des Unterbrechers wird als sekundärer Einfluß des abgeschiedenen Wasserstoffs auf das Platin der Drahtelektrode erkannt. Probe und praktische Anwendung der Theorie liefert dann die Schöpfung eines „neuen Flüssigkeitsunterbrechers" mit beiderseits großen Elektroden und schroffen Einschnürungsstellen im Inneren der Flüssigkeit. Die Form erwies sich analogen gleichzeitigen Konstruktionen anderer Forscher dadurch überlegen, daß ohne jede Kühlvorrichtung selbst bei Dauerbetrieb niemals ein Versagen eintrat. Der Simonunterbrecher, auf den auch ein deutsches Reichspatent erteilt worden ist, hat demgemäß in der Röntgentechnik vielfache Anwendung gefunden. Die 1899 von Riecke und Simon gemeinsam erfolgte Gründung der Physikalischen Zeitschrift läßt erkennen, wie hoch Riecke seinen Assistenten bewertete, wie nahe er ihm auch menschlich schon damals getreten war und wie rasch es der junge Gelehrte verstanden hatte, im wissenschaftlichen Leben Göttingens eine führende Rolle zu spielen.

Ostern 1900 wurde Simon als Nachfolger W. Königs vom Physikalischen Vereine zu Frankfurt a/Main als Dozent für Physik und Leiter des physikalischen Laboratoriums gewonnen. Die Mannigfaltigkeit seiner Lehrbetätigung in Erlangen und Göttingen, die sich auch auf Geschichte der Physik erstreckte hatte, ließ ihn für die Frankfurter Stelle besonders geeignet erscheinen. Ebenso machte sein glänzendes Experimentiergeschick bei Vorträgen über alle möglichen neueren Fortschritte der Physik Aufsehen. Der zu virtuosen Leistungen ausgebildete musikalische Flammenbogen erwies sich weiter als vorzüglicher Geber für photophonische Übertragung auf die Selenzelle als Empfänger. Simon scherzte gelegentlich darüber, daß er wegen dieser Telephonie ohne Draht von den dankbaren Frankfurtern mit Sömmering und Reiß in einem Atem genannt werde. Nach kurzer Zeit gelang es, mittels Schuckertscher Scheinwerfer das sprechende Licht über zwei Kilometer weit wirksam in die Ferne zu senden. Überwindung weiterer Strecken war nur eine Frage der Scheinwerfergröße. Wenn die Methode nicht die praktische Bedeutung erlangt hat, die man damals hätte erwarten können, so liegt das daran, daß später die ungedämpften elektrischen Wellen ein Mittel für drahtlose Telephonie boten, das unabhängig vom Zustande der Atmosphäre ist. In die Frankfurter Zeit fallen noch Simons erste mit seinem Assistenten M. Reich gemeinsam angestellten Studien über den Duddellschen selbsttönenden Flammenbogen.

Aber schon zu Oktober 1901 bekam Simon den Ruf zurück nach Göttingen als a. o. Professor und als Leiter der Abteilung für angewandte Elektrizitätslehre am Physikalischen Institute. Für jemanden, in dem das Zeug zu einem Professor für Experimentalphysik steckte, lag die bis dahin von Des Coudres inne gehabte Stelle mit ihren besonders gearteten Aufgaben wohl ferner als die Tätigkeit an dem angesehenen Frankfurter Verein, die sich später zu einem Universitätsordinariate auswachsen sollte. Aber vermöge seines väterlichen Erbteiles, schnell und sicher zu handeln, schwankte Simon keinen Augenblick, obwohl er damals von rheumatischen Schmerzen und von Herzbeschwerden gerade arg geplagt wurde. Er schrieb: „Ich habe mit ganzer Seele immer den Göttinger Gedanken, wie er in dieser Stelle für angewandte Elektrizitätslehre zum Ausdrucke kommt, hochgehalten. Meine ganze Arbeit an der Zeitschrift basiert auf der Begeisterung an diesen Bestrebungen, die meiner Natur so sehr entsprechen, und die mich so sehr gefördert haben".

Zu Simons ersten Aufgaben in der neuen Stellung gehörten die Entwürfe und Pläne zu einem Institute für angewandte Elektrizität, dem ersten seiner Art an

deutschen Universitäten. Der im Jahre 1905 in Betrieb genommene Bau gilt nach Anordnung, Einrichtung und experimenteller Ausstattung auch in Technikerkreisen als vorbildliche Musteranlage. Die stilisierten Oszillographenkurven der Friese sind ein Wahrzeichen, wieviel Simon von seiner Persönlichkeit in die neue Unterrichts- und Forschungsstätte eingebaut hat. Es war sodann der ganze Unterrichtsbetrieb dem weiteren Rahmen, den reicheren Mitteln, den neuen Bedürfnissen anzupassen. In wie schöpferisch-pädagogischem Geiste dies von Simon geschah, kann man aus seinem für die Praktikumsteilnehmer als Manuskript gedruckten ersten Teile eines ganz neuartigen Elektrotechnischen Praktikumsbuches erschließen. Als Ergebnis aber von Simons Lehrtätigkeit liegt die Tatsache vor, daß aus dem Institute in den dreizehn Jahren seines Bestehens nicht weniger als 41 Arbeiten von Schülern hervorgegangen sind, darunter 25 Dissertationen. Nur wer von der Eigenart und dem wissenschaftlichen Hochstande der Mehrzahl dieser Veröffentlichungen Kenntnis genommen hat, vermag Simons Göttinger Unterricht und dessen schulbildende Kraft recht zu würdigen. Am Sarge legte H. Busch als Vertreter der Schüler Zeugnis ab, wie unablässig Simon an der immer neuen Vertiefung eines jeden seiner Kollegs gearbeitet habe, und gab dem Danke ergreifenden Ausdruck für das, was der verehrte Lehrer den meisten von ihnen auch als Mensch und als fürsorgender Freund gewesen sei. Die vorausgegangenen warmen Worte F. Kleins über Simons Verdienste um die Göttinger Vereinigung und ihre Bestrebungen gipfelten in der Mitteilung: Wenn die Mathematiker dermaleinst in dem der Ausführung entgegengehenden großen Göttinger mathematischen Institute arbeiten werden, dann dürften sie wohl nicht ahnen, daß der erste Gedanke zur Kühnheit dieser Schöpfung im Kopfe eines Physikers, des Physikers Simon gewachsen ist. Simon unterstützte die Vorarbeiten zur Begründung der Göttinger Fachschule für Feinmechanik und Optik durch eine Studienreise nach England, wirkte später im Kuratorium der Schule und errichtete an ihr Kurse in physikalisch-technischer Handfertigkeit für Studierende. Schaffung, Organisation und Leitung einer radiotelegraphischen Großstation wurde von der Marine und Heeresverwaltung Simon anvertraut. Anderthalb Jahre war er Göttinger Stadtverordneter. Er übernahm die Stellung des Fachredakteurs für Physik im Handwörterbuche der Naturwissenschaften (G. Fischer, Jena) und leistete seit 1915 auch wieder die 1905 auf jüngere Schultern übergegangene gesamte Schriftleitungsarbeit an der Physikalischen Zeitschrift. Nachdem er zu Beginn des Krieges als stellvertretender Direktor des Städtischen Elektrizitätswerkes eingesprungen war, machte er sich später durch Einrichtung eines Tag- und Nacht-Fabrikationsbetriebes für Unterseesignal-Empfangsapparate eigener Konstruktion in seinem Institute um das Vaterland verdient und ist dafür mit dem Eisernen Kreuz am weiß-schwarzen Bande ausgezeichnet worden.

Getragen wurde all dieses reiche amtliche Wirken von Simons unermüdlicher Forscherstätigkeit. Als mehr zufällige Früchte des Unterrichtsbetriebes können einige kleinere Veröffentlichungen angesprochen werden: „Über ein Universalstativ für Versuche mit der Braunschen Röhre und Zusammenstellung solcher Versuche"; „Über ein neues magnetometrisches Verfahren zur Messung magnetischer Momente"; „Über einen Phasenmesser und seine Verwendung zur Fernübertragung der Kompaßstellung"; „Einige Demonstrationsversuche mit Wechselstrom höherer Frequenz"; „Über ein neues elektrodynamisches Telephon". Auch der lichtvolle Aufsatz: „Grundlagen für das Verständnis der wich-

tigsten elektrotechnischen Vorrichtungen" im W. Fleischmannschen Lehrbuche der Milchwirtschaft und der Artikel „Elektromotorische Kräfte" im Handwörterbuch der Naturwissenschaften können an dieser Stelle wohl genannt werden. Ebenso aus der Reihe der Dissertationen beispielsweise vielleicht das von G. Leimbach behandelte Thema „Strahlungsempfindlichkeit der Bromsilberplatte gegen verschiedene Wellenlängen", die P. Defreggersche Arbeit, welche das Simonsche Spektralphotometer verbessert, H. Krönickes „Messung der Intensität und Härte der Röntgenstrahlen", C. Boedekers „Untersuchungen über die Einwirkung periodischer Kräfte auf Tropfen", die W. Schlichtersche Dissertation „Spontane Elektronenemission glühender Metalle und das glühelektrische Element".

Im Gegensatze zur Mannigfaltigkeit dieser Nebenleistungen trägt das wissenschaftliche Hauptlebenswerk Simons und seiner Schule ein ungewöhnlich einheitliches und in sich geschlossenes Gepräge. Bewußte Selbstbeschränkung, die er sich beim Ringen mit seinem zähen Stoffe hier immer auferlegte, um Zersplitterung der Kräfte zu vermeiden, diese bewußte Beschränkung auf ein bestimmt umgrenztes Gebiet wurde von Simon selbst jeweils in seiner allzu bescheidenen Weise wohl mit dem Wunsche motiviert: „Ich möchte endlich einmal das Gefühl haben, wissenschaftlich etwas Ganzes zu sein, ein Gebiet der Physik so zu beherrschen, daß ich in allen Sätteln reiten kann".

Der objektive Grund, daß ihn die einmal in Angriff genommene Aufgabe nicht wieder losließ, aber lag in deren unerschöpflichem Reichtum, der sich um so mehr enthüllte, je weiter man vordrang. Es handelte sich um das Problem der Erzeugung ungedämpfter Schwingungen für die Zwecke der Telegraphie ohne Draht und um die Mechanik der Lichtbogenvorgänge. Die Zusammengehörigkeit beider Dinge hatte Simon schon in Frankfurt klar erkannt, während er sich mit dem damals als Abkömmling des sprechenden Flammenbogens von W. Duddell gefundenen selbsttönenden Lichtbogen beschäftigte, d. h. mit der Tatsache, daß ein Lichtbogen durch parallel geschaltetes System von Kapazität und Selbstinduktion zum Tönen gebracht werden kann. Simon hatte zugleich erkannt, daß die Bedingungen für das Auftreten solcher oszillatorischer Ströme in W. Kaufmanns Theorie der Gasentladungen enthalten sind. Allgemein vermag nur ein Leiter mit abfallender Stromspannungs-Charakteristik oszillatorische Ströme stabil zu unterhalten. Die gewünschte Charakteristik aber kann nur gewonnen werden, wenn die Leitfähigkeit in genügendem Grade und in genügendem Bereiche mit der Stromstärke ansteigt. Nennt Simon die schönen Kaufmannschen Ausführungen mit Recht klassisch, so ist nicht minder klassisch, wie Simon in der großen Reihe seiner Arbeiten, die Anwendung der allgemeinen Prinzipien mathematisch exakt formuliert, auf die ganze Mannigfaltigkeit der Lichtbogenerscheinungen anzuwenden verstanden hat, wie er immer neue Einzelfragen stellt und löst oder durch seine Schüler lösen läßt. Es ist noch heute reizvoll, die stetigen Fortschritte in Simons Berichten auf den Naturforscherversammlungen Hamburg (1901), Cassel (1903) und Cöln (1908) und die daran anknüpfenden Diskussionen zu verfolgen: wie da z. B. neues Licht auf das Wesen der „Aktivität" von Funken fällt, wie der tönende Flammenbogen tatsächlich als Lösung des Orgelpfeifenproblems auf elektrischem Gebiete dargetan wird, wie Stoßerregung und die Erfolge der Poulsenlampe im Wasserstoff ihre Erklärung finden. Im Mittelpunkte der Forschungen, die aus dem Göttinger Institut für angewandte Elektrizitätslehre hervorgegangen sind, aber steht Simons grundlegende und richtunggebende

Arbeit „Über die Dynamik der Lichtbogenvorgänge und über Lichtbogenhysteresis" aus dem Jahre 1905. Sie bringt in die der alten Auffassung immer wieder spottende Kompliziertheit der Lichtbogenvorgänge diejenige Klarheit, die zu deren experimenteller Bewältigung erforderlich ist. Es wird der neue Begriff der dynamischen Lichtbogencharakteristik eingeführt und durch Beobachtungen am Wechselstromlichtbogen auf Grund von Oszillographenkurven entdeckt, daß die Charakteristik eines Lichtbogens von seiner Vorgeschichte abhängt, für welche Erscheinung Simon den Namen Lichtbogenhysteresis geprägt hat. Die Abhängigkeit dieser Lichtbogenhysteresis von verschiedentlichen besonderen Versuchsbedingungen wird untersucht, eine exakte Theorie der Lichtbogenvorgänge unter Zugrundelegung der Ionentheorie des Lichtbogens aufgestellt und diskutiert. Es wird nachgewiesen, daß eine oszillatorische Funkenentladung nichts anderes ist als ein Wechselstromlichtbogen hoher Frequenz. Der spezifische Unterschied im Verhalten des metallischen und des Kohlelichtbogens kann auf einfache quantitative Faktoren zurückgeführt werden. Die Lichtbogenhysteresis erweist sich als Ursache des Duddellschen selbsttönenden Lichtbogens. Eine zusammenfassende Darstellung „Über ungedämpfte elektrische Schwingungen" gibt Simon 1907 im Jahrbuche der drahtlosen Telegraphie und Telephonie, wobei er sich noch auf die Resultate der inzwischen abgeschlossenen Dissertation seines Schülers H. Barkhausen über den gleichen Gegenstand stützt.

Konnte das Lichtbogenphänomen durch die Arbeiten Simons qualitativ als völlig aufgeklärt gelten, und konnte es dank dieser Arbeiten auch nach der quantitativen Seite aus seiner physikalischen Natur heraus weitgehend durchschaut werden, so blieb im einzelnen doch noch viel zu tun übrig. Das Arbeitsprogramm für die Ausfüllung der Lücken des Beobachtungsmaterials und für die nur so mögliche, weitere Fortführung der Theorie ist dann von Laboranten des Göttinger Institutes unter Simons Leitung nach den verschiedensten Richtungen hin mit durchschlagendem Erfolge in Angriff genommen worden. Aus der Reihe erledigter wichtiger Einzelaufgaben mag hier nur die Frage nach dem Zusammenhange zwischen Ionisierungszustand der Gasstrecke und glühelektrischem Effekt an der Kathode erwähnt werden. Von Schülern, deren Arbeiten das Simonsche Schwingungs- und Lichtbogenproblem besonders gefördert haben, seien andererseits genannt: D. Roschansky, G. Lange, K. W. Wagner, A. W. Malcolm, W. Rihl, H. Busch, M. Reich, R. Porter, H. Lichte, E. Merkel, W. Grotrian, V. Pieck, H. Wiesinger. Die Resultate dieser Arbeiten führten einmal zu technischer Vervollkommnung der Methoden der drahtlosen Telegraphie, ihrer Sende- und Empfangsapparate, sodann gaben sie theoretische Aufklärung auch über die Wirkungsweise praktisch bewährter neuer Fortschritte, die von anderer Seite gemacht worden waren. Eine der letzten durch Simon angeregten und geförderten Untersuchungen ist die lehrreiche Pieck sche Dissertation (1917) über das aktuelle Thema der Vorgänge im sogenannten Löschfunken. Der 1911 in Berlin gehaltene Experimentalvortrag Simons über den elektrischen Lichtbogen erschien auf Wunsch des begeisterten Zuhörerkreises im Buchhandel.

In Anerkennung seiner Verdienste als Lehrer und Forscher war Simon schon 1907 zum persönlichen o. ö. Professor der Physik und angewandten Elektrizität ernannt worden, 1916 zum Geh. Regierungsrat. Im Jahre 1912 wirkte er als Abteilungsvorsteher und Dekan der Fakultät. Für das Jahr 1917/18 wurde er mit 43 von 50 Stimmen zum Rektor der Georgia Augusta gewählt. Mit welcher Aufopferung und

mit welchem Erfolge er, unter den Schwierigkeiten der Zeit, dieses Amtes gewaltet und dabei sein hervorragendes Organisationstalent betätigt hat, das erfuhr man bei der Trauerfeier aus verschiedenstem Munde. Sein Nachfolger im Rektorat, der Hygieniker Reichenbach, bezeugte, daß Simon immer unter die Zahl der großen Rektoren Göttingens gerechnet werden würde. Ein Hauptwerk, dessen Zustandekommen die Georgia Augusta der unermüdlichen Tätigkeit ihres Rektors dankte, ist der Universitätsbund Göttingen E. V. zur Förderung aller Aufgaben der Universität und des wissenschaftlichen Lebens. Die feierliche Begründung des Bundes am 26. Juni 1918 stellt wohl den Höhepunkt von Simons akademischer Wirksamkeit dar. Uns ist von diesem Tage geblieben seine Rektoratsrede „Leben und Wissenschaft, Wissenschaft und Leben". Den ferner Stehenden nicht den Freunden zeigt sie Simon von einer ganz neuen Seite. Die Rede ist nicht, wie der Titel vermuten ließe, nur ein hohes Lied auf die Göttinger Bestrebungen, nicht nur eine begeisternde warmherzige Mahnung, die Wissenschaft lebendig und das Leben wissenschaftlich zu gestalten. Sie gibt, tiefer grabend und an sinnige Verse des deutschen Malerdichters Hans Thoma sinnig anknüpfend, in vollendet künstlerischer Form ein auf Erkenntnistheorie Mach-Avenariusschen Gepräges begründetes energiewissenschaftliches Weltbild, als Anpassungsresultat der Seele an die „Lebensgewohnheiten des Lebensungeheuers". Sie enthält für den Physiker manch beachtenswertes Wort über die Wege, welche uns von den Einsteinschen Relativitätstheorien gewiesen werden.

Das Übermaß der Anstrengung des Rektorats-Kriegsdienstjahres hatte Simons körperliche Widerstandskräfte gebrochen. Die Rektoratsrede wurde sein letztes Vermächtnis.

„So trugst Du wie ein Held, mit siegendem Gewissen, die Herzenswunde, die der Krieg Dir noch gerissen" hatte Simon seinem väterlichen Freunde Riecke nachgerufen. Ihn sollte dasselbe Schicksal treffen, kurz vor dem eigenen Ende noch den Tod eines trefflichen Sohnes im Felde betrauern zu müssen. Auch er blieb da Held. Dann hat er den letzten Kampf als Kirner Simon und als Sohn seines Vaters durchgekämpft.

Th. Des Coudres.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Mechanik des Freiballons.

Von Felix Jentzsch-Gräfe.

§ 1. Grundgleichung. Als Freiballon bezeichnen wir jedes Luftfahrzeug, „leichter als die Luft", solange es sich ohne eine andere Kraft als die des statischen Auftriebes bewegt.

Wir beschränken uns auf Ballone von konstantem Volumen V, deren Füllung vom spezifischen Gewicht σ stets unter dem gleichen Druck wie die umgebende Luft vom spezifischen Gewicht s stehen soll. Diese Voraussetzung ist streng genommen nur für die untere Öffnung des Ballons erfüllt. In Wirklichkeit herrscht stets ein gewisser Überdruck im Ballon, der in der Höhe h über der Öffnung den Wert

$$\Delta p = (s - \sigma)\, h$$

hat.

Bezeichne noch B (Ballast) das Gewicht der unelastischen Hülle einschließlich aller gehobenen Gegenstände, wie Registrierinstrumente, Beleuchtungseinrichtungen (bei Piloten) oder Maschinen, Gondel, Menschen, Ballast. Dann ist augenscheinlich der „freie Auftrieb" A gegeben durch die Grundgleichung:

$$A = V(s - \sigma) - B. \qquad (1)$$

Bezeichnen wir noch mit $T = s - \sigma$ die Tragkraft einer bestimmten Gasfüllung, also z. B. bei 0° C und Atmosphärendruck für reinen Wasserstoff $T_0 = 1{,}1$ kg/cbm oder gr/lit; für Leuchtgas ca. $T_0 = 0{,}74$ kg/cbm, so nimmt



Gleichung 1 die in der Technik gebräuchliche Form an:

$$A = V \cdot T - B. \tag{1a}$$

§ 2. Beschleunigungsperiode. Unter dem Einfluß dieses Auftriebes beginnt der Ballon mit beschleunigter Geschwindigkeit zu steigen, aber bald wird infolge des steigenden Luftwiderstandes die Bewegung stationär. Um zu zeigen, daß dieser stationäre Zustand mit Ausnahme ganz phantastischer Fälle schon nach wenigen Sekunden erreicht ist, behandeln wir den Ansatz

$$m\frac{dv}{dt} = A - cv^2, \tag{2}$$

wobei m die gesamte bewegte Masse, also B plus Gasgewicht und v die Vertikalgeschwindigkeit ist. Dabei ist der Luftwiderstand einfach proportional zu v^2 angenommen, was bei den in Betracht kommenden Steiggeschwindigkeiten nicht falsch sein wird. Vernachlässigt ist dagegen, daß mit den beim Steigen sinkenden Luftdruck nicht nur der Widerstand und der freie Auftrieb abnehmen, sondern auch die bewegte Masse selbst variabel ist. Trotzdem mag der Ansatz für eine überschlägige Betrachtung genügen, da sich zeigen wird, daß schon in geringen Höhen jede Beschleunigung aufhört. Integration von (2) liefert zunächst

$$t = \frac{m}{2\sqrt{Ac}} \ln \frac{\sqrt{A/c} + v}{\sqrt{A/c} - v},$$

wobei die Integrationskonstante wegen der Anfangsbedingung $t = 0$, $v = 0$ verschwindet. Die Geschwindigkeit wird

$$v = \sqrt{\frac{A}{c}} \cdot \frac{e^{\frac{2}{m}\sqrt{Ac}\cdot t} - 1}{e^{\frac{2}{m}\sqrt{Ac}\cdot t} + 1}.$$

Wie man sieht, wächst die Geschwindigkeit asymptotisch; doch läßt sich zeigen, daß der größte Teil der maximalen Geschwindigkeit schon sehr bald erreicht wird. Aus $\frac{dv}{dt} = 0$ ergibt sich die maximale Geschwindigkeit zu:

$$v_m = \sqrt{\frac{A}{c}}$$

also

$$v = v_m \frac{e^{\frac{2}{m}\cdot\frac{A}{v_m}t} - 1}{e^{\frac{2}{m}\cdot\frac{A}{v_m}t} + 1}. \tag{3}$$

Setzen wir $v = \varepsilon v_m$ und lösen nach t auf, so kommt

$$t = \frac{m v_m}{2A} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Setzen wir darin z. B. $\varepsilon = 0{,}9$, so liefert uns diese Gleichung die Zeit in Sekunden, in der sich die Steiggeschwindigkeit des Ballons ihrem maximalen Wert bis auf 10 Proz. nähert. Je größer also der freie Auftrieb ist, um so schneller wird die Periode des beschleunigten Steigens durchlaufen.

Durch nochmalige Integration nach der Zeit findet man für die Höhe h, in der der Ballon die Geschwindigkeit $v = \varepsilon \cdot v_m$ erreicht hat

$$h = \frac{m}{2A} \cdot v_m^2 \ln \frac{4\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}.$$

Beispiele: 1. Für einen Ballon von 25 g bewegter Masse und einem freien Auftrieb von 30 g Gewicht = 29430 Dyn., der vielleicht eine maximale Steiggeschwindigkeit von 180 m/min oder 300 cm/sec erreichen mag, findet man, daß er 99 Proz. seiner Steiggeschwindigkeit bereits nach 0,65 sec erreicht hat. Er ist dann 2 m gestiegen.

2. Ein Ballon von der Masse 20 kg und einem freien Auftrieb von nur 2,5 kg nähert sich seiner maximalen Geschwindigkeit von z. B. 200 cm/sec bis auf 90 Proz. bereits nach 2,4 sec und auf 99 Proz. nach 4,3 sec. Er hat dann die Höhen von 4,6 m bzw. 8,3 m erreicht.

3. Ein Luftschiff von 10000 kg bewegter Masse und nur 100 kg freiem Auftrieb wird sich seiner maximalen Vertikalgeschwindigkeit von z. B. 100 cm/sec genähert haben bis auf

90 Proz. nach 15,0 sec in einer Höhe v. 14,5 m
95 „ „ 18,7 „ „ „ „ „ 18,4 „
99 „ „ 27,0 „ „ „ „ „ 27 „.

§ 3. Stationäre Bewegung. Da es sich also stets um sehr geringe Zeiten und Höhen handelt, lassen wir weiterhin diese Beschleunigungsperiode außer Betracht und beschränken uns auf den stationären Zustand, setzen also den freien Auftrieb in jedem Augenblick gleich dem Luftwiderstand. Dieser werde proportional zu $s \cdot f(v)$ angenommen, wobei die Proportionalitätskonstante die Einflüsse des Maßstabes (wirksamer Querschnitt), der spezifischen Reibung des Materials, den Formfaktor usw. enthält. Die Proportionalität des Widerstandes zum spezifischen Gewicht des Mediums s ist bisher durch alle Erfahrungen bewährt. Die Funktion $f(v)$, die die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Geschwindigkeit allein enthält, bleibe zunächst unbestimmt. Die Grundgleichung (1) geht dann nach Division mit s über in die Form

$$\frac{A}{s} = V\left(1 - \frac{\sigma}{s}\right) - \frac{B}{s} = \text{konst.} \cdot f(v). \tag{1b}$$

Die Anfangsbedingungen des durch diese Gleichung dargestellten Zustandes sind

$$t = 0, \quad h = h_0, \quad v = v_0,$$

wobei also angenommen ist, daß der Ballon mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit zu steigen beginnt, die in praxi mit der vorher besprochenen Maximalgeschwindigkeit zusammenfallen wird. σ und s sind noch mit Druck und Temperatur veränderlich. Wenn die Gasfüllung des Ballons den allgemeinen Gasgesetzen folgt, und stets die gleiche Temperatur wie die umgebende Luft hat, so ist aber

$$1 - \frac{\sigma}{s} = 1 - \frac{\sigma_0}{s_0}$$

und wir haben aus

$$V\left(1 - \frac{\sigma}{s}\right) = \frac{A_0 + B}{s_0}$$

mithin

$$\frac{A_0 + B}{s_0} - \frac{B}{s} = \text{konst.} \cdot f(v).$$

Da andererseits augenscheinlich

$$\frac{A_0}{s_0} = \text{konst.} \cdot f(v_0),$$

so fällt bei Division die unbekannte Konstante, die Reibungskoeffizient, Luftwiderstands- und Formfaktor usw. enthält, fort und man hat:

$$\frac{f(v)}{f(v_0)} = 1 + \frac{B}{A_0} \cdot \frac{s - s_0}{s}. \tag{4}$$

Hierin ist der Quotient $\frac{s_0}{s}$ gleich der sogenannten Höhenzahl n, die angibt, um wieviel mal der Luftdruck am Boden größer ist als in der Höhe des Ballons. Weiter führen wir noch als charakteristische Konstante eines Ballons seinen spezifischen Steigwert an:

$$p = \frac{A_0}{B},$$

wobei p also der freie Auftrieb der Gewichtseinheit ist. Durch Abwägen am Boden ist der anfängliche freie Auftrieb A_0 sowie das Gewicht B der gehobenen Masse stets leicht festzustellen, so daß dieser Steigwert p, als eine sowohl der Messung leicht zugängliche, wie die Bewegung tatsächlich charakterisierende Größe sich wohl zur allgemeinen Einführung eignen würde.

Mit diesen Bezeichnungen lautet die Formel der Geschwindigkeit

$$\frac{f(v)}{f(v_0)} = 1 - \frac{n-1}{p}. \tag{4a}$$

Aus der Form dieser Gleichung ersieht man zunächst, falls $f(v)$ nicht periodisch ist und ständig mit dem Argument wächst, daß v stets kleiner als v_0 ist; die Steiggeschwindigkeit nimmt also dauernd ab, und zwar nur langsam bei großem Steigwert und kleiner Höhenzahl.

Augenscheinlich bietet sich hier ein Weg, die Form der Funktion $f(v)$, d. h. das Gesetz des Luftwiderstandes in einen bestimmten Gültigkeitsbereich experimentell zu erreichen.

Man hat nämlich einerseits aus Formel (4a) die Funktionswerte f selbst in Abhängigkeit von der Höhenzahl n und dem spezifischen Steigwert p. Die Werte $\frac{f(v)}{f(v_0)}$ sind in Tabelle I zusammengestellt und können noch strenge Richtigkeit in Anspruch nehmen.

Die vor die Höhenzahl gesetzten Höhen selbst sind natürlich nicht streng richtig, da der Einfluß des Temperaturgefälles in der Atmosphäre hierbei noch nicht berücksichtigt ist.

Die Geschwindigkeit v selbst kann man andererseits experimentell, z. B. aus Doppelanschnitten eines Ballons von den Enden einer längeren Basis aus, hinreichend genau ermitteln. Der Vergleich zwischen diesen Werten und denen der Tabelle I liefert direkt die Form von $f(v)$,

Tabelle I.

Funktion $\frac{f(v)}{f(v_0)}$ des Luftwiderstands.

Höhe in m	Höhenzahl n	Steigwerte p 0,1	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	5,0
0	1,0000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
500	1,0646	0,354	0,871	0,935	0,952	0,968	0,978	0,987
1000	1,1333	—	0,733	0,867	0,900	0,933	0,956	0,973
1500	1,2065	—	0,587	0,794	0,845	0,900	0,931	0,959
2000	1,2844	—	0,431	0,716	0,787	0,858	0,905	0,943
3000	1,4556	—	0,100	0,544	0,658	0,772	0,848	0,909
4000	1,6497	—	—	0,350	0,513	0,675	0,783	0,870
5000	1,8696	—	—	0,130	0,348	0,565	0,710	0,826
6000	2,1189	—	—	—	0,165	0,441	0,627	0,776
8000	2,7213	—	—	—	—	0,139	0,426	0,656
10 000	3,4953	—	—	—	—	—	0,168	0,501
12 000	4,4893	—	—	—	—	—	—	0,302
14 000	5,7659	—	—	—	—	—	—	0,047

d. h. das Luftwiderstandsgesetz für einen Körper von Form und Größe des verwandten Ballons.

Die beste Übereinstimmung mit der Erfahrung liefert ein quadratisches Gesetz mit zwei Konstanten. Doch reicht auch das quadratische Widerstandsgesetz mit nur einer Konstante aus. Diese Form wird auch in den meisten Untersuchungen für den bei Freiballons in Betracht kommenden Geschwindigkeitsbereich angenommen; der Luftwiderstand sei also in der vorliegenden Arbeit weiterhin proportional zu sv^2, d. h. der lebendigen Kraft des vertikalen Luftstromes relativ zum Ballon gesetzt. Dann wird

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 - \frac{n-1}{p}. \qquad (4b)$$

Diese Formel ist von beträchtlicher praktischer Bedeutung. Wie der Zusammenhang in diesem Fall im einzelnen ist, zeigt Tabelle II.

$$h = 18450\,(1 + \alpha t_m) \cdot \log n,$$

wo α der thermische Ausdehnungskoeffizient idealer Gase (der Luft) und t_m die mittlere Temperatur der betrachteten Luftsäule ist.

Für einen Ballon vom Steigwert p ist mithin seine maximale oder Schwimmhöhe gegeben durch:

$$h_{max} = 18450\,(1 + \alpha t_m) \log (1 + p) = H' \ln (1 + p), \qquad (6)$$

wo noch

$$H' = H_0\,(1 + \alpha t_m)$$

die Höhe der „homogenen Atmosphäre" ist.

Danach berechnet sich folgende Tabelle der Schwimmhöhen[1]). (Siehe Tabelle III.)

Die Zahlen der Spalte 3 sind berechnet für den Fall „isothermen" Aufstiegs, daß also die Temperatur des Füllgases stets gleich der der

Tabelle II.
Abnahme der Steiggeschwindigkeit.

Höhe in m	Steigwerte p 0,1	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	5,0
0	100 Proz.	100 Proz.	100 Proz.	100 Proz.	100 Proz.	100 Proz.	100 Proz.
500	59,5 „	93,3 „	96,6 „	97,5 „	98,3 „	98,8 „	99,3 „
1 000	—	85,6 „	93,1 „	94,8 „	96,6 „	97,7 „	98,6 „
1 500	—	76,6 „	89,0 „	91,9 „	94,7 „	96,5 „	97,8 „
2 000	—	65,6 „	84,6 „	88,6 „	92,6 „	95,1 „	97,1 „
3 000	—	31,6 „	73,7 „	81,1 „	87,8 „	92,0 „	95,3 „
4 000	—	—	59,1 „	71,6 „	82,1 „	88,4 „	93,2 „
5 000	—	—	36,1 „	58,9 „	75,2 „	84,2 „	90,8 „
6 000	—	—	—	40,7 „	66,3 „	78,2 „	88,0 „
8 000	—	—	—	—	37,3 „	65,2 „	80,9 „
10 000	—	—	—	—	—	41,0 „	70,7 „
12 000	—	—	—	—	—	—	54,9 „
14 000	—	—	—	—	—	—	21,6 „

Jedenfalls ist bemerkenswert, daß allein durch den Steigwert p, also eine einzige, leicht meßbare Konstante bestimmt ist, wieviel der Ballon in einer beliebigen Höhe h noch von seiner ursprünglichen Steiggeschwindigkeit beibehalten hat.

Wie man sieht, nimmt bei großen Steigwerten p die Geschwindigkeit nur sehr langsam mit der Höhe ab.

§ 4. Schwimmhöhe. Die Höhe, in der die Geschwindigkeit bis auf Null gesunken ist, nennen wir die Schwimmhöhe oder Normalhöhe des Ballons. Sie ist ebenfalls ausschließlich durch den Steigwert p bestimmt und von allen anderen Eigenschaften, wie Volumen, Form, Art des Füllgases, Anfangsgeschwindigkeit usw. gänzlich unabhängig. Sie ist nach Gleichung (4b) bedingt aus $v = 0$ durch

$$p = n - 1. \qquad (5)$$

Unter Benutzung der Höhenzahl n lautet aber die barometrische Höhenformel

Tabelle III.

Steigwert p	Schwimmhöhe bei durchweg 0° C	„isothermer" Aufstieg
0,1	762 m	925
0,2	1 457 „	1 755
0,3	2 096 „	2 505
0,4	2 688 „	3 195
0,5	3 240 „	3 825
1,0	5 540 „	6 355
1,5	7 320 „	8 230
2,0	8 780 „	9 700
3,0	11 080 „	11 920
4,0	12 860 „	13 540
5,0	14 320 „	14 720
10,0	18 475 „	18 070

1) Im Sommer 1915 habe ich in Ostende häufig aus der bei Doppelanschnitten gefundenen wirklichen Schwimmhöhe und dem anfänglichen gemessenen Steigwert die mittlere Temperatur der dazwischen liegenden Luftsäule berechnet. Die Resultate standen in guter Übereinstimmung mit den Angaben gleichzeitiger Drachenaufstiege.

umgebenden Luft ist, wobei die letztere in normaler Weise mit der Höhe abnehmen soll. Zugrunde gelegt wurde eine Temperaturabnahme von 6° für je 1000 m Höhe und in 2000 m Höhe eine durchschnittliche Temperatur von 0° C. Oberhalb der Troposphäre, d. h. oberhalb ca. 11000—12000 m Höhe wurde eine gleichmäßige Temperatur von —55° C angenommen. (Näheres in § 6, Temperatureinflüsse.)

Unter Benutzung der Tragkraft $T = s - \sigma$ eines Gases und Einführung der natürlichen Logarithmen können wir Gleichung (6) auch schreiben (vgl. Gl. 1a)

$$h_{\max} = H' \ln \frac{V T_0}{B}. \qquad (6a)$$

In dieser Form ist der Einfluß der Ballastabgabe leichter zu übersehen. Falls das Volumen des Ballons während eines Aufstiegs unverändert bleibt und keine Gasmischung durch Diffusion eingetreten ist, haben wir

$$d h_{\max} = -8013 (1 + \alpha t') \frac{\Delta B}{B}, \qquad (7)$$

wobei t' hier die Temperatur in der Höhe selbst des Ballons ist.

Für je 1 Proz. Ballastverminderung steigt also die Schwimmhöhe

um 86 m bei + 20° C
80,1 „ „ 0°
74,3 „ „ — 20°
68,4 „ „ — 40°

Dies ist das bekannte Gesetz der Ballastwirkung[1]).

Es gilt nur für kleine Ballaständerungen, da vorausgesetzt wurde, daß sich die Temperatur auf der infolge der Ballastausgabe durchstiegenen Strecke nicht ändert. Bei größeren Ballaständerungen muß auf Gl. 6 und die Tabelle der Schwimmhöhen zurückgegriffen werden.

§ 5. Steigzeiten. Es interessiert nunmehr vor allem, in welcher Zeit die Schwimmhöhe und welche Höhen in jedem anderen Augenblick erreicht werden.

Dazu gehen wir von Gl. 4b aus und eliminieren die Höhenzahl n. Differentiation der Gl. 4b gibt:

$$2 v \frac{dv}{dt} = -\frac{v_0^2}{p} \frac{dn}{dt}.$$

Andererseits lautet die differenzierte barometrische Höhenformel

$$\frac{dh}{dt} = v = \frac{H}{n} \cdot \frac{dn}{dt}.$$

An beiden folgt mit Hilfe von Gl. (4b):

1) Vgl. z. B. Emden, Grundlagen der Ballonführung. § 10.

$$2 H \frac{dv}{dt} = -\frac{v_0^2}{p} \cdot n = v^2 - v_0^2 \frac{p+1}{p}$$

Dies gibt integriert

$$\ln \frac{q+v}{q-v} = -\frac{q}{H} t + \text{Konst.},$$

wobei

$$q^2 = v_0^2 \frac{p+1}{p}$$

gesetzt ist.

Nach Bestimmung der Konstanten aus den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad v = v_0$$

findet man endlich

$$v = q \frac{r - e^{qt/H}}{r + e^{qt/H}} \qquad (8)$$

wobei

$$r = \frac{q+v_0}{q-v_0} = \frac{\sqrt{1+p} + \sqrt{p}}{\sqrt{1+p} - \sqrt{p}}.$$

Nach Gl. (8) kann man also die Steiggeschwindigkeit eines Ballons für jeden beliebigen Augenblick berechnen, wenn man ihn am Boden abgewogen hat, so daß p und also r bekannt sind, und außerdem seine Anfangsgeschwindigkeit v_0 weiß. Nur diese beiden Konstanten treten auf. Zur Bequemlichkeit folge noch eine Tabelle für die Konstanten r und $\frac{q}{v_0}$.

Tabelle IV.

Steigwert p	r	q/v_0
0,1	1,864	3,317
0,2	2,380	2,450
0,5	3,735	1,732
1,0	5,832	1,414
1,5	7,875	1,292
2,0	9,905	1,225
3,0	13,930	1,155
5,0	21,96	1,095
10,0	41,97	1,049

Die Zeit, in der diese Schwimmhöhe erreicht wird, die Gesamtsteigzeit bestimmt sich aus Gl. (8) für $v = 0$ zu

$$t_{\max} = \frac{H}{q} \ln r. \qquad (9)$$

Danach ergibt sich Tabelle V. Dabei ist abgesehen von der anfänglichen, nur nach wenigen Sekunden zählenden Beschleunigungsperiode.

Es ist bemerkenswert, daß bei gleichen Konstanten p und v_0 die Gesamtsteigzeit eines Ballons also unabhängig von seiner Größe und der Art seiner Füllung und in gewissen Grenzen auch unabhängig von seiner Form ist, in soweit nämlich, als der Luft-

Tabelle V.

Steigwert p	Die Gesamtsteigzeit bestimmt aus dem Steigwert p und der Anfangsgeschwindigkeit v_0							
	1 m/sec 60 m/min	1,5 m/sec 90 m/min	2 m/sec 120 m/min	2,5 m/sec 150 m/min	3 m/sec 180 m/min	3,5 m/sec 210 m/min	4 m/sec 240 m/min	5 m/sec 300 m/min
0,1	25 min	16,7	12,5	10,0	8,3	7,2	6,3	5,0
0,2	47	31,5	23,5	19	15,5	13,5	11,5	9,5
0,5	101	67	51	41	34	29	25,5	20,5
1,0	166	111	83	66	55	47	41,5	33
1,5	213	153	106	85	71	61	53	42,5
2	249	166	125	100	83	71	62	50
3	304	202	152	121	101	87	76	61
5	375	250	188	150	125	112	94	75
10	475	305	237	190	158	136	119	95

widerstand proportional zu v^2 gesetzt werden kann.

Die Abnahme der Geschwindigkeit innerhalb der gesamten Steigzeit erfolgt natürlich nicht gleichmäßig. Zu Zeit $t = \varepsilon\, t_{max}$ ist die Geschwindigkeit auf $v = x\, v_0$ gefallen. Je mehr ε anwächst, um so kleiner wird x, um endlich für $\varepsilon = 1$ ganz zu verschwinden.

Aus Gl. (8) wird dann nach (9) ohne weiteres

$$x = \frac{r+1}{r-1} \cdot \frac{r-r^{\varepsilon}}{r+r^{\varepsilon}}. \qquad (10)$$

Die Verteilung der Geschwindigkeit in die Gesamtsteigzeit ist also nur abhängig vom Steigwert p. Sie ist unabhängig von allen sonstigen Eigenschaften des Ballons, wie Größe, Art der Füllung usw. und ist auch unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit. Beispielsweise ist in Tabelle VI berechnet, welcher Bruchteil ε der Gesamtsteigzeit verstrichen ist, wenn die Anfangsgeschwindigkeit auf die Hälfte gesunken ist, und welcher Bruchteil x der Anfangsgeschwindigkeit noch nach Ablauf der halben Gesamtsteigzeit vorhanden ist.

$$(n)_{\frac{t_{max}}{2}} = \frac{2(p+1)}{1+\sqrt{p+1}}. \qquad (11)$$

Auch diese ist unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit. Danach ist die letzte Spalte der Tabelle VI berechnet.

Bei den gewöhnlich auftretenden, ziemlich niedrigen Steigwerten hat also jeder Ballon in seiner halben Gesamtsteigzeit etwa $^3/_4$ der von ihm erreichbaren Höhe erlangt.

Um auch noch die Zwischenhöhen selbst als Funktion der Zeit zu erhalten, integriert man Gl. (8) nochmals

$$h = qt - 2H \ln (r + e^{\frac{q}{H}t}) + \text{Konst.}$$

Nach Bestimmung der Konstanten aus den Anfangsbedingungen $t = 0$ und $h = h_0$ findet man endlich

$$h - h_0 = qt - 2H \ln \frac{r + e^{\frac{q}{H}t}}{r+1} \qquad (12)$$

so daß man nach Gl. (12) die Höhe des Ballons in jedem beliebigen Augenblick berechnen kann.

Tabelle VI.

Steigwert p	Zeit der halben Anfangsgeschwindigkeit	Geschwindigkeit nach der halben Gesamtsteigzeit	Höhe nach der halben Gesamtsteigzeit
0,1	$0{,}51 \cdot t_{max}$	$0{,}51 \cdot v_0$	$0{,}74 \cdot h_{max}$
0,2	0,52	0,53	0,74
0,5	0,55	0,55	0,73
1,0	0,58	0,59	0,73
1,5	0,60	0,61	0,72
2,0	0,62	0,63	0,72
3,0	0,65	0,66	0,71
5,0	0,68	0,71	0,69
10,0	0,72	0,77	0,60

Für die nach der halben Gesamtsteigzeit erreichte Höhe ergibt sich aus Gl. (10) in Verbindung mit Gl. (4b) nach geringen Umformungen die Höhenzahl

Setzt man in dieser Gleichung für die Zeit t die maximale Steigzeit

$$t_{max} = \frac{H}{q} \ln r$$

ein, so kommt für die Höhe

$$h_{\max} = H \ln(p + 1),$$

wie es sein muß.

§ 6. Die Anfangsgeschwindigkeit. In den vorstehenden Formeln ist alles enthalten, was sich aus allgemeinen Ansätzen über einen Ballon aussagen läßt, wobei als bestimmende Größe stets nur der Steigwert p und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 erscheinen. Letztere könnte man auf andere Größen zurückführen, etwa durch den den stationären Zustand charakterisierenden Ansatz: „Freier Auftrieb gleich Reibungskraft“

$$A_0 = f \cdot \varrho \cdot Q \cdot s_0 \cdot v^2, \tag{13}$$

wobei ϱ als spezifische Reibung dem Material der Ballonhülle Rechnung tragen soll, Q den wirksamen Querschnitt und f einen „Formfaktor“ bedeuten, der noch seinerseits von der Größe des wirksamen Querschnitts abzuhängen scheint.

In Verbindung mit Gl. (1) und dem Steigwert p ergibt sich

$$v_0^2 = \frac{p}{p+1} \cdot \frac{s_0 - \sigma_0}{s_0} \cdot \frac{1}{f \cdot \varrho} \cdot \frac{V}{Q}. \tag{14}$$

Da $\frac{s_0 - \sigma_0}{s_0}$ nach den allgemeinen Gasgesetzen eine Konstante ist, so ist also die Anfangsgeschwindigkeit unabhängig vom Barometerstand und Temperatur, dagegen abhängig von den Größenverhältnissen, vom Steigwert und der Art des Füllgases.

Im Falle eines Kugelballons kann $f = \frac{1}{3}$ gesetzt werden und $\frac{V}{Q}$ wird gleich $\frac{2}{3} D$, wo D der Durchmesser des Ballons, also

$$v_0^2 = \frac{p}{p+1} \cdot \frac{s_0 - \sigma_0}{s_0} \cdot \frac{2}{\varrho} D. \tag{14a}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit eines Wasserstoffballons ist also um 30 Proz. größer als die eines gleich großen Leuchtgasballons vom gleichen Steigwert. Die Schwimmhöhe ist für beide natürlich dieselbe. Die Gesamtsteigzeit ist aber für den Wasserstoffballon um 24 Proz. geringer.

Für Fälle der Praxis ist es jedoch besser, die Anfangsgeschwindigkeit besonderen Versuchen zu entnehmen, wie sie für Kugelballons mehrfach vorliegen.

§ 7. Temperatureinflüsse. Bisher wurde angenommen, daß sich die Bewegung des Ballons in der Weise vollzieht, daß er seine Anfangstemperatur beibehält. Insbesondere ist die Tabelle der Schwimmhöhe unter dieser Voraussetzung berechnet. Die Gasfüllung ändert aber während der Bewegung ihre Temperatur. Um die dadurch bewirkten Abweichungen von den vorstehend entwickelten Gesetzen zu untersuchen, geht man am besten auf Gl. (1a) zurück.

$$A = VT - B.$$

Nach den Gasgesetzen ist die Tragkraft einer bestimmten Gasfüllung

$$T = \left(\frac{s_0}{\vartheta} - \frac{\sigma_0}{\tau}\right) \frac{\vartheta_0}{n},$$

wo n die Höhenzahl, ϑ_0 die Anfangstemperatur, ϑ die Lufttemperatur in einer bestimmten Höhe h und τ die Gastemperatur in der gleichen Höhe sind; sämtliche Temperaturen sind absolute.

Als bestimmend für die Schwimmhöhe folgt daraus zunächst aus $A = 0$ für die maximale Höhenzahl

$$n_{\max} = \frac{V}{B} \cdot \vartheta_0 \left[\frac{s_0}{\vartheta} - \frac{\sigma_0}{\tau}\right].$$

Mit Benutzung des Steigwertes p ist nach Gl. (1a)

$$\frac{V(s_0 - \sigma_0)}{B} = p + 1$$

also

$$n_{\max} = (p+1)\left[\frac{s_0}{s_0 - \sigma_0} \cdot \frac{\vartheta_0}{\vartheta} - \frac{\sigma_0}{s_0 - \sigma_0} \cdot \frac{\vartheta_0}{\tau}\right]. \tag{15}$$

Wir unterscheiden drei Fälle.

I. Falls Gastemperatur und Lufttemperatur beide gleich der Anfangstemperatur geblieben sind, ist

$$\vartheta = \tau = \vartheta_0$$

dann wird aus Gl. (15)

$$n_{\max} = p + 1,$$

wie schon in Gl. (5) als Bedingung für die Schwimmhöhe gefunden wurde (vgl. Tabelle III, Spalte 2).

II. Falls sich Gas- und Lufttemperatur zwar mit der Höhe ändern, aber keine Übertemperatur der Gasfüllung eintritt, wird

$$\tau = \vartheta \mp \vartheta_0$$

und

$$n_{\max} = (p+1)\frac{\vartheta_0}{\vartheta}. \tag{15a}$$

Wegen der barometrischen Höhengleichung

$$h = H \cdot \ln n$$

folgt als Zuwachs zu der nach Gl. (6) berechneten Schwimmhöhe

$$\Delta h_{\max} = H_0\left(1 + \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2}\right) \ln \frac{\vartheta_0}{\vartheta}.$$

Dieser Höhenzuwachs ist also gänzlich unabhängig von der Größe des Ballons, der Art der Gasfüllung und der erreichten absoluten Höhe.

Aus Gl. (15a) folgt für eine Bodentemperatur von 0° C

bei einer Temperaturabnahme	5°	10°		
als Höhenzuwachs	150	294 m		

20°	30°	40°	50°
595	886	1179	1477 m

Die für die „normalen" Temperaturverhältnisse der Atmosphäre nach obiger Formel berechneten Höhenzunahmen sind in Spalte 3 der Tabelle III den Schwimmhöhen zugefügt, so daß die dortigen Werte als die „normalen" Schwimmhöhen zu gelten haben. Sie werden stets auftreten, wenn keine nennenswerte Temperaturdifferenz zwischen Gasfüllung und umgebender Luft vorhanden ist, also vornehmlich bei bedecktem Himmel und bei Nachtfahrten.

Für den Höhenzuwachs pro Grad Temperaturänderung folgt durch Differentiation

$$d\,h_{\max} = -H\frac{\Delta\vartheta}{\vartheta}.$$

Wenn man noch annäherungsweise $\vartheta = 273$ setzt und die Temperaturabhängigkeit von H vernachlässigt, folgt

$$d\,h_{\max} = -H\,\alpha\,\Delta\vartheta = \text{ca. } 29{,}3\ \Delta\vartheta.$$

Das heißt für jeden Grad Temperaturabnahme steigt der Ballon um ca. 30 m, das ist das dem Praktiker bekannte sogenannte Emdensche Gesetz.

III. In den meisten Fällen ist die Temperatur der Gasfüllung verschieden von der der umgebenden Luft. Gleich nach dem Füllen des Ballons ist die Innentemperatur etwas geringer als außen. Doch gleicht sie sich so schnell aus, daß man beim Start gleiche Temperatur innen und außen annehmen kann. Wenn sich während des Aufstiegs das Füllgas adiabatisch ausdehnen würde, müßte man im allgemeinen die Innentemperatur geringer als die der umgebenden Luft annehmen, da das vertikale Temperaturgefälle der Atmosphäre bekanntlich etwas langsamer erfolgt, als der adiabatischen Ausdehnung entsprechen würde. In Wirklichkeit wird aber dem Ballon ständig Energie durch Strahlung zugeführt, so daß, besonders wegen der starken Absorption der Hülle, die Innentemperatur sich stets größer als die der umgebenden Luft ergibt. Genaue Angaben liegen nicht vor. Vereinzelt sind bis zu 40° Temperaturdifferenz gefunden worden. Immerhin wird, wenn wir mit

$$\tau' = \tau - \vartheta$$

den Temperaturüberschuß der Gasfüllung bezeichnen,

$$\left(\frac{\tau'}{\vartheta}\right)^2 \ll 1$$

sein.

Dann kann in Gl. (15) gesetzt werden

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\vartheta}\left(1 - \frac{\tau'}{\vartheta}\right).$$

Es folgt daraus

$$n_{\max} = (p+1)\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\left(1 + \frac{\sigma_0}{s_0 - \sigma_0}\cdot\frac{\tau'}{\vartheta}\right). \quad (15\text{b})$$

Der Zuwachs, den die Schwimmhöhe durch die Übertemperatur des Ballons erfährt, ist also

$$\Delta h_{\max} = H \ln\left(1 + \frac{\sigma_0}{s_0 - \sigma_0}\,\frac{\tau'}{\vartheta}\right).$$

Dieser Höhenzuwachs ist zwar auch wie in Fall II von der Größe des Ballons und der erreichten absoluten Höhe unabhängig, aber nicht mehr von der Art der Füllung. Der Ausdruck $\frac{\sigma_0}{s_0 - \sigma_0}$ wird für Leuchtgas im Mittel zu 0,84, für technisch hergestellten Wasserstoff zu ca. 0,10. Es ergibt sich also ein großer Unterschied zwischen beiden Füllarten und eine bedeutende Überlegenheit in fahrtechnischer Beziehung für den Wasserstoffballon gegenüber dem Leuchtgasballon.

Tabelle VII.

Lufttemperatur ϑ	Höhenzuwachs wegen Übertemperat. d. Ballons			
	Leuchtgas		Wasserstoff	
	$\tau' = 10^0$ C	20° C	$\tau' = 10^0$ C	20° C
0° C	243 m	479 m	29,2 m	58,5 m
—10° C	247 „	487 „	29,8 „	59,6 „
—20° C	252 „	497 „	30,4 „	60,8 „

Für den Höhenzuwachs pro Grad Übertemperatur findet man durch Differentiation

$$d\,h_{\max} = H\frac{\sigma_0}{s_0 - \sigma_0}\cdot\frac{\Delta\tau'}{\vartheta},$$

woraus, wie in Fall II, die von Emden angegebene Form folgt, wenn man $\vartheta = 273$ setzt und H konstant hält.

$$d\,h_{\max} = 24{,}7\cdot\Delta\tau' \text{ m für Leuchtgas,}$$
$$d\,h_{\max} = 2{,}94\cdot\Delta\tau' \text{ m für Wasserstoff.}$$

Zusammenfassung der neuen Ergebnisse.

1. Durch Einführung des spezifischen Steigwertes p, d. h. des freien Auftriebes der Gewichtseinheit gelingt es die Abnahme der Geschwindigkeit, die Schwimmhöhe, u. a. durch diese eine Konstante auszudrücken.

2. Durch diesen Steigwert p und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 des Ballons lassen sich



die Geschwindigkeit und die Höhe in jedem Augenblick sowie die Steigzeiten in geschlossener Form darstellen.

3. Die Gesetze der Temperatureinflüsse werden streng dargestellt.

4. Es wird eine Methode angedeutet, das Luftwiderstandsgesetz aus Beobachtungen von Steiggeschwindigkeiten experimentell festzustellen.

Literatur.

1) Robert Emden, Grundlagen der Ballonführung. Leipzig, Teubner. 1910.

2) Paul Schreiber, Beiträge zur Theorie der Pilotaufstiege. Illustrierte Aeronautische Mitteilungen 13, 649, 1909.

3) Hesselberg u. Birkeland, Steiggeschwindigkeit der Pilotballone. Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre 4, 196—215, 1912.

4) R. Dietzius, Steig- u. Fallgeschwindigkeit des Freiballons. Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre 7, 35—50, 1915.

5) Paul Schulze-Gardelegen, Ableitung der Grundgesetze für einen Ballon konstanten Gasvolumens. Deutsche Luftfahrer-Zeitung 19, 66—69, 1915.

Die in dieser Arbeit dargestellten Formeln habe ich im wesentlichen bereits im Sommer 1915 in Ostende entwickelt. Sie sind damals für militärische Zwecke gebraucht worden.

Gießen, im Zwischensemester 1919.

(Eingegangen 22. April 1919.)

Normale Betrachtungsperspektive.

Bemerkung zu S. 119 der Abhandlung des Herrn Witte „Über den Sehraum" (diese Zeitschr. 20, 114—120, 1919).

Von H. Seemann.

Die photographische Beweisführung des Herrn Witte über die Falschschätzung der Mond- und Sonnengröße auf Bildern seitens der Maler erscheint nicht eindeutig, wie aus folgenden Beispielen ersichtlich ist.

1. Eine Fernphotographie der Halbinsel Hela von Danzig aus (28 km) bei spiegelglatter See würde den fiktiv hinter dem Dörfchen Hela aufgehenden Vollmond größer erscheinen lassen als die von Danzig aus sichtbare Häuserreihe am Strande. Auf einer Vergrößerung des Dorfbildes auf 13 : 18 cm würde der Rand des halb aufgegangenen Mondes demnach schon außerhalb des Bildrandes liegen.

Wenn man einen Maler aufforderte, den Mond in den vermeintlichen Himmel dieses Bildes, der ja in Wirklichkeit eine überexponierte (meteorologische) Mondlandschaft wäre, einzuzeichnen, so würde er ihn annähernd ebenso groß zeichnen wie auf den gleich großen Bildern des Herrn Witte, ohne zu merken, daß das Bild aus 28 km Entfernung aufgenommen war, denn die perspektivischen Unterschiede dieses Bildes — Perspektive ist identisch mit Zentralprojektion — gegen ein solches, das aus 1 km Entfernung aus derselben Richtung aufgenommen wurde, sind nur durch feine Messung bei genauer topographischer Kenntnis des Dorf- und Hafenbildes feststellbar.

2. Der Schwarzwald-Maler Dischler zeigte dem Verfasser ein in Arbeit befindliches Landschaftsbild, das er im Zimmer aus etwa 4 m Entfernung durch das geöffnete kleine Fenster seiner Villa beobachtete. Der Fensterrahmen war der Bildausschnitt. So wie er das Stückchen Landschaft im Fensterrahmen erscheinen sah, brachte er es auf die Leinwand, wobei er die Perspektive des gemalten Bildes gleichfalls aus großem Betrachtungsabstand kontrollierte.

Hätte man vom Beobachtungspunkt aus eine photographische Aufnahme des im Fensterrahmen erscheinenden Bildes gemacht derart, daß es entweder gleich die Größe 13:18 cm gehabt hätte oder durch nachträgliche Vergrößerung oder Verkleinerung auf dieses Format gebracht worden wäre, was zu perspektiv identischen Bildern führt, so würde Herr Stegmann ebenso wie Herr Dischler den Mond annähernd so groß hineingezeichnet haben, wie es auf den Witteschen Bildern geschehen ist, und daß würde ziemlich genau die Größe sein, die er auf der eben gekennzeichneten Photographie bekommen hätte, wenn er in natura über der Schwarzwaldlandschaft gestanden hätte.

Der Bildwinkel, unter dem die längere Seite des Fensterrahmens gesehen wurde, betrug etwa 14 Grad. Die 13:18-Aufnahme hätte demnach mit etwa 70 cm Brennweite aufgenommen werden müssen, wenn der Fensterrahmen sich mit dem Bildrand decken sollte.

3. Eine 13:18-Aufnahme eines Turmes aus nächster Nähe mit einem starken Weitwinkelinstrument — etwa Goerz Hypergon-Anastigmat — läßt den Mond so winzig erscheinen, daß er von einem Plattenfehler nicht zu unterscheiden wäre. Auch auf einem solchen Bilde würde ein Maler den Mond in derselben Größe eintragen wie auf den Witteschen Bildern, also über 10mal zu groß.

Der Fall 3 lag in weniger ausgeprägter Form auch bei den Witteschen Bildern vor. Auch diese sind als schwache Weitwinkelaufnahmen anzusprechen. Sie verlangen, um auf den Beschauer genau denselben perspektivischen Eindruck zu machen, wie das Objekt

vom Aufnahmestandpunkt, eine Betrachtungsweise, auf die kein Normalsichtiger verfallen würde, der sie unbefangen als Ganzes auf sich wirken lassen will, wie das gerade Maler unter allen Umständen tun, besonders dann, wenn sie Größenverhältnisse im Bilde abschätzen wollen. Um die Witteschen Bilder perspektiv richtig zu betrachten, müßte man sie mit einem Auge aus 18 cm Entfernung gegenüber der Bildmitte beobachten, da das Objektiv bei der Aufnahme diese Stellung zur Platte gehabt hat.

Niemals wird ein Künstler sich ein 13:18-Bild in dieser unnatürlichen Entfernung vor Augen halten, besonders dann nicht, wenn er es zeichnet. 40 cm dürfte das Minimum sein, das er wählt. Außerdem ist er es aber gewöhnt, daß Landschaftsbilder einen noch größeren Abstand des Zentrums der Perspektive (Auge, Objektiv) vom Bilde haben bzw. einen noch kleineren Bildwinkel, nämlich etwa 15 Grad. Letzterer würde bei einem 13:18-Bilde einem Abstand des Zentrums der Perspektive von etwa 75 cm entsprechen.

Hätte Herr Stegmann unter diesen unwillkürlichen und gewohnheitsmäßigen Voraussetzungen den Mond eingezeichnet, was Verfasser mit Sicherheit annimmt, so verdiente die Genauigkeit seiner Schätzung alle Anerkennung. Da die ihm vorgelegten Photographien aber einen viermal kleineren „perspektiv richtigen Betrachtungsabstand" hatten, so mußte der Mond naturgemäß viermal zu groß ausfallen.

Die Gewöhnung der Maler an Transformation der Perspektive auf weiteren Abstand des Zentrums, als sie ihn beim Zeichnen einhalten, stammt daher, daß sie beim Entwerfen großer Formate ja viel zu nahe am Bilde stehen, um die Perspektive, die für den in mehreren Metern Entfernung gedachten Beschauer berechnet wird, vom Arbeitsstandpunkt aus unmittelbar kontrollieren zu können. Dies gilt besonders von räumlich tiefen Objekten mit nahe herangerücktem Vordergrund. Hierbei kann er nicht nach jedem Strich einige Meter zurücktreten, sondern er muß die Perspektive von seinem Arbeitsstandpunkt auf den Beschauerstandpunkt nach Augenmaß transformieren. Darauf ist er eingearbeitet und wählt auch bei kleinen Formaten einen sehr viel größeren Abstand des Zentrums der Perspektive als die Brennweite der photographischen Universalkamera, oft den Betrachtungsabstand des fachmännischen Galeriebesuchers, und der ist sehr weit, für ein 13:18-Bild sicher nicht weniger als 1 m, keineswegs aber nur das $1^1/_2$-fache der Bilddiagonale, wie Herr Witte annimmt.

Ganz anders liegt die Sache bei der Betrachtung von Landschaftsphotographien durch Liebhaberphotographen, besonders Anfänger. Da spielt die Schärfe der Zeichnung meist eine wichtige Rolle und erfordert eine Betrachtung aus nächster Nähe. Das gehört jedoch nicht hierher. Es sollte nur die vermeintliche Falschschätzung der Maler widerlegt werden.

Die Frage, ob Herr Stegmann den Witteschen Photographien nicht ansehen konnte, daß sie schwache Weitwinkelaufnahmen waren, ist mit Nein zu beantworten. Hierzu hätte er die Bilder in der Hand haben müssen, während er auf dem Aufnahmestandpunkt der Kamera stand, um Bild und Objekt unmittelbar miteinander vergleichen zu können. Dem Bilde allein konnte er nicht anmerken, wieweit die Objekte in der Sehrichtung voneinander entfernt waren. Wenn er sich die Bilder in 75 cm Entfernung vor Augen hielt, überschätzte er diese Objekttiefe um das Dreifache, ohne daß er sich darüber Rechenschaft geben konnte, da er das Objekt entweder nicht kannte oder sich des Abstandes, z. B. der Kinder von dem Hause und des Zaunes von den Kindern nicht mehr erinnerte. Auch haben die Bilder selbst bei weitestem Betrachtungsabstand kein unnatürliches Aussehen.

Letzteres rührt daher, daß sie keine Gegenstände von erfahrungsmäßig genau bekannter Tiefe enthalten, deren absolute Tiefe erheblich ist gegen den Abstand vom Zentrum der Perspektive (Beobachter). An den Häusern würde man erst dann genauer schätzbare Unterschiede der als gleich hoch bekannten vorderen und hinteren vertikalen Kanten wahrnehmen können, wenn sie wesentlich weiter im Vordergrund ständen. Der Zaun ist kein wohldefinierter, erfahrungsgemäß immer gleicher Körper mit großen rechteckigen Seitenflächen, von den Kindern ganz zu schweigen. Auch der Kirche könnte man nicht ansehen, ob sie aus 50 oder 150 m Abstand aufgenommen worden ist.

Herr Stegmann wurde durch die photographischen Bilder perspektiv getäuscht. Hätte man ihn darauf aufmerksam gemacht, daß er die Bilder in 18 cm Entfernung mit einem Auge hätte betrachten müssen, um sie perspektiv richtig zu sehen, so hätte er die Verantwortung für die Richtigkeit seiner Eintragung wahrscheinlich abgelehnt oder doch ablehnen müssen, da er an eine so völlig unnatürliche und ungewohnte Betrachtungsperspektive nicht gewöhnt sei.

Dieselbe Täuschung in entgegengesetztem Sinne, aber noch weit stärker wäre mit der unter 1. beschriebenen Fernphotographie er-

zielt worden. Auch dort ist die relative Tiefe der Häuser von annähernd bekannten Dimensionen viel zu gering, um die Unterschiede wahrzunehmen, die bei der Aufnahme aus 28 km und der aus 1 km Entfernung entstehen. Der Vordergrund ist der glatte Wasserspiegel, in dem das Spiegelbild des Dorfes in beiden Fällen genau widergleich dem Original ist. Aber auch bei bewegter See wäre an der Form der Wellen kein perspektiver Anhaltspunkt zu finden.

Gibt man das 28-km-Bild einem Maler in die Hand, so nimmt er gewohnheitsmäßig an, daß er ein Bild von 10—20 Grad Bildwinkel vor sich hat und zeichnet unter diesen Voraussetzungen den Mond 10—20mal zu klein ein.

Es dürfte nach dem Gesagten nunmehr erwiesen sein, daß dem photographischen Verfahren des Herrn Witte zum Nachweis der Falschschätzung geübter Maler keinerlei Beweiskraft zukommt. Mit der obigen Aufnahme 1 könnte man sonst ja das Gegenteil beweisen. Es hätte dem Künstler eine Photographie mit der Perspektive der Aufnahme 2, also von etwa 15 Grad Bildwinkel gegeben werden müssen, statt eine solche von 40 Grad.

Wenn der Maler dann trotzdem noch die Größe des Mondes oder der Sonne etwas übertrieben hätte, so hätte er das, wenigstens auf einem Schwarz-Weiß-Bilde, nur getan, um die beiden Himmelskörper im Bilde zu der auffallenden und beherrschenden Erscheinung zu machen, die sie dem Beobachter in natura vermöge ihrer Helligkeit und ihres psychologischen Einflusses sind. Auf einem farbigen Bilde kann der Künstler auf diese absichtliche Vergrößerung recht gut verzichten, da ihm dann die ungleich wirkungsvollere Farbwirkung sowohl die der Himmelskörper selbst als auch deren Umgebung zur Verfügung steht.

Die Anforderungen, die eine Photographie von malerischer Qualität etwa erfüllen muß, um bei unbefangener Betrachtung einen perspektiv möglichst genauen Eindruck des Objekts zu übermitteln, hat Verfasser in der Photographischen Rundschau 25, 197—202, 263—38, 260—66, 1911 an Hand von 4 Photogrammen, davon drei Lochkameraufnahmen, und vielen Figuren eingehend behandelt. Auch die Anwendung auf Kino, Panorama und Rundbilder sowie das Zustandekommen der Verzerrungen bei Weitwinkelaufnahmen ist berücksichtigt worden.

Würzburg, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 22. April 1919.)

Über den Zusammenhang zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente, dem spezifischen Gewicht und der Wärmetönung. II.

Von Karl Fehrle.

In einer früheren Arbeit[1]) mit demselben Titel habe ich für die Wärmetönung bei der Verbindung zweier Elemente die Formel abgeleitet:

1) Diese Zeitschr. 19, 281, 1918.

Verb.	x	y	z	w	A_1	A_2	A_3	s_1	s_2	s_3	W kg—K. ber.	W kg—K. gem.
$LiBr$	2	1	2	2	6,94	159,8	86,86	0,56	3,14	3,46	66,4	80,0
$NaBr$	2	1	2	2	23,00	159,8	102,92	1,03	3,14	3,15	68,2	85,9
KBr	2	1	2	2	39,10	159,8	119,02	0,85	3,14	2,76	96,7	95,0
$CuBr$	2	1	2	2	63,57	159,8	143,5	8,93	3,14	4,72	27,6	25,0
$AgBr$	2	1	2	2	107,9	159,8	187,8	10,40	3,14	6,33	38,7	23,0
$HgBr$	2	1	2	2	200,0	159,8	280,0	14,19	3,14	7,31	21,8	24,8
$CaBr_2$	1	1	1	3	40,07	159,8	199,86	1,55	3,14	3,40	165,4	154,9
$SrBr_2$	1	1	1	3	87,63	159,8	247,4	2,54	3,14	4,22	207,5	157,9
$BaBr_2$	1	1	1	3	137,4	159,8	297,2	3,80	3,14	4,78	209,3	172,3
BCl_3	2	3	2	4	11,00	70,92	117,4	2,50	1,73	1,43	71,8	93,4
$AlBr_3$	2	3	2	4	27,10	159,8	266,9	2,70	3,14	2,54	121,2	122,0
$NdCl_3$	2	3	2	4	144,3	70,92	250,6	6,96	1,73	4,17	234,0	249,5
$SiCl_4$	1	2	1	5	28,3	70,92	170,2	2,34	1,73	1,50	121,3	121,8
$SnCl_4$	1	2	1	5	119,0	70,92	260,8	7,28	1,73	2,26	105,5	128,0
$ThCl_4$	1	2	1	5	232,4	70,92	374,3	11,00	1,73	4,59	344,3	300,2
CO_2	1	1	1	6	12,00	32,00	43,99	3,51	1,43	1,53	109,2	96,0
SiO_2	1	1	1	6	28,30	32,00	60,30	2,37	1,43	2,40	200,5	191,0
TiO_2	1	1	1	6	48,10	32,00	80,10	4,50	1,43	4,17	201,1	219,0
ZrO_2	1	1	1	6	90,60	32,00	120,60	6,40	1,43	5,62	243,8	177,2
ThO_2	1	1	1	6	232,0	32,00	264,0	11,00	1,43	9,87	355,9	326,0

$$W = \frac{1,534\,w}{z}\left[x A_1\left(\sqrt[3]{\frac{1}{s_1^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{s_3^2}}\sqrt{\frac{A_3}{|w|A_1}}\right) + \right.$$
$$\left. + y A_2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{s_2^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{s_3^2}}\sqrt{\frac{A_3}{|w|A_2}}\right)\right], \text{ kg—Kal.,}$$

wo A_1, A_2 und A_3 die Molekulargewichte, s_1, s_2 und s_3 die spezifischen Gewichte der beiden Elemente und der Verbindung, x und y die Anzahl Mol, die sich verbinden, z die Anzahl Mol, die entstehen, bedeuten. Von w wird weiter unten die Rede sein. Die nebenstehende Tabelle enthält die Resultate weiterer Berechnungen, nach Gruppen des natürlichen Systems geordnet.

Die Tabelle zeigt, daß der Faktor w innerhalb je zweier Gruppen des periodischen Systems eine Konstante ist, aber beim Festhalten einer Gruppe für die Verbindungen mit den Elementen je einer andern Gruppe, wofern die Art der Valenz sich nicht ändert, von Gruppe zu Gruppe um 1 wächst oder abnimmt: Er ist gleich der Summe der absoluten Beträge der Wertigkeiten der einzelnen sich verbindenden Elemente, wenn diese sich mit ihrer normalen Valenz betätigen. Seine physikalische Bedeutung scheint mir jedoch besser hervorgehoben zu werden, wenn man nach dem Vorgang Abeggs die normalen Valenzen der 4 ersten Gruppen von 1 bis 4 und die der folgenden Gruppen von —3 bis —1 zählt. Dann ist w gleich der Differenz der Normalvalenzen zu setzen, für welche ich den Namen spezifische Spannung vorschlage.

Tritt das eine Element mit seiner normalen, das andere mit seiner Kontravalenz auf, so ist, da jetzt die Spannung die Rotationsgeschwindigkeit beider Elemente im selben Sinne zu ändern sucht, für w die algebraische Summe der Normal- und der Kontravalenz zu setzen. In der folgenden Tabelle sind die Wärmetönungen solcher Verbindungen enthalten, deren beide Bestandteile auf derselben Seite des periodischen Systems, von der Kohlenstoffgruppe aus gerechnet, liegen und sich mit normaler Valenz verbinden (Nr. 1—3), oder solcher, bei denen sich das eine Element mit seiner Normal-, das andere mit seiner Kontravalenz betätigt (Nr. 4) und unter den letztgenannten wieder solcher, die derselben Gruppe angehören (Nr. 5).

Verb.	x	y	z	w	A_1	A_2	A_3	s_1	s_2	s_3	W ber.	W gem.
AsJ_3	1	6	4	—2	299,8	253,8	455,8	5,72	4,94	4,38	13,6	13,5
SbJ_3	1	3	2	—2	240,4	253,8	501,0	6,62	4,94	4,85	29,1	28,8
Sb_2S_3	8	3	8	—1	240,4	256,6	336,6	6,62	2,07	4,38	30,7	36,5
$SbCl_5$	1	5	2	4	240,4	70,92	297,5	6,62	1,73	2,35	100,6	104,9
P_3N_5	3	10	4	2	124,2	28,02	163,2	1,83	1,03	2,51	77,9	81,5

Die Achtatomigkeit des Schwefels unterhalb des Schmelzpunktes, welche den neueren Untersuchungen gemäß anzunehmen ist, scheint sich nach Nr. 3 zu bestätigen, ebenso die Zweiatomigkeit des Antimons sowie die Vieratomigkeit von Phosphor und Arsen.

Die nächste Tabelle enthält die Wärmetönungen von Verbindungen, deren Komponenten selbst wieder aus Verbindungen bestehen. Die Konstante der Gleichung muß hierbei verdoppelt werden, wird also $2 \cdot 1,534 = 3,068$, während $w = 2$ zu setzen ist.

Verb.	x	y	z	w	A_1	A_2	A_3	s_1	s_2	s_3	W ber.	W gem.
$CaCO_3$	1	1	1	2	CaO 56,09	CO_2 44,00	100,1	3,28	1,63	2,75	38,2	42,8
$SrCO_3$	1	1	1	2	103,6	44,00	147,6	4,34	1,63	3,62	58,0	57,3
$BaCO_3$	1	1	1	2	153,4	44,00	197,4	5,35	1,63	4,37	68,9	63,4
$CaSO_4$	1	1	1	2	CaO 56,09	SO_3 80,07	136,2	3,28	1,91	2,97	72,4	85,4
$SrSO_4$	1	1	1	2	103,6	80,07	183,7	4,34	1,91	3,81	97,2	93,0
$BaSO_4$	1	1	1	2	153,4	80,07	233,4	5,52	1,91	4,49	101,0	108,3
$Ba(NO_3)_2$	1	1	1	2	BaO_2 169,4	N_2O_4 92,02	261,4	4,96	1,50	3,24	64,0	79,3
$Ca(OH)_2$	1	1	1	2	CaO 56,09	H_2O 18,02	74,11	3,28	1,00	2,08	—2,5	—5,0
$Sr(OH)_2$	1	1	1	2	103,6	18,02	121,6	4,34	1,00	3,63	57,2	40,9



Bei dem ersten Beispiel jeder Kategorie ist angegeben, aus welchen Komponenten die Verbindung entstanden ist. Wo im systematischen Gang Lücken sind, waren die experimentellen Daten in Landolt-Börnsteins Tabellen, 4. Aufl., nicht vollzählig enthalten.

Zusammenfassung.

Die Gültigkeit der in meiner früheren Arbeit für die Berechnung der Verbindungswärme aus dem Molekulargewicht und der Dichte abgeleiteten Formel wird im Hinblick auf die Abeggsche Valenzlehre an Verbindungen der Elemente der ersten 4 Gruppen des periodischen Systems mit solchen der 6. und 7. Gruppe, die sich mit Normalvalenz betätigen, von solchen der 5., 6. und 7. Gruppe, die sich zum Teil mit Normal-, zum Teil mit Normal- und Kontravalenz betätigen, und an Verbindungen von Verbindungen nachgewiesen.

(Eingegangen 14. April 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Schwankungserscheinungen in der Physik.

Von Reinhold Fürth.

(Fortsetzung.)

Kapitel II. Schwankungserscheinungen im Gebiete des mikroskopisch Sichtbaren. (Kolloidstatistik.)

Während ein in einem Gase oder einer Flüssigkeit schwebender fester Körper nach der phänomenologischen Auffassung, wenn keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken, ständig in Ruhe verharren müßte, verlangt die kinetische Theorie der Materie, daß der den unregelmäßig wirkenden Stößen der Moleküle ausgesetzte Körper im Gegenteil beständig in Bewegung sei und erklärt die scheinbare Ruhe als Massenerscheinung, indem die in jedem Moment auftreffende sehr große Zahl von Molekülen ein beträchtliches Übergewicht der von einer Seite kommenden Stöße sehr unwahrscheinlich macht. Dennoch muß nach dieser Auffassung eine Bewegung nachweisbar sein, und zwar eine umso beträchtlichere, je kleinere Dimensionen der Körper besitzt.

Tatsächlich läßt sich eine solche unregelmäßige Bewegung eines in einem Gase oder einer Flüssigkeit suspendierten kleinen Partikels nachweisen und auch messend verfolgen, eine Erscheinung, die als „Brownsche Bewegung" bekannt ist und in der modernen Physik eine große Rolle spielt. In dieser Bearbeitung beschäftigen wir uns allein mit „Schwankungserscheinungen", d. h. dem Zustande, daß ein makroskopisch im Gleichgewicht befindliches System mikroskopische, unregelmäßige Schwankungen um die Gleichgewichtslage ausführt. Das Gleichgewicht selbst ist nach dieser Auffassung ein statistisches und mit allen statistischen Gleichgewichtsverhältnissen in der Physik werden wir uns zu befassen haben. Da ersichtlicherweise die Brownsche Bewegung ohne Berücksichtigung der Schwerkraft an keine Gleichgewichtslage gebunden ist, da jede Lage des Partikels gleich wahrscheinlich ist, fällt diese selbst nicht in den Bereich dieses Berichtes, solange es sich um die Bewegung eines Einzelteilchens handelt, wohl aber, wenn gleichzeitig die Bewegung vieler ähnlicher Teilchen beobachtet wird: Die Statistik der Kolloide.

A. Statistisches Gleichgewicht einer Suspension mit Vernachlässigung der Schwere.

1. Theoretisches.

Wir betrachten eine große Anzahl von untereinander gleichen festen Partikelchen, die in einem Gase oder einer Flüssigkeit suspendiert sind, derart, daß ihre Brownsche Bewegung bereits beträchtlich ist, aber trotzdem die Teilchen im Mikroskop (bzw. Ultramikroskop) noch einzeln sichtbar gemacht werden können. Vom phänomenologischen Standpunkte ist die Dichte der Suspension in einem kleinen, optisch irgendwie begrenzten Teilvolumen, zeitlich absolut konstant, tatsächlich wird aber die jeweils beobachtete Teilchenzahl n infolge der Brownschen Bewegung Schwankungen um einen gewissen Mittelwert ν ausführen.

Wir denken uns zunächst dieses Volum in äquidistanten Zeiten τ beobachtet und jedesmal die in ihm enthaltene Teilchenzahl n notiert. Üben die einzelnen Teilchen aufeinander keine Kräfte aus, so sind diese n Glieder einer statistischen Reihe, wie wir sie im vorigen Kapitel behandelten. Die Einzelereignisse bilden dabei das Auftreten, bzw. Nicht-Auftreten eines bestimmten Teilchenindividuums in dem Volumen v, die Gesamtheit der bei einer Beobachtung in v enthaltenen Teilchen die günstigen Ereignisse einer Serie. Ist das gesamte Flüssigkeitsvolumen

V, dann ist die konstante Wahrscheinlichkeit

$$p=\frac{v}{V}$$

und der Mittelwert ν, wenn die gesamte Teilchenzahl gleich N ist:

$$\nu=pN=\frac{v}{V}N.$$

Da wir angenommen haben: $v<<V$, sind die Voraussetzungen des Grenzfalls 1 des vorigen Kapitels erfüllt, für die Schwankungswahrscheinlichkeit gilt daher Formel (1a'), für die Schwankungsgröße Formel (2a'), (3a').

Eine Wahrscheinlichkeitsnachwirkung ist in diesem Falle vorhanden, da das Auftreten eines bestimmten Teilchenindividuums in v bei einer bestimmten Beobachtung die Wahrscheinlichkeit des Auftretens desselben Individuums bei der nächsten Beobachtung vergrößert. Für die Schwankungsgeschwindigkeit gelten daher die Formeln (4b) und (5b), von denen die erste die makroskopische Ausgleichswirkung der Diffusion, die zweite im Gegenteil die mikroskopische Schwankungswirkung zum Ausdruck bringt. Die Größe P, die offenbar mit der makroskopischen Diffusion eng zusammenhängen muß, bezeichnen wir mit Smoluchowski als Diffusionsfaktor. Sie läßt sich als Funktion des Zeitintervalls τ ihrer Definition nach leicht berechnen[8, 10]), wenn man die aus der Theorie der Brownschen Bewegung bekannte Formel für die Wahrscheinlichkeit der Verschiebung eines Teilchens durch diese Bewegung um eine Strecke

$$\xi \ldots \xi+d\xi$$

in der Zeit t heranzieht

$$W(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\cdot e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}d\xi, \qquad (16)$$

wo D den Diffusionskoeffizienten bedeutet.

Wir denken uns das Volumen v gebildet aus einer Schicht von der Dicke h zwischen zwei parallelen Begrenzungsebenen, die so klein gegen die übrigen Dimensionen ist, daß wir bloß die Brownsche Bewegung senkrecht auf die Wände als zum Ein- oder Austritt Anlaß gebend in Betracht zu ziehen brauchen. Unter dieser Voraussetzung wird

$$P=\frac{1}{h\sqrt{\pi D\tau}}\int_0^h dx\int_x^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4D\tau}}d\xi.$$

Was nach teilweiser Ausführung der Integration übergeht in

$$P=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\beta e^{-y^2}dy+\frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}(1-e^{-\beta^2}) \qquad (17)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\beta=\frac{h}{2\sqrt{D\tau}}.$$

Für anders gestaltete Volumina läßt sich die Rechnung ähnlich ausführen.

Für Wiederkehrzeit und durchschnittliche Dauer gelten ebenfalls die früher abgeleiteten Formeln (6b) und (7b) im Verein mit (9b).

Benutzen wir kontinuierliche Beobachtung statt der diskontinuierlichen, dann müssen wir $P(\tau)$ für den Grenzfall sehr kleiner τ berechnen. In diesem Falle ist die Verwendung von Formel (16) für die Bewegung des Teilchens unzulässig, da diese nur für Zeiten gilt, die groß sind gegen die zwischen zwei Molekülstößen verfließende Zeit. Für so kleine Zeiten aber haben wir die Bewegung des Teilchens als geradlinig anzusehen mit einer Geschwindigkeit, deren Größenverteilung dem Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz gehorcht. Unter dieser Voraussetzung wird

$$P=\int_0^\infty\frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3}c^2e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}}dc\cdot\frac{2}{h}\int_0^{c\tau}\frac{c\tau-x}{2c\tau}dx=\frac{\alpha\tau}{h\sqrt{\pi}},$$

wo α den wahrscheinlichsten Wert der Geschwindigkeit bedeutet.

Führt man statt dessen den mittleren Wert

$$C=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\alpha$$

ein, so folgt

$$P=\frac{2C\tau}{h\sqrt{6\pi}}, \qquad (18)$$

wenn $\tau<<1$. Dann wird unser a_1 der Formel (12) gleich

$$a_1=\frac{2C}{h\sqrt{6\pi}}, \qquad (18')$$

was in (6c), (7c) eingesetzt, die gesuchten Werte für $T(n)$ und $\Theta(n)$ ergibt. Da nach dem Gleichverteilungssatz der statistischen Mechanik die mittlere kinetische Energie des Teilchens gleich

$$\frac{3}{2}\frac{RT}{N}$$

sein muß, mit

T: absolute Temperatur, N: Loschmidtsche Zahl, so folgt für C

$$C=\sqrt{\frac{3RT}{N\cdot M}}, \qquad (18'')$$

wenn die Masse des Teilchens M ist.

Auf die Komplikation der Erscheinungen, wenn die Kräfte zwischen den einzelnen Partikeln nicht mehr zu vernachlässigen sind, kommen wir im nächsten Kapitel wieder zurück.



2. Experimentelles.

Die zur Messung der obengenannten Gesetzmäßigkeiten verwendeten experimentellen Methoden unterscheiden sich im Prinzip wesentlich bloß durch die Art der Abgrenzung des Teilvolumens v. Die intermittierende Zählung wird entweder so vorgenommen, daß das Präparat in äquidistanten Zeitpunkten beleuchtet und die Zahl der Teilchen subjektiv beobachtet wird, oder vermittels der Methoden der Kinematographie. In der Richtung senkrecht zur Blickrichtung wird die Abgrenzung meist durch eine kleine Okularblende im Mikroskop bewirkt, die Abgrenzung der Schichttiefe kann entweder auf optische oder mechanische Weise erfolgen.

a) Optische Abgrenzung: Das Präparat wird vermittels des Siedentopf-Zsigmondyschen Spaltultramikroskops beleuchtet, wodurch eine, einige μ dicke Schicht „optisch" abgegrenzt erscheint. Die Methode kann sowohl auf flüssige[2,4]) als auf gasförmige[6]) Suspensionen angewendet werden; sie leidet aber an einem prinzipiellen Fehler[9]), da diese optische Abgrenzung das Volumen unscharf definiert. Bei etwas konzentrierteren Suspensionen kommt daher die Schwankungsgröße zu klein heraus.

b) Mechanische Abgrenzung: Das zwischen zwei Deckgläsern oder im Kardioid-Ultramikroskop eingeschlossene Präparat erscheint auf diese Weise in genau meßbaren Dimensionen mechanisch abgegrenzt. Die nach dieser Methode gewonnenen Resultate stimmen selbst bei höheren Konzentrationen mit der Theorie überein[5,9]).

c) Vertauschung der Zeitgesamtheit mit einer Raumgesamtheit: Nach dieser Methode wird nicht die Zeitgesamtheit der n-Zustände in dem Teilvolumen v während langer Zeit untersucht, sondern die nach den Grundsätzen der statistischen Mechanik mit ihr äquivalente Raumgesamtheit, die sich ja im statistischen Gleichgewicht befindet, indem man z. B. eine ausgedehnte Schicht der Dicke h in einem beliebigen Zeitpunkt gleichzeitig mit einem geeigneten Raster photographiert und die in den einzelnen Rasterfeldern befindlichen Teilchenzahlen notiert. Die Methode führt zu den gleichen Resultaten[5,7]).

Bei zu großer Konzentration der Teilchen treten durch gegenseitige, wahrscheinlich kapillarelektrische, Abstoßungskräfte Abweichungen von den abgeleiteten Gesetzen auf, die im nächsten Kapitel besprochen werden[1]).

Eine kontinuierliche Beobachtung ist derzeit noch nicht durchgeführt.

B. Statistisches Gleichgewicht einer Suspension unter Einwirkung der Schwerkraft.

Ist im Gegensatz zum vorigen Abschnitt eine Suspension außerdem noch dem Einflusse der Schwere unterworfen, so gibt die Erfahrung das makroskopische Gesetz, daß die Dichte d der Substanz nach einem Exponentialgesetz mit der Höhe über dem Boden abnimmt

$$d = d_0 e^{-ah} \quad (d_0, a\text{: Konstanten}), \qquad (19)$$

ein Gesetz, das übrigens formal und inhaltlich dem bekannten Gesetz der Aerostatik völlig analog ist. Das Gesetz, das sich aus der kinetischen Theorie leicht ableiten läßt, resultiert aus der Tatsache, daß die Wirkung der Schwere, die alle Teilchen am Boden anzuhäufen strebt, mit der zerstreuenden Wirkung der unregelmäßigen Teilchenbewegung einen statistischen Ausgleich herstellen muß.

Danach ist also auch hier die Höhenverteilung ein rein statistischer Gleichgewichtszustand, bei dessen mikroskopischer Analyse Schwankungserscheinungen auftreten müssen. Diese können in zweierlei Weise beobachtet werden.

a) Man faßt die aus sehr vielen gleichen Teilchen der Suspension gebildete Raumgesamtheit als gleichwertig mit der die Bewegung eines Einzelteilchens darstellenden virtuellen Gesamtheit auf und beobachtet demgemäß die Schwankungen der Dichte (bzw. Teilchenzahl eines kleinen Volums) in einem bestimmten Niveau um den aus dem Gesetze (19) folgenden Mittelwert, und zwar entweder durch einmalige Photographie des ganzen Niveaus oder oftmalige Beobachtung eines kleinen abgegrenzten Teiles dieses Niveaus. Die gewonnene statistische Reihe liefert nicht allein den Mittelwert, sondern kann auch dazu dienen, bei größeren Konzentrationen die Schwankungsgröße als Funktion der Konzentration (bzw. des osmotischen Druckes) zu bestimmen und daraus auf bestimmte Kraftwirkungen zwischen den Teilchen zu schließen. Ist eine solche Kraftwirkung nicht vorhanden, dann kann die Reihe genau so zur Verifikation der abgeleiteten Wahrscheinlichkeitsformeln dienen als ohne Schwerkraft.

Experimentell wird die Anordnung meistens so getroffen, daß man eine (durch fraktioniertes Zentrifugieren) gleichkörnig gemachte Suspension (z. B. Gummigutthydrosol) in einer geeigneten Kuvette entweder von selbst sedimentieren läßt, oder durch Zentrifugieren zunächst völlig gegen den Boden treibt und dann aufsteigen läßt[3,4,7]).

b) Aber noch auf eine andere Weise lassen sich an einem solchen statistischen Gleichgewicht

Schwankungen nachweisen, indem man die Lage eines Einzelteilchens durch genügend lange Zeit als Funktion der Höhe über dem Boden, also eine Zeitgesamtheit, untersucht[11]). Das Gesetz (19) auf diesen Fall angewendet ist dann eine Aussage über die relative Verweilzeit des Teilchens in einer Höhe $h \ldots h + dh$ über dem Boden und lautet dann so

$$W(h)\,dh = \frac{c}{D} \cdot e^{-\frac{ch}{D}}\,dh, \qquad (19')$$

wenn D wieder den Diffusionskoeffizienten, c die (gleichförmige) Fallgeschwindigkeit im widerstehenden Mittel bedeutet.

Aus der Formel folgt für die wahrscheinlichste Lage des Teilchens $h_w = 0$ und für die mittlere Lage

$$\bar{h} = \frac{D}{c}.$$

Faßt man $\bar{h}$ als statistische Gleichgewichtslage der Höhe des Teilchens auf, so kann man den Begriff der Schwankungsgröße, Schwankungsgeschwindigkeit, Wiederkehrzeit usw. formal auch auf diese Erscheinungen übertragen, indem man die an einem vertikalen Maßstabe abgelesenen ganzzahligen Werte von h als „n" und $\bar{h}$ als „ν" einführt. Es läßt sich so eine recht befriedigende Analogie mit den Schwankungserscheinungen nach der ersten Methode feststellen.

Literatur zu II.

1) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **25**, 205, 1908.
2) Th. Svedberg, Zeitschr. f. phys. Chem. **75**, 547, 1910; Th. Svedberg und Inouye, Zeitschr. f. phys. Chem. **77**, 145, 1911; Th. Svedberg, Die Existenz der Moleküle. Leipzig 1912.
3) J. Perrin, Die Atome. Dresden u. Leipzig 1914.
4) A. Westgren, Zeitschr. f. phys. Chem. **83**, 151, 1913.
5) B. Iljin, Zeitschr. f. phys. Chem. **83**, 592, 1913.
6) Lorenz und Eitel, Zeitschr. f. anorg. Chem. **87**, 357, 1914.
7) R. Costantin, C. R. **158**, 1341, 1914.
8) M. v. Smoluchowski, Wien. Ber. **123** (2a), 2839, 1915; **124** (2a), 354, 1915.
9) A. Westgren, Zeitschr. f. anorg. Chem. **95**, 1916; Ark. f. Math. Svesk. Vet. Ak. **11**, Nr. 8 u. 14, 1916.
10) M. v. Smoluchowski, diese Zeitschr. **17**, 561, 1916; Kolloid.-Zeitschr. **18**, 48, 1916.
11) R. Fürth, Ann. d. Phys. **53**, 208, 1916.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

W. Bloch, Einführung in die Relativitätstheorie. (Aus Natur und Geisteswelt, 618. Bd.) 8. 100 S. mit 16 Abb. Leipzig, B. G. Teubner, 1918. M. 1.50 und Teuerungszuschlag.

Die kleine Schrift wendet sich an solche Leser, denen die Elemente der analytischen Geometrie und der Physik bekannt sind. Die Darstellung ist klar und durchsichtig; der Aufbau der Relativitätstheorie wird in der Hauptsache nach logischen Rücksichten gestaltet, doch kommt auch die historische Entwicklung nicht zu kurz. Dem erkenntnistheoretischen Standpunkte des Buches kann der Ref. voll beipflichten.

M. Born.

A. Brill, Das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie. (Abh. u. Vortr. aus dem Gebiete der Mathem., Naturw. u. Technik. 3.) 8. 3. Aufl. 49 S. m. 6 Fig. Leipzig, B.G. Teubner, 1918. M. 2.— u. Teuerungszuschlag.

Die erste Auflage dieser Schrift wurde in dieser Zeitschrift **15**, 421, 1914 besprochen. Die neue Auflage unterscheidet sich von den früheren durch einen Abschnitt über Einsteins Theorie der Gravitation, welcher ein Abdruck der vom Verf. im Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinigung 1917 veröffentlichten Besprechung von Einsteins Abhandlung, Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie (Leipzig 1916) ist. Auch die an Einstein anschließenden Arbeiten von Schwarzschild, Hilbert, Weyl, Thirring werden darin kurz besprochen.

M. Born.

R. Fricke, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen. 8⁰. 1. Bd.: Differentialrechnung. XII u. 399 S. mit 129 Figuren, einer Sammlung von 253 Aufgaben und einer Formeltabelle. — 2. Bd.: Integralrechnung. V u. 413 S. Mit 100 Figuren, einer Sammlung von 242 Aufgaben und einer Formeltabelle. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1918. Geh. je M. 14,—, geb. je M. 15.— (hierzu Teuerungszuschläge des Verlags und der Buchhandlungen).

Entstanden aus Vorlesungen des Verf. an der Techn. Hochschule Braunschweig bringt das Buch eine sehr brauchbare Darstellung der höheren Mathematik, vor allem auch für alle diejenigen, welche nur das mathematische Handwerkszeug für die Anwendungen sich anzueignen wünschen. In einer allgemeinen Einleitung über Zahlen, Variable, Funktion werden die Grundbegriffe und die elementaren Funktionen erörtert, sodann bringt Abschnitt I die Technik der Differentialrechnung, Abschnitt II Methoden der Berechnung, III Anwendungen der Differentialrechnung (Geometrie und Kinematik). Bd. 2 enthält in Abschnitt IV Grundlagen der Integralrechnung (ein- und mehrfache Integrale), V Anwendungen (Geometrie, Physik, Fouriersche Reihen), VI Lösung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, endlich einen Anhang über komplexe Zahlen und Funktionen.

Verf. macht einen Mittelweg zwischen einer streng systematischen, aber abstrakten und einer weniger systematischen, mehr auf die Bedürfnisse der Anwendungen eingerichteten Darstellung, und zwar, wie ich

glaube, mit Erfolg. Er erreicht es dadurch, daß er z. B. von vornherein gewisse Definitionen enger als prinzipiell nötig faßt (er redet nur von „gleichmäßig stetigen", nicht von „stetigen" Funktionen), teils benutzt er unbedenklich Methoden und Sätze anderer Theorien, wo sie wesentliche Vereinfachungen zur Folge haben, z. B. wird bei der Partialbruchzerlegung vom Fundamentalsatz der Algebra und dem Rechnen mit komplexen Zahlen Gebrauch gemacht. Es ist erfreulich, daß wieder ein „reiner" Mathematiker zu dieser Inkonsequenz sich bereit findet; eine sachlich korrekte Darstellung läßt sich ja, wie das Buch zeigt, damit vereinigen. Manchmal ist der Verf. nach der einen oder anderen Seite wohl etwas zu nachgiebig, z. B. scheinen mir die Erörterungen über den Begriff der stetig variablen Größe, die wohl mit Rücksicht auf den Physiker gemacht sind, nicht sehr glücklich. Andererseits werden auch der reinen Mathematik mehr als nötig Konzessionen gemacht, z. B. durch die ausführliche Behandlung des Formalismus der totalen Differentiale, welche ja dem Anfänger viel Schwierigkeiten machen, und wozu die Notwendigkeit nicht einleuchtet.

Einen ganz besonderen Wert verleiht dem Buch auch für den Universitätsunterricht die reichhaltige Sammlung von Aufgaben, insbesondere zu den Anwendungen in Geometrie und Physik, deren Auswahl mir für alle Arten von Studenten sehr glücklich getroffen zu sein scheint. Was die äußere Ausstattung anlangt, so äußert die Papiernot ihren Einfluß: Der sehr schmale Rand im Verhältnis zur Typengröße wird von dem Auge nicht angenehm empfunden. Dagegen ist eine Anzahl Figuren in Zweifarbendruck auf Millimetereinteilung rühmend hervorzuheben.

E. Hecke.

Berichtigung.

In meiner Abhandlung in dieser Zeitschr. **20**, 211—214, 1919: S. 213, Tab. III: $N = 59$ angen. gehört in die Zeile des *Sn* (eine Zeile tiefer). Auf der gleichen Seite, Zeile 22 von unten, soll es heißen (*Proto-Ca* = 44); ferner auf S. 214, Anm. 1 rechts unten: Die Moseleysche O.-Z. M kann mit großer Annäh. durch die Beziehung: $M = 2\sqrt{\nu K\alpha_1} + 1$ ausgedrückt werden.

Dr. Kirchhof.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Deutschen Universität Prag Dr. Reinhold Fürth für Physik.

Ernannt: Dr. A. Archibald Bonn zum Professor der Chemie am Heriot-Watt College in Edinburgh, der Dozent der Chemie an der Universität Upsala Dr. O. E. Collenberg zum Professor der anorganischen Chemie an der Technischen Hochschule Drontheim, der Oberingenieur Dr.-Ing. Karl Vormfelde in Halberstadt zum ord. Professor für Physik und Maschinenkunde an der Landwirtschaftlichen Akademie zu Bonn-Poppelsdorf.

Berufen: Der a. o. Professor an der Universität Berlin Dr. Konrad Knopp zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg, der Apotheker Dr.-Ing. Ludwig Lautenschläger in Karlsruhe zum a. o. Professor für Pharmazie am Chemischen Institut der Universität in Greifswald, der ord. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn Oskar Primavesi zum ord. Professor für Theorie und Konstruktion elektrotechnischer Maschinen an der Technischen Hochschule Wien, der ord. Honorarprofessor an der Universität Freiburg i. B. Dr. Alfred Loewy zum ord. Professor der Mathematik ebendaselbst, der a. o. Professor an der Universität München Dr. Ernst Großmann zum ord. Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte an der Universität Königsberg, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen Dr. Wilhelm Blaschke in gleicher Eigenschaft an die Universität Hamburg.

Verliehen: Dem Privatdozenten für Chemie an der Universität Freiburg i. B. Dr. Walther Schoeller der Titel a. o. Professor, dem a. o. Professor der Physik an der Universität Wien Dr. Felix Ehrenhaft Titel und Charakter als ord. Professor.

In den Ruhestand: Der ord. Honorarprofessor der Physik an der Universität Leipzig Staatsrat Dr. Artur v. Oettingen, der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien Hofrat Dr. Emanuel Czuber.

Vertretung: Der Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin und Dozent an den Technischen Staatslehranstalten in Hamburg Dr. Hans Georg Müller wurde mit der Vertretung des a. o. Professors der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Stuttgart Immanuel Herrmann im Sommersemester 1919 beauftragt.

Ehrungen: Dem Privatdozenten für Physik an der Universität Wien Professor Dr. Felix Ehrenhaft wurde von der Photographischen Gesellschaft in Wien die Voigtlaender-Medaille verliehen.

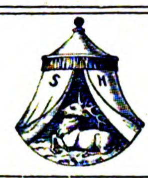
Gestorben: Der bisherige a. o. Professor der Mathematik an der Universität Straßburg Dr. Josef Wellstein (in Wetzlar), der frühere ord. Professor der Mathematik an der Universität Straßburg Dr. Karl Theodor Reye, der frühere ord. Professor der mathematischen Physik an der Universität London und Präsident der Royal Society Lord Rayleigh (John William Strutt).

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und **H. Th. Simon**



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 41 Mark, im Ausland 46 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 15. 1. August 1919. No. 547. **20. Jahrgang.**

Mit einer Beilage von S. Hirzel in Leipzig, betreffend: „Das Erdöl".

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen.)

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 15. | 1. August 1919. Redaktionsschluß für No. 17 am 10. August 1919. | 20. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Eine praktische Anwendung der Methode des zentralen Feldes zur Bestimmung von Elektronen-Austrittsgeschwindigkeiten.

Von H. Baerwald.

1. In einer demnächst erscheinenden Arbeit über die von langsamen positiven Strahlen ausgelösten Elektronen, ihre Mengen und Geschwindigkeitsverteilungen, habe ich die zuerst von Lenard[1]), später auch von einem seiner Schüler[2]) benutzte Methode, mittels eines isoliert eingeführten und von den primären Kathodenstrahlen geschützten Ringes das Einsetzen der Sekundärstrahlung in Gasen festzustellen, angewandt, um auch die aus Metallen im höchsten Vakuum austretenden Elektronenmengen bis zur Grenzgeschwindigkeit der Primärstrahlung, d. h. bis zu ihrem Beginn, zu verfolgen. Fr. Mayer hat a. a. O. betont, daß es zur Vermeidung von Störungen, also aus praktischen Gründen, nötig sei, den Ringauffänger möglichst dünn zu machen. Ich möchte hier darauf aufmerksam machen, daß, wenn man diese Forderung zum Prinzip erhebt, man zu einer Methode kommt, um nicht bloß Mengen, sondern auch Austrittsgeschwindigkeiten von Elektronen zu messen, und daß diese Methode alle Kennzeichen und Vorteile derjenigen des zentralen Feldes hat. Ich habe in meiner oben erwähnten Mitteilung hierauf schon hingewiesen. Im Interesse der Nutzbarkeit und experimentellen Bequemlichkeit sei aber hier noch besonders gezeigt, daß die Methode des isolierten Ringes, sofern er dünn ist, eine Verwirklichung des zentralen Feldes ist.

2. In den beliebig gestalteten, metallisch geschützten Raum innerhalb der Hülle H (Fig. 1) trete von A aus ein Primärstrahlbündel ein. Es schneidet aus H die beiden Stücke Fa und Fe heraus, welche, wenn der Primärstrahl die dazu nötige Grenzgeschwindigkeit überschritten hat, zur Quelle sekundärer Elektronenemission werden. Diese Emission wird in idealer Unordnung völlig diffus nach allen Richtungen den Raum erfüllen, und in jeder, von einem Punkte der strahlenden Flächenstücke ausgehenden Richtung wird, bei vorhandener Geschwindigkeitsverteilung, jede der möglichen Geschwindigkeiten vorkommen.

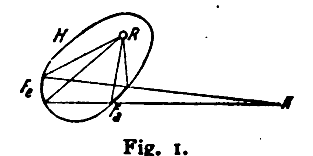


Fig. 1.

Führen wir nun in die Hülle H den punktförmigen, im Verhältnis zu den Raumdimensionen sehr kleinen Auffänger R ein, so führt uns die Überlegung dazu, daß in diesem Auffänger das Mittel gegeben ist, um die wahre Geschwindigkeitsverteilung, ohne besondere Reduktion oder Korrektur, zu bestimmen.

3. Nehmen wir höchstes Vakuum an, so wird von jedem Punkte der Flächen Fa und Fe nur die nach R zielende Richtung an R ankommen können. Abbremsung durch gegengeschaltetes Potential an R ermittelt also keine Komponenten, sondern wahre Geschwindigkeiten. Dies gilt für gerade wie für gekrümmte an R endigende Bahnen.

4. Punkt R nimmt von der Gesamtemission nur einen kleinen Betrag auf, aber in diesem sind die Geschwindigkeiten ebenso verteilt wie in der Gesamtmenge. Man sieht dies ein, wenn man die Emission eines einzelnen Punktes der strahlenden Flächen Fa und Fe betrachtet.

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8, 188, 1902.
2) Fr. Mayer, Ann. d. Phys. 45, 8, 1914.

Dieser Punkt wird in der Richtung auf R jede der vorkommenden Geschwindigkeiten in zeitlichem Nacheinander so oft in der Zeiteinheit ausstrahlen, wie sie in räumlichem Nebeneinander in der Gesamtmenge vorkommen. Denn aus der Summe der Strahlung der Einzelpunkte setzt sich die Gesamtmenge in der Zeiteinheit zusammen.

5. Aus Nr. 4 sehen wir, daß wir es mit einer Art Umkehrung des zentralen Feldes in seiner gewöhnlichen Form zu tun haben. Normalerweise, wie in lichtelektrischen Arbeiten[1]) üblich, wird das Zentrum bestrahlt, und die Hülle dient als Auffänger. Hier bekommt man die Gesamtmenge der Elektronenemission und aus ihr die Geschwindigkeitsverteilung so, wie sie in dieser Gesamtmenge in räumlichem Nebeneinander besteht.

Bei unserer Umkehrung des Normalfalles wird die Hülle, bzw. ein Teil der Hülle bestrahlt und das Zentrum dient als Auffänger. Dieser Auffänger bekommt nur einen Teil der sekundären Gesamtemission. Aber aus diesem Teil läßt sich die Geschwindigkeitsverteilung ebenso ermitteln, wie aus der Gesamtmenge, weil die Geschwindigkeitsverteilung in einem Punkte im Innern der Hülle für eine beliebige Richtung und für eine bestimmte Zeitstrecke im Gleichgewicht mit der Geschwindigkeitsverteilung in demselben Punkte für alle möglichen Richtungen in derselben Zeit sein muß, oder, wie es in Nr. 4 ausgedrückt war, weil jeder einzelne strahlende Punkt innerhalb einer gewissen Zeit die von ihm gespendete Elektronenmenge in zeitlichem Nacheinander nach derselben Geschwindigkeitsverteilung hergibt wie sie der Gesamtmenge aller strahlenden Punkte in einem Augenblicke entspringt. Gerade auf diesem Satze eben beruht die Umkehrbarkeit des Strahlungsvorganges zwischen Zentrum und Hülle in der Methode des zentralen Feldes.

6. Welcher Fall der praktischere ist, wird von dem gewollten Zweck aus entschieden werden müssen. Ist das Zentrum der Strahler, so erhält man zwar die Gesamtmenge der Sekundäremission, hat aber, da das Zentralstück aus prinzipiellen Gründen klein gehalten werden muß, mit einer beschränkten Gesamtmenge zu rechnen. Ist die Hülle, oder ein Teil von ihr, der Strahler, so bekommt man im Zentrum als Auffänger zwar nur einen Teil der Gesamtmenge, dafür aber ist diese beträchtlich größer als im ersten Falle.

Auch hier wird also Reziprozität herrschen.

1) O. W. Richardson u. K. T. Compton, Phil. Mag. **24**, 575, 1912; C. Ramsauer, Ann. d. Phys. **45**, 769, 1121, 1914.

Es wird also wesentlich das Gebot der Praxis ausschlaggebend sein. In praktischer Beziehung fällt es aber zugunsten unserer Umkehrung, also des Falles, daß die Hülle Strahler ist, ins Gewicht, daß sein Prinzip auch gewahrt bleibt, wenn man das ganze Gebilde der Fig. 1 um die Achse des Primärstrahlenbündels A rotieren läßt. Dann wird aus dem Punkt R ein dünner Ring und aus der Hülle ein im wesentlich zylindrischer, einfach zusammenhängender Raum, wobei es nichts ausmacht, ob in diesem Raum noch einzelne Konstruktionsteile hineinragen. Das Prinzip des neutralen Feldes bleibt gewahrt, weil in jedem Punkte des Ringes die Kraftlinienbündel zentral zusammenlaufen, die Ausdehnung ihrer Quellen an der Hülle praktisch sehr groß zur Ausdehnung ihrer Senken im Ringzentrum ist.

7. Was in diesen Ausführungen von geradlinigen Elektronenbahnen zwischen Hülle und Ring gesagt ist, gilt nach Nr. 3 auch von gekrümmten. Daher würden die Bestimmungen der Geschwindigkeitsverteilung in Gasen in ihrem Vergleich mit der im Vakuum möglicherweise ebenso Rückschlüsse auf den Energieaustausch zwischen Elektronen und Gasatomen gestatten, wie die Versuche von J. Franck und G. Hertz an homogenen langsamen Kathodenstrahlen.

8. Ebenso bleibt die Methode anwendbar, wenn die Erregung der Sekundärstrahlung statt durch Wellenstrahlung, durch langsame Kathodenstrahlen geschieht, die sich unter die Sekundärstrahlung mischen. Hier findet einfache Überlagerung beider Mengen statt (Fig. 2); über die

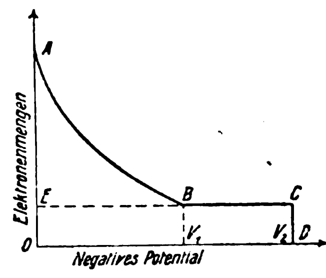


Fig. 2.

durch das Potential V_2 abgebremste homogene Primärstrahlenmenge $OECD$, welche durch Reflexion und Rückdiffusion an R ankommen kann, lagert sich die durch V_1 vollständig abgebremste sekundäre Emission ABC in ihrer Geschwindigkeitsverteilung, beide aus der Integralmengenkurve $ABCD$ durch Differentiation leicht trennbar.

Tritt durch den Vorgang der Reflexion und Rückdiffusion eine Geschwindigkeitsverteilung in der primären Kathodenstrahlmenge hinzu,

so trübt sich das Bild, und die Trennung der primären und sekundären Elektronenmengen kann unmöglich werden, wenn nicht ihre Trennung durch anderweitige Variation der Versuchsbedingungen gelingt. Schnelle Primärstrahlung dürfte die Trennung auch in diesem komplizierten Falle erleichtern.

9. Geschieht die Auslösung der Elektronen durch langsame oder schnelle positive homogene Strahlung, so führt die Methode des umgekehrten zentralen Feldes ebenfalls zum Ziel. Diesen Fall habe ich in meiner anfangs erwähnten Arbeit realisiert. Auch hier superponiert sich die reflektierte positive Menge der sekundären negativen.

Nur kann der Fall graphisch nicht so wie in Fig. 2 dargestellt werden; denn gemessen an einem für Elektronen bremsenden Potential haben die positiven Teilchen negative Geschwindigkeiten, für die Fig. 2 keine Darstellung zuläßt.

Die positiven Mengen tilgen aus der sekundären Emission ein Quantum, in welchem die Geschwindigkeiten ebenso wie in der ungeschwächten Menge verteilt sind. Statt Kurve a (Fig. 3) nehmen wir Kurve b auf, in der die

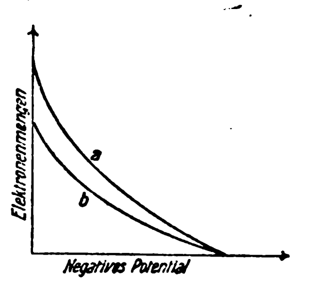


Fig. 3.

Ordinaten jeweils in ihrer Länge ein proportionales Stück gekürzt sind. Das Bild der Geschwindigkeitsverteilung bleibt ungetrübt.

Wird die Geschwindigkeit des primären Teils durch Reflexion inhomogen, so ist dies für die Neutralisierung der äquivalenten Elektronenmenge in diesem Falle gleichgültig, und obige Überlegung bleibt bestehen. Eher könnte das zunehmende negative Potential an R allmählich auch solche Teilchen an R ziehen, die sonst nicht auf den Ring hin gerichtet waren, und so das Bild zuungunsten der höheren sekundären Geschwindigkeiten trüben. Versuche haben gezeigt, daß dies nicht in merkbarem Betrage der Fall sein kann.

10. Die Einfachheit der Anordnung stellt die Methode des zentralen Feldes in ihrer Umkehrung neben alle anderen. In der Ergiebigkeit der sekundären Mengen dürfte sie die ursprüngliche Form wohl überragen. Der Vorteil, daß sie ohne weiteres wahre Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsverteilungen gibt, räumt ihr den Vorrang vor der Methode des homogenen Feldes ein[1]).

1) Siehe auch A. Becker, Ann. d. Phys. **58**, 393—473, 1919.

Darmstadt, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule. 3. Mai 1919.

(Eingegangen 9. Mai 1919.)

Bemerkung zu Ph. Franks Abhandlung „Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Diffusion" (diese Zeitschr. 19, 516, 1918).

Von Hans Bauer.

In § 3 des im Titel zitierten Aufsatzes untersucht Ph. Frank, dem Gedankengange Fouriers über das Fortschreiten des Temperaturmaximums bei der Wärmeleitung folgend, die Fortpflanzung des Konzentrationsmaximums bei der Diffusion einer Substanz, deren sämtliche Teilchen zu Beginn des Vorganges in einer Ebene ($x = 0$) versammelt sind, oder in nichtatomistischer Ausdrucksweise: bei der Diffusion einer unendlich dünnen Lösungsschichte. Bedeutet x die vom Konzentrationsmaximum durchlaufene Strecke, t die dabei verflossene Zeit, D den Diffusionskoeffizienten, so besteht zwischen diesen Größen die Beziehung:

$$x^2 = 2\,D\,t. \tag{1}$$

Es liegt nun die Frage nahe, ob es nicht auch im Falle der Diffusion einer unendlich langen Lösungssäule von konstanter Konzentration in eine angrenzende unendlich lange Flüssigkeitssäule (zweiter Idealfall) eine physikalisch bemerkenswerte Stelle im Verlaufe des Diffusionsvorganges gibt, welche gleichfalls der Bedingung (1) genügt, wenn wir x und t auf diese Stelle beziehen. Es ist leicht zu sehen, wie die folgende einfache Rechnung zeigt, daß in diesem Falle an die Stelle des Konzentrationsmaximums das maximale Konzentrationsgefälle tritt.

Wir bedienen uns zu diesem Nachweise des in § 2 der genannten Abhandlung — Gleichung (18) — gegebenen Ansatzes für die Konzentration

$$w(x,t) = \frac{n}{2\sqrt{\pi D t}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4Dt}}\,d\alpha, \tag{2}$$

wo n die konstante Anfangskonzentration der Lösung bezeichnet. Für das Konzentrationsgefälle ergibt sich daraus

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-n}{2\sqrt{\pi D t}} \int_{-\infty}^{0} \frac{x-a}{2Dt} e^{-\frac{(x-a)^2}{4Dt}} d\alpha = \qquad (3)$$

$$= -\frac{n}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

Fragen wir nun nach jener Zeit t, zu welcher $\frac{\partial w}{\partial x}$ für einen bestimmten Wert von x seinen Maximalwert erreicht, so haben wir die Bedingung zu erfüllen:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \, \partial x} = 0 \text{ [1]}. \qquad (4)$$

Differenzieren wir demgemäß Gleichung (3) partiell nach t, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \, \partial x} = \frac{n}{4\sqrt{\pi D t^3}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left(1 - \frac{x^2}{2Dt}\right) = 0, \quad (5)$$

also die Beziehung (1)

$$x^2 = 2Dt.$$

Das Fortrücken des maximalen Konzentrationsgefälles bei der Diffusion einer unendlich langen Flüssigkeitssäule erfolgt mithin nach demselben Gesetze wie die Fortpflanzung des Konzentrationsmaximums bei der Diffusion einer unendlich dünnen Schichte.

Dieses Ergebnis war vorauszusehen, wenn man bedenkt, daß der absolute Betrag des Konzentrationsgefälles im oben betrachteten Falle, wie Gleichung (3) zeigt, zu jeder Zeit t und für jeden Wert von x mit dem Werte der Konzentration übereinstimmt, wenn wir die unendlich lange Flüssigkeitssäule durch eine unendlich dünne Schicht ersetzen — vgl. die Gleichung (2) in § 1 der genannten Abhandlung. Diese Übereinstimmung erklärt sich daraus, daß sich die Konzentrationsverteilung im Falle der unendlich langen Flüssigkeitssäule als Superpositionswirkung unendlich vieler unendlich dünner Schichten durch Integration bestimmt — siehe Gleichung (2). Daher muß auch der rascheste Anstieg der Konzentration an einer bestimmten Stelle in jenem Augenblicke eintreten, wo das Konzentrationsmaximum der ersten Schichte (zu Beginn des Diffusionsvorganges in der Ebene $x = 0$), welches den „Kopf" des diffundierenden Teilchenschwarmes markiert, daselbst eintrifft [1]).

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß der hier entwickelte Gedankengang auch auf das Fortschreiten des maximalen Temperaturgefälles bei der Wärmeleitung aus einem unendlich ausgedehnten Wärmereservoir in ein angrenzendes unendlich ausgedehntes Medium anwendbar ist.

1) Im Hinblick auf die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

kann dafür auch

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$$

geschrieben werden.

1) Ist allgemein $f(x, t)$ eine nach x und t differenzierbare Funktion, für welche $f(\infty, t) = 0$ ist, und bilden wir dazu

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^{0} f(x - \alpha, t)\, d\alpha,$$

so gilt offenbar stets die Beziehung:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f(x-\alpha, t)}{\partial x} d\alpha = -\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f(x-\alpha, t)}{\partial \alpha} d\alpha = -f(x, t).$$

Jeder zeitliche (oder örtliche) Extremwert von $f(x, t)$ ist daher mit einem Extremwert von $\frac{\partial F}{\partial x}$ verbunden.

Physikalisches Laboratorium der Technischen Hochschule in Wien.

(Eingegangen 18. März 1919.)

Strahlungs- und Helligkeitsmessungen in Kolberg während der Sonnenfinsternis vom 21. August 1914.

Von K. Kähler.

Im Auftrage der Zentralstelle für Balneologie und mit Unterstützung des Preußischen Meteorologischen Instituts wurden von mir seit April 1914 regelmäßige Beobachtungen der Sonnenstrahlung und der Helligkeit am Ostseestrand in Kolberg ausgeführt. Bei dieser Gelegenheit konnte die Sonnenfinsternis vom 21. August 1914 mit einer Reihe von Instrumenten messend verfolgt werden. Infolge meiner jahrelangen militärischen Einberufung ist es jetzt erst möglich, die Ergebnisse dieser Messungen — wie der vorzeitig abgebrochenen Kolberger Gesamtmessungen — zu veröffentlichen.

Die Finsternis dauerte [1]) in Kolberg (54° 12′ n. Br. und 15° 37′ ö. L. v. Gr.) von 12p 14 bis 2p 37 mittlerer Ortszeit und erreichte ihre größte Phase, ausgedrückt in Teilen des Sonnendurchmessers, mit 0,87 etwa um 1p 25 Uhr. Beobachtet wurde auf einem frei gelegenen Bau (Fort Münde):

1. Die Wärmestrahlung der Sonne in

1) Berliner Astronomisches Jahrbuch 1914, S. 403.

g/kal. mit einem Aktinometer von Michelson (Nr. 15), das einige Tage vorher am gleichen Ort mit einem Ångströmschen Kompensationsphyrheliometer (Nr. 150) geeicht war. Dieses war seinerseits an ein in Potsdam als Standardinstrument dienendes Abbotsches Silberscheiben-Phyrheliometer (S. I. 12) angeschlossen.

2. Photoelektrisch die direkte Sonnenstrahlung mit einer argongefüllten Kaliumzelle von Elster und Geitel (Nr. 4055), und zwar wurde außer dem Gesamtausschlag gemessen mit vorgeschaltetem, 2 cm dickem Flintglas, das alle Strahlen unter 400 $\mu\mu$ absorbiert, und mit Grünglas (Schott F 4930), das nicht nur alle Strahlen unter 400 $\mu\mu$, sondern auch noch einen großen Teil der längeren Wellen verschluckt, ungefähre Grenze 500 $\mu\mu$.

3. Die direkte ultraviolette Strahlung der Sonne ebenfalls in relativem Maß mit einer Zinkzelle von Elster und Geitel (Nr. 4257), und zwar elektrometrisch mit Wulfelektrometer.

4. Die Helligkeit („Ortshelligkeit") einer frei gelegenen Milchglasscheibe in Hefnermeterkerzen mit dem Weberschen Photometer (Nr. 679) in Rot (Schott F 4512), Grün (Schott F 4930) und Blau (Schott F 3873).

Der 21. August war in den Mittagsstunden in Kolberg fast wolkenlos, jedoch etwas dunstig und der Himmel nur mattblau. Es war jedenfalls, wie ja meistens im Hochsommer, kein guter Strahlungstag, der also nicht allzu hohe Werte der Sonnenstrahlung, vor allem nicht der blauvioletten und ultravioletten Strahlen aufwies. Die Sonne blieb aber während der ganzen Dauer der Erscheinung frei. Zu Beginn waren am Himmel im NW kleine Cirrusschleier und am S-Horizont einige Cumuli, die zusammen knapp ein Zehntel des Himmels bedeckten und nicht einmal die Ortshelligkeit erhöht haben dürften. Diese schwache Bewölkung nahm während der Finsternis noch ab. Die Cirren verschwanden etwa um 1 Uhr ganz und die schwachen Cumuli lösten sich in Fracto-Cumuli auf.

Nachdem vormittags die Werte bei 25°, 30° und 35° Sonnenhöhe und mittags die höchsten Werte festgelegt worden waren, wurden während der Finsternis so oft als möglich alle Instrumente nacheinander abgelesen. Die Tabellen I bis IV enthalten die Ergebnisse. Die Zahlen bei der Kaliumzelle sind Skalenteile des Galvanometers. Dabei ist, weil beim Grünfilter eine größere Blende vor der Zelle benutzt worden ist, die Zahlenreihe > 500 $\mu\mu$, um eine Vergleichbarkeit mit den Werten < 400 $\mu\mu$ und > 400 $\mu\mu$ zu ermöglichen, durch 4 zu dividieren. Bei der Zinkzelle sind die mitgeteilten Zahlen die Werte $\frac{1000}{t}$, wobei t die mit der Stoppuhr ermittelte Abfallzeit zwischen 85 und 50 Volt ist. Bei der Ortshelligkeit sind die Verhältnisse grün : rot, blau : rot und blau : grün hinzugefügt. In der Fig. 1 ist der Abfall bei der Wärme-

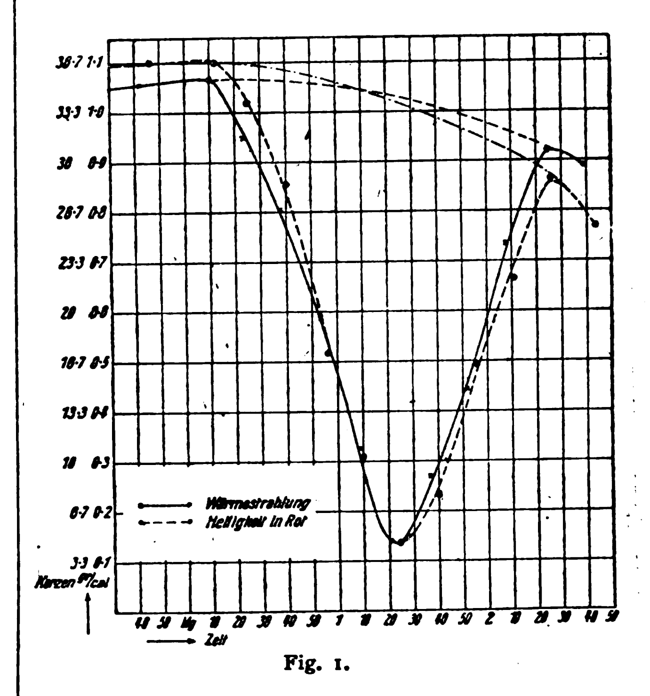


Fig. 1.

strahlung und bei der Ortshelligkeit in Rot dargestellt worden, wobei der Maßstab beider ungefähr gleichgemacht wurde; die Fig. 2 gibt dasselbe für die Wellenlängen < 400 $\mu\mu$, > 400 $\mu\mu$ und für die Zinkzelle, wobei wieder der Maßstab der Zinkzelle dem der Strahlung < 400 $\mu\mu$ angepaßt worden ist.

Um aus den Messungen die Größe der Strahlenschwächung zu berechnen, ist zunächst aus den am Ende der Finsternis gefundenen Werten und den Mittagswerten der bei 44,8°, der Sonnenhöhe zur Zeit der größten Phase, zu erwartende Wert interpoliert worden. Hierbei wurden bei allen Elementen die aus zahlreichen anderen Messungen an Augustnachmittagen festgestellten Kurven unter Berücksichtigung der Eigenarten des Messungstages benutzt. Das ergab für die Wärmestrahlung den Wert 1,030, für die Strahlen < 400 $\mu\mu$ 48, für die Strahlen > 400 $\mu\mu$ 36, < 500 $\mu\mu$ 16, für die ultravioletten 34 und für die Ortshelligkeit in Rot 34,0. Verglichen mit den kleinsten Werten der Tabellen I bis IV erhält man so für die Wärmestrahlung eine Schwächung

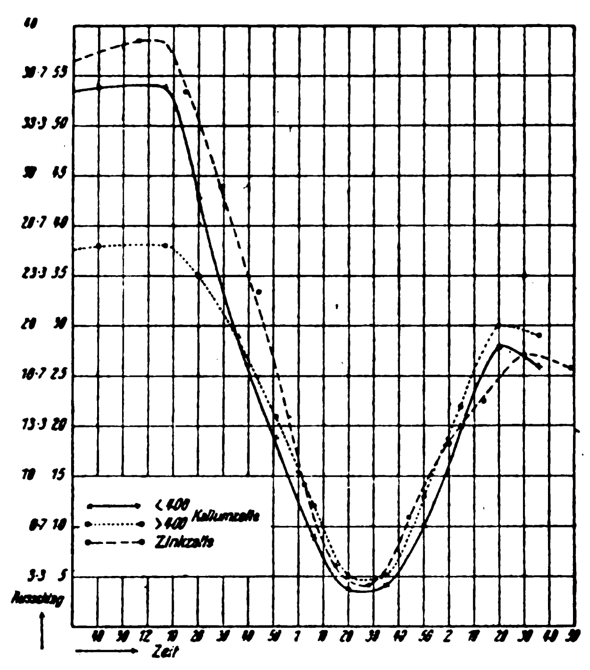


Fig. 2.

von $86^1/_2$ Proz.[1]), bei den Strahlen $< 400\,\mu\mu$ 92, $> 400\,\mu\mu$ 86, $> 500\,\mu\mu$ 84, bei den ultravioletten 91 und bei der Helligkeit in Rot 87 Proz. Bei der Wärmestrahlung und der Ortshelligkeit entspricht also die gemessene Schwächung fast genau der berechneten Verdunkelung der Sonnenscheibe. Beim Grünfilter der Kaliumzelle, wo aber die Beobachtungen schon wegen der kleinen Ausschläge nicht sehr exakt sind, ist sogar der Ausschlag zurzeit der größten Phase größer, als

Tabelle I.

Messungen der Wärmestrahlung mit Michelson.

Ortszeit	Sonnenhöhe	g/kal.
7ª 56	25°	0,906
8ª 30	30°	0,947
9ª 13	36°	0,970
11ª 42	47,3°	1,053
0P 10	47,4°	1,067
0P 23	47,3°	0,950
0P 38	47,0°	0,806
0P 54	46,6°	0,591
1P 9	45,4°	0,327
1P 21	44,8°	0,140*
1P 37	43,9°	0,270
1P 52	42,7°	0,445
2P 8	41,2°	0,734
2P 24	39,6°	0,917
2P 39	37,4°	0,888

1) Vermutlich ist bei der Wärmestrahlung (vgl. Fig. 1) das Minimum noch etwas kleiner als 0,140, so daß sich aus diesem Grunde die Zahl auf 87 erhöht.

Tabelle II.

Messungen mit der Kaliumzelle von Elster und Geitel.

Ortszeit	Sonnenhöhe	$< 400\,\mu\mu$	$> 400\,\mu\mu$	$> 500\,\mu\mu$[1])
7ª 56	25°	22	27	13,5
8ª 28	30°	26	31	14,5
9ª 11	35°	30	33	15,5
11ª 40	47,3°	54	38	17
0P 7	47,4°	54	38	17
0P 20	47,3°	43	35	16,5
0P 36	47,0°	29	29	13,5
0P 51	46,6°	19	21	10
1P 6	45,8°	9	12	5
1P 20	45,0°	3,7*	5*	2,5*
1P 35	44,0°	4	5	2,5
1P 50	42,8°	10	13	6,5
2P 5	41,2°	20	22	11
2P 20	39,7°	28	30	14
2P 26	37,6°	26	29	13,5

Tabelle III.

Messungen mit der Zinkzelle von Elster und Geitel.

Ortszeit	Sonnenhöhe	$\frac{1000}{t}$
8 37	32°	21,0
9ª 14	36°	21,5
11ª 56	47,3°	39,0
0P 15	47,3°	35,5
0P 29	47,1°	29,3
0P 44	46,8°	22,6
1P 2	46,3°	9,5
1P 15	45,5°	4,1
1P 28	44,6°	2,7*
1P 44	43,6°	7,3
2P 0	42,4°	12,2
2P 14	40,6°	16,6
2P 30	39,0°	18,0
2P 49	37,0°	17,2

zu erwarten wäre. Dagegen ergibt sich ein zu geringer Ausschlag, also eine zu große Schwächung bei den kleinsten Wellenlängen der Kaliumzelle und bei der Zinkzelle.

Süring[2]) fand bei der Finsternis vom 17. April 1912 in Potsdam zu Beginn gute Übereinstimmung zwischen Wärmestrahlung, gemessen mit Ångström, und der berechneten Verdunkelung der Sonne. Von 40 Proz. Verdunkelung an nimmt die Strahlung aber rascher ab als die beleuchtete Fläche. Zurzeit der größten Phase nahten sich Cirren der Sonne, die dann weitere Messungen unmöglich machten. Aus Beobachtungen, die Kron in

1) Bei den Messungen $> 500\,\mu\mu$ war die Blendenöffnung 4 mal so groß als bei $\gtrless 400\,\mu\mu$.

2) R. Süring, Meteorol. Zeitschr. 29, 440, 1912.

Tabelle IV.

Messungen der Ortshelligkeit mit dem Weberphotometer.

Ortszeit	Sonnenhöhe	Ortshelligkeit in 1000 Meterkerzen			Verhältnis		
		Rot	Grün	Blau	gr/r	bl/r	bl/gr
8a 34	30°	24,6	66	160	2,7	6,5	2,4
11a 46	47,3°	36,7	98	208	2,7	5,7	2,1
0p 12	47,4°	36,7	—	—	—	—	—
0p 25	47,2°	33,9	86	208	2,6	6,1	2,4
0p 40	46,8°	28,5	77	188	2,7	6,6	2,4
0p 57	46,6°	17,2	48	115	2,8	6,7	2,4
1p 10	45,6°	10,3	23	74	2,3	7,2	3,2
1p 24	44,8°	4,5*	11,0*	28*	2,4	6,2	2,5
1p 40	43,7°	7,7	21	51	2,7	6,6	2,4
1p 56	42,5°	16,5	35	97	2,1	5,9	2,8
2p 11	41,0°	22,0	56	143	2,5	6,5	2,6
2p 26	39,4°	28,8	75	179	2,6	6,2	2,4
2p 43	37,0°	25,7	66	179	2,6	7,0	2,7

Potsdam bei derselben Finsternis mit dem Glan-Vogelschen Spektralphotometer anstellte, folgert Werner[1]) daß bei der Wellenlänge 651 $\mu\mu$ die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung sehr gut ist; bei 514 $\mu\mu$ ist sie weniger gut und bei 443 $\mu\mu$ die Abweichung am größten. Walter und Goos[2]) erhielten bei Helligkeitsmessungen in Hamburg am 17. April 1912 eine sprungweise Abnahme der Helligkeit zurzeit der größten Phase. Die Kolberger Helligkeitskurve (Fig. 1) verläuft jedoch genau so stetig wie alle anderen Kurven. Lindholm[3]) hat durch dauernde Messungen mit dem Ångströmschen Phyrheliometer während der Finsternis vom 21. August 1914 in Stockholm nachgewiesen, daß die Schwächung der Wärmestrahlen anfangs und am Ende kleiner, um die Zeit der größeren Phasen größer ist als die Bedeckung der Sonnenscheibe durch den Mond, die er nach Angaben der Stockholmer Sternwarte genau berechnet. Dieses Verhalten erklärt sich daraus, daß die Sonnenmitte stärker strahlt als der Sonnenrand, und zwar ist, wie Abbot[4]) gezeigt hat, bei den kürzeren Wellenlängen der Unterschied viel größer als bei den längeren. Bei den Wellenlängen $< 400 \mu\mu$ strahlt beispielsweise die Sonnenmitte zwei- bis dreimal so stark als der Rand, bei der Wellenlänge 1000 $\mu\mu$ nur um etwa 30 Proz. mehr. Die Abweichung bei den Kolberger Messungen mit der Kalium- und Zinkzelle erklärt sich also aus dieser Eigenschaft. Wenn sie bei den größeren Wellenlängen der Kolberger Beobachtungen nicht zum Ausdruck kommt, so liegt das wahrscheinlich an der Kleinheit des Effekts. Auch bei Lindholm betrug er zur Zeit der größten Phase nur 1 Proz.; vor- und nachher war er allerdings etwas stärker. Die Kolberger Messungen sind bei einem Einzelelement nicht zahlreich genug, um eine genauere Verfolgung zu gestatten. Außerdem wird die Berechnung erschwert durch eine Trübung der Atmosphäre, die, wie eingangs erwähnt, zwar schon morgens und mittags vorhanden war, die aber in den Nachmittagsstunden, also gerade während der Finsternis, stärker wurde und noch abends und am nächsten Morgen Gewitter und Regen zur Folge hatte. Zu erkennen ist diese Trübung vor allem daran, daß die Werte nach der Sonnenfinsternis bei allen Elementen bedeutend tiefer liegen als bei den gleichen Sonnenhöhen am Vormittag. Lindholms Stockholmer Messungen zeigen eine solche Trübung nicht.

Vergleicht man die kleinsten Werte, die bei der Finsternis gemessen wurden, mit den Mittagswerten, so ergibt sich bei allen Elementen eine Schwächung etwa auf den achten Teil. Nur bei den Wellenlängen $< 400 \mu\mu$ der Kaliumzelle und bei der Zinkzelle ist diese Schwächung fast doppelt so groß. Das liegt zu einem großen Teil an dem anders gearteten Tagesgange dieser Wellenlängen, den man bei der Fig. 2 ungefähr durch Verbinden der Mittags- mit den Endwerten erhält. Bei der Ortshelligkeit werden anscheinend alle Farben in gleicher Weise geschwächt. Im Mittel ändert sich z. B. das Verhältnis grün zu rot

1) A. Werner, diese Zeitschr. 13, 719, 1912.
2) B. Walter u. F. Goos, diese Zeitschr. 13, 564, 1912.
3) F. Lindholm, Eclipse totale du soleil du 20—21 août 1914, III, 1; Stockholm 1919.
4) C. G. Abbot, F. E. Foyle u. L. B. Aldrich, Annals of the Astrophysical Observatory of Smithsonian Institution III, 159, Washington 1913.

nicht wesentlich. Dabei ist zu beachten, daß an und für sich schon die Einstellungen in Grün, und vor allem in Blau nicht so genau sind als in Rot. Außerdem erforderten die Beobachtungen eine gewisse Zeit, während welcher die Helligkeit nicht konstant bleibt, so daß aus diesem Grunde die Farbenverhältnisse sich nicht so genau bestimmen lassen wie bei konstanter Sonnenstrahlung.

Potsdam, April 1919.

(Eingegangen 29. April 1919.)

Weitere Bemerkungen zur Ostwaldschen Farbenlehre.

Von Otto Meißner.

1. Die Albedo.

Wie überall, wo es sich um „bezogene", d. h. nicht völlig isoliert im Gesichtsfelde liegende[1]) Farben handelt, die Ostwaldsche Farbenlehre[2]) berufen ist, klärend und schärfend zu wirken, obwohl — oder vielleicht gerade weil! — sie die physiologische Seite der Farbe mehr berücksichtigt[3]), und auch in bezug auf den Begriff der Albedo. Freilich! Unmögliches kann auch die Ostwaldsche Farbenlehre nicht erreichen. Sie bezieht sich, wie ich schon angedeutet, streng nur auf einen „ideal rauhen", d. h. aus lauter („unendlich") kleinen, regellos (d. h. nach dem Zufallsgesetz[4]) verteilten „Elementarspiegeln" bestehenden Körper, wenigstens an der Oberfläche, die aber in der Optik ja auch nicht als mathematische „Fläche" angesehen werden darf. Nicht ideal rauh, vielmehr sehr weit vom „Ideal" entfernt, ist z. B. der Mond: die Berge sind „Rauhheiten", die nicht mehr als klein anzusehen sind, und andererseits tritt an Bergspitzen und im Inneren mancher Krater oft Spiegelreflexion ein.

„Albedo" ist oder soll nun die Reflexionsfähigkeit sein. Da jeder Körper, auch ein Planet, $\gtrless$ farbig ist, kann man auch ihm eine Kennzahl $r \cdot w \cdot s$ zuordnen. Was wäre nun die Albedo? Ist sie gleich oder proportional w? Bei gelblichen Körpern wird man diese Definition als untauglich befinden müssen. $r = 100 - w - s$ (in Prozenten) ist es auch nicht. Einstweilen, bis etwa der Urheber selbst eine andere Definition der Albedo gibt, schlage ich vor:

Die Albedo ist nach der Ostwald-Farbenlehre zu definieren als $100 - s$, also Farbe und Reinheit weniger Schwarzgehalt, oder $= r + w$.

Denn es ist ja $r + w + s = 100$.

Damit ist wohl zum erstenmal eine bequem und doch relativ sicher zahlenmäßig erfaßbare Definition der Albedo gegeben, die sich, wie ich hoffe, bewähren, wenn auch ihre Anwendung auf Himmelskörper nicht leicht sein dürfte; doch das muß ich notgedrungen anderen überlassen.

2. Helligkeitsvergleichungen verschieden gefärbter Körper.

Auch die Helligkeitsvergleichungen verschiedenfarbiger Körper haben den Optikern viel Kopfzerbrechen gemacht. Aus der Ostwaldlehre geht hervor, daß diese Helligkeit von der der grauen Körper prinzipiell verschieden ist, daß es vielmehr sogar erst einer neuen Definition bedarf. Hat ein roter Körper die Kennzahlen $c_1 w_1 s_1$, ein blauer $c_2 w_2 s_2$, so wird man wieder im Zweifel sein können, ob

$$w_1 = w_2$$

oder

$$s_1 = s_2$$

als Definition der Helligkeitsgleichung anzusehen ist. Letztere Gleichung halte ich für die nicht richtigere, sondern sicher zweckmäßigere[1]). Bemerkenswert ist, wie schon Ostwald[2]) selbst hervorhebt, daß diese Größen von der Individualität des beobachtenden Auges unabhängig, also „absolut" sind — nur die mittleren Fehler sind individuell verschieden! Doch gilt das nur für ein „farbtüchtiges" normales Auge; wie es mit den Farbenblinden steht, sei theoretisch im nächsten Abschnitte kurz erörtert.

3. Farbenblindheit und Ostwaldsche Farbenlehre.

Wie würde sich ein Farbenblinder, sagen wir gleich der Einfachheit halber, ein total Farbenblinder zur Ostwaldschen Farbenlehre verhalten? Er könnte den Farbton r natürlich nicht bestim-

---

1) Wie z. B. bei der Betrachtung des Spektrums im Spektralapparat.

2) Vgl. meine beiden Aufsätze, diese Zeitschr. **20**, 83 f. u. 210 f., 1919.

3) Ob die „Natur an sich" wie G. Th. Fechner bekanntlich stets gemeint, auch „farbig und tönend" ist, kommt für die Wissenschaft nicht in Frage. Nach Kant-Schopenhauer sind die „primären Qualitäten", eigentlich nur Bewegung u. Ausdehnung, genau so vom Gegensatz Subjekt-Objekt bedingt wie die sekundären Farben usw.

4) Vgl. z. B. Timerding, Die Analyse des Zufalls. Vieweg, Braunschweig, 1915.

1) Nach H. Poincaré sind (in sich logische) Theorien nie wahr oder falsch, sondern zweckmäßig oder nicht. Ebensowenig sind sie gut oder böse. Es gibt keine Werturteile in der Wissenschaft.

2) Beiträge zur Farbenlehre, I.—V. Stück. Abh. Sächs. Ak. d. Wiss. Leipzig, B. G. Teubner, 1917.

men. Wenn ihm dagegen ein passendes Lichtfilter gegeben würde, daß er **selbst** ja **nicht** aussuchen könnte, müßte er meines Erachtens den Weiß- und Schwarzgehalt *w* und *s* einer Farbe genau so gut (vielleicht genauer) als ein Mensch mit „farbtüchtigen" Augen ermitteln können! Diesbezügliche Versuche habe ich noch nicht anstellen können. Es wäre dies auch mehr Sache der Psychologen.

Dagegen habe ich festgestellt, daß bei der Bestimmung von *r*, *w* und *s* ganz unbefangene mit den bezgl. Studien völlig unbekannte Personen sehr, **nahezu die gleichen Ergebnisse** erhielten wie ich, sodaß die „persönliche Gleichung" i. a. keinen sehr großen für die Praxis schädlichen Wert annehmen dürfte.

Bei einiger Übung gewöhnt man sich auch leicht daran, *c* auf einige Nummern, *w* und *s* auch einigermaßen sicher zu schätzen. Bei *w* und *s* ist aber zu berücksichtigen, daß nach dem **Weber-Fechnerschen** Gesetze die Unterschiede den Logarithmen proportional empfunden werden: „mittleres" Grau enthält nicht 50 Proz. Weiß, sondern nur 15—20 Proz.!

4. Sprachliches.

Wie schon **Ostwald** selbst hervorhebt, besteht bezüglich der Farben im Farbkreis ein bemerkenswerter Unterschied. Die „hellen" Farben Gelb bis Orange, die auch bis zur Reinheit von fast 100 dargestellt werden können (Blau und Grün kaum bis über 50!), **haben bei Mischung mit Schwarz in den Kultursprachen einen besonderen Namen**, im Deutschen: **Braun**. **Alle anderen Farben** haben bei der Mischung mit Schwarz nur die Bezeichnung **dunkelfarbig**: dunkelrot, dunkelblau, dunkelgrün.

So hat die **Ostwaldsche** Farbenlehre sogar zur **Sprachwissenschaft** Beziehungen. Es lohnt wohl dem genauer nachzugehen, was hier nicht geschehen kann!

Ein Unbefangener wird, wie **Ostwald** auch schon bemerkte, die **erste Hälfte** des Farbenkreises entschieden für sozusagen abwechslungsreicher, die zweite für eintöniger halten. In jener unterscheidet man doch wohl — trotz der freilich bemerkenswerten (s. oben!) **ausländischen** Namen! — außer den Hauptfarben Gelb und Rot noch die Zwischenfarben orange („gold": **Ostwald**) und Violett (veil: **Ostwald**[1])). Von 50—100 sind nur Blau und Grün mit ihren „Nuancen", die keinen besonderen Namen haben, denn das von Newton[1]) eingeführte „Indigo" als besondere Farbe zu benennen, wird einem **Unbefangenen** schwerlich einfallen. Es ist praktisch ein Blau etwa 55c mit viel (> 80 Proz.) Schwarz.

5. Eine Rechtfertigung Goethes.

Goethe war bekanntlich ein grimmiger Gegner der **Newtonschen** Farbenlehre; man darf wohl glauben, **daß er der Ostwaldschen weit freundlicher** gegenüber gestanden hätte. Daß seine Ausführungen neben groben Fehlern, wie sie einem **Dilettanten** — und das war **Goethe** in physikalischer Hinsicht doch — passieren, auch **viel Wertvolles** enthalten, wenn auch nicht in so hohem Grade, wie **Schopenhauer** meinte, ist jetzt schon vielfach, z. B. auch von v. **Helmholtz**, zugegeben worden. Nun behauptete **Newton**, daß die Mischung aller Farben im Spektrum[2]) und im rotierenden Farbenkreise, den man wohl allerdings erst später einführte, **Weiß** gäbe. Dagegen wetterte **Goethe**:

„**Neutonisch** Weiß den Kindern vorzuzeigen,
Die pädagogschem Ernst sogleich sich neigen,
Trat einst ein Lehrer auf mit Schwungrads Possen;
Auf selbem war ein Farbenkreis geschlossen.
Das dorlte[3]) nun „Betracht es mir genau!
Was siehst du da? „Nun was ich sehe? Grau!"
„Grau, siehst du, grau? Glaubst du, daß ich das leide?!
Weiß, dummer Junge, Weiß! So sagt **Mollweide**."

Der Junge bzw. **Goethe** hat natürlich recht: da die **Reinheit** der Farben nie genau gleich 100 Proz. ist, kann das Resultat kein neutrales, 100 prozentiges Weiß sein, sondern muß soviel Schwarz enthalten, wie das Mittel der Farben hat, also im günstigsten Falle wohl noch 25 Proz., was ja freilich ein **helles** Grau, aber doch ein deutliches Grau ist; denn als **Weiß** bezeichnet man allerhöchstens noch gerade ein Grau mit 20 Proz. Schwarz. Meist wird ja aber die Reinheit der Farben auf dem Kreisel, zumal auf der blau-grünen Seite viel kleiner, *s* also im Mittel bedeutend größer sein.

Jedenfalls: **Goethes** zitiertes Gedicht wird

---

1) Wie mir Herr Dr. **Meyer**-Saarbrücken vor einiger Zeit freundlichst mitteilte, ist diese Bezeichnung schon vor **Ostwald** gelegentlich angewandt worden, er hat nicht die Priorität dafür.

1) Aus — — kirchlichen Gründen! Der Heiligkeit der 7-Zahl wegen!

2) Im Spektrum fehlt freilich Purpur (Rot um 35 *c* herum). Weshalb **trotzdem** auch der **unvollständige** Farbkreis des Spektrums Weiß ergibt, hat **Ostwald** in den „Beiträgen" ausführlich auseinandergesetzt, worauf hiermit verwiesen sei.

3) = drehte sich.

erst durch die Ostwaldsche Farbenlehre gerechtfertigt, zugleich die Möglichkeit für die zahlenmäßige Festlegung der Abweichung vom idealen Weiß gegeben. Man sieht auch hier eine wie außerordentlich vielseitige Anwendbarkeit auf den verschiedensten Gebieten der Ostwaldschen Farbenlehre zukommt.

Potsdam, 25. Februar 1919.

(Eingegangen 28. Februar 1919.)

Über gewisse an den Bewegungsgleichungen durchgeführte Eliminationen.

Von Siegbert Wiesner.

In Verfolgung einer an anderer Stelle ausgesprochenen Überzeugung[1]), daß sich nämlich die Hauptsätze der Wärmelehre als singuläre Lösungen gewisser Differentialgleichungen der Physik ergeben, drängte sich mir die Frage auf, ob jene Eliminationen, durch welche Helmholtz[2]) aus den Lagrangeschen Gleichungen den Energie- und den Entropiesatz gewinnt, nicht zusammenfallen mit den Eliminationen, durch welche aus einer Differentialgleichung ihre singuläre Lösung, falls sie existiert, gewonnen wird, oder anders gesprochen, welche die notwendige Bedingung der Existenz einer singulären Lösung der Differentialgleichungen darstellen. Ich kam zu dem Ergebnis, daß die Helmholtzschen Eliminationen tatsächlich sich mit jenen decken, welche zur singulären Lösung — die Existenz derselben vorausgesetzt — einer gewissen Differentialgleichung führen.

Schon an dem Bau einer Differentialgleichung ist zu erkennen, ob sie eine singuläre Lösung haben kann. Sie muß nämlich in diesem Falle in den Differentialquotienten von höherem als ersten Grade sein. Eine solche Differentialgleichung besitzen wir in der durch Variation des Ausdrucks

$$V = \int_{t_0}^{t} (T - U)\, dt \tag{1}$$

hervorgehenden nichtlinearen partiellen Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung der Mechanik. T bedeutet hierin die kinetische, U die potentielle Energie. Die Differentialgleichung lautet:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial t} + H\Big(t, q_1, q_2, \cdots q_n, \\ \dfrac{\partial V}{\partial q_1}, \dfrac{\partial V}{\partial q_2}, \cdots \dfrac{\partial V}{\partial q_n}\Big) = 0. \end{array}\right\} \tag{2}$$

1) Ostwalds Annalen d. Naturphilosophie. 1911.

2) Helmholtz, Abhandlungen Bd. III, S. 119ff.; Vorlesungen über theoret. Physik Bd. VI, S. 346ff.

Hierin bezeichnen $q_1, q_2 \cdots q_n$ die allgemeinen Koordinaten eines mechanischen Systems; die Funktion H entsteht aus $T + U$, indem man in letzteres t, q_α und

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} (\alpha = 1, 2 \cdots n)$$

als Veränderliche einführt. Es ergibt sich hierbei, daß

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} \tag{3}$$

und daß H nichtlinear ist in den Ableitungen. Eine etwa vorhandene singuläre Lösung der Differentialgleichung (2) wird gefunden, indem man ihre linke Seite nach den Ableitungen differentiiert und mit Hilfe der dadurch gewonnenen Gleichungen einige oder alle Differentialquotienten aus (2) eliminiert. Von $\frac{\partial V}{\partial t}$ sehen wir hierbei ab und betrachten die linke Seite von (2) bloß als Funktion der $\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$. In der Tat kann (2) in eine Gleichung von der Form

$$a + H\left(q_\alpha, \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\right) = 0 \tag{4}$$

transformiert werden[1]), so daß die Möglichkeit gegeben ist, von $\frac{\partial V}{\partial t}$ abzusehen.

Wir kehren zu (2) zurück und stellen uns, um die $\dfrac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}}$ zu bilden

$$H = T + U \tag{5}$$

also weil U von den

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}$$

— bei Voraussetzung eines konservativen Systems — nicht abhängt, T als Funktion der $\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$ dar. Zu diesem Behufe setzen wir die lebendige Kraft ganz allgemein als eine homogene quadratische Form der Geschwindigkeiten an:

$$\begin{aligned} T = q_1' &[f_{11}(q_1, q_2 \cdots q_n)\, q_1' + f_{12}(q_1, q_2 \cdots q_n) q_2' + \\ &+ \cdots f_{1n}(q_1, q_2 \cdots q_n)\, q_n'] + \\ + q_2' &[f_{21}(q_1, q_2 \cdots q_n)\, q_1' + f_{22}\, q_1, q_2 \cdots q_n)\, q_2' + \\ &+ \cdots f_{2n}(q_1, q_2 \cdots q_n)\, q_n'] + \\ &\vdots \\ + q_n' &[f_{n1}(q_1, q_2 \cdots q_n)\, q_1' + f_{n2}(q_1, q_2 \cdots q_n) q_2' + \\ &+ \cdots f_{nn}(q_1, q_2 \cdots q_n)\, q_n']. \end{aligned} \tag{6}$$

1) Vgl. z. B. O. Rausenberger, Lehrb. d. analyt. Mechanik, Leipzig 1888, S. 207.

Dabei bedeuten die f_{ik} beliebige Funktionen ihrer Argumente, welche bloß der Bedingung unterliegen, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \cdots f_{1n} \\ f_{21} f_{22} \cdots f_{2n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ f_{n1} f_{n2} \cdots f_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7}$$

ist. Ferner gilt

$$f_{ik} = f_{ki}. \tag{8}$$

Aus (3) und (6) folgt bei Berücksichtigung von (8)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_1} &= 2(f_{11} q_1' + f_{12} q_2' + f_{13} q_n' + \cdots f_{1n} q_n') \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} &= 2(f_{21} q_1' + f_{22} q_2' + f_{23} q_n' + \cdots f_{2n} q_n') \\ &\vdots \\ \frac{\partial V}{\partial q_n} &= 2(f_{n1} q_1' + f_{n2} q_2' + f_{n3} q_n' + \cdots f_{nn} q_n'). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Führen wir durch (9) an Stelle von q_α' die $\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$ in T ein, was wegen (7) erlaubt ist, so wird der Grad von T in bezug auf die neuen Veränderlichen nicht geändert. Die Auflösung von (9) nach den q_α' ergibt nämlich — unter F_{ik} die Unterdeterminanten von f_{ik} verstanden —

$$\begin{aligned} Dq_1' &= F_{11}\frac{\partial V}{\partial q_1} + F_{12}\frac{\partial V}{\partial q_2} + \cdots F_{1n}\frac{\partial V}{\partial q_n}, \\ Dq_2' &= F_{21}\frac{\partial V}{\partial q_1} + F_{22}\frac{\partial V}{\partial q_2} + \cdots F_{2n}\frac{\partial V}{\partial q_n}, \\ &\vdots \\ Dq_n' &= F_{n1}\frac{\partial V}{\partial q_1} + F_{n2}\frac{\partial V}{\partial q_2} + \cdots F_{nn}\frac{\partial V}{\partial q_n}. \quad (F_{ik} = F_{ki}) \end{aligned} \tag{10}$$

Somit ergibt sich für die lebendige Kraft

$$\begin{aligned} D^2T = &\left(F_{11}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{12}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \right. \\ &\left. + \cdots F_{1n}\frac{\partial T}{\partial q_n'}\right)\left[f_{11}\left(F_{11}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{12}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \cdots\right) + \right. \\ &+ f_{12}\left(F_{21}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{22}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \cdots F_{2n}\frac{\partial T}{\partial q_n'}\right) + \cdots \\ &\left. + f_{1n}\left(F_{n1}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{n2}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \cdots F_{nn}\frac{\partial T}{\partial q_n'}\right)\right] + \\ &+ \left(F_{21}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{22}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \right. \\ &\left. + \cdots F_{2n}\frac{\partial T}{\partial q_n'}\right)\left[f_{21}\left(F_{11}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{12}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \cdots\right) + \right. \\ &+ f_{22}\left(F_{21}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{22}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \cdots F_{2n}\frac{\partial T}{\partial q_n'}\right) + \\ &\left. + \cdots + f_{2n}\left(F_{n1}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{n2}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \cdots F_{nn}\frac{\partial T}{\partial q_n'}\right)\right] + \cdots \\ &+ \left(F_{n1}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{n2}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \right. \\ &\left. + \cdots F_{nn}\frac{\partial T}{\partial q_n'}\right)\left[f_{n1}\left(F_{11}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{12}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \cdots\right) + \right. \\ &+ f_{n2}\left(F_{21}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{22}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \cdots F_{2n}\frac{\partial T}{\partial q_n'}\right) + \\ &\left. + \cdots + f_{nn}\left(F_{n1}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{n2}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \cdots F_{nn}\frac{\partial T}{\partial q_n'}\right)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Der Inhalt der eckigen Klammer in der ersten Zeile ist aber gleich

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial q_1'}(f_{11}F_{11} + f_{12}F_{21} + \cdots f_{1n}F_{n1}) + \\ &+ \frac{\partial T}{\partial q_2'}(f_{11}F_{12} + f_{12}F_{22} + \cdots f_{1n}F_{n2}) + \\ &+ \cdots \frac{\partial T}{\partial q_n'}(f_{11}F_{1n} + f_{12}F_{2n} + \\ &+ \cdots f_{1n}F_{nn}) = \frac{\partial T}{\partial q_1'} \cdot D, \end{aligned}$$

da die Klammerausdrücke des zweiten und der folgenden Glieder verschwinden. Analoges gilt für die anderen Zeilen von (11) und es ergibt sich der Wert von T aus

$$\begin{aligned} DT = &\frac{\partial T}{\partial q_1'}\left(F_{11}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{12}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \right. \\ &\left. + \cdots F_{1n}\frac{\partial T}{\partial q_n'}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_2'}\left(F_{21}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{22}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \right. \\ &\left. + \cdots F_{2n}\frac{\partial T}{\partial q_n'}\right) + \cdots \frac{\partial T}{\partial q_n'}\left(F_{n1}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + \cdots F_{nn}\frac{\partial T}{\partial q_n'}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Hieraus folgen als Bedingungen für die etwa vorhandenen singulären Lösungen von (2) die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} F_{11}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{12}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \cdots F_{1n}\frac{\partial T}{\partial q_n'} &= 0 \\ F_{21}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{22}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \cdots F_{2n}\frac{\partial T}{\partial q_n'} &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ F_{n1}\frac{\partial T}{\partial q_1'} + F_{n2}\frac{\partial T}{\partial q_2'} + \cdots F_{nn}\frac{\partial T}{\partial q_n'} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Hier sehen wir $2n$ Unbekannte q_i und q_i' durch n-Gleichungen verknüpft. Wir können somit n-Unbekannte

$$q_1, q_2 \cdots q_a, q_1', q_2' \cdots q_b,$$

wo

$$a + b = n$$

ist, mit Hilfe der anderen n ausdrücken. Es ergibt sich dadurch eine Fülle von Möglichkeiten, Koordinaten und Geschwindigkeiten aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren. Zu diesen Eliminationen gehören auch diejenigen,

welche von Helmholtz als die Bedingungen von inneren zyklischen Bewegungen gedeutet worden sind und deren Durchführung von den, äußere auf die Systempunkte wirkende Kräfte P_a berücksichtigenden Lagrangeschen Gleichungen aus:

$$-P_a = -\frac{\partial U}{\partial q_a} + \frac{\partial T}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_a'} \qquad (14)$$

zum zweiten Hauptsatz führt. Deutet man nämlich P_a als den äußeren Druck, der das Volumen zu verkleinern strebt, eliminiert die Koordinate q_b und führt ferner für $U-T$ die „freie Energie“ $\mathfrak{H}$ ein, so bekommt man

$$P_b = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_b'}. \qquad (15)$$

Hieraus folgt durch Multiplikation beider Seiten mit $q_b' dt$ und Einführung von

$$S_b = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_b'} \qquad (16)$$

der zweite Hauptsatz:

$$dQ = q_b' d S_b. \qquad (17)$$

Durch Elimination einer Geschwindigkeit q_c' gewinnt man in der durch Helmholtz angegebenen Weise aus (14) die Gleichung

$$\Sigma(P_a q_a')\,dt = -d\left(\bar{\mathfrak{H}} - \Sigma q_a' \frac{\partial \bar{\mathfrak{H}}}{\partial q_a'}\right), \qquad (18)$$

wobei über sämtliche nicht eliminierte q' zu summieren ist und

$$\bar{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} - \Sigma k_c q_c' \quad (k = \text{konst}). \qquad (19)$$

ist. Gleichung (18) repräsentiert uns den ersten Hauptsatz der Wärmetheorie durch die Aussage, daß die nach außen geleistete Arbeit sich darstellt als die gleichwertige Abnahme einer Zustandsfunktion des Körpers.

Zusammenfassung: Die beiden Hauptsätze lassen sich darstellen als singuläre Lösungen einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung. Der mathematische Weg dieser Darstellung ist derselbe, den Helmholtz benützt hat, um die Wärmebewegung als eine „zyklische“ anzusprechen. Während aber Helmholtz selbst es dahingestellt sein läßt, „wie die zyklische Geschwindigkeit der Wärmebewegung in thermischer Beziehung exakt zu definieren sei“[1]), stellen sich bei uns die beiden Hauptsätze dar als Gesetze, welche von den Parametern der durch eine große Menge von molekularen Systemen realisierten vollständigen Lösung der Differentialgleichung (2) absehen.

1) Vorlesungen über theoret. Physik VI, S. 352.

(Eingegangen 23. April 1919.)

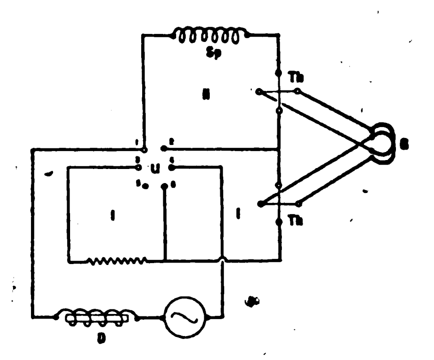
Eine Methode zur Messung von Wechselstromfrequenzen.

Von August Žáček.

Im folgenden will ich eine Methode beschreiben, die uns in den Stand setzt, auf eine einfache Art die Wechselstromfrequenzen in sehr weiten Grenzen zu bestimmen mit derselben Genauigkeit, mit welcher sich die Messungen von Widerständen und Selbstinduktionskoeffizienten ausführen lassen.

Das Prinzip der Methode liegt im folgenden: der Wechselstrom, dessen Frequenz zu bestimmen ist, wird durch einen Stromkreis geleitet, der aus zwei parallel geschalteten Zweigen besteht, von denen der eine nur den Ohmschen Widerstand, der andere aber eine Spule oder Kapazität enthält. Dieser Widerstand oder Selbstinduktion (Kapazität) wird so lange geändert, bis die Wechselstromwiderstände beider Zweige gleich werden, woraus sich dann die gesuchte Frequenz leicht berechnen läßt.

Die experimentelle Anordnung für solche Frequenzmessungen wird in der Figur schematisch



dargestellt: Um die höheren Harmonischen möglichst zu unterdrücken, wird in den Stromkreis eine Drosselspule D eingeschaltet. Der I. Zweig enthält einen induktionslosen Widerstand, der II. Zweig eine Spule Sp; jeder von den beiden Zweigen enthält daneben noch je einen Hitzdraht eines Thermoelementes Th. Die übrigen Diagonalen der Thermoelemente sind, gegeneinander geschaltet, mit den Klemmen eines Differentialgalvanometers G verbunden. Der sechspolige Umschalter U erlaubt bei der ersten Lage (1 verbunden mit 3, 2 mit 4) das Parallelschalten beider Zweige, bei der zweiten Lage des Umschalters (3 verbunden mit 5, 4 mit 6) wird der Ohmsche Widerstand des I. Zweiges ausgeschaltet und der Strom fließt dann nur durch die Spule Sp und die beiden Thermoelemente.

Die effektive Potentialdifferenz zwischen

den Punkten 1 und 4 sei E. Der gesamte Ohmsche Widerstand des induktionslosen I. Zweiges sei w_1, des II. Zweiges w_2, der Selbstinduktionskoeffizient desselben Zweiges sei L_2. Weil der thermoelektrische Strom dem Quadrate der effektiven Intensität im Hitzdraht proportional ist, ist der Galvanometerausschlag φ_0 bei der zweiten Lage des Umschalters gegeben durch

$$\varphi_0 = \alpha \frac{E^2}{(w_2 + w_1')^2 + L_2^2\omega^2} - \\ - \beta \frac{E^2}{(w_2 + w_1')^2 + L_2^2\omega^2}.$$

Dabei sind α, β Proportionalitätskoeffizienten, das negative Vorzeichen wird durch das Gegeneinanderschalten beider Thermoelemente verursacht, ω bedeutet die Kreisfrequenz des Wechselstromes, w_1' den Widerstand des Thermoelements im I. Zweige.

Setzt man

$$\varepsilon = \alpha - \beta,$$

so hat man einfach

$$\varphi_0 = \varepsilon \frac{E^2}{(w_2 + w_1')^2 + L_2^2\omega^2}.$$

Bei der ersten Lage des Umschalters werden beide Zweige parallel geschaltet und der zugehörige Ausschlag des Galvanometers wird dabei

$$\varphi = \alpha \frac{E^2}{w_1^2} - \beta \frac{E^2}{w_2^2 + L_2^2\omega^2}.$$

Wird der Galvanometerausschlag von φ_0 als Nullage gerechnet, d. h. der Ausschlag

$$\overline{\varphi} = \varphi - \varphi_0$$

eingeführt, so hat man

$$\overline{\varphi} = \alpha E^2\left(\frac{1}{w_1^2} - \frac{1}{w_2^2 + L_2^2\omega^2}\right) + \\ + \frac{2w_1'w_2 + w_1'^2}{w_2^2 + L_2^2\omega^2}\varphi_0. \qquad (1)$$

Wird jetzt der Widerstand w_1 des ersten Zweiges oder mittels eines Variometers der Selbstinduktionskoeffizient L_2 des II. Zweiges so lange geändert, bis die Wechselstromwiderstände beider Zweige gleich werden, d. h. bis

$$w_1^2 = w_2^2 + L_2^2\omega^2 \qquad (2)$$

wird, so hat man endlich

$$\overline{\varphi} = \frac{2w_1'w_2 + w_1'^2}{w_2^2 + L_2^2\omega^2}\varphi_0.$$

Hat der Hitzdraht des Thermoelementes kleinen Widerstand, sind weiter die Empfindlichkeiten beider benutzten Thermoelemente nicht sehr verschieden voneinander, so ist dieser Galvanometerausschlag bei Gleichheit der Wechselstromwiderstände beider Zweige praktisch gleich Null. So war z. B. bei einer meiner Messungen mit zwei gleich gebauten, aber nicht abgeglichenen Thermoelementen vom Widerstande $w_1' =$ ca. 0,6 Ω, $\varphi_0 = 20$ Skalenteile. Weiter war

$$w_2 = 150\,\Omega, \qquad L_2 = 1\ \text{Henry}, \qquad \omega = 300.$$

Der Galvanometerausschlag $\overline{\varphi}$ bei gleichen Wechselstromwiderständen beider Zweige beträgt in diesem Falle nur den 0,032ten Teil eines Skalenteiles, ist daher praktisch gleich Null. Hat der Hitzdraht des ersten Thermoelementes einen großen Widerstand, oder ist der Ausschlag φ_0 groß, dann ist es notwendig, durch einen Nebenschluß die Empfindlichkeiten beider Thermoelemente wenigstens annähernd abzugleichen. Wird diese Abgleichung vollständig durchgeführt, so ist der Ausschlag bei Gleichheit der Wechselstromwiderstände beider Zweige absolut gleich Null, die beschriebene Methode wird dadurch zu einer Nullmethode: das Galvanometer zeigt keinen Ausschlag so wie ohne Strom, so auch bei den beiden Lagen des Umschalters. Aus der Relation (2) bekommt man

$$L_2\omega = \sqrt{w_1^2 - w_2^2},$$

woraus man bei bekanntem Selbstinduktionskoeffizienten L_2 die Kreisfrequenz ω, oder umgekehrt bei bekannter Frequenz den Wert des Selbstinduktionskoeffizienten der Spule *Sp* berechnen kann.

Sind die Empfindlichkeiten beider Thermoelemente soweit abgeglichen, daß man in der Formel (1) das letzte Glied vernachlässigen kann, so hat man einfach

$$\overline{\varphi} = \alpha E^2\left(\frac{1}{w_1^2} - \frac{1}{w_2^2 + L_2^2\omega^2}\right). \qquad (3)$$

Aus dieser Formel sieht man, daß der Galvanometerausschlag $\overline{\varphi}$, als Funktion des Widerstandes w_1 des ersten Zweiges betrachtet, sich als eine Hyperbel 3. Grades darstellen läßt; bei sehr großen Widerständen hat der Ausschlag $\overline{\varphi}$ einen konstanten, negativen Wert

$$-\frac{\alpha E^2}{w_2^2 + L_2^2\omega^2}$$

(Asymptote der Hyperbel); wird der Widerstand w_1 vermindert, so wird der Ausschlag (von φ_0 als Nullage gerechnet) kleiner, geht weiter bei

$$w_1 = \sqrt{w_2^2 + L_2^2\omega^2}$$

durch Null, um bei noch kleineren Widerständen positiv zu werden und rasch zu wachsen.

Bei konstanter Erregung des Generators

ist die Spannung der Frequenz direkt proportional, so daß man setzen kann

$$E = E_0 \omega,$$

wo E_0 eine Konstante bedeutet. Steigt bei konstanter Erregung der Maschine die Frequenz von ω auf $\omega + d\omega$, so ändert sich bei sonst gleichen Verhältnissen im Stromkreise der Galvanometerausschlag von $\overline{\varphi}$ auf $\overline{\varphi} + d\overline{\varphi}$. Aus (3) bekommt man bei kleinen Frequenzänderungen

$$d\overline{\varphi} = 2\alpha E_0^2 \omega d\omega \left(\frac{1}{w_1^2} - \frac{1}{w_2^2 + L_2^2\omega^2}\right) + \\ + \frac{2\alpha E_0^2 L_2^2 \omega^3 d\omega}{(w_2^2 + L_2^2\omega^2)^2}.$$

Ist

$$w_1^2 = w_2^2 + L_2^2 \omega^2,$$

so verschwindet der erste Summand und man hat einfacher

$$d\overline{\varphi} = 2\alpha \frac{E_0^2}{L_2^2} \frac{\frac{d\omega}{\omega}}{\left(1 + \frac{w_2^2}{L_2^2\omega^2}\right)^2}.$$

Aus dieser Relation sieht man, daß man aus den Änderungen $d\overline{\varphi}$ des Galvanometerausschlags auf die proportionale Frequenzänderung schließen kann. Ist weiter der Wert von $\frac{w_2^2}{L_2^2\omega^2}$ klein gegen 1, was sich bei nicht allzu niedrigen Frequenzen leicht realisieren läßt, so ist die Änderung des Galvanometerausschlags der relativen Änderung der Frequenz direkt proportional.

Die beschriebene Methode wurde zur Bestimmung von Wechselstromfrequenzen in der Nähe von $\omega = 300$ und $\omega = 6000$ mit Vorteil benutzt. Die Ausführung der Messung ist äußerst einfach. Ein großer Vorteil der Methode besteht in der Möglichkeit, verschiedenste Frequenzen zu messen, selbstverständlich aber nur diejenigen, bei denen sich der Einfluß der Frequenz auf den Widerstand und den Selbstinduktionskoeffizienten noch nicht merken läßt. Vor Beobachtuugen mit dem Frequenzmesser mit sich kreuzenden Zeigern von G. Ferrié, der auf ähnlichem Prinzipe beruht, hat die beschriebene Methode den Vorteil weit größerer Genauigkeit.

Prag, am 22. April 1919.

(Eingegangen 2. Mai 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Schwankungserscheinungen in der Physik.

Von Reinhold Fürth.

(Fortsetzung.)

Kapitel III. Schwankungserscheinungen im Gebiete der Molekülwelt. (Thermodynamische Statistik.)

Im Gegensatz zu den Schwankungserscheinungen des vorigen Kapitels, die sich im Gebiete des Mikroskopischen in ihren Einzelheiten analysieren ließen, wollen wir in diesem Kapitel Schwankungserscheinungen studieren, die selbst im Gebiete des Mikroskopischen nicht in ihre Einzelfälle auflösbar erscheinen, die sich daher bloß auf Unregelmäßigkeiten in der Anordnung der Moleküle zurückführen lassen. Während wir dort, durch Beobachtung der Anzahl der Einzelereignisse selbst, die aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgenden Formeln verifizieren konnten, ist es uns hier nur möglich, direkt gewisse, durch die Anordnung der Moleküle bedingte, makroskopische Zustandsvariabeln von thermodynamischem Charakter zu beobachten, wie Dichte, Temperatur, Druck, Wärmemenge usw.

Vom phänomenologischen Standpunkte sind diese Größen für den Zustand des beobachteten Systems verantwortlich und dieses muß nach dem zweiten Hauptsatze monoton einem Gleichgewichtszustande zustreben, dem das Maximum der Entropie zukommt. In diesem Zustande des thermodynamischen Gleichgewichtes angelangt, bleiben die Zustandsvariabeln ein für allemal absolut konstant.

Nach der Molekulartheorie hingegen hängt der Zustand des Systems von den $2n$ Variabeln $q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n$, den Koordinaten und Momenten der n molekularen Freiheitsgrade des Systems ab, (wo n im allgemeinen sehr groß ist), und die thermodynamischen Größen sind als Funktionen dieser $2n$ Parameter aufzufassen, haben demgemäß eine rein statistische Bedeutung. Strebt das System einem statistischen Gleichgewicht zu, so werden auch die thermodynamischen Größen einem solchen zustreben, das also an Stelle des absoluten Gleichgewichtes des 2. Hauptsatzes anzusetzen ist. Die einfachen Gesetzmäßigkeiten

der Thermodynamik erscheinen nach dieser Auffassung als Ausdruck statistischer Massenerscheinungen. Eben infolge dieses Charakters müssen die im statistischen Gleichgewicht befindlichen Systeme Schwankungen der thermodynamischen Variabeln aufweisen.

Um diese quantitativ zu verfolgen, muß man nun zunächst Ansätze haben, die die molekularen mit den thermodynamischen Parametern des Systems verknüpfen. Mit der Aufstellung dieser Ansätze beschäftigt sich die statistische Mechanik, deren Resultate wir daher hier übernehmen müssen. Jedem molekularen Zustande des Systems, d. h. jeder bestimmten Wertekombination der q, p kommt eine gewisse „Zustandswahrscheinlichkeit" zu. Was wir aber beobachten, ist nicht dieser molekulare, sondern der thermodynamische Zustand des Systems. Die Formeln der statistischen Mechanik müssen uns also dazu dienen, auf Grund der Kenntnis der beobachtbaren thermodynamischen Variabeln die Zustandswahrscheinlichkeit zu berechnen. Der Maximalwert dieser Größe wird dann dem thermodynamischen Gleichgewicht entsprechen, da aber auch die unwahrscheinlichen Zustände im Laufe der Zeit eintreten müssen, ergeben diese Formeln weiterhin auch die Größe der Schwankungen um diese statistischen Gleichgewichtszustände.

Die Fragen können auf verschiedene Weise gelöst werden, je nachdem, welche Arten von „Gesamtheiten" der statistischen Mechanik man bei der Berechnung heranzieht. Dies wird im folgenden gezeigt werden.

A. Mikrokanonische Gesamtheit.

Nach **Gibbs** stellt eine mikrokanonische Gesamtheit die Zeitgesamtheit eines nach außen abgeschlossenen (also energiekonstanten) Systems dar.

Zur Verknüpfung der molekularen mit den thermodynamischen Größen benützen wir die **Boltzmann**sche Entropieformel

$$S = k \log W, \tag{20}$$

wo k die **Planck**sche Konstante $\frac{R}{N}$ bedeutet. Als Zustandsvariabeln wollen wir Temperatur und Dichte der einzelnen Volumelemente des Systems einführen, deren Größe dabei so zu bemessen ist, daß man im ganzen Innern diese Parameter als konstant ansehen kann, während gleichzeitig die Anzahl der in ihnen enthaltenen Moleküle noch sehr groß ist. Stellen wir die Entropie S als Funktion dieser Größen dar, so erhalten wir die gesuchte Formel für die Wahrscheinlichkeit eines durch die Angabe von Temperatur und Dichte in jedem Raumelement definierten Zustandes[22, 23, 27, 28]).

Im folgenden möge die Masse und Dichte immer in Molen gerechnet werden. Es bezeichne T die Temperatur, ϱ die Dichte des Volumelementes, T_0, ϱ_0 dieselben Größen im thermodynamischen Gleichgewichte. s sei die Entropie des Mols der Substanz bei gleichmäßiger Temperatur und Dichte T und ϱ, s_0 dieselbe Größe für T_0 und ϱ_0. S und S_0 seien die tatsächliche Entropie des Mols und ihr Maximalwert. Die Energie werde analog mit u, u_0, U, U_0 bezeichnet. Schließlich führen wir noch die Abkürzungen

$$\frac{T-T_0}{T_0} = \tau, \quad \frac{\varrho-\varrho_0}{\varrho_0} = \sigma$$

ein. Wir nehmen an, daß die Schwankungen im allgemeinen so klein sind, daß höhere als die zweiten Potenzen von τ und σ zu vernachlässigen sind. Es sollen ferner die Schwankungen in den einzelnen Volumelementen $d\omega$ voneinander nicht abhängen, so daß man S als Summe der Teilentropien der einzelnen Volumelemente berechnen darf.

Aus der Definition der Entropie

$$ds = \frac{du + p\,dv}{T} = \frac{du - \frac{p}{\varrho^2} d\varrho}{T}$$

leitet man die Beziehungen ab:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial s}{\partial \varrho} - \frac{1}{T}\frac{\partial u}{d\varrho} = -\frac{p}{\varrho^2 T}, \quad \frac{\partial s}{\partial T} - \frac{1}{T}\frac{\partial u}{\partial T} = 0,\\
&\frac{\partial^2 s}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} = \frac{2p}{T\varrho^3} - \frac{1}{\varrho^2 T}\frac{\partial p}{\partial \varrho},\\
&\frac{\partial^2 s}{\partial T^2} - \frac{1}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial u}{\partial T},\\
&\frac{\partial^2 s}{\partial \varrho \partial T} - \frac{1}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho \partial T} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Aus (21) folgt nach der **Mac Laurin**schen Formel

$$(s-s_0) - \frac{1}{T_0}(u-u_0) = -\frac{p}{\varrho_0 T_0}\sigma + \frac{p}{\varrho_0 T_0}\sigma^2 - \frac{1}{2T_0}\frac{\partial p}{\partial \varrho}\sigma^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial T}\tau^2.$$

Infolge der Nebenbedingungen, daß die gesamte Masse und Energie konstant bleiben sollen

$$\int \varrho(u-u_0)\,d\omega = 0, \qquad \int \sigma\,d\omega = 0$$

folgt für die Entropie eines Teilvolumens Δv des gesamten Systems

$$\left.\begin{aligned}
S - S_0 &= \int \varrho_0(1+\sigma)(s-s_0)\,d\omega\\
&= -\frac{\varrho_0}{2}\left[\frac{1}{T_0}\frac{\partial p}{\partial \varrho}\bar{\sigma^2} + c_v\bar{\tau^2}\right]\cdot \Delta v,
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

wobei c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volum, die Querstriche räumliche Mittelwerte bedeuten. Diese räumlichen Mittelwerte allein sind es offenbar, die bei genügend kleinem Δ_v der Beobachtung zugänglich sind. Sie selbst sind aber wieder zeitlich nicht konstant, sondern eben unseren Schwankungen unterworfen, deren Betrag wir ja berechnen wollen. Wir erledigen gleich die allgemeine Aufgabe, die Schwankungsgröße eines makroskopischen physikalischen Parameters zu bestimmen, der sich als Funktion von ϱ und T allein ausdrücken läßt. Dieser werde mit $\alpha(\varrho, T)$ bezeichnet.

1. Lassen wir zunächst die Temperatur konstant, dann ergibt sich für die Schwankungsgröße

$$\overline{\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha_0}\right)^2} = \bar{\varepsilon}^2 = \left(\frac{\varrho_0}{\alpha_0}\right)^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varrho}\right)_0 \bar{\sigma}^2,$$

aus (20) und (22) folgt, wenn wir $\sqrt{\overline{\sigma^2}} = \delta$ setzen

$$W(\delta)\, d\delta = \text{const.}\, e^{-\frac{\varrho_0}{2k}\left(\frac{1}{T_0}\frac{\partial p}{\partial \varrho}\delta^2\right)\Delta v} d\delta,$$

wo sich die Konstante aus der Bedingung ergibt:

$$\int_0^\infty W(\delta)\, d\delta = 1$$

und für den allein beobachtbaren zeitlichen oder virtuellen Mittelwert von ε^2

$$\bar{\varepsilon}^2 = \int_0^\infty \varepsilon^2(\delta)\, W(\delta)\, d\delta = \frac{k\, T_0\, \varrho_0}{\alpha_0^2 \frac{\partial p}{\partial \varrho} \Delta v} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varrho}\right)^2. \tag{23a}$$

2. Setzen wir umgekehrt die Dichte konstant, so ist

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{T_0}{\alpha_0}\right)^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_0^2 \bar{\tau}^2$$

und ähnlich wie früher ergibt sich

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{k\, T_0{}^2}{\alpha_0{}^2 \cdot c_v} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)^2 \cdot \frac{1}{\varrho_0 \Delta v}. \tag{23b}$$

Das gesamte mittlere Schwankungsquadrat der Größe α wird daher nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung gleich der Summe der beiden Ausdrücke (23a) und (23b), also[22])

$$\bar{\delta}_\alpha^2 = \frac{k\, T_0}{\varrho_0 \alpha_0^2 \Delta v} \left\{ \frac{\varrho_0^2}{\frac{\partial p}{\partial \varrho}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{T_0}{c_v} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)^2 \right\} \tag{23}$$

bezogen auf ein kleines Teilvolumen Δv unseres Systems.

Spezialfälle.

Aus (23) lassen sich verschiedene interessante Spezialfälle ableiten, indem man für α geeignete Größen einsetzt.

a) Dichteschwankungen[4]):

$$\alpha = \varrho, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \varrho} = 1, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial T} = 0.$$

$$\bar{\delta}_\varrho^2 = \frac{k\, T_0}{\varrho_0 \frac{\partial p}{\partial \varrho} \Delta v} = -\frac{k\, T_0}{v_0 \frac{\partial p}{\partial v} \Delta v}, \tag{24}$$

(v: Molvolumen).

Ist die Substanz ein ideales Gas, dann wird

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_0 = -\frac{1}{v_0^2} R T_0,$$

daher

$$\bar{\delta}_\varrho^2 = \frac{v_0}{N \Delta v} = \frac{1}{\nu},$$

wo ν die Anzahl der auf das Volumen Δv im Mittel entfallenden Moleküle bedeutet, die mit Formel (3a') Kap. I übereinstimmt, da eben bei einem idealen Gas die einzelnen Moleküle gegenseitig keine Anziehungskräfte ausüben, daher als voneinander unabhängig anzusehen sind. Bezeichnet man die Kompressibilität der Substanz

$$-\frac{\partial v}{\partial p} = \beta$$

und die „Boylesche" Kompressibilität

$$\frac{v_0^2}{R T_0} = \beta_0,$$

so kann man (24) schreiben

$$\bar{\delta}_\varrho^2 = \frac{1}{\nu} \frac{\beta}{\beta_0}. \tag{24'}$$

Diese Formel kann auch auf die Bewegung von Kolloidteilchen angewendet werden, wenn das Kolloid bereits so konzentriert ist, daß es nicht mehr dem van t'Hoffschen Gesetz gehorcht (siehe Seite 334).

Es bedeutet dann p den osmotischen Druck. In dieser Form ist die Gültigkeit des Gesetzes an Emulsionen im Sedimentationsgleichgewicht festgestellt worden, wo infolge von Abstoßungskräften zwischen den Teilchen Abweichungen von der aerostatischen Verteilung auftreten. Aus (24') kann man dann, durch Bestimmung von $\bar{\delta}^2$ in verschiedenen Höhen, β als Funktion der Dichte ermitteln, und daraus auf eine bestimmte Zustandsgleichung schließen. Bei Gummigutt ergibt dies die Gültigkeit der van der Waalsschen Formel mit Konstanten, die auf eine Abstoßungskraft zwischen den Teilchen schließen lassen (siehe II[7]).

An echten Lösungen oder Gasen haben sich bis jetzt die Dichteschwankungen einwandfrei nicht nachweisen lassen, wohl aber indirekt (siehe e).

b) Temperaturschwankungen[16]):

$$\alpha = T, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial T} = 1, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \varrho} = 0,$$

$$\bar{\delta}_T^2 = \frac{k}{\varrho_0 c_v \Delta v} = \frac{k}{C}, \tag{25}$$

wo C die Wärmekapazität des Volums Δv bezeichnet. Eine Verallgemeinerung dieser Formel für den Fall zweier im statistischen Gleichgewicht befindlicher Körper mit den Kapazitäten C_1 und C_2 würde für die gegenseitige mittlere Temperaturschwankung ergeben[12])

$$\bar{\delta}_s^2 = \frac{k}{c}, \quad \text{wo} \quad c = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \tag{25'}$$

aus welcher (25) unter der Bedingung

$$C_2 >> C_1 = C$$

hervorgeht.

c) Energieschwankungen[27]):

$$\alpha = e = E \varrho_0 \Delta v, \quad \frac{\partial E}{\partial T} = c_v,$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} = T_0 \frac{\partial p}{\partial T} - p,$$

nach bekannten Sätzen der Thermodynamik. (E: Energie der Masseneinheit.) Daher

$$\bar{\delta}_e^2 = \frac{k T_0 v_0}{\Delta v \cdot E_0^2} \left\{ \frac{\left(T_0 \frac{\partial p}{\partial T} - p\right)^2}{\frac{\partial p}{\partial v}} + c_v \cdot T_0 \right\}. \tag{26}$$

[1, 9, 15, 17])

Für den Fall inkompressibler Materie ist

$$\beta = 0$$

und

$$\bar{\delta}_e^2 = \frac{k c_v T_0^2 v_0}{E_0^2 \Delta v}. \tag{27}$$

Die Formel führt durch Einführung bestimmter Hypothesen über die Verteilung der Energie über die Freiheitsgrade zu folgenden Spezialfällen, unter der Annahme, daß der Körper ein fester ist.

1. Gleichverteilungssatz: Auf jeden Freiheitsgrad entfällt im Mittel die Energie

$$\frac{1}{2} k T_0,$$

daher

$$E_0 = 3 N k T_0, \quad c_v = 3 R.$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade ist

$$Z_f = 3 \nu,$$

daher

$$\bar{\delta}_e^2 = \frac{1}{Z_f}. \tag{27a}$$

2. Quantenhypothese: Auf einen Freiheitsgrad der Schwingungsfrequenz ω entfällt im Mittel die Energie

$$\frac{h\omega}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1},$$

daher

$$E_0 = 3N \frac{h\omega}{e^{\frac{h\omega}{kT_0}} - 1}$$

und die spezifische Wärme

$$c_v = \frac{3R \left(\frac{h\omega}{kT_0}\right)^2 \frac{h\omega}{kT_0}}{\left(e^{\frac{h\omega}{kT_0}} - 1\right)^2},$$

dies in (27) eingesetzt, ergibt

$$\bar{\delta}_e^2 = \frac{e^{\frac{h\omega}{kT_0}} v_0}{3N \cdot \Delta v} = \frac{1}{3\nu} + \frac{h\omega}{e} = \frac{1}{Z_f} + \frac{1}{Z_q}, \tag{27b}$$

welche Schwankung man sich aufgefaßt denken kann als Überlagerung der Schwankungen 1 und derjenigen, die sich nach Formel (3a′) ergeben müssen, wenn die Energie in unteilbare Elemente der Größe $h\omega$ geteilt ist.

d) Druckschwankungen:

$$\alpha = p, \quad c_p = c_v - T_0 \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right),$$

daher nach (23)

$$\bar{\delta}_p^2 = \frac{k T_0 v_0}{p_0^2 \Delta v} \left\{ -\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{T_0}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)^2 \right\}$$
$$= -\frac{k T_0 v_0}{p_0^2 \Delta v} \cdot \frac{c_p}{c_v} \cdot \frac{\partial p}{\partial v}.$$

Bezeichnet man das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volum wie üblich mit

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v},$$

so erhält man

$$\bar{\delta}_p^2 = \frac{k T_0 v_0}{p_0^2 \Delta v} \cdot \frac{\varkappa}{\beta}, \tag{28}$$

speziell für ein ideales Gas wird

$$\bar{\delta}_p^2 = \frac{\varkappa}{\nu}. \tag{28'}$$

Die Schwankungen unter b, c und d sind bis jetzt experimentell nicht nachgewiesen worden.

e) Schwankungen des Brechungsquotienten[3, 4, 5, 7, 8, 10, 11]):

$$\alpha = n, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial T} = 0.$$

Nach dem bekannten Lorentz-Lorenzschen Gesetz der Optik ist

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = a \varrho,$$

wo a eine Materialkonstante ist. Daher

$$n=\sqrt{\frac{1+2a\varrho}{1-a\varrho}},\quad \frac{\partial n}{\partial \varrho}=\frac{(n^2-1)(n^2+2)}{6n\varrho},$$

$$\overline{\delta_n^2}=-\frac{kT_0(n_0^2-1)^2(n_0^2+2)^2}{36n_0^4 v_0\cdot\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\Delta v}. \qquad (29)$$

Faßt man wieder die Raumgesamtheit der Volumina Δv, die das abgeschlossene System bilden, als Abbild der Zeitgesamtheit des einzelnen Δv auf, so ergibt (29) als Folge eine optische Diskontinuität von Volumelement zu Volumelement, die nach dem Rayleighschen Gesetze zu einer Opaleszenzstrahlung Anlaß geben muß, wenn die betrachtete Substanz von einem parallelen Strahlenbündel getroffen wird.

Nach diesem Gesetz ist die relative Intensität des pro Einheit des Gesichtswinkels von einem cm^3 der Substanz zerstreuten Opaleszenzlichtes

$$s=\frac{2\pi^2 n_0^2\Delta v}{\lambda^4}\overline{(n-n_0)^2},$$

wo n_0 den mittleren Brechungsquotienten der Substanz, λ die Vakuumwellenlänge des einfallenden Lichtstrahles bezeichnet. Durch Einsetzen von (29) ergibt dies

$$s=\frac{\pi^2}{18N\lambda^4}(n_0^2-1)^2(n_0^2+2)^2\frac{RT_0}{-v_0\frac{\partial p}{\partial v}}. \qquad (29a)$$

Durch Integration nach allen Richtungen erhält man hieraus den Koeffizienten der durch die Opaleszenz bedingten Absorption des einfallenden Strahles zu

$$h=\frac{16\pi}{3}\cdot s. \qquad (29b)$$

Ist die Substanz ein ideales Gas mit $n_0\sim 1$, so verwandelt sich (29a) in

$$s=\frac{\pi^2}{2N\lambda^4}(n_0^2-1)^2\cdot v_0, \qquad (29a')$$

bzw.

$$h=\frac{32\pi^3}{3N\lambda^4}(n_0-1)^2\cdot v_0. \qquad (29b')$$

Formel (29a) ergibt, daß die Opaleszenzstrahlung offenbar um so stärker ist, je größer die Kompressibilität der Substanz wird. Besonders günstige Umstände wird man daher in der Umgebung des kritischen Punktes eines Gases antreffen, bei dessen Annäherung die Kompressibilität sehr stark ansteigen muß. Im kritischen Punkte selbst ist

$$\frac{\partial p}{\partial v}=0.$$

Tatsächlich zeigen Gase im kritischen Zustande eine blaue Opaleszenz, deren spektralphotometrische Messung eine quantitative Prüfung der Formel (29a) liefern kann. Solche Messungen der „kritischen Opaleszenz" von Äthylen wurden tatsächlich durchgeführt[8, 7]). In nicht allzu großer Nähe des kritischen Punktes ist s in der Tat λ^{-4} proportional. Die absolute Messung von s ergibt bei Kenntnis des Brechungsquotienten und der Funktion

$$\frac{\partial p}{\partial v}$$

ein Mittel zur Berechnung der Zahl N, die mit

$$N=75\cdot 10^{22}$$

in der richtigen Größe gefunden wurde.

In unmittelbarer Nähe des kritischen Punktes ist die abgeleitete Formel nicht anwendbar, weil erstens bei ihrer Ableitung die Voraussetzung kleiner Schwankungen gemacht wurde, zweitens infolge der starken gegenseitigen Anziehungskräfte die Schwankungen der einzelnen Volumelemente nicht mehr als voneinander unabhängig angesehen werden können und drittens die Rayleighsche Formel nicht mehr anwendbar ist, da die Volumelemente, in denen merkliche Schwankungen vorkommen, nicht mehr als klein gegen die Wellenlänge angesehen werden können. Wir kommen darauf im nächsten Abschnitt noch zurück.

Nach Formel (29a') muß aber auch bei idealen Gasen eine blaue Opaleszenz, wenn auch sehr schwach, auftreten. M. v. Smoluchowskis letzte Experimentaluntersuchung[25]) hat das Vorhandensein dieser Opaleszenz unzweifelhaft nachgewiesen. Wirkungen dieser Opaleszenz im großen sind die blaue Farbe des Himmels und die Extinktion des kurzwelligen Sonnenlichtes in der Atmosphäre. Eine spektralphotometrische Messung der letzteren Größe[6, 10, 18]) gestattet unter Benützung von Formel (29b') wieder die Berechnung von N. Derartige Messungen sind infolge verfälschender Einflüsse, wie Wasserdampfgehalt der Atmosphäre, Albedo des Bodens usw. mit Sicherheit nur auf hohen Bergen in südlichen Gegenden vorzunehmen. Nachdem ältere Untersuchungen unter wenig günstigen Verhältnissen die richtige Größenordnung für N ergeben hatten, lieferte die neueste Messung vermittels eines lichtelektrischen Spektralphotometers auf dem Pic von Teneriffa den vorzüglichen Wert

$$N=64\cdot 10^{22}.$$

f) Konzentrationsschwankungen von Gemischen: Ganz ähnlich wie im vorhergehenden für eine einheitliche Substanz durchgeführt wurde, kann man die Überlegungen auch auf Gemische verschiedener Substanzen anwenden. Zu den im vorigen behandelten Schwankungen kommen dann noch die Schwankungen der Konzentration hinzu. Beschränkt man sich auf

diese allein, indem man die einzelnen Komponenten als inkompressibel ansieht, so erhält man so wie vorhin, wenn die beiden Substanzen verschiedene Brechungsquotienten besitzen, eine räumliche Diskontinuität des Brechungsquotienten, also eine Opaleszenz. Die Rechnung ergibt für die Intensität des Opaleszenzlichtes eines binären Gemisches[4, 5, 11a, 19])

$$s = \frac{\pi^2 M'' v\left(\frac{\partial n^2}{\partial k}\right)^2}{2 N \lambda^4 \frac{\partial(\log p'')}{\partial k}}. \qquad (30)$$

Die einzelnen Größen bedeuten: M'': das Molekulargewicht der zweiten Komponente, v: das Volumen der Mischung, in dem sich die Masseneinheit der ersten Komponente befindet, p'' den Dampfdruck der zweiten Komponente, k die Masse der zweiten Komponente, die auf die Masseneinheit der ersten entfällt.

Man sieht, daß die Opaleszenz besonders stark sein wird, wenn

$$\frac{\partial(\log p'')}{\partial k}$$

sehr klein wird, was tatsächlich in der Nähe des sogenannten „kritischen Mischungspunktes" binärer Gemische der Fall ist, in welchem selbst

$$\frac{\partial(\log p'')}{\partial k} = 0$$

wird. Auch hier erhält man also eine „kritische Opaleszenz" mit einer ihr parallel gehenden scheinbaren Absorption. Die Formel ist aus denselben Gründen wie oben in unmittelbarer Nähe des kritischen Punktes unbrauchbar. Durch relative Messungen kann man zunächst die Proportionalität mit λ^{-4} demonstrieren und weiterhin durch absolute Messungen der Opaleszenz oder der Absorption die Zahl N bestimmen, wenn außerdem der Verlauf der Funktionen

$$\frac{\partial n^2}{\partial k}, \qquad \frac{\partial(\log p'')}{\partial k}$$

bekannt ist. Solche Messungen sind an verschiedenen binären Gemischen angestellt worden[19, 20]) und ergaben mit befriedigender Übereinstimmung Werte für N von $65 \cdot 10^{22}$ bis $77 \cdot 10^{22}$.

Da auch die Luft keine einheitliche Substanz, sondern ein Gasgemisch ist, wird die blaue Farbe des Himmels in Wirklichkeit nicht nur durch die Dichteschwankungen, sondern auch durch die Konzentrationsschwankungen hervorgerufen, doch zeigt eine einfache Rechnung, daß die letzteren in diesem Falle gegen die ersteren zu vernachlässigen sind[22]).

B. Kanonische Gesamtheit.

Auf die Schwankungsformeln des vorigen Abschnittes kann man auch auf eine andere Art kommen, durch Einführung einer anderen Gesamtheit der statistischen Mechanik, der Gibbsschen kanonischen Gesamtheit. Es sei das betrachtete Volumelement Δv ein Teil einer sehr ausgedehnten Substanz derart, daß es gegen die letztere als klein angesehen werden kann. Infolge der vorausgesetzten Stationärität ist dann die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten infinitesimalen Zustandsgebietes von Δv eine Funktion der Energie allein, und zwar nach einem Satze von Boltzmann

$$W(q_1 \cdots p_n)\, dq_1 \cdots dp_n = A\, e^{-\frac{N}{RT} E}\, dq_1 \cdots dp_n, \qquad (31)$$

worin sich die Konstante A aus der Bedingung bestimmt, daß die Gesamtheit aller möglichen Zustände die Wahrscheinlichkeit 1 haben muß. Aus diesem Satz lassen sich alle Schwankungsformeln herleiten, wenn die Makroparameter, um deren Schwankung es sich handelt, als Funktionen der Mikroparameter gegeben sind.

Beschränkt man sich auf „Konfigurationsschwankungen" allein, so kann man den Satz in eine bequemere Form bringen. Da die q beliebige Koordinaten sind, die bloß die Forderung erfüllen müssen, daß sie den Zustand des Systems eindeutig bestimmen, so führt man als eine Koordinate ε die Größe ein, deren Schwankung man bestimmen will, und integriert (31) nach allen übrigen Koordinaten und Momenten. Man erhält dann das Boltzmannsche $e^{-h\chi}$-Theorem in der Einsteinschen Fassung

$$W(\varepsilon)\, d\varepsilon = A \cdot e^{-\frac{N}{RT}\chi(\varepsilon)}\, d\varepsilon, \qquad (32)$$

wo $\chi(\varepsilon)$ die Arbeit bedeutet, die man leisten muß, um das System aus dem Normalzustand in den gesuchten zu bringen.

Als Beispiel behandeln wir hier nochmals die Dichteschwankungen[4]). Ist die Substanz ein homogenes Gas, so wird ($\varepsilon = \delta_\varrho$ gesetzt) bis auf Glieder höherer Ordnung

$$\frac{\chi(\varepsilon)}{\varrho_0 \Delta v} = -\int_{v_0}^{v} (p - p_0)\, dv = -\frac{v_0^2}{2}\frac{\partial p}{\partial v}\delta_v^2 \cdots = -\frac{v_0^2}{2}\frac{\partial p}{\partial v}\delta_\varrho^2$$

und nach (32)

$$\overline{\delta_\varrho^2} = -\frac{k T_0}{v_0 \frac{\partial p}{\partial v} \Delta v}$$

in Übereinstimmung mit (24).

In unmittelbarer Umgebung des kritischen Punktes hingegen wird

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$$

und die obige Entwicklung muß bis zum 4. Gliede fortgesetzt werden. Dann ergibt sich

$$\frac{\chi(\delta)}{\varrho_0 \Delta v} = -\frac{v_0^4}{4!}\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}(\delta\varrho)^4$$

und daraus

$$\overline{\delta_\varrho^2} = \sqrt{24}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \cdot \frac{1}{v_0 \Delta v} \cdot \sqrt{\frac{k T_0}{-\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}}}, \qquad (33)$$

die auch im kritischen Punkte selbst brauchbar bleibt. Legt man etwa die van der Waalssche Zustandsgleichung zugrunde, so erhält man

$$\frac{\partial^3 p}{\partial v^3} = -\frac{27}{8}\frac{R T_0}{v_0^4}$$

und

$$\overline{\delta_\varrho^2} = \frac{8}{3}\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})}\frac{v_0}{\Delta v}\frac{1}{\sqrt{N}}. \qquad (33')$$

Will man nun aber diese Formeln benutzen, um die Dichteschwankungen in einem größeren Volum, z. B. zum Zwecke der Berechnung der Opaleszenz zu bestimmen, so muß man, wie schon früher erwähnt, berücksichtigen, daß die Schwankungen der einzelnen Volumelemente nicht voneinander unabhängig sind, sondern daß in der Nähe des kritischen Zustandes durch die verstärkten Anziehungskräfte der Moleküle eine „Neigung zur Schwarmbildung“ entstehen wird[14, 24, 24a, 29]. Aus diesem, sowie dem schon früher erwähnten Grunde erfahren in unmittelbarer Nachbarschaft des kritischen Punktes die Formeln für die kritische Opaleszenz sowohl von Gasen als auch von binären Flüssigkeitsgemischen eine beträchtliche Modifikation, unter anderem wird s nicht mehr proportional λ^{-4}, sondern λ^{-2}. In diesen Formeln tritt auch naturgemäß der Radius der molekularen Wirkungssphäre r auf und man kann aus den photometrischen Messungen der Opaleszenz auch auf die ungefähre Größe dieser Sphäre schließen. Derartige Berechnungen ergaben

$$r = 2{,}7 \cdot 10^{-7} \text{ cm}.$$

Die betreffenden Überlegungen bedürfen komplizierter mathematischer Hilfsmittel und können hier nicht wiedergegeben werden.

C. Überschreitungserscheinungen.

Mit den hier behandelten Schwankungserscheinungen im kritischen Punkte hängen auch eng die sogenannten Überschreitungserscheinungen zusammen. Bewegt man sich nicht gerade auf der kritischen Isotherme eines Gases, sondern auf einer tiefer gelegenen, so zeigt diese bekanntlich ein Gebiet, in dem zu jedem p drei Werte von v gehören. Die beiden äußeren gehören dabei dem gasförmigen, bzw. dem flüssigen Zustande an, der mittlere kann nicht beobachtet werden. Nach der statistischen Auffassung bilden die Punkte der Isotherme nicht die einzig möglichen Zustände des Gases, sondern bloß die Zustände extremer Wahrscheinlichkeit, und zwar im allgemeinen maximaler, mit Ausnahme des oben erwähnten Mittelstückes, wo die Wahrscheinlichkeit ein Minimum ist. Im Zustande des Siedens geht der Übergang vom flüssigen zum gasförmigen Zustand auf einer Geraden $p = \text{const}$ vor sich, die sich im allgemeinen aus der Bedingung ergibt, daß für das betreffende p die Wahrscheinlichkeit des flüssigen und des gasförmigen Zustandes gleich groß sein muß[4]. Da hierbei jedoch ein Zustand kleinster Wahrscheinlichkeit passiert werden muß, ist es klar, daß diese Regel nur eine rein statistische sein kann und Abweichungen im Sinne einer Überschreitung des Siede- oder Kondensationspunktes auftreten müssen. Die Häufigkeitsverteilung der Überschreitungen ihrer Größe nach muß daher, wenn die obigen Überlegungen zutreffen, einen statistischen Charakter haben und sich aus den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung ableiten lassen.

Ähnliches gilt für den Schmelzpunkt (Erstarrungspunkt) homogener Substanzen, auf den Mischungspunkt binärer Gemische, auf das Auskristallisieren gesättigter Lösungen usw. Tatsächlich haben experimentelle Untersuchungen nach statistischen Prinzipien gezeigt, daß die Zeitpunkte des Kristallisierens aus unterkühlten Schmelzen oder übersättigten Lösungen vollkommen nach Zufallsgesetzen verteilt sind. Eine exakte theoretische Behandlung dieser Fragen steht noch aus[2, 21, 26].

Literatur zu III.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. **14**, 360, 1904.
2) N. Stücker, Wien. Ber. **114** (2a), 1389, 1905.
3) W. H. Keesom u. Kamerlingh Onnes, Comm. from Phys. Lab. Leiden 104, 1908.
4) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **25**, 205, 1908.
5) A. Einstein, Ann. d. Phys. **33**, 1294, 1910.
6) Bauer u. Moulin, C. R. **151**, 864, 1910.
7) W. H. Keesom, Ann. d. Phys. **35**, 597, 1911.
8) M. v. Smoluchowski, Bull. Acad. Crac. 493, 1911.
9) A. Einstein, Congrès Solvay Bruxelles 419, 1912.
10) J. Perrin, Die Atome. Leipzig 1914. Congrès Solvay Bruxelles 1911.
11) M. v. Smoluchowski, Phil. Mag. **23**, 165, 1912.
11a) L. S. Ornstein, Arch. Néerl. IIIA, 184, 1913.
12) G. L. de Haas-Lorentz, Die Brownsche Bewegung. Braunschweig 1913.

13) M. v. Smoluchowski, Vorträge über kinetische Theorie der Materie. Göttingen 1914.
14) Ornstein u. Zernike, Proc. Amsterdam **17**, 793, 1914.
15) M. v. Laue, Verh. d. D. Phys. Ges. **17**, 198, 1915.
16) F. v. Hauer, Ann. d. Phys. **47**, 365, 1915.
17) Kol. Széll, Verh. d. D. Phys. Ges. **17**, 122, 1915.
18) H. Dember, Leipziger Ber. 67, 1915; Ann. d. Phys. **49**, 590, 1916.
19) F. Zernike, Dissertation Amsterdam 1915; Arch. Néerl. IV, Serie III.
20) R. Fürth, Wien. Ber. **124** (2a), 577, 1915.
21) P. Othmer, Zeitschr. f. anorgan. Chem. **91**, 209, 1915; Dissertation Göttingen 1915.
22) H. A. Lorentz, Les théories statistiques en thermodynamique. Leipzig 1916.
23) Ph. Frank, „Lotos" 64, 1916.
24) F. Zernike, Proc. Amsterdam **18**, 1520, 1916.
24a) Ornstein u. Zernike, Proc. Amsterdam **19**, 1321, 1916.
25) M. v. Smoluchowski, Bull. Acad. Crac. 218, 1916.
26) G. Kornfeld, Wien. Ber. **125** (2b), 375, 1916.
27) M. v. Laue, diese Zeitschr. **18**, 542, 1917.
28) R. Fürth, diese Zeitschr. **18**, 395, 1917.
29) Ornstein u. Zernike, diese Zeitschr. **19**, 134, 1918.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

W. Ostwald, Beiträge zur Farbenlehre. Erstes bis fünftes Stück. Abhandlg. d. math.-physik. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss, Bd. 34, Nr. III. 210 S. Leipzig. B. G. Teubner, 1917. M. 9.—

W. Ostwald, Die Farbenlehre. I. Buch: Mathetische Farbenlehre. 129 S. m. 33 Fig. im Text. Leipzig. Verlag Unesma 1918. Geh. M. 5.—, geb. M. 6,60.

W. Ostwald, Die Farbenfibel. Zweite bis dritte, verbesserte Aufl. 46 S. mit 8 Zeichnungen und 200 Farben. Leipzig, Verlag Unesma 1917. Geb. M. 12.—

W. Ostwald, Goethe, Schopenhauer und die Farbenlehre. 145 S. Leipzig. Verlag Unesma. 1918. Geh. M. 5.—, geb. M. 6,60.

Seit Jahren beschäftigt sich Wilhelm Ostwald mit den Problemen der Farbenlehre, durch seine wissenschaftlichen, künstlerischen und philosophischen Begabungen und Neigungen wie kaum ein zweiter geeignet, ein Gebiet von so umfassender Bedeutung umfassend zu bearbeiten. Die große Farbenschau der Kölner Werkbund-Ausstellung von 1914 setzte diesen Arbeiten ein abschließendes Ziel, indem sie die Notwendigkeit einer methodischen Bearbeitung der Farbenlehre klar vor Augen führte. Ostwald wurde von den Führern der Werkbund-Bewegung mit der Leitung dieses Unternehmens betraut. Die ersten Ergebnisse dieser Arbeit sind nun in den oben angeführten vier verschiedenen Veröffentlichungen niedergelegt. Die grundlegenden Gedanken seiner Auffassung der Farbenlehre hat Ostwald selber bereits in dieser Zeitschrift dargestellt in einem Aufsatze: „Neue Forschungen zur Farbenlehre", der 1916 im 17. Bande S. 322 und 352 abgedruckt ist. Ich brauche daher den Inhalt seiner Lehre an dieser Stelle nicht noch einmal auseinander zu setzen. Mein Bericht kann sich darauf beschränken, die verschiedenen Veröffentlichungen nach der Art ihrer Darstellung des Stoffes zu charakterisieren und diejenigen Punkte der Ostwaldschen Auffassung hervorzuheben und näher zu besprechen, die mir nicht ganz zweifelsfrei zu sein scheinen.

Von den vier Veröffentlichungen verdient die an erster Stelle genannte hier die eingehendste Würdigung; denn sie enthält das wissenschaftliche, gedankliche und experimentelle Material, auf dem sich die Ostwaldsche Lehre aufbaut. Von den fünf Stücken dieser „Beiträge" enthält das erste allgemeine Vorbemerkungen, das zweite die begriffliche Behandlung der Farbenlehre, von Ostwald als „Mathetik" der Farbenlehre bezeichnet; sie ist später ausführlich in dem an zweiter Stelle genannten Buche dargestellt. Die drei weiteren Stücke enthalten ein umfassendes, ohne Frage sehr beachtenswertes experimentelles Material, das nicht bloß die wissenschaftlichen Beweise für die von Ostwald vertretenen Anschauungen beibringen, sondern zugleich auch die technische Grundlage bilden soll für die Aufstellung einer genau definierten und reproduzierbaren Farbenskala und ihre vorbildliche Verwirklichung in einem Farbenatlas. Dieser Atlas soll eine Sammlung von ungefähr 2500 Farben sein, die über das ganze Gebiet der möglichen Farben gleichmäßig verteilt und nach der von Ostwald aufgestellten Systematik genau ausgemessen und bezeichnet sind. Leider ist mir ein Exemplar dieses Farbenatlas, der allerdings sehr teuer ist (250 M.[1])) zur Besprechung nicht zugegangen, so daß ich nicht in der Lage bin, über diese praktische Anwendung der Ostwaldschen Lehre zu berichten und zu urteilen. Nur die weiter unten zu besprechende Farbenfibel bietet mit ihren Farbenproben dazu eine beschränkte Gelegenheit.

Die experimentellen Untersuchungen Ostwalds beziehen sich nicht auf farbige Lichter, sondern ausschließlich auf Körperfarben, die er in Form von Farbaufstrichen auf Papier herstellt. Das dritte Stück der „Beiträge" behandelt die Photometrie der unbunten Farben. Ostwald beschreibt ein einfaches Photometer, mit dem er vergleichende Messungen über weiße und schwarze Pigmente und graue Mischungen von beiden ausführt. Als weißestes Pigment findet er gefälltes Bariumsulfat. Er nimmt es als Normalweiß und setzt seine Remission gleich 1000 in der Annahme, daß es sich von dem idealen Weiß, das alles auffallende Licht ohne Schwächung zurückwirft, nicht wesentlich unterscheidet. Absolute Messungen der Remissionsfähigkeit hat Ostwald allerdings nicht ausführen können. Das absolute Schwarz ist in bekannter Weise durch die Öffnung eines innen geschwärzten Hohlraumes leicht zu verwirklichen. Im Vergleich hiermit zeigt Pariser Schwarz als eines der schwärzesten Pigmente eine Remission von 2 Proz. Zwischen diesen beiden Grenzen hat dann Ostwald durch Mischen der beiden Pigmente in Verhältnissen, die dem Fechnerschen Gesetz entsprechend gewählt wurden, eine 24stufige Grauskala hergestellt, deren Stufen dem Auge als wesentlich gleichwertig erscheinen sollen. Sie kann

1) Jetzt Ausgabe A in 13 Kästen 800 M., Ausgabe B auf 103 Tafeln 1000 M. (Zusatz, Juli 1919.)

unmittelbar als Photometer zur Bestimmung der Helligkeit anderer Aufstriche benutzt werden, und zwar nicht bloß für farblose Aufstriche, sondern auch für farbige. Es ist ein genialer Einfall, diese Grauskala in Form einer richtigen Leiter zu gestalten, die, über die zu prüfende farbige Fläche gelegt, mit Leichtigkeit erkennen läßt, in welchem Teil der Leiter die Sprossen heller, in welchem sie dunkler erscheinen, als der zwischen ihnen sichtbare farbige Grund.

Das vierte Stück der „Beiträge" behandelt die gesättigten Farben. Das Wesentliche seines Inhalts findet sich in dem erwähnten Aufsatze Ostwalds in dieser Zeitschrift wiedergegeben. Doch möchte ich einige Bemerkungen über den Versuch Ostwalds, eine neue Definition des Begriffs der gesättigten Farben zu geben, nicht unterdrücken. Da es sich um Körperfarben, Farbaufstriche, handelt, so kann man, wie Ostwald ganz richtig ausführt, auf keinen Fall den Grund für die Sättigungsempfindung in der Homogenität der Farbe erblicken; denn ein homogener Teil des weißen Lichtes bildet einen so geringen Bruchteil des ganzen Lichtes, daß ein Körper, der nur diesen Bruchteil remittiert, fast schwarz erscheinen müßte. Alle farbigen Pigmente remittieren ja in der Tat breite Spektralbezirke, die gelben Farbstoffe zum Beispiel, auch diejenigen von augenscheinlich großer Sättigung, das ganze Farbenhalb vom äußersten Rot bis zu seiner blaugrünen Ergänzungsfarbe. Ostwald erweitert diese Erfahrung am Gelb zu einer allgemeinen Definition der gesättigten Farben, indem er behauptet, daß zum Zustandekommen einer gesättigten Farbe das Zusammenwirken des ganzen zwischen zwei Ergänzungsfarben liegenden Gebietes von Wellenlängen notwendig und zureichend sei. Ich muß gestehen, daß mir diese Definition sehr merkwürdig erscheint. Zunächst muß man sich klar machen, welcher Art die so definierten gesättigten Farben sind, indem man sich an die Ergebnisse der Mischung von Spektralfarben erinnert, wie sie A. König und C. Dieterici erhalten haben. Im Gebiet von Rot, Orange, Gelb geben Gemische zweier Spektralfarben Mischfarben, die wieder fast reine oder gesättigte Farben sind; die Mischung von Farben aus dem mittleren Teil des Spektrums dagegen, Gelb, Grün, Blau, gibt Mischfarben, die zum Teil weit im Innern des Farbengebietes liegen, d. h. stark weißlich sind. In guter Übereinstimmung hiermit stehen auch Ostwalds eigene Messungen, wenn er findet, daß seine rot-gelben Pigmente eine hohe Reinheit, seine grünen und blauen Pigmente dagegen immer nur eine mäßige Reinheit, nicht höher als 60 Proz., besitzen. Will man nun die Sättigung dieser Farben mit der Breite ihres Remissionsgebietes in Beziehung bringen, so würde allerdings die Ausdehnung des Remissionsgebietes auf ein vollständiges Farbenhalb — wenigstens für den idealen Fall — die einzig mögliche Lösung einer derartigen Definition sein; denn jede andere Abgrenzung des Remissionsgebietes würde ja rein willkürlich sein. Aber diese Beziehung zum Remissionsgebiete scheint mir doch nicht das Wesen der Sättigung zu treffen. Jede Farbe ist durch ihren Farbenton, ihre Reinheit und ihren Graugehalt bestimmt. Die Sättigungsempfindung für einen bestimmten Farbton muß dementsprechend auch durch eine bestimmte Beziehung dieser Größen zueinander gegeben sein. Man könnte vielleicht versuchen, auf Grund des Fechnerschen Gesetzes unter Berücksichtigung des Helligkeitswertes der Farbtöne eine allgemeine Gesetzmäßigkeit für die Bedingungen der Sättigungsempfindung herzuleiten. Die praktische Herstellung dieser Bedingungen wird ja bei Farbaufstrichen allerdings immer nur durch das Zusammenwirken breiterer Farbengebiete zu erreichen sein. Daß das aber ein vollständiges Farbenhalb sein müsse, erscheint mir vielleicht möglich, aber jedenfalls nicht notwendig, und insofern halte ich die Ostwaldsche Definition für eine unbewiesene Verallgemeinerung, die mit dem Wesen der Sättigung überhaupt nichts zu tun hat, sondern höchstens mit den äußerlichen Bedingungen ihrer Herbeiführung.

Das fünfte Stück der „Beiträge" endlich ist betitelt: „Reinheit und Grau" und enthält ein außerordentlich umfangreiches experimentelles Material über die in der Praxis ausschließlich vorkommenden Farben, die „bezogenen Farben", wie Ostwald sie nennt. Der springende Punkt der Ostwaldschen Farbenlehre, der sie grundlegend von den älteren Behandlungen des Gegenstandes unterscheidet, ist ja die Ausschaltung der Intensität oder Helligkeit als eines der drei die Farbe bestimmenden Faktoren und ihre Ersetzung durch das Schwarz, sei es, daß dieses als Pigment der Farbe zugesetzt ist oder durch Kontrastwirkung in die Farbenempfindung hineinkommt, wie es bei dem von Ostwald erwähnten (diese Ztschr. **17**, 324, 1916) Experimente von Hering der Fall ist — einem Versuche, den übrigens Helmholtz schon in ganz ähnlicher Form in seiner physiologischen Optik beschrieben hat (1. Auflage, S. 281). Bei Ostwald sind also Farbton, Reinheit und Grau, oder Farbton, Weißgehalt und Schwarzgehalt die drei Bestimmungsstücke einer gegebenen Farbe. Das fünfte Stück der „Beiträge" enthält nun genaue Mitteilungen über die Auswahl der chemischen Farbstoffe, die Ostwald für die Herstellung seiner Pigmente benutzt hat, und ausführliche Rezepte für die Anfertigung der reinen Farbaufstriche und der Mischungen, mit denen sich Ostwald schließlich einen 100teiligen Farbenkreis zusammengestellt hat. Und dann folgt die absolute Reinheitsmessung dieser Farben durch die Bestimmung ihres Weiß- und Schwarzgehaltes auf dem einfachen und anschaulichen Wege der Photometrierung mit Hilfe der Grauleiter im Spektrum an den beiden Stellen, an denen die Farbe am meisten und am wenigsten Licht zurückwirft. Diese Grundlagen der Ostwaldschen Chromometrie finde ich in ihrer Einfachheit außerordentlich einleuchtend. Nicht das gleiche möchte ich von der Ersetzung der spektralen Untersuchung durch die Untersuchung mittels Farbfilter sagen. Dies Verfahren ist schon von anderer Seite (E. König, Ztschr. f. angew. Chem., 30. Jahrg., Nr. 7, S. 54) beanstandet worden. Aber es dürfte eine Frage der praktischen Erfahrung sein, wie weit die Ergebnisse dieses Verfahrens bei richtiger Wahl der Filter mit denen der spektralen Untersuchung übereinstimmen, und da mir der Verf. vorwerfen könnte, daß es mir an dieser Erfahrung fehlt, will ich mein Bedenken nur mit Vorbehalt aussprechen. Sehr interessant sind schließlich die Messungen, die Ostwald an seinem Farbenkreise über die Reinheit der einzelnen Farben und über die Neutralisationsverhältnisse und die Reinheitsverhältnisse der Ergänzungsfarben angestellt hat. Doch kann auch hierüber wieder auf den Ostwaldschen Aufsatz in dieser Zeitschrift verwiesen werden.

Das an zweiter Stelle genannte Buch ist der erste Teil eines auf fünf Teile berechneten Werkes, das die gesamte Farbenlehre umfassen soll. Die vier ersten Bände sind für die vorbereitenden Teile, nämlich die mathetische, physikalische, chemische und physiologische Farbenlehre bestimmt, während der letzte den Lehrinhalt der eigentlichen oder psychologischen Farbenlehre bringen soll. Erschienen ist bis jetzt nur der erste Teil, die mathetische Farbenlehre. Sie behandelt in 10 Kapiteln die Stellung der Farbenlehre im Gebäude der Wissenschaften, ihre Einteilung, die Ordnung der Farben, ihre Darstellung im farbgleichen Dreieck,



im Farbenkreis und im vollständigen Farbenkörper, die Arten und Gesetze der Farbenmischung, die Frage der Grundfarben, und gibt zum Schluß eine kurze Geschichte der mathetischen Farbenlehre. Die Darstellung enthält sachlich nichts prinzipiell Neues, sondern behandelt die Ergebnisse der Ostwaldschen Studien vom Standpunkte der Mathetik oder Ordnungswissenschaft, ist aber durchsetzt von einer Fülle allgemeiner Bemerkungen, besonders über die Ordnungswissenschaft und ihre Mittel, alle in der bekannten Eigenart der Ostwaldschen Denk- und Schreibweise vorgetragen, die auch Selbstverständlichkeiten gelegentlich mit dem Schein eines tiefen und funkelnagelneuen Gedankens zu umkleiden versteht.

Eine glückliche Ergänzung zu diesen „farblosen" Darstellungen der Farbenlehre bildet die zu dritt genannte kleine Farbenfibel, die den wesentlichen Inhalt der Ostwaldschen Farbenlehre in knappen, klaren Sätzen darstellt und mit 176 Farbenproben erläutert. Diese Farbenproben sind durch Handarbeit hergestellt und in die Exemplare der Fibel eingeklebt, was den hohen Preis des Büchleins (12 Mark) erklärlich macht. Die Auswahl der Farben des Farbenkreises ist von E. König beanstandet worden. Auch ich muß gestehen, daß nach meiner Empfindung in dem 24stufigen Farbenkreise ein reines Rot ebenso fehlt wie ein reines Grün, und daß die blauen Farben eigentümlich stumpf und dunkel sind. Doch ist es schwer darüber zu rechten, wenn man nicht die vollständige Auswahl aller möglichen Farben vor sich hat und über die Erfahrungen verfügt, die der Verf. auf diesem Gebiete in so reichem Maße besitzt. An die Darstellung des Farbensystems schließt die Farbenfibel noch ein kurzes Kapitel über einen Gegenstand an, der in den anderen Veröffentlichungen von Ostwald überhaupt noch nicht gestreift worden ist, über zusammengehörige Farben, Zwei-, Drei-, Vierklänge und unvollständige Klänge, die ersten Anfänge einer Lehre der Farbenharmonie. Für die Beurteilung der dabei vorgeführten Proben von passenden Farbenzusammenstellungen genügt es aber meiner Ansicht nach nicht, die als harmonisch behaupteten Zusammenstellungen dem Auge darzubieten, sondern es ist durchaus erforderlich, zugleich zu zeigen, in derselben Weise, daß Zusammenstellungen anderer Art unharmonisch wirken. Eine Ergänzung der Beispiele durch Gegenbeispiele würde das kleine Kapitel entschieden lehrreicher und erfolgreicher gestalten.

Schließlich noch einige Worte über die für die praktische Anwendung des Ostwaldschen Farbensystems grundlegende Frage nach der Sicherheit und Reproduzierbarkeit der Ostwaldschen Farbenbestimmung. Man wird, glaube ich, annehmen können, daß das weißeste Weiß und das schwärzeste Schwarz sich immer in gleicher Güte werden herstellen lassen. Damit ist die ganze Grauskala sicher festgelegt; man braucht sich dabei gar nicht darauf zu verlassen, daß die Mischung der beiden Pigmente nach genauer Vorschrift das Innehalten einer bestimmten Graunummer gewährleistet; denn für jeden Grauton, den man irgendwie herstellt, läßt sich ja seine Stelle in der Grauleiter jederzeit photometrisch feststellen. Ist aber die Grauleiter genau definiert, so ist es auch der Schwarz- und Weißgehalt jeder Farbe nach der Ostwaldschen Definition und auf Grund der vorgeschlagenen spektralen Meßmethode. Schwieriger dagegen scheint es mir mit der absoluten Sicherheit und Reproduzierbarkeit des Farbentones zu liegen. Daß hier die genauen Rezepte für die Auswahl und Herstellung der reinen Farben und ihrer Mischungen ausreichen, um aus verschiedenem Ausgangsmaterial bei wiederholten Prozessen immer genau den gleichen Farbenton zu erhalten, ist mir bei der außerordentlichen Empfindlichkeit des Auges für Farbennuancen fraglich. Andererseits aber hängt die Bestimmung des Farbentones mit Hilfe der Ergänzungsfarbe ganz von der unbedingten Unveränderlichkeit der gegebenen Musterfarben ab. Nun hat Ostwald die Farben seines hundertteiligen Farbenkreises allerdings auch durch Vergleich mit den Spektralfarben in Wellenlängen festgelegt, und man könnte daran denken, jeden Farbenton durch Vergleich mit der ihm zugeschriebenen Spektralfarbe auf seine Richtigkeit nachzuprüfen. Aber erstens versagt diese Methode bei den Purpurtönen, die im Spektrum nicht vertreten sind, und zweitens dürften sich nach meiner Ansicht bei diesen Vergleichen die subjektiven Eigentümlichkeiten des Farbensehens entschieden störend bemerkbar machen, da die gebrochenen Farbentöne doch am Ende von verschiedenen Augen etwas verschieden gesehen und nicht mit der gleichen Stelle im Spektrum identifiziert werden. In diesem Punkte scheint mir also eine Schwierigkeit des Systems vorzuliegen, und ich übersehe nicht, ob sie zu beseitigen sein wird.

Ein Nebenerzeugnis dieser Ostwaldschen Arbeiten ist das an vierter Stelle genannte Buch, ein Abschnitt aus der Geschichte der Farbenlehre. Die Auseinandersetzung mit Goethe gehört für Ostwald notwendig in den Gedankenkreis seiner Studien hinein. Denn die Größe der Absichten, die Goethe mit seiner Farbenlehre dereinst verfolgte, hat Ostwald offenbar und ganz vorbildlich für sein Unternehmen übernommen und hofft und wünscht sie auf der sicheren Grundlage der modernen Forschungsergebnisse mit besserem Gelingen zu verwirklichen, als es Goethe beschieden gewesen ist. Aber auch für die Allgemeinheit des literarisch interessierten Publikums möchte eine abermalige Auseinandersetzung mit Goethe von naturwissenschaftlicher Seite aus insofern nützlich und sogar notwendig erscheinen, als wir zurzeit das merkwürdige und betrübende Schauspiel erleben, daß eine kleine Gemeinde von Leuten, die offenbar keine Ahnung von Physik haben, sich auf die Goethesche Farbenlehre eingeschworen hat und mit dem Feldgeschrei „Hie Goethe" Sturm gegen die Physik laufen will. Ich habe darauf schon hingewiesen bei Gelegenheit der Besprechung des Aufsatzes, den A. Sommerfeld in der Deutschen Revue hat erscheinen lassen (diese Ztschr. **19**, 151, 1918). Aber freilich — Sommerfeld hat diese neumodische Krankheit mit seinem Aufsatze nicht geheilt, und auch Ostwalds Buch — darüber braucht man sich keiner Täuschung hinzugeben — wird sie nicht heilen. Bringt doch dieselbe Deutsche Revue, die Sommerfelds erfreulichen Aufsatz veröffentlichte, im Augustheft dieses Jahres einen Aufsatz von Dr. E. Barthel, der Goethes Farbenlehre als das Werk der Zukunft preist und Ostwalds Buch wegen seines ablehnenden Standpunktes kurzer Hand beiseite schiebt. Es ist unverständlich, daß eine angesehene Zeitschrift so kritiklos wissenschaftlich begründetem Urteil und laienhaftem Unverstand nebeneinander ihre Spalten öffnet. Ostwalds Buch aber wollen wir gleichwohl allen empfehlen, die sich über Goethes Farbenlehre, ihre Bedeutung und die Gründe ihres Mißerfolges unterrichten wollen. Ostwald gibt eine gründliche Darstellung des Inhalts der Farbenlehre und ihrer Entstehung, indem er die Konfession aus dem historischen Teil und wesentliche Stücke aus dem didaktischen Teil der Farbenlehre abdruckt, eingehend erläutert und die Mißverständnisse klar darlegt, die Goethe zu seiner falschen Stellungnahme gegen Newton und die physikalische Farbenlehre geführt haben. Und an diese Darstellung der Goetheschen Lehre schließt Ostwald in gleich ausführlicher

Art der Behandlung eine Darstellung der Schopenhauerschen Lehre an; er setzt in klarer Weise die Umgestaltung auseinander, die Schopenhauer den Goetheschen Ideen zuteil werden ließ, und zieht damit die Linie, die von Goethe über Schopenhauer zur modernen Heringschen Farbentheorie führt. Aber er zeigt auch, wie auch bei Schopenhauer die richtigen Anschauungen von der psychologischen Natur der Farbenwahrnehmung durch seine falsche Stellungnahme zu Newton in ihrer Wirksamkeit unterbunden worden sind. Besonders interessant ist die Darlegung des Verhältnisses von Goethe und Schopenhauer und die Wiedergabe ihres Briefwechsels, der in der Entwicklung dieses Verhältnisses die Eigenart beider Persönlichkeiten gar drastisch vor Augen führt. Daß in der Behandlung Goethes auch einige scharfe Hiebe gegen Goethes Klassizismus nicht fehlen, ist bei Ostwald selbstverständlich, soll aber für den Leser dieses Berichtes nicht unerwähnt bleiben.

W. König.

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1919.

Technische Hochschule Dresden.

Hallwachs: Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität, 5; Physikalisches Praktikum I, 6 oder 3, II, einschließlich Laboratoriumstechnik, für Fortgeschrittene, 9; Praktikum für größere physikalische Arbeiten, tägl. außer Sonnabend. — **Toepler**: Theoretische Physik I: Mechanik, 3; Optik (Fortsetzung), 2. — **Görges**: Allgemeine Elektrotechnik I, 3, II, 2; Theorie des Wechselstromes I, 2; Starkstromanlagen, mit Übungen, 2; Elektrotechnisches Praktikum I, 4; Elektrotechnische Übungen für Geübtere I, 8; Selbständige Arbeiten im Elektrotechnischen Institut, 20. — **Barkhausen**: Elektrische Meßkunde, 2; Telegraphie und Telephonie: Wissenschaftliche Grundlagen, 2; Praktikum für Schwachstromtechnik, 3 und 6; Selbständige Arbeiten auf dem Gebiete der Schwachstromtechnik, 20. — **Möllering**: Telegraphie und Telephonie, 3. — **Heubach**: Elektromaschinenbau I, 2, III, 12; Elektrotechnische Konstruktionsübungen, 8. —

F. Foerster: Experimentalchemie, 6; Anorganisch-chemisches Praktikum: Qualitative Analyse, 12, Quantitative Analyse, technische Titriermethoden, Gasanalyse, tägl. außer Sonnabend. — **Scholl**: Chemie der Benzolderivate, 3; Organisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend. — **König**: Chemie und Technologie der aromatischen Verbindungen II: Organische Farbstoffe, 4; Praktikum für Farbenchemie, 12; Praktikum für Farbenchemie bzw. Färbereitechnik, tägl. außer Sonnabend, für größere Arbeiten, ganztägig. — **Erich Müller**: Physikalische Chemie I, 3; Praktikum für Elektrochemie, 12, für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Elektrochemie und physikalischen Chemie, ganztägig. — **Lottermoser**: Experimentalchemie der Kolloide, 1. — **Steinkopf**: Organisch-technische Chemie I, 2. — **Dietz**: Die chemische Technologie der Mörtel und Zemente, 1; Die chemische Technologie des Glases, 1. —

Krause: Höhere Mathematik I, 5, Übungen, 2; Einleitung in die Theorie der Differentialgleichungen, 3; Mathematisches Seminar, 1 *g*; Seminaristische Übungen für Physiker, 1. — **Helm**: Höhere Mathematik III, 3, Seminaristische Übungen (mit Naetsch), 14tägig, 2; Theorie der Vektorfelder und des Potentials, 4. — **Ludwig**: Darstellende Geometrie I, 3, Übungen, 4, II, 2, Übungen, 4; Synthetische Geometrie 3, Übungen, 2 *g*; Seminaristische Übungen und höhere Geometrie, 1 *g*. — **Böhmer**: Versicherungsmathematik, 3, Übungen, 3; Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 2; Sphärische Trigonometrie, 2. — **Naetsch**: Höhere Mathematik II, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Flächentheorie, 1. — **Pattenhausen**: Methode der kleinsten Quadrate, 2, Übungen, 1; Höhere Geodäsie, 2, Übungen, 1; Astronomisch-geographische Ortsbestimmungen, 2, Übungen, 1; Vorübungen zu Planzeichnen, 2; Planzeichnen II, 2 und 4; Skizzieren geodätischer Instrumente, 2; Triangulierungsübungen, 4; Geodätisches Praktikum I, 4, II, 4, für Architekten, 4; Größere Geländeaufnahmen, 2 Wochen. — **Grübler**: Technische Mechanik II: Statik einschließlich graphischer Statik, 4, Übungen, 1. —

Tagesereignisse.

Am Freitag, den 6. Juni 1919, fand im Hörsaal des Physikalischen Institutes der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg die Gründungsversammlung der „Deutschen Gesellschaft für angewandte Physik" unter Anwesenheit zahlreicher Teilnehmer aus Technik und Industrie von den physikalisch-technischen Instituten sowie der Technischen Hochschule und Universität statt. Die hohe Mitgliederzahl bekundet das Interesse weitester Kreise an dieser Neugründung, die in erster Reihe die Förderung der deutschen Technik und Lösung verschiedener dringlicher Aufgaben, wie Gründung einer neuen Zeitschrift, eines Referatblattes, Förderung des physikalischen Unterrichtes an den Hochschulen usw., bezweckt.

Der erste Vorsitzende, Herr Dr. Gehlhoff, Berlin-Friedenau, Ortrudstr. 3, erteilt Auskunft und nimmt Beitrittsanmeldungen entgegen.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Marburg Dr. Karl Stuchtey für Physik, an der Technischen Hochschule Karlsruhe Professor Dr. Karl Kreutz (bisher in Straßburg) für Chemie.

Ernannt: Dr. A. H. W. Aten zum a. o. Professor für Elektrochemie und Privatdozent Dr. P. J. Wibaut zum Lektor für propädeutische organische Chemie an der Universität Amsterdam, Dr. A. J. Allmand zum Dozenten für Chemie am Kings College der Universität London.

Vom Lehramt zurück: Der Privatdozent für Chemie an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Conway Freiherr v. Girsewald.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Dresden Geheimer Rat Dr. Martin Krause (zum 1. April 1920).

Gestorben: Der ord. Professor der Chemie an der Universität Berlin Wirkl. Geheimer Rat Dr. Emil Fischer.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und **H. Th. Simon**



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 41 Mark, im Ausland 46 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 16. 15. August 1919. No. 548. **20. Jahrgang.**

Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechung, Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen.)

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 16. | 15. August 1919. Redaktionsschluß für No. 18 am 24. August 1919. | 20. Jahrgang.

INHALT:

Georg Gerland †.

In den letzten Jahren sind einige der Forscher, die seinerzeit an der Spitze der Bestrebungen standen für die Erdbebenforschung eine internationale Organisation zu schaffen, dahingegangen u. a.: Backlund, Galitzin, Helmert. Die Seele dieser Bewegung war Prof. Dr. G. Gerland, Ordinarius für Geographie in Straßburg. Auch er ist nicht mehr. Nach kurzer Krankheit verschied er am 19. Februar d. J. im Alter von 86 Jahren in Straßburg.

Die moderne Seismik ist eng mit der Physik verknüpft, daher dürfte wohl eine Notiz über den hauptsächlichsten Förderer dieser jungen Wissenschaft an dieser Stelle gestattet sein.

Zunächst studierte Gerland Sprachenvergleichung, dann beschäftigte er sich mit Arbeiten aus dem Gebiet der Anthropologie und kam dann zur Geographie. Durch die Geographie gelangte er zur geophysikalischen Forschung, im besonderen zur Seismologie.

1892—1895 gab Gerland die „Geographischen Abhandlungen aus Elsaß-Lothringen", die von ihm angeregte Arbeiten von Mitgliedern des geographischen Seminars enthalten, heraus.

Zur besonderen Förderung der Geophysik gründete er die „Beiträge zur Geophysik", deren erster Band 1887 erschien. In der Einleitung weist er ganz besonders auf die Wichtigkeit geophysikalischer Forschungen hin.

Als 1895 Dr. E. von Rebeur Paschwitz auf dem 6. internationalen Geographentag zu London die „Vorschläge zur Errichtung eines internationalen Systems von Erdbebenstationen" darlegte, war Gerland einer der eifrigsten Förderer dieser Pläne auch nach dem Tode E. v. Rebeur-Paschwitz' Oktober 1895. Ganz besonders vertrat Gerland die Forderung des Zusammenschlusses aller Länder zur Hebung seismischer Forschungen auf dem internationalen Geographentag zu Berlin 1899.

Seiner umfassenden Werbetätigkeit in Elsaß-Lothringen und im Deutschen Reiche gelang es, nach mancherlei Kämpfen die Bewilligung staatlicher Mittel für den Bau eines seismischen Observatoriums zu erreichen. Im Sommer 1899 begann der Bau, gegen Ostern 1900 war er beendet.

Dieser Bau, für die Aufstellung von Erdbebenwellenmessern verschiedener Anordnungen aufgeführt, bildet einen Teil der von Gerland 1900 begründeten „Kaiserlichen Hauptstation für Erdbebenforschung in Straßburg". Mit diesem Institut hatte er eine Zentralstelle für seismische Forschung in Deutschland geschaffen, ohne daß aber hierdurch gleichgerichtete Arbeiten anderer Erdbebenwarten und Forscher irgendwie gestört werden sollten. In Straßburg sollten nicht nur laufende seismische

Beobachtungen, sondern auch Untersuchungen, u. a. instrumenteller Natur ausgeführt werden, die in ihrer Ausdehnung umgrenzt waren von den zur Verfügung stehenden Mitteln.

Die weitere Arbeit war die internationale Zentralisation seismischer Forschung: auch in dieser Hinsicht sollte Straßburg Zentralstelle werden, hier sollten vor allem die Erdbebenbeobachtungen jeder Art aller Warten der Erde gesammelt und bearbeitet werden.

Auch dieser weitausschauende Plan gelang. Hatten im April 1901 auf der ersten internationalen seismologischen, Zusammenkunft die Vertreter einer Reihe von Ländern ihre Zustimmung zu einem engeren internationalen Zusammenschluß ausgesprochen, so wurde auf der zweiten Versammlung ebenfalls in Straßburg „die internationale seismologische Assoziation" gegründet. Sie ist nach dem Muster der geodätischen Assoziation eine Staatenvereinigung für seismische Forschung. Als Sitz des Zentralbureaus wurde Straßburg ausersehen und Gerland, dem schon die Leitung der Hauptstation für Erdbebenforschung in Straßburg übertragen war, auch die Leitung des Zentralbureaus der I. S. A. übergeben. Dies war die vollste Anerkennung seiner Bemühungen, die Straßburg zum Mittelpunkt seismischer Forschung machten.

Auch in seinem Hauptberuf als akademischer Lehrer war Gerland außerordentlich tätig.

Sein Lebensbild kann hier nur ein kurzumrissenes sein, immerhin darf nicht unerwähnt bleiben, daß Gerland musikalisch, ausübend wie schöpferisch, tätig war. Eine Anzahl seiner Kompositionen sind im Druck erschienen.

Die seismische Wissenschaft hat mit Gerland einen ihrer Ersten verloren.

Carl Mainka.

(Eingegangen 10. Mai 1919.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über ein graphisches Ausgleichungsverfahren.

Von Hans G. Schwerdt.

Es werden die n mit Fehlern behafteten Beobachtungswerte $x_1\bar{y}_1$, $x_2\bar{y}_2$, ... $x_n\bar{y}_n$ in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem (XY) als Punkte $P_1P_2 \dots P_n$ eingezeichnet. Der funktionelle Zusammenhang $y = F(x)$, der sich hier als Kurve darstellt, sei bekannt. Es ist dann nötig, zur Bestimmung der in F enthaltenen Konstanten die Punkte P auszugleichen. Auf Grund von F ergeben sich zu $x_1, x_2, \dots x_n$ die zugehörigen Werte

$$y_1 = F(x_1),\quad y_2 = F(x_2),\quad y_n = F(x_n),$$

während die Werte bzw.

$$\bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \bar{y}_n$$

beobachtet worden sind. Die Verbesserungen mögen

$$\bar{y}_1 - y_1 = z_1$$
$$— — — —$$
$$\bar{y}_n - y_n = z_n$$

bezeichnet werden. Nach der Methode der kleinsten Quadratsumme hat die Ausgleichung so zu erfolgen, daß

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n = \Sigma z = 0 \quad (1)$$

und

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = \Sigma z^2 = \text{Minimum} \quad (2)$$

werden.

In den meisten Fällen nimmt der Techniker die Ausgleichung graphisch vor. Mit der Schwunglatte wird nach Gutdünken eine möglichst „glatte" Kurve so gelegt, daß sie an allen Punkten möglichst dicht vorbeigeht. Es bedarf wohl keines besonderen Hinweises, daß eine solche Kurve mit „optischer Berechtigung" in den seltensten Fällen den Bedingungen (1) und (2) auch nur annähernd gerecht wird. Ist der

funktionelle Zusammenhang zwischen x und y linear, d. h. ist F eine Gerade, so ist ein einfaches graphisches Verfahren anwendbar, das die Ausgleichung unter Berücksichtigung von (1) und (2) ermöglicht.

Im folgenden soll auch für den allgemeinen Fall, in dem $F(x)$ eine beliebige (aber bekannte) Funktion ist, eine graphische Ausgleichung nach den Grundsätzen der Gaußschen Methode entwickelt werden. Dazu erscheint es nötig, zunächst die von Mehmke angegebene Ausgleichung für die lineare Funktion im Umriß wiederzugeben.

Ist die Gleichung der Geraden

$$y = ax + b;$$

so folgt nach (1) aus

$$\Sigma z = \Sigma \bar{y} - a\Sigma x - nb = 0$$

die Gleichung

$$\frac{\Sigma \bar{y}}{n} = a\frac{\Sigma x}{n} + b.$$

Hier sind

$$X = \frac{\Sigma x}{n} \text{ und } Y = \frac{\Sigma \bar{y}}{n}$$

die Koordinaten des Schwerpunktes S der mit gleichem Gewicht vorausgesetzten Beobachtungspunkte $P_1, P_2, \ldots P_n$.

„Die Bedingung (1) wird mithin von jeder durch S gehenden Geraden erfüllt". (3)

Man legt nun durch S eine beliebige Gerade, die der gesuchten dem Augenschein nach möglichst nahe kommt. Sie schneidet die Abszissenachse in T_1. Mißt man für jeden Punkt P die Strecke z, bildet Σz^2 und trägt diesen Wert als Ordinate über T_1 auf, so erhält man einen Punkt H_1. Dieselbe Konstruktion führt man für eine weitere Anzahl von Geraden aus, etwa für 4 bis 5. Durch die Punkte H_1, H_2 usw. läßt sich eine parabelähnliche Hilfskurve legen, die bei der richtigen Wahl der Versuchsgeraden ein Minimum zeigt.

„Verbindet man den zu diesem Minimum gehörigen Punkt T mit S, so erhält man die ‚wahrscheinlichste Gerade', die der Bedingung (2) genügt". (4)

Anstatt auf der Abszissenachse können die Punkte T auf einer beliebigen Schnittgeraden gewählt werden; ebenso ist es möglich, statt z jeweils den Abstand z' jedes Punktes von der Geraden zu messen, der sich von z nur durch einen längs der Geraden konstanten Faktor unterscheidet. Dieser geht aber in die Bedingungen (1) und (2) nicht ein.

Um die späteren Zeichnungen nicht unübersichtlich zu gestalten, ist die eben beschriebene Konstruktion in Fig. 1 an einem Beispiel ausgeführt worden:

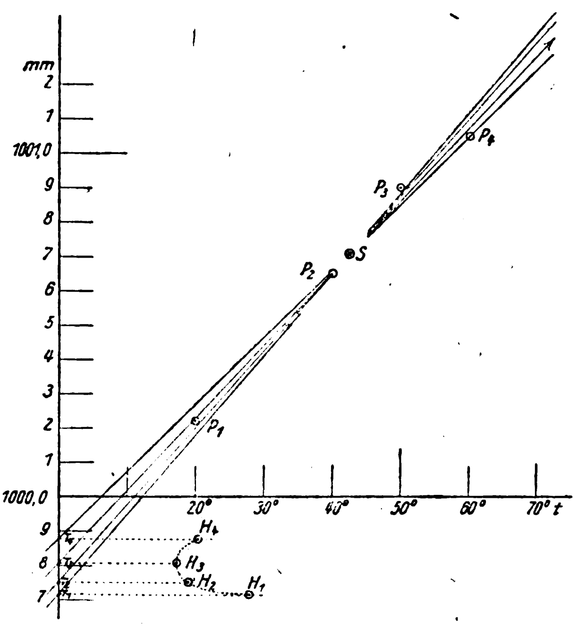


Fig. 1.

Die Länge eines Meterstabes wird bei den Temperaturen

$t = 20^0$ 40^0 50^0 60^0

zu

$l = 1000{,}22$ $1000{,}65$ $1000{,}90$ $1001{,}05$ mm

gemessen. Die Wertepaare (t, l) werden als Punkte in Millimeterpapier eingezeichnet. Die Wahl der Maßstäbe für t und l ist so erfolgt, daß einerseits die erreichte Beobachtungsgenauigkeit von l zur Geltung kommt, andererseits die Gerade $(P_1) \ldots (P_4)$ eine Neigung von ungefähr 45^0 erhält, da die Verteilung der Ablesefehler in der Zeichnung dann zu einem Optimum wird. In dem der Fig. 1 zugrunde liegenden Original entsprechen den Intervallen

$$l = 1 \text{ mm und } t = 10^0$$

die Strecken

$$10 \text{ cm und } 2 \text{ cm.}$$

Als Schwerpunkt von $P_1 \ldots\ldots P_4$ ergibt sich S. Die Hilfskurve läßt bei H_3 ein Minimum erkennen, zu dem die Gerade ST_3 gehört, deren Gleichung

$$l = 999{,}805 + 0{,}0212\,t$$

aus dem Blatt direkt abgelesen werden kann.

Es ist bekannt, daß man bei geeigneter Wahl des Koordinatenpapiers[1]) jede beliebige Funktion $F(x)$ als Gerade darstellen kann. Es sei an die logarithmischen Papiere erinnert, die die parabolischen Kurven $y = ax^b$, die halblogarithmischen Papiere, die die Exponentialkurven $y = ae^{bx}$ durch gerade Linien dar-

1) Vgl. z. B. M. Pirani, Graph. Darst. in Wissenschaft u. Technik, Sammlung Göschen 728, Berlin 1914, S. 41—56.

stellen. Die Parabeln $y = ax^2 + bx$ werden dadurch, daß man $\frac{y}{x}$ als Ordinaten zu x aufträgt, in Gerade verwandelt[1]). In allen den angeführten Fällen würde es fehlerhaft sein, die Ausgleichung etwa in der oben beschriebenen Weise durchzuführen. So würde die Konstruktion auf logarithmischem Papier die Konstanten a und b der „Geraden" $y = ax^b$ so ausgleichen, daß

$$(\bar{y}_1\ \bar{y}_2 \ldots \bar{y}_n) = a^n (x_1 \cdot x_2 \ldots . x_n)^b$$

besteht, eine Beziehung, die weder (1) noch (2) erfüllt. Zur Herleitung eines Ausgleichungsverfahrens auf den sogenannten Funktionspapieren ist es nötig, diese Darstellung von $y = F(x)$ kurz zu erörtern. Ihre Gesetze sind in einer früheren Arbeit behandelt worden[2]).

Man denke sich F zunächst als Kurve in einem regulären Koordinatennetz E. Trägt man in einem anderen Koordinatensystem E nicht x und y, sondern Funktionen von ihnen als Abszissen ξ und Ordinaten η auf, so kann bei geeigneter Wahl dieser Funktionen ξ und η stets erreicht werden, daß das Bild von $y = F(x)$ nun geradlinig ist. Das Blatt E ist auf das Blatt E abgebildet worden (Anamorphose). Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Bei der geometrischen Anamorphose ist

$\xi = u(x)$ Funktion von x allein,
$\eta = v(y)$ „ „ y „ ,

d. h. die Koordinatenlinien sind in ihrer Paralleleneigenschaft invariant geblieben. In dieser Weise ist die Mehrzahl der im Handel befindlichen Funktionspapiere hergestellt.

Bei der allgemeinen Anamorphose wird auf die Paralleleninvarianz verzichtet:

$$\xi = u(x, y),$$
$$\eta = v(x, y).$$

Die Koordinatenlinien transformieren sich in Kurven. Die oben erwähnte Darstellung von $\frac{y}{x}$ über x gehört zu dieser Art von Abbildungen.

Läßt sich $y = F(x)$ in der Form

$$y = a \cdot f(x) + b$$

schreiben, so trägt man $\eta = y$ als Ordinaten zu $\xi = f(x)$ auf. Es ist ersichtlich, daß in diesem Falle das Verfahren (3) und (4) ohne weiteres angewendet werden darf:

„Auf allen Funktionspapieren mit regulärer y-Teilung wird in gewöhnlicher Weise ausgeglichen". (5)

Dies gilt beispielsweise für das Hartmannsche Dispersionspapier und das halblogarithmische Netz, wenn es zur Darstellung logarithmischer Gesetze $y = a \cdot \log x + b$, nicht aber exponentieller Gesetze $y = a \cdot e^{bx}$ dient.

Der Fall der geometrischen Anamorphose läßt sich nun wie folgt erledigen: Die Abbildung erfolge durch

$$\xi = u(x)$$
$$\eta = v(y).$$

Die Koordinaten des Punktes x, $\bar{y}$ in E sind $\xi = u(x)$, $\bar{\eta} = v(\bar{y})$. Mit Taylors Reihe kann man entwickeln $\eta = v(y) = v(\bar{y} - z)$

$$\eta = v(\bar{y}) - z \cdot v'(\bar{y}) + \frac{z^2}{2} v''(\bar{y}) - \ldots\ldots$$

Nimmt man an, daß die Größen z hinreichend klein sind, so kann man die Reihe nach dem zweiten Gliede abbrechen. Bezeichnet man

$$\zeta = \bar{\eta} - \eta,$$

so ist

$$\zeta = z \cdot v'(\bar{y}).$$

Es ist

$$z = \frac{1}{v'} \cdot \zeta,$$
$$\zeta = \bar{\eta} - a\xi - b \qquad (6)$$

$$z_1 = \frac{1}{v'}\zeta_1 = \bar{\eta}_1 \frac{1}{v'(\bar{y}_1)} - a \cdot \xi_1 \frac{1}{v'(\bar{y}_1)} - b \frac{1}{v'(\bar{y}_1)}$$

— — — — — — — — — — — — —

$$z_n = \frac{1}{v'}\zeta_n = \bar{\eta}_n \frac{1}{v'(\bar{y}_n)} - a \cdot \xi_n \frac{1}{v'(\bar{y}_n)} - b \frac{1}{v'(\bar{y}_n)}$$

$$\Sigma z = \sum \frac{\bar{\eta}}{v'} - a \cdot \sum \frac{\xi}{v'} - b \cdot \sum \frac{1}{v'}$$

Wegen (1) folgt hieraus:

$$\frac{\sum \frac{\bar{\eta}}{v'}}{\sum \frac{1}{v'}} = a \cdot \frac{\sum \frac{\xi}{v'}}{\sum \frac{1}{v'}} + b.$$

Hierin sind

$$\frac{\sum \frac{\bar{\eta}}{v'}}{\sum \frac{1}{v'}} \quad \text{und} \quad \frac{\sum \frac{\xi}{v'}}{\sum \frac{1}{v'}}$$

die Koordinaten des Schwerpunktes S, wenn jeder Punkt P mit dem Gewicht $\frac{1}{v'}$ versehen ist.

„Der Bedingung (1) genügt jede Gerade durch den Schwerpunkt S der mit den Gewichten $\frac{1}{v'}$ versehenen Punkte P". (7)

Auf logarithmischem Papier gestaltet sich die Konstruktion hiernach sehr einfach.

1) Vgl. Gümbel, Jahresbericht d. Schiffsbautechn. Gesellschaft 14, 491, 1913.
2) Schwerdt, diese Zeitschr. 18, 45ff., 1917.

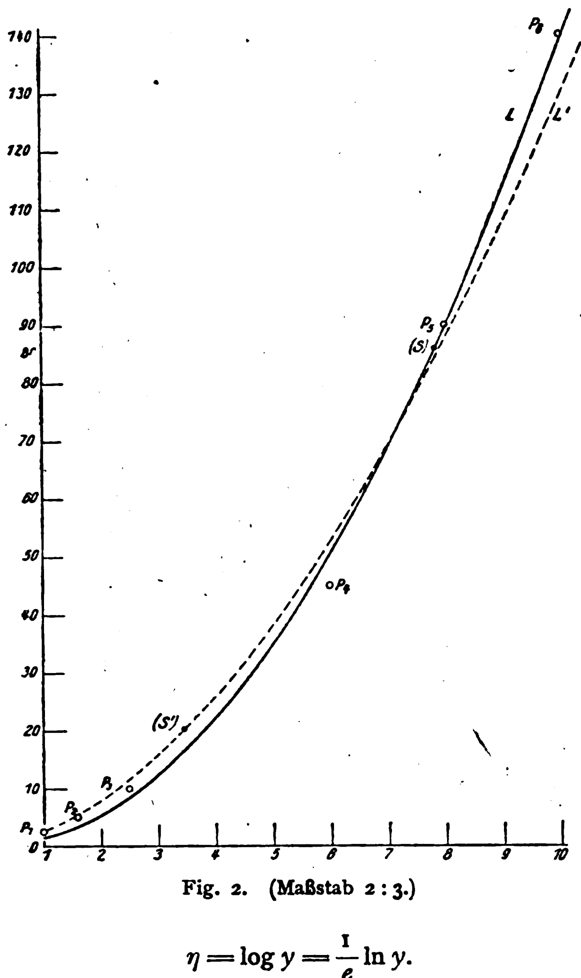


Fig. 2. (Maßstab 2 : 3.)

$$\eta = \log y = \frac{1}{e} \ln y.$$

Von dem nach der Differentiation bleibenden Faktor $\frac{1}{e}$ kann, wie oben, abgesehen werden, so daß aus $v' = \frac{1}{y}$ folgt:

„Auf Papieren mit logarithmischer Ordinatenteilung ist jeder Punkt mit einem Gewicht gleich dem Numerus seiner Ordinate zu versehen". (8)

Was das Verfahren (4) anbetrifft, so ist es nun möglich, den Betrag z an der Funktionsteilung unmittelbar abzulesen. Es kann aber vorkommen, daß man die Funktionsteilungen für ξ und η nicht vollständig ausgeführt hat. Sind beispielsweise in $y = a x^b$ die Werte x und y auf vier Stellen genau bekannt, so reicht die Einheit des handelsüblichen logarithmischen Papieres nicht aus, die Genauigkeit der Messungen auszunutzen. Man wird dann unter Umständen die logarithmische Einheit gleich 1 m wählen und nach einer Tabelle die Werte $\log x$ und $\log y$ in gewöhnlichem Millimeterpapier eintragen. In einem solchen häufig vorkommen-

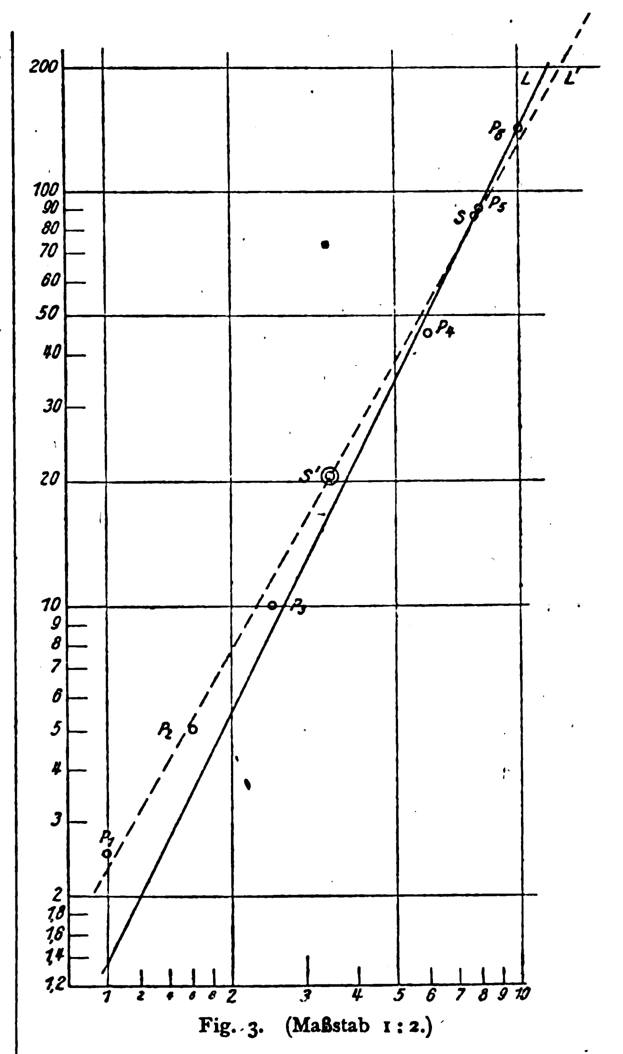


Fig. 3. (Maßstab 1 : 2.)

den Falle lassen sich die Beträge z also nicht aus der Ordinatenteilung entnehmen. Es sind dann die Abstände ζ jeweils mit $\frac{1}{v'}$ zu multiplizieren. Man kann sagen, der Maßstab der Ordinaten ändert sich mit η, d. h. also mit y.

„Um der Bedingung (2) zu genügen, liest man die Zuschläge z entweder direkt an der Funktionsteilung ab, oder man multipliziert jedes ζ mit dem zugehörigen $\frac{1}{v'}$, bildet $\sum\left(\frac{\zeta}{v'}\right)^2$ und verfährt dann nach (4)". (9)

An einem Beispiel der parabolischen Funktion $y = a \cdot x^b$ sollen die vorstehenden Ausführungen erläutert werden. Die Konstanten a und b sollen aus den Beobachtungswerten ermittelt werden (Fig. 2):

$x =$	1,0	1,6	2,5	6,0	8,0	10,0
$y =$	2,5	5,0	10	45	90	140

In logarithmischem Papier (Fig. 3) ergeben sich

die Punkte: $P_1, P_2, \ldots P_6$. Zur Bestimmung des Schwerpunktes S ist gemäß (8)

P_1 mit dem Gewicht 2,5
P_2 " " " 5,0
— — — — — — — —
P_6 mit dem Gewicht 140,0

anzusetzen. Dann legt man durch

$$S(x = 7,8;\ y = 86)$$

eine Anzahl von Versuchsgeraden. Die Abstände z können an der y-Teilung links abgelesen werden. Nach Verfahren (4) ergibt sich dann die Gerade L.

$$\eta = 2{,}01 \cdot \xi + \log 1{,}36$$
$$\underline{y = 1{,}36 \cdot x^2}.$$

Hätte man die Ausgleichung ohne Berücksichtigung der Gewichte vorgenommen, so hätte sich $S'(x = 3{,}45;\ y = 20{,}5)$ ergeben und nach (4) L'

$$y = 2{,}3 \cdot x^{1{,}75}.$$

Aus der Fig. 2, in die die Kurven L und L' eingezeichnet sind, ist ersichtlich, daß L' der Bedingung (1) nicht genügt.

Es soll nun der Fall der allgemeinen Anamorphose behandelt werden.

Die durch

$$\xi = u(x, y)$$
$$\eta = v(x, y)$$

bewirkte Abbildung von E auf E führt die x-Linien ($y = \text{const}$) und y-Linien ($x = \text{const}$) in die Kurvenscharen über, die Fig. 4 andeutet. Der Beobachtungswert $x, \bar{y}$ erscheint als Punkt P mit den Koordinaten

$$\xi = u(x, \bar{y})$$
$$\bar{\eta} = v(x, \bar{y}).$$

Es sei Q der Punkt, der nach erfolgter Ausgleichung zum selben ξ gehört. Seine Koordinaten sind (Fig. 4) mit Rücksicht auf $y = \bar{y} - z$

$$\xi = u(x + h;\ \bar{y} - z)$$
$$\eta = v(x + h;\ \bar{y} - z).$$

Entwickelt man η nach der Taylorschen Reihe und vernachlässigt die höheren Potenzen von h und z, so ergibt sich

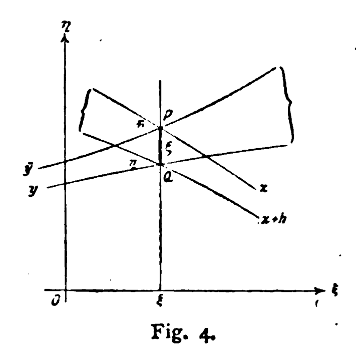


Fig. 4.

$$\eta = v(x, \bar{y}) + \frac{\partial v}{\partial x} h - \frac{\partial v}{\partial y} z + \ldots\ldots$$

$$\bar{\eta} - \eta = \zeta = \frac{\partial v}{\partial y} z - \frac{\partial v}{\partial x} h.$$

Hierin sind, wie im folgenden, die partiellen Ableitungen stets für den Punkt $(x, \bar{y})$ zu bilden. Der Zuwachs h läßt sich bestimmen, da ξ von P zu Q konstant geblieben ist, aus

$$d\xi = \frac{\partial u}{\partial x} h - \frac{\partial u}{\partial y} z = 0.$$

Hieraus findet man

$$h = z \cdot \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}},$$

$$\zeta = z \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \right).$$

Schreibt man die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{M},$$

so wird

$$z = \zeta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot M.$$

Hierin ist nach dem Reziprozitätssatz

$$M = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Nach einem Satze von Jacobi[1]) ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot M = \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\underline{z = \zeta \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}}. \qquad (10)$$

„Um der Bedingung (1) zu genügen, ist zur Bestimmung des Schwerpunktes jeder Punkt mit dem Gewicht $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ zu versehen". (11)

„Um die Σz^2 zu einem Minimum zu machen, sind die mit $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ multiplizierten Abstände ζ bei der Quadratbildung in Rechnung zu setzen". (12)

Durch Spezialisierung der Funktionen u und v müssen sich aus dem Endergebnis die bisherigen Sätze ablesen lassen.

1) Werke III, S. 385ff., § 8.

Die η-Achse ist regulär geteilt, die ξ-Achse ist beliebig.

$$\eta = y$$
$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = 1$$
$$z = \zeta. \tag{5a}$$

Die η-Achse trägt eine Funktionsteilung von y allein:

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{dy}{d\eta} = \frac{1}{v'}$$
$$z = \zeta \cdot \frac{1}{v'}. \tag{6a}$$

In dem oben erwähnten Falle

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{x} \tag{13}$$

kann (10) angewendet werden, $\frac{\partial y}{\partial \eta} = x$:

„In der Darstellung $\frac{y}{x}$ über x erhält jeder Punkt das Gewicht, das seine Abszisse angibt". (14)

Die Ausgleichung in allgemeiner Anamorphose soll an dem Beispiel der Wurfparabeln

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{x^2}{a \cdot \cos^2 \varphi},$$

ausgeführt werden. Um das Verfahren an zwei verschiedenen Darstellungsarten zu zeigen, soll a als bekannt, im folgenden gleich 10 vorausgesetzt werden. Es bleibt dann nur noch übrig, eine Konstante zu ermitteln, nämlich φ. Die durch den Nullpunkt gehende Kurve soll so gelegt werden, daß Bedingung (1) erfüllt ist.

A. a. S.[1]) ist für die Wurflinien mit konstantem a ein Koordinatennetz entworfen worden, das jede Parabel in ihre Nullpunktstangente überführt:

$$\xi = x$$
$$\eta = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - ay - x^2},$$

oder (15)

$$x = \xi$$
$$y = -\frac{1}{a}\xi^2 - \frac{1}{a}\eta^2 + \eta.$$

Für $a = 10$ ist in Fig. 6 das zugehörige Netz entworfen worden.

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = 1 - \frac{2}{a}\eta.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = -\frac{2}{a} \cdot e,$$

wenn

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} - ay - x^2} = e$$

gesetzt wird. e ist der Abstand eines Punktes P von der Geraden $\eta = \frac{a}{2}$, der horizontalen Symmetrieachse des Koordinatennetzes. Unter Vernachlässigung des konstanten Faktors $-\frac{2}{a}$ ergibt sich

$$\underline{z = \zeta \cdot e.}$$

„In der durch (13) bewirkten Anamorphose hat zur Erledigung von (1) jeder Punkt ein Gewicht zu erhalten, das dem Abstande des Punktes von der Geraden $\eta = \frac{a}{2}$ gleich ist". (16)

Man erkennt, daß in der Nähe dieser Geraden eine kleine Änderung von y eine ver-

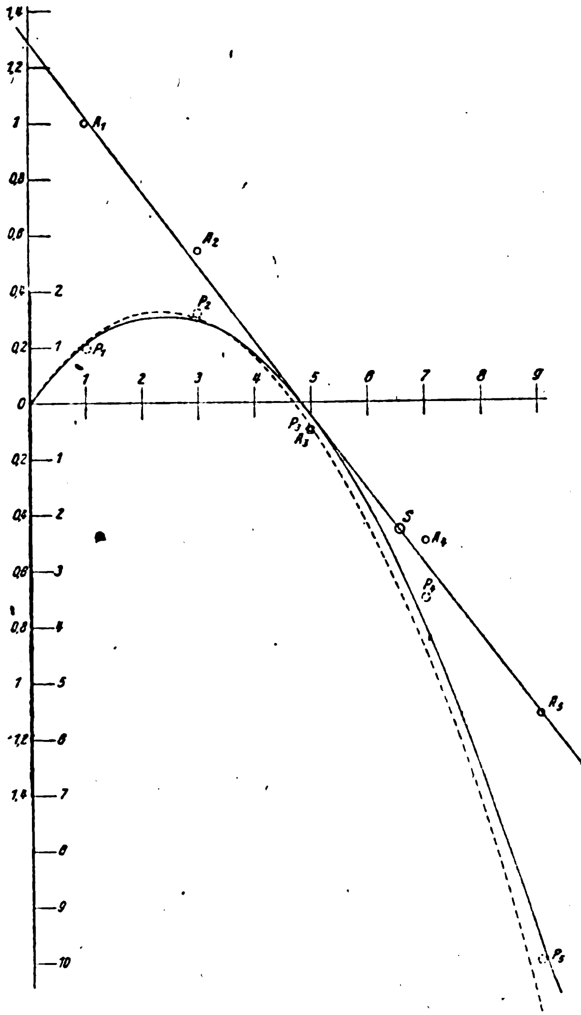


Fig. 5. (Maßstab 1 : 3.)

1) l. c. S. 50.

hältnismäßig große Änderung von η nach sich zieht. Die Punkte in der Nähe von $\eta = \frac{a}{2}$ sind also mit einer gewissen Unsicherheit behaftet. Das Verfahren trägt diesem Umstande dadurch Rechnung, daß es diese Punkte mit einem nur sehr kleinen Gewicht eingehen läßt. Eine Beobachtungsreihe bei $a = 10$ hat ergeben:

$$\begin{array}{llllll} x = 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ y = 1 & 1{,}6 & -0{,}5 & -3{,}5 & -10 \end{array}.$$

In regulärer Darstellung ergeben sich in Fig. 5 die Punkte $P_1 \ldots P_5$. Auf demselben Blatt sind die Punkte $A_1 \ldots A_5$ nach Art des Verfahrens (13) eingezeichnet. Gemäß (14) ist

A_1 mit dem Gewicht 1,
A_2 „ „ „ 3,
— — — — — — —
A_5 mit dem Gewicht 9

zu versehen.

Als Schwerpunkt ergibt sich S. Da zwischen den beiden Konstanten der Geraden hier eine Relation besteht, so ist durch die Koordinaten des Schwerpunktes die Lage der Geraden festgelegt; es ergibt sich:

$$y = 1{,}28\,x - 0{,}264\,x^2$$
$$\varphi = 52^0.$$

In der Darstellung nach (15) ergeben sich die Punkte $P_1 \ldots P_5$ in Fig. 6. Hier sind auf Grund von (16) den Punkten die Gewichte zu erteilen, bzw.:

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
3,7	0	2,1	3,2	6,6

Der in dieser Weise bestimmte Schwerpunkt ist S. Die Gerade OS gibt in guter Übereinstimmung mit den oben gefundenen Werten

$$y = 1{,}27\,x - 0{,}262\,x^2$$
$$\varphi = 51{,}8^0.$$

Der ohne Rücksicht auf die Gewichtsverhältnisse bestimmte Schwerpunkt S' würde die stark abweichende fehlerhafte Gleichung

$$y = 1{,}33\,x - 0{,}277\,x^2$$
$$\varphi = 53^0$$

liefern.

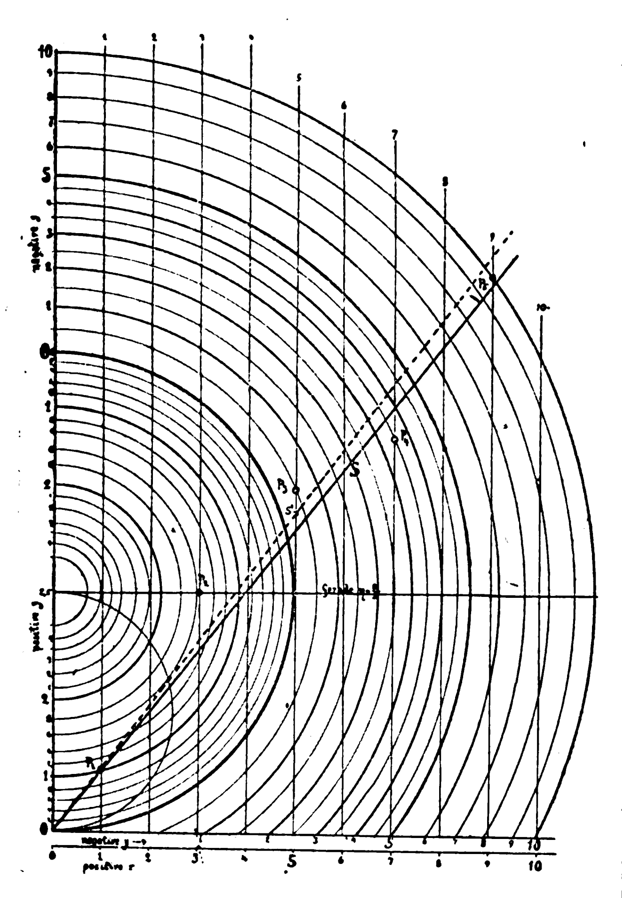


Fig. 6. (Maßstab 1 : 3.)

Zusammenfassung.

Nach Angabe eines bekannten graphischen Ausgleichungsverfahrens für reguläre Millimeterpapiere wird zunächst die Ausgleichung in geradlinigen Funktionspapieren mit parallelen Koordinatenlinien, sodann auch in krümmlinigen Koordinatennetzen auf jene eingangs besprochene Konstruktion zurückgeführt. Dabei zeigt sich, daß die Bedingung, das arithmetische Mittel zu Null zu machen, von jeder Geraden durch den Schwerpunkt S erfüllt wird, wenn zu dessen Bestimmung die Beobachtungspunkte mit geeignetem Gewicht versehen werden. Dieses ist auf jedem Papier von Punkt zu Punkt angebbar:

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

Zur Bildung der Quadratsumme ist jeder Abstand ζ mit derselben Größe zu multiplizieren. An einigen Beispielen werden die Verfahren erläutert.

Berlin-Schöneberg, April 1919.

(Eingegangen 8. Mai 1919.)

Über den Sehraum.

Von Hans Witte.

Fünfte Mitteilung: Die Raumbedingung.

1.

Der Mond sieht so groß aus wie ein Teller. Wenn er hoch steht, wie ein kleiner Teller, wenn er tief steht, wie ein mittelgroßer bis großer

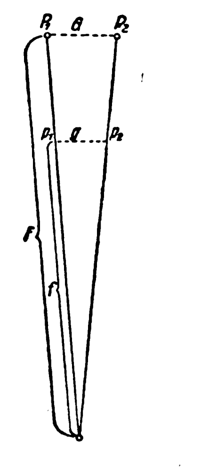
Teller. Im Durchschnitt wie ein Teller von 20 cm Durchmesser. Sonne, Sterne, Sternbilder, Kometen, Feuerkugeln, andere Himmelserscheinungen ähnlich[1]).

Diese Tatsache wollen wir erklären. Wir wollen sie in Zusammenhang bringen mit dem räumlichen Sehen überhaupt. Insbesondere wollen wir prüfen, ob sie etwas mit der Annahme eines „Sehraums“ zu tun hat.

Sehen wir den Mond deshalb wie einen Teller, weil wir ihn in einem Sehraum sehen? Gibt es überhaupt einen Sehraum? Wie ist dieser Sehraum beschaffen?

2.

Von einem Sehraum fordert man, daß er im geometrischen Sinne ein Abbild des wahren Raumes sei. Die Forderung besagt Folgendes. Jeder Punkt P des wirklichen Raumes erscheint auf seinem Sehstrahl[2]) nach einwärts geschoben (p). Die scheinbare Entfernung $Ap = f$ des Punktes vom Auge A ist kleiner als die wirkliche Entfernung $AP = F$. Dann soll auch die scheinbare Größe $p_1 p_2 = g$ eines Gegenstandes kleiner sein als die wahre Größe $P_1 P_2 = G$, und zwar nach einfachen geometrischen Sätzen im selben Verhältnis kleiner (vgl. die Figur):



$$\frac{g}{G} = \frac{f}{F}$$

$$\frac{\text{Sehgröße}}{\text{wahre Größe}} = \frac{\text{Sehferne}}{\text{wahre Entfernung}} \qquad (1)'$$

Diese Verhältnisgleichung ist die eigentliche Grundgleichung des Sehraums. Herr v. Sterneck[1]) und andere nennen sie den Sehwinkelsatz, weil der scheinbare Sehwinkel $p_1 A p_2$ derselbe bleibt wie der wahre Sehwinkel $P_1 A P_2$. Ich hatte sie zuerst Sehwinkelaufhebungssatz genannt[2]), weil sie bewirkt, daß mit zunehmender wahrer Entfernung die Sehgröße nicht so schnell abnimmt wie der Sehwinkel (dies war für uns Physiker besonders bemerkenswert, denn die Physik nannte bisher gerade den Sehwinkel scheinbare Größe). In meiner zweiten und dritten Mitteilung habe ich das Gesetz in Worten ausgesprochen

„Je näher, umso kleiner“.

D. h. je näher (Ap_1) die Füllung $P_1 P_2$ eines Sehwinkels $P_1 A P_2$ gesehen wird, umso kleiner ($p_1 p_2$) soll sie gesehen werden. Von jetzt an möge das Gesetz kurz die Raumbedingung heißen. Denn nur wenn diese Raumbedingung besteht, schließen sich Sehferne f und Sehgröße g zu einem Sehraum im euklidischen Sinne zusammen.

3.

Gerade diese Raumbedingung läßt sich nun[3]) für den Mond und alles, was nach seiner Weise gesehen wird, augenscheinlich nicht erfüllen. Es erscheint unmöglich, solche kleinen Sehgrößen g mit passenden Sehfernen f zu einem Sehraum zusammenzuschließen. Die Schwierigkeit liegt in den Zahlen für die Sehfernen.

Setzt man in die Raumbedingung

$$f = \frac{F}{G} \cdot g \qquad (1)$$

für F die wahre Mondentfernung 400000 km, für G die wahre Mondgröße 3600 km, und dazu für g den Höchstwert der Mondsehgröße $g = 40$ cm, so kommt als Höchstwert der Mondsehferne f

$$f = 44 \text{ m}. \qquad (2)$$

Entsprechend für Sonne, Sterne, usw. Die fernsten Dinge müßten in einer scheinbaren Entfernung von 44 m gesehen werden; die äußerste Fernausdehnung des Sehraums müßte 44 m betragen; in eine Kreisfläche vom Halbmesser 44 m um den Beobachter herum müßte der ganze Sichtbereich der Erdoberfläche zusammengepreßt erscheinen. Und zwar wohlgemerkt, auch bei hellen Tagen, unter vollkommen durchschnittlichen Umständen.

Das wirkt in der Tat unwahrscheinlich. Man kann verstehen, wenn die Fachwissenschaft die-

1) H. Witte, diese Zeitschr. **19**, 142, 1918; **20**, 61, 114, 126, 1919.

2) Bis auf weiteres werde angenommen, daß der Beobachter ein Auge schließt und nur mit dem anderen sieht. Das rechte sei geschlossen, das linke sehe.

1) R. v. Sterneck, Der Sehraum auf Grund der Erfahrung. Leipzig 1907.

2) Vorläufige Mitteilung, diese Zeitschr. **19**, 142, 1918.

3) Vgl. zum folgenden wieder vorläufige Mitteilung, a. a. O.

sen Preßraum niemals ernstlich ins Auge gefaßt hat.

4.

Versucht man nun von der anderen Seite aus, d. h. den Sehfernen, den Sehraum zu bestimmen, so kommt man auf neue Schwierigkeiten. Hier muß man sich mit dem Sehraum auseinandersetzen, den Herr v. Sterneck[1]) aus Entfernungsschätzungen errechnet hat. Der Sterneck sche Sehraum weist für die Sehfernen Werte auf, die wohl der Durchschnittserfahrung entprechen mögen. Das Höchstmaß seiner scheinbaren Entfernungen beträgt (im Durchschnitt) 10 km, der wahre Raum erscheint hier nur in den recht großen Kreis von 10 km Halbmesser zusammengezogen. Aber nun passen die Sehgrößen nicht.

Setzt man in die Raumbedingung

$$g = \frac{G}{F} \cdot f \qquad (1)$$

wieder Mondgröße $G = 3600$ km, Mondentfernung $F = 400000$ km, und jetzt Mondsehferne $f = 10$ km, so kommt für die Mondsehgröße g

$$g = 90 \text{ m}. \qquad (3)$$

Der Mond müßte 90 m groß aussehen, also wie ein Kirchturm aus nächster Nähe; die Venus so groß wie ein Wagenrad; usw.

Diese unheimlichen Sehgrößen widersprechen abermals jeder Erfahrung.

5.

Man kommt also mit der Raumbedingung nicht durch, weder von der einen, noch von der anderen Seite. Daher erscheint es nötig, auf die Raumbedingung zunächst zu verzichten. Das heißt, man löst den Zusammenhang zwischen Sehferne und Sehgröße und unterzieht jede von beiden getrennt einer neuen Untersuchung.

6.

Durchführen läßt sich diese neue Untersuchung zunächst nur für die Sehgröße. Wie groß Dinge „aussehen", dafür haben die meisten Menschen ein unmittelbar erlebtes Maß. Besonders Ungelehrte geben vollkommen treffsicher an: Der Kirchturm da hinten sieht so groß aus wie ein Bleistift, die Scheune so groß wie eine Streichholzschachtel, der Mensch da auf der Brücke so groß (mit den Fingern gezeigt), usw.

Mißt man auf solche Weise mit unbefangenen Versuchspersonen die Sehgrößen beliebiger, beliebig entfernter Gegenstände aus, so gewinnt man eine Gesamtheit von Verkleinerungsziffern, die sich über den ganzen Raum vom Beobachter bis ins Unendliche erstreckt. Sie macht im ganzen einen leidlich gesetzmäßigen Eindruck; und als Abschluß reihen sich die fraglichen Mond- und Sternverkleinerungen leidlich befriedigend an.

1) a. a. O.

7.

Die Sehfernen bleiben dabei außer Betracht. Ob sie verkürzt erscheinen, ob nicht, bleibt dahingestellt. Die Entfernungserstreckungen können unbeschadet der Sehgrößenverkleinerungen so erlebt werden, wie sie in Wahrheit sind. Ja auch die wahren Größen der Dinge kann der Beobachter ruhig wissen. Er kann den Raum im ganzen nach allen Ausdehnungen so erleben, wie er in Wirklichkeit ist, sowohl nach den Entfernungen, wie nach den Größen, nur lagert sich über dies Wissen ein zweites Erleben, und dies Erleben betrifft nur die scheinbaren Größen. Jedem Dinge, das man sieht, ist außer seiner gewußten oder geschätzten wahren Größe gewissermaßen wie eine Marke noch eine Verkleinerungsziffer angeheftet. So groß „sieht das Ding aus".

8.

Es kann nicht bezweifelt werden, daß wir im allgemeinen die Außenwelt mit diesen Zahleneindrücken sehen.

Wir wissen oder schätzen die wahren Entfernungen. Wir wissen oder schätzen die wahren Größen. Außerdem erleben wir noch die Verkleinerungseindrücke nach Art der Streichholzschachtelscheune oder des Tellermondes, diese aber nur für die Größen, nicht für die Entfernungen. Für die Entfernungen besteht ein zahlenmäßig entsprechender Verkleinerungseindruck (44 m und darunter) als selbständiges, bewußtes Erlebnis nicht.

9.

Nach dem Forscher, der zuerst die scheinbaren Größen von den scheinbaren Entfernungen löste und das Nebeneinander von gewußten wahren Abmessungen und erlebten Verkleinerungsmaßen der Sehgröße erkannte, habe ich dies Raumgemisch den Laqueurschen Sehraum genannt.

Der nächste Aufsatz wird die mathematischen Grundgesetze des Laqueurschen Sehraums feststellen[1]).

1) Ich verlasse hiermit den Bereich derjenigen Untersuchungen, die durch unmittelbare Anregung und Mitarbeit Herrn E. Laqueurs entstanden sind. Dem Arzt und Freund, der mir uneigennützig den dankbaren Stoff überließ und damit sein Ziel erreichte, mich nach schwerster Kopfverwundung wieder geistig arbeitsfähig zu machen, danke ich nochmals herzlich.

Wolfenbüttel (Technische Hochschule Braunschweig), im April 1919.

(Eingegangen 5. Mai 1919.)

Universalröhreninstrumentarium.

Von Eugen Nesper und Paul Floch.

(Mit Tafel XIII.)

A. Bisherige Hochfrequenzerzeuger für Meßzwecke und deren Mängel.

Für alle Hochfrequenzuntersuchungen und -messungen wird eine Stromquelle benötigt, welche einen möglichst konstanten Hochfrequenzstrom gleichmäßiger und tunlichst wahlweise einregulierbarer Energie zu liefern gestattet. Bisher sind für diesen Zweck vorwiegend vier Arten von Hochfrequenzerzeugern angewendet worden. Die primitivste und auch unzureichendste Erzeugungsart besteht in der Benutzung eines Induktors mit Funkenstrecke, welche mit seltenen Funkenentladungen arbeitet. Die zahlreichen Mängel dieser Anordnung wie Inkonstanz der Energie, der Amplitude, unregelmäßiges Einsetzen der Schwingungen usw. haben dazu geführt, diese Methode nur noch in Ausnahmefällen und wo eine kritische Überwachung der Messung möglich ist, zu benutzen.

Eine erhebliche Verbesserung stellt die Anwendung eines Lichtbogengenerators, welcher allerdings ohne transversales Magnetfeld arbeiten muß und dessen Schwingungsenergie infolgedessen begrenzt ist, dar. Aber auch bei den hiermit zu erzielenden Messungen und Untersuchungen ist Vorsicht geboten, da leicht wenn auch geringfügige Wellenlängenschwankungen auftreten können. Jedenfalls verlangt auch diese Methode eine recht sachverständige Wartung.

Eine wesentliche Verbesserung für Meßzwecke stellt die Benutzung eines Wienschen Schwebungsstoßsenders (tönende Funkenmethode) dar. Die hiermit in Hochfrequenz umzuformenden Energien können verhältnismäßig leicht konstant gehalten werden. Indessen ist die Beschaffung einer derartigen Apparatur nicht einfach und billig, da ein Mittelfrequenzmaschinenaggregat zur Speisung des Transformators vorhanden sein muß, an dessen Klemmen eine besonders sorgfältig herzustellende Funkenstrecke liegt. Es sind also eine Reihe von Forderungen vorhanden, über welche nicht jedes Laboratorium oder jede Prüfstelle ohne weiteres verfügen wird.

Man hat sich infolge dieser Unzuträglichkeiten meistens dazu entschlossen, als Hochfrequenzquelle einen Summerunterbrecher zu benutzen, welcher in sog. Eichhornschaltung arbeitet. Diese Methode ist allerdings einfach und billig herzustellen. Es können ihr aber auch wesentliche Nachteile anhaften. Der Summerunterbrecher kann beispielsweise direkt auf den zu untersuchenden Kreis induzieren. Er besitzt im übrigen den prinzipiellen Nachteil, nicht nur die Hochfrequenzschwingungen des mit ihm verbundenen Schwingungssystems auszulösen, sondern auch noch langsame Schwingungen in der Periode der Unterbrechungen des Unterbrechers hervorzurufen. Die Amplitude der letzteren kann ziemlich erheblich sein, so daß vielfach die Messungen hierdurch gefälscht werden. Jedenfalls kann man auch diese Hochfrequenzquelle nicht als ideale Speisequelle für Messungen bezeichnen.

B. Beschreibung der Meßanordnung mit Röhrengenerator (Universalröhreninstrumentarium).

Eine jedoch allen Anforderungen gerecht werdende Methode ist die in passender Schaltung benutzte Gasröhre mit Zwischenelektrode (Pleiotron). Hierdurch erhält man nicht nur scharf resonanzfähige ungedämpfte und kontinuierliche Schwingungen, welche auch während beliebig langen Zeitspannen vollkommen konstant aufrecht erhalten werden können, sondern es ist auch möglich, ohne Zuhilfenahme eines kostspieligen und umständlicher Wartung bedürfenden Maschinenaggregates die Hochfrequenzenergie jederzeit beliebig zu erzeugen.

Das nachstehend beschriebene Instrumentarium[1]) beruht darauf, daß eine Gasröhre mit Zwischenelektrode mit allen erforderlichen Schwingungskreis- und Hilfsapparaten bei möglichst geringem Raumbedarf zusammengebaut ist, um mindestens alle wichtigsten in der Hochfrequenztechnik vorkommenden Messungen ausführen zu können (siehe unter C). Hierzu ist außerdem noch ein geeichter Sekundärkreis vorgesehen, welcher einen selbstinduktionslos und kapazitätsfrei gewickelten geeichten Ohmschen Widerstand besitzt.

Außer zu Meßzwecken kann die Apparatur aber auch noch zum Senden ungedämpfter Schwingungen, zum Audion- und Schwebungsempfang sowie zur Verstärkung aufgenommener Schwingungen benutzt werden (siehe unter D).

Das Instrumentarium in Gebrauchsstellung gibt Fig. 1 (Tafel XIII) wieder. Rechts im Bilde ist der die Gasröhre enthaltende Primärkreis, links der Sekundärkreis (Meßkreis) erkennbar, welcher auch bei Sende- oder Empfangsschaltungen zum Anschalten der Antenne dient.

Der Primärkreis besteht aus einer mit Zwischenelektrode arbeitenden Gasröhre *a*, zu wel-

1) Das Universalröhreninstrumentarium wird von den Lorenz-Werken G. m. b. H. in Wien hergestellt.

cher die Heizenergie durch die Klemmen *b*, die Anodenfeldenergie durch die Klemmen *c* zugeführt wird. *d* ist ein Drehplattenkondensator mit Luftdielektrikum, welcher zusammen mit der Selbstinduktionsspule *e*, deren Windungsbeträge stufenweise durch einen Walzenschalter *g* eingeschaltet werden können, den geschlossenen Schwingungskreis bildet. Durch Drehung des Walzenschalters und Betätigung des Drehplattenkondensators *d* kann die Wellenlänge des Systems sowohl für Meßzwecke als auch für Senden und Empfang zwischen ca. 150 m und 1200 m kontinuierlich verändert werden.

In der Zylinderspule *e* mittels eines eine kleine Eichskala tragenden Handgriffs *f* ist die Sekundärspule angeordnet, welche die Schwingungsenergie von der Spule *e* aufnimmt und mittels der Klemmen und Zuleitungen *h* auf den Sekundärkreis bzw. direkt auf die Antenne überträgt. *i* ist ein weiterer kleiner, mit drei Stellungen versehener Walzenschalter, welcher den Primärkreis auf „Senden", „Empfangen" oder „Messen" zu schalten gestattet. *k* ist der Handgriff eines kontinuierlich veränderlichen Widerstandes für die Einregulierung der Heizung des Glühfadens der Röhre *a*. *l* ist ein kleines Hitzdrahtampèremeter, welches den im geschlossenen Primärkreis fließenden Hochfrequenzstrom anzeigt. *m* ist ein Drehspulampèremeter, um die Heizstromstärke ablesen zu können. *n* sind 2 Stöpselbuchsen zum Einschalten eines Telephons, *o* ist ein Taster, welcher, wenn z. B. das Instrumentarium zum Senden ungedämpfter Schwingungen benutzt wird, Anwendung findet.

Der Sekundärkreis ist durch die schon erwähnten Zuleitungen *h* mit dem Primärkreis verbunden. Er besteht aus einer Stöpselspule *o*, einem mit zwei herausgeführten, um den aktiven Kondensatorteil verbundenen Puppenklemmen versehenen Drehplattenkondensator *p*, einem geeichten Stöpselwiderstand *q*, welcher durch einen parallel gelegten Messerschalter *r* auch kurzgeschlossen werden kann, einem kleinen Hitzdrahtinstrument *s*, einem hochempfindlichen Galvanometer *z* und aus drei aus der Figur nicht ersichtlichen, hinter der Spule liegenden Klemmen, welche entweder teils kurzgeschlossen bzw. an welche das zu untersuchende Schwingungssystem (Antenne) angeschlossen wird. Damit auch exakte Dämpfungsmessungen von relativ schwachgedämpften Systemen (Resonanzkreisen, gering gedämpften Antennen usw.) ausgeführt werden können, ist ferner noch ein in Fig. 1 (Taf. XIII) nicht wiedergegebener kleiner aperiodischer Kreis vorgesehen, in welchem ein einstellbarer Detektor mit Thermowirkung eingestöpselt ist. Dieser Kreis bzw. dessen Detektor kann durch eine biegsame Litze mit dem Galvanometer *z* verbunden werden. Der Kreis selbst wird entweder auf den Widerstand *q*, oder wenn eine sehr feste Kopplung gewünscht wird, direkt auf die Zylinderspule *o* aufgelegt. Die dem Detektor zuzuführende Energie und damit der Ausschlag im Galvanoskop *z* ist somit innerhalb beliebiger Grenzen regulierbar.

Für den Transport und die Aufbewahrung ist der Primär- und Sekundärteil in einen verschließbaren mit Handgriff versehenen, bequem tragbaren Kasten eingeschoben, welchen Fig. 2 (Taf. XIII) im geöffneten Zustande darstellt. Die Röhre nebst dem Zuführungsgalgen wird für den Transport aus der Stöpselung entfernt und in eine kleine im Senderkasten angeordnete Schublade *t* untergebracht, welche außer dem Galgen den Raum für eine Betriebs- und eine Reserveröhre aufweist.

C. Beispielsweise Meßschaltungsanordnungen mittels des Universalröhreninstrumentariums.

1. Kopplung zwischen Primär- und Sekundärkreis, für starke und schwache Energieübertragung.

Grundsätzlich ist bei allen auszuführenden Messungen zu beachten, daß keine Rückwirkung vom Sekundärkreis auf den Primärkreis aus stattfinden kann. Es sind daher die Spulen *e* und *o* möglichst entkoppelt angeordnet. Damit aber jede Rückwirkung sicher vermieden wird, ist es weiterhin bei den Meßschaltungen noch notwendig, den Abstand zwischen Primär- und Sekundärkreis nicht zu gering zu wählen. Ein Abstand von 25 cm zwischen den beiden Apparaturen ist stets ausreichend.

Für die nachstehenden Messungen wird die Energie vom Primärsystem auf das Sekundärsystem, wenn es sich um größere Beträge handelt, durch die Kopplungsspule *f* und durch die Verbindungslitzen *h* herbeigeführt. Wenn es sich jedoch darum handelt, die auf den Sekundärkreis zu übertragende Energie gering zu halten, so muß die Kopplung zwischen den Kreisen besonders lose gemacht werden, wozu die Klemmen *h* des Meßkreises kurzgeschlossen werden, so daß die Energieübertragung vom Primär- auf den Sekundärkreis lediglich durch die von der Spule *e* auf die Spule *o* ausgesandten Streulinien erfolgt.

2. Inbetriebsetzung des Primärkreises.

Nachdem an die Klemmen *b* die Heizstromquelle (Akkumulatorenbatterie), an die Klemmen *c* die Anodenfeldbatterie (Trockenelementbatterie 400 Volt × 0,2 Amp.) angeschlossen sind, der Walzenschalter *i* auf „Messung" gestellt ist, wird durch langsame Bewegung des Widerstandsgriffes *k* der Glühfaden langsam angeheizt, bis an dem Strommesser *m* eine maximale Heizstromstärke von ca. 3 Amp. erreicht ist. Es ist alsdann sofort Schwingungsenergie kontinuierlich in ungedämpfter Form vorhanden, deren Intensität am Strommesser *l* abgelesen werden kann. Die Wellenlänge wird durch den Stufenschalter *g* bzw. durch die Einregulierung des Kondensators *d* bewirkt.

Nach Inbetriebsetzung des Primärkreises können mit dem Universalröhreninstrumentarium u. a. nachstehende Messungen ausgeführt werden.

3. Wellenlängenmessung.

Nach Inbetriebsetzung des Primärkreises arbeitet dieser als ungedämpfter Sender, wobei das zu messende System beispielsweise an die Klemmen *h* zwecks Erregung angeschaltet werden kann.

Mit dem Sekundärsystem bei ausgeschaltetem Widerstand *q*, also kurzgeschlossenem Schalter *r* kann alsdann empfangen werden, wobei die Resonanzeinstellung durch entsprechende Stöpselung der Spule *o* bzw. Drehen des Handgriffs des Drehplattenkondensators *p* bewirkt wird, bis der maximale Ausschlag am Hitzdrahtampèremeter *s* erzielt ist. Die somit festgestellte Wellenlänge kann aus einer zu dem Sekundärkreis beigegebenen Eichkurve entnommen werden.

4. Dämpfungsmessungen. Feststellung der Eigendämpfung des Meßkreises.

Die prinzipielle Meßschaltung gibt Fig. 3 wieder, und zwar ist hier einmal die Möglichkeit vorgesehen, daß die auf den Sekundärkreis vom Primärkreis übertragene Energie sehr groß ist (z. B. Dämpfungsmessung von Isolationsmaterialien), wobei also direkt mit dem in den Sekundärkreis eingeschalteten Hitzdrahtinstrument *s* gemessen wird, andererseits ist auch der aperiodische Detektorkreis *i* vorgesehen, welcher als Indikationsinstrument das hochempfindliche Galvanoskop *z* benutzt. Die

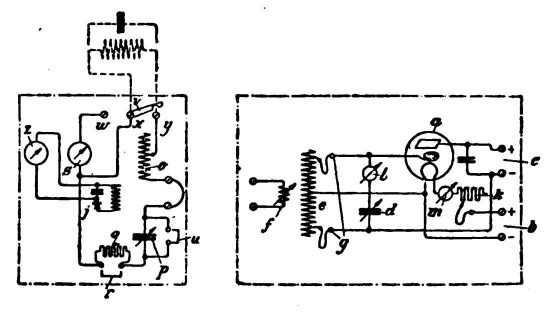


Fig. 3.

letztere Anordnung wird für alle praktisch in Betracht kommenden Dämpfungsmessungen, mindestens soweit die zu messende Dämpfung nur gering ist, anzuwenden sein.

Da der Primärkreis ungedämpft schwingt, folgt die Eigendämpfung des Meßkreises nach der Verstimmungsmethode aus dem bekannten Ausdruck

$$\vartheta_2 = \pi \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_r}.$$

Hierin bedeutet, λ_1 bzw. λ_2 die Wellenlänge bei halbem Ausschlag des Galvanoskops, λ_r die Wellenlänge für den Resonanzpunkt.

5. Messung der Dämpfung einer Antenne.

Bezeichnet man den Galvanoskopausschlag im Resonanzpunkt mit α_r nach Einschaltung des Widerstandes $q(w)$ mit α, so ergibt sich die Dämpfung der Antenne aus

$$\vartheta_{\text{ant}} = \frac{1}{150} \cdot \frac{c_a \cdot w}{\lambda_A} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha_r} - \sqrt{\alpha}}.$$

Die Antennenkapazität kann mit dem Meßkreise gemessen werden. Die Grundschwingung der Antenne wird festgestellt gemäß Punkt 3 und der Widerstand *w* kann direkt entsprechend dem jeweilig eingestöpselten Betrage an *q* abgelesen werden.

Hat man die Dämpfung, also somit den Widerstand der Antenne bei Grundschwingung bestimmt, so kann in gleicher einfacher Weise die Antennendämpfung, also der Antennenwiderstand bei der entsprechenden Wellenverlängerung festgestellt werden.

6. Messung der Dämpfung einer Selbstinduktionsspule.

Will man die Dämpfung von Spulen messen, so wird der Kurzschließer *v* geöffnet und an dessen Stelle die zu messende Spule angeschaltet. Man macht alsdann eine Messung mit Spule und eine Messung ohne Spule. Bei der Dämpfungsmessung von Selbstinduk-

tionsspulen kann übrigens, insbesondere soweit es sich um einen direkten Stromvergleich handelt, ohne weiteres auch an Stelle des aperiodischen Detektorkreises die Messung mit dem direkt eingeschalteten Hitzdrahtinstrument *s* durchgeführt werden.

7. Messung der Dämpfung von Kondensatoren und Isolationsmaterialien.

Um die Dämpfung von Kondensatoren bzw. von Isolationsmaterialien festzustellen, sind der Kurzschließer bzw. die Klemmen *u* vorgesehen, an deren Stelle der zu untersuchende Kondensator bzw. das zu messende Isolationsmaterial z. B. zwischen kondensatorförmig gestalteten Platten gebracht wird.

8. Kapazitätsmeßschaltung.

Der Primärkreis arbeitet wieder als ungedämpfter Sender. Im Sekundärkreis wird der zu messende Kondensator an die Kontaktklemmen *x y* angeschlossen. Der Kondensator *p* ist an den Klemmen *u* kurzgeschlossen. Sodann wird auf Resonanz eingestellt. Durch Kurzschließen der Klemmen *x y* und Öffnen der Kontaktklemmen *u* tritt an Stelle der zu messenden Kapazität der geeichte Drehkondensator *p*, der solange variiert wird, bis wieder die Resonanzstellung erreicht ist (Vergleichsmethode).

9. Selbstinduktionsmeßschaltung.

Auch hier läßt man den Primärkreis wieder als ungedämpften Sender arbeiten. Der Sekundärkreis wird einmal durch den Kurzschluß *v* geschlossen. Das andere Mal wird an dessen Stelle die zu messende Spule angeschaltet und es wird aus der Wellenlängendifferenz direkt die Größe der gemessenen Spule festgestellt.

Abgesehen von den vorbeschriebenen Meßschaltungen kann das Universalröhreninstrumentarium noch zu folgenden drahtlosen Sende- bzw. Empfangsschaltungen benutzt werden.

D. Senden, Empfangen und Verstärken mittels des Universalröhreninstrumentariums.

1. Sendeschaltung (Morseverkehr).

Die Sendeschaltung gibt Fig. 4 wieder. Die Inbetriebsetzung des Primärkreises erfolgt wie unter 1, wodurch jedoch der Walzenschalter *i* auf Senden gestellt ist und der Morsetaster die Anodenfeldenergie im Rhythmus der

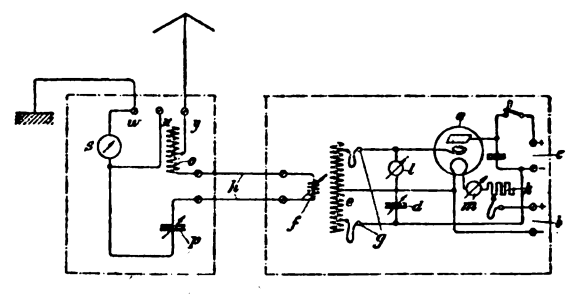


Fig. 4.

Morsezeichen zu tasten gestattet. Die Erde wird an die Kontaktklemmen *w*, die Antenne an die Kontaktklemme *y* angeschaltet.

2. Drahtloses Fernsprechen.

Hierzu ist nur erforderlich, ein der Apparatur nicht beigegebenes Mikrophon zwischen das Hitzdrahtinstrument *s* und die Erdverbindung bei *w* einzuschalten. Hierbei wird der Walzenschalter *i* auf Stellung „Messen" geschaltet, wobei also der Morsetaster nicht betätigt wird.

3. Empfangen in Audion- bzw. Ultraaudionschaltung.

Die Gasröhre wird wieder wie unter 1 in Betrieb gesetzt. Die Schaltung gemäß Fig. 5

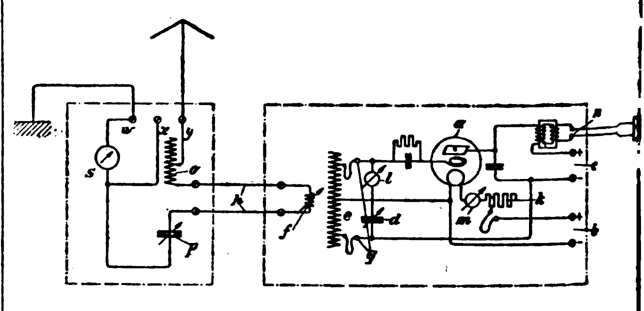


Fig. 5.

ist im übrigen maßgebend. Der Walzenschalter *i* wird auf „Empfangen" gestellt. Vor die Gitterelektrode ist automatisch bei dieser Schalterstellung ein Kondensator mit Parallelwiderstand geschaltet und desgleichen liegt parallel zum Anodenfeldkondensator und in Serie mit der Anodenfeldstromquelle in die Apparatur eingebaut ein Transformator, um mit jedem beliebigen Telephon empfangen zu können. Die Fadenheizung ist dabei so einzustellen, daß das System nahe der Schwingungsgrenze gebracht ist. Die Röhre arbeitet dann einerseits als Gleichrichter, andererseits infolge ihrer Relaiswirkung als Verstärker (ca. 8fache Verstärkung), und ermöglicht Tonempfang gedämpfter Schwingungen.

4. Schwebungsempfang (Heterodynempfang).

Die Schaltung und Bedienung ist wie in Punkt C 4, nur muß die Fadenheizung so weit gesteigert werden, daß die Röhre zu schwingen beginnt. Durch Variation des Drehkondensators d wird die Frequenz der lokal erzeugten Schwingung solange geändert, bis die günstigste Interferenz mit den ankommenden ungedämpften Schwingungen erzielt ist.

(Eingegangen 2. Mai 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Schwankungserscheinungen in der Physik.

Von Reinhold Fürth.

(Fortsetzung und Schluß.)

Kapitel IV. Schwankungen des elektrischen und magnetischen Zustandes.

A. Schwankungen der Ladungsdichte.

Legt man der Elektrizität wie der Materie atomistische Struktur zugrunde, dann muß auch die Anzahl der in einem bestimmten Teilvolumen eines geladenen Körpers enthaltenen Ladungsatome Schwankungen unterworfen sein. Solche müßten sowohl bei freien Ladungen isolierter Körper als auch in Elektrolyten auftreten. Nehmen wir zunächst an, die einzelnen Elementarladungen üben keine gegenseitigen Kräfte aus, und es seien, der Einfachheit halber, alle gleich groß. Bezeichnet n_+ die Anzahl der positiven Elementarladungen $+e$ im betrachteten Volum, n_- die Anzahl der negativen, dann ist der positive Ladungsüberschuß

$$E = e(n_+ - n_-).$$

Es sei ferner der Mittelwert von n_+ und n_- gleich $\frac{\nu}{2}$, also der Körper nach außen elektrisch neutral. Dann ist

$$\overline{E^2} = e^2 \overline{\left[\left(n_+ - \frac{\nu}{2}\right) - \left(n_- - \frac{\nu}{2}\right)\right]^2}.$$

Da nun nach Formel (3a')

$$\overline{\left(n_\pm - \frac{\nu}{2}\right)^2} = \frac{\nu}{2},$$

so folgt für die Schwankungsgröße

$$\overline{E^2} = e^2 \cdot \nu, \tag{34}$$

was in meßbaren Dimensionen nachweisbare Schwankungen der Ladungsdichte bewirken müßte[1, 3]).

Berücksichtigt man jedoch, daß infolge der elektrostatischen Wechselwirkung der Ladungsquanten für jede Ladungsänderung E positive Arbeit geleistet werden muß, so ergibt eine einfache Überschlagsrechnung, daß derartige Ladungsschwankungen vorläufig unter jedem beobachtbaren Betrage liegen.

B. Schwankungen beim Ladungstransport.

Die kinetische Auffassung des elektrischen Stromes involviert einerseits das Auftreten von Stromschwankungen ohne scheinbare äußere Ursache, z. B. im Schließungskreis eines galvanischen Elements, andrerseits bewirken die im vorigen besprochenen spontanen Ladungshäufungen das Auftreten spontaner, den Zufallsgesetzen unterworfener Potentialdifferenzen in einem Leiterkreis und dadurch das Auftreten spontaner Ströme in einem solchen, eine Erscheinung, die der gewöhnlichen Brownschen Bewegung eines Materiepartikels völlig analog ist und auch theoretisch analog behandelt werden kann. Mit diesen spontanen Strömen hängen indirekt wieder eine Reihe von Schwankungserscheinungen zusammen, z. B. Schwankungen des magnetischen Feldes des Leiterkreises, des Peltiereffektes u. v. a.[5, 6, 7]).

Keine dieser Erscheinungen, die noch eine Fülle künftigen Forschungsmaterials bieten dürften, ist bis jetzt experimentell aufgedeckt worden.

C. Magnetische Schwankungen.

Die zuerst von Langevin[2]) aufgestellte kinetische Theorie des Magnetismus nimmt bekanntlich an, daß die Moleküle kleine Magnete mit gewissen magnetischen Momenten sind, deren Achsenrichtungen infolge der Molekularbewegung eben zeitlichen und örtlichen Schwankungen unterworfen sind. Ein äußeres magnetisches Feld übt gewisse Richtkräfte auf diese Magnete aus, derart, daß im großen betrachtet, eine gewisse magnetische Intensität induziert wird, die sich in erster Näherung bei (paramagnetischen) Körpern als proportional dem äußeren Felde ergibt. Bei stärkeren molekularen Momenten (bzw. niedrigeren Temperaturen) entsteht infolge der Wechselwirkung der einzelnen Magnete untereinander eine spontane Magnetisierung ohne äußeres Feld: der Ferro-

magnetismus. Die auf diese Weise molekularkinetisch abgeleiteten Sätze stehen mit den phänomenologischen Gesetzen des Magnetismus in Übereinstimmung, jedoch bloß solange, als infolge der großen Anzahl von Molekülen die beobachtbaren Zustände sich als Massenerscheinungen auffassen lassen. In mikroskopischen Dimensionen müßten auch hier Schwankungen der magnetischen Intensität nachweisbar sein[3]). Am ehesten ließen sich wohl die Erscheinungen an kolloiden Lösungen para- oder ferromagnetischer Substanzen studieren, da man hier ebenso wie bei der früher besprochenen Kolloidstatistik die Zahl der „Einzelereignisse" direkt der Beobachtung unterziehen könnte. Auch sie sind jedoch experimentell noch nicht realisiert worden.

Ein Analogon dieser Phänomene, die also auf der Schwankung der Achsenrichtungen der einzelnen Moleküle beruhen, dürfte sich auch auf optischem Gebiete aufweisen lassen, da ja z. B. die optischen Eigenschaften der Körper in polarisiertem Licht von den Achsenrichtungen der Moleküle abhängen. Tatsächlich weisen gewisse Erscheinungen an flüssigen Kristallen, nämlich das unregelmäßige Funkeln von Paraazoxyanisol zwischen gekreuzten Nikols[4]) auf solche Achsenschwankungen mit großer Wahrscheinlichkeit hin.

Ferner müssen diese „Richtungsschwankungen" der Moleküle auch eine räumliche Schwankung des Brechungsexponenten ergeben, wenn die Moleküle, wie die neueren quantentheoretischen Modelle annehmen, anisotrope Struktur besitzen, und infolgedessen zu einer zweiten „Opaleszenz" Anlaß geben, die sich von der früher behandelten unterscheidet und ihr überlagert ist. Sie muß im Gegensatz zu dieser jedoch unpolarisiert sein. Eine Theorie dieser Opaleszenz auf der Basis der obenerwähnten Molekülmodelle bei idealen Gasen ergibt, daß sie zwar gegen die Smoluchowskische sehr schwach, jedoch beobachtbar sein dürfte[8]). Eine experimentelle Bestätigung steht noch aus.

Literatur zu IV.

1) H. Bateman, Phil. Mag. **21**, 745, 1911.
2) P. Langevin, Congrès Solvay, Bruxelles 393, 911
3) M. v. Smoluchowski, diese Zeitschr. **13**, 7, 1912.
4) Mauguin, C. R. **154**, 1359, 1912.
5) G. L. de Haas-Lorentz, Die Brownsche Bewegung. 85, 1913, Braunschweig.
6) H. A. Lorentz, Les théories statistiques. Leipzig 1916, Note addit. VI.
7) P. Debye, diese Zeitschr. **18**, 144, 1917.
8) M. Born, Verh. d. D. Phys. Ges. **19**, 243, 1917; **20**, 16, 1918.

Kapitel V. Schwankungen im Molekülinnern. (Chemische Schwankungen.)

Aus dem in den vorigen Kapiteln referierten Tatsachenmaterial geht hervor, wie die statistisch-kinetische Auffassung der dort beschriebenen Erscheinungen nicht nur zu einer richtigen Wiedergabe der bekannten Phänomene führt, sondern auch umgekehrt eine Fülle physikalischer Vorgänge voraussagt, deren nachträgliche experimentelle Bestätigung wohl als eine starke Stütze für die Richtigkeit der gemachten Voraussetzungen gelten kann.

Es liegt daher nahe, diese Auffassung auch den bisher noch nicht besprochenen Gebieten, dem Innern des Moleküls und des Atoms, zugrunde zu legen.

Die Kinetik des Molekülinnern hat von der Vorstellung auszugehen, daß die Atome, die im Verbande des Moleküls durch chemische oder Valenz-Kräfte zusammengehalten werden, nicht, wie gewöhnlich stillschweigend vorausgesetzt wird, starr in ihrer Ruhelage verharren, sondern noch gewisser gegenseitiger Bewegungen fähig sind, derart, daß auf sie die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet werden können. Wird diese Bewegung (z. B. durch Erhöhung der Temperatur) stark vergrößert, so kann ein teilweiser Zerfall des Molekülbaues eintreten. Nach einer solchen Theorie lassen sich die Erscheinungen der Wärmedissoziation, des Zerfalls chemischer Verbindungen unter Einfluß hoher Temperaturen usw. als Massenerscheinungen erklären.

Andererseits hätte nach dieser Auffassung die Konstitution des Moleküls einen statistischen Charakter, und müßte gewissen Schwankungen unterworfen sein: Schwankungen der chemischen Zusammensetzung. Auf diese Fragen kann aber hier um so weniger eingegangen werden, als experimentelle Resultate dieser Art bis jetzt nicht vorzuliegen scheinen, im Gegensatz zu den im nächsten Kapitel zu besprechenden auf eine Kinetik des Atominnern deutenden Tatsachen.

Kapitel VI. Schwankungen im Atominnern. (Radioaktive Schwankungen.)

Die Rutherfordsche Atomzerfallhypothese hat zu der Annahme geführt, daß auch das Atom nicht den letzten Baustein der Materie bildet, sondern selbst wieder aus einer mehr oder weniger großen Anzahl kleinerer Bestandteile zusammengesetzt ist. Diese unterscheiden sich durch ihre Masse und elektrische Ladung. Wir wollen der Einfachheit halber bloß die zwei wichtigsten Bestandteile, nämlich das α-

Partikel mit der Masse eines Heliumatoms und der Ladung $+2e$, und das β-Partikel mit der Masse eines Elektrons und der Ladung $-e$ zugrunde legen. Die neueren Theorien der Linienspektren der Elemente deuten darauf hin, daß diese Partikel im Innern des Atomverbandes nicht ruhen, sondern in sehr rascher oszillatorischer oder rotatorischer Bewegung begriffen sind. Die hierdurch geweckten Zentrifugalkräfte streben eine Zertrümmerung des Atoms an, während die elektrostatischen Anziehungskräfte den Bau zusammenhalten. Sind nur wenige Partikel im Atom enthalten (niedriges Atomgewicht), dann lassen sich die Verhältnisse noch verhältnismäßig einfach übersehen, wir haben dann etwas Ähnliches als ein Planetensystem im kleinen vor uns. Sind dagegen sehr viele Bestandteile da (hohes Atomgewicht), wie eben bei den radioaktiven Substanzen, dann werden die Gleichgewichtsbedingungen so kompliziert, daß sie sich praktisch wohl überhaupt nicht voraussehen lassen. Es wird dann verhältnismäßig häufiger der Fall vorkommen, daß die Konfiguration der Bestandteile so ungünstig wird, daß eines der Partikel aus einer geschlossenen in eine ungeschlossene Bahn übergehen muß: Es wird die Emission eines α- oder β-Partikels erfolgen.

Infolge des Umstandes, daß ein Atomzerfall zeitlich praktisch nicht voraussagbar ist, kann man das Zerfallen eines individuellen Atoms zu einer Zeit $t \ldots t + dt$ als ein zufälliges Ereignis ansehen, für das eine bestimmte, von der Zeit unabhängige Wahrscheinlichkeit $p\,dt$ existiert, die noch von der Natur des betreffenden radioaktiven Atoms abhängt. Hat man nun eine aus einer großen Anzahl gleichbeschaffener Atome zusammengesetzte radioaktive Substanz, dann wird nach dem Vorigen sowohl die zeitliche, als auch die räumliche Anordnung der ausgeschleuderten Partikel rein statistischen Charakter tragen, und sich mit statistischen Methoden behandeln lassen. Die makroskopischen radioaktiven Zerfallsgesetze erscheinen so wieder als statistische Massenerscheinungen (Abklingungsgesetz, Absorption, Zerstreuung, Reichweite usw.) und lassen sich auch vermittelst wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen einfach herleiten. Ist aber diese Auffassung zutreffend, dann müssen sich im Ablauf der radioaktiven Erscheinungen Schwankungen aufweisen lassen, falls man „mikroskopische" Methoden heranzieht, d. h. den Effekt einiger weniger Einzelpartikel nachzuweisen vermag. Wirklich sind die radioaktiven Schwankungen zuerst theoretisch vorhergesagt[1]) und erst später auch experimentell aufgefunden worden.

Im folgenden wird die allen experimentellen Untersuchungen zugrunde liegende Voraussetzung gemacht, daß die Lebensdauer der beobachteten Substanz im Vergleich zur Dauer des Experiments so groß ist, daß während dieser Dauer die Anzahl der zur Verfügung stehenden noch unzerfallenen Atome als konstant angesehen werden kann. Die bis jetzt ausgeführten Untersuchungen können in folgende vier Klassen eingeteilt werden.

A. Schwankungen der Anzahl der in einer bestimmten Zeit zerfallenden Atome.

„Einzelereignis" bildet das Zerfallen oder Nichtzerfallen eines individuellen Atoms in dem Beobachtungsintervall t_0, zur Beobachtung gelangt direkt oder indirekt die gesamte Zahl n der in t_0 zerfallenden Atome, bzw. ausgesandten Partikel. Formel (3a') ergibt für die Schwankungsgröße $\overline{\delta^2} = \frac{1}{\nu}$ wo ν die Zahl der im Mittel in t_0 ausgeschleuderten Partikel bedeutet.

Da n selbst für sehr geringe Mengen radioaktiver Substanz sehr groß ist, scheint es nicht möglich, eine direkte Zählung der Teilchen vorzunehmen, sondern man greift zu folgenden indirekten Methoden:

1. Hat man ein genügend empfindliches Elektrometer mit sehr kleiner Kapazität, so kann man durch Messung der variabeln Aufladungsgeschwindigkeit desselben auf die Anzahl der auftreffenden Partikel schließen. Tatsächlich zeigt diese Aufladegeschwindigkeit unter günstigen Umständen Schwankungen, doch ist die Methode zu wenig empfindlich, um quantitative Resultate liefern zu können[15]).

2. Zählmethoden. Da die Gesamtzahl ausgeschleuderter Partikel zur Zählung zu groß ist, blendet man den größten Teil der Strahlen ab und verwendet zur Zählung nur die durch eine kleine Blende hindurchgelassene Partikelzahl. Es wird also nur ein kleiner Bruchteil k der eingetretenen günstigen Ereignisse zur Beobachtung gebracht, es gelten daher für die Schwankungsgröße der beobachteten Teilchenzahl die in IA4, abgeleiteten Formeln. Danach ist normale Dispersion dann und nur dann zu erwarten, wenn k normale Dispersion besitzt, d. h. der beobachtete Bruchteil den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit allein unterworfen ist. Nachdem für die Emission eines individuellen Teilchens alle Richtungen im Raume gleich wahrscheinlich sind, ist in diesem Falle tatsächlich die Anzahl der in einem genügend kleinen Gesichtswinkel ausgestrahlten Teilchen normalen Dispersionsgesetzen unterworfen, unabhängig davon, ob die Anzahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Atome konstant ist oder schwankt.

In der Tat zeigen die Beobachtungen normale Dispersion mit geringfügigen Abweichungen, die sich durch kleine systematische Beobachtungsfehler erklären lassen[24]).

a) Szintillationen: Geeignet zur Zählung von α-Teilchen. Die durch die Blende kommenden Partikel treffen auf einen Schirm von Zinksulfid, Diamant oder dergl. Die Szintillationen werden durch ein Mikroskop beobachtet und jedes Aufleuchten mit einer Zeitregistriervorrichtung registriert[6, 8, 9]).

b) Stoßionisation: Benutzt wird die Fähigkeit eines α- oder β-Partikels, durch Stoß längs seiner Bahn eine große Anzahl von Gasionen zu erzeugen. Das schmale Strahlbündel wird in eine Ionisationskammer geleitet, in der zwischen zwei Elektroden eine nahe dem Entladungspotential befindliche hohe Potentialdifferenz angelegt ist. Der Stoßionisationseffekt eines Einzelteilchens ist dann ausreichend, zwischen diesen eine Entladung und damit einen, wenn auch kleinen, so doch nachweisbaren Ausschlag eines Elektrometers hervorzurufen. Die Ausschläge des Elektrometers werden photographisch registriert. Die Methode kann auf α- und β-Strahlen direkt[8a, 32]), und auf γ-Strahlen durch den Effekt der sekundären Korpuskularstrahlung indirekt[32]) angewendet werden. Letztere zeigt, daß auch die γ-Strahlung eine diskontinuierliche ist und den gleichen Schwankungen unterliegt, als die Korpuskularstrahlungen. Die erhaltenen Resultate liefern im allgemeinen gute Übereinstimmung mit den wahrscheinlichkeitstheoretischen Forderungen für die Häufigkeit der Schwankungen und die Schwankungsgröße. Da die in aufeinanderfolgenden Intervallen t_0 beobachteten Zahlen n voneinander völlig unabhängig sind, ist die Untersuchung der Schwankungsgeschwindigkeit von geringerem Interesse. Verwendet man statt einer festen radioaktiven Substanz eine radioaktive Lösung oder Gas und benützt zur Zählung der α-Teilchen z. B. die Szintillationsmethode, so beobachtet man einen Schwankungseffekt, der aus einer Überlagerung der Dichteschwankungen der Lösung, bzw. des Gases, der Zerfallsschwankungen und der Reichweiteschwankungen aufzufassen ist. Nach unseren früheren allgemeinen Überlegungen ist auch für diesen Fall eine normale Dispersion zu erwarten. Trotzdem weicht das beobachtete Häufigkeitsverteilungsgesetz von dem theoretischen nicht unbeträchtlich ab[9, 16, 21]). Eine befriedigende Erklärung dieser auffallenden Erscheinung steht noch aus. Eine Reihe von Erklärungsversuchen beruht, wie eine Diskussion zahlreicher Forscher gezeigt hat[21,22,23]), auf Irrtümern in der Aufstellung der Wahrscheinlichkeitsformeln.

3. Ionisationsmethoden. Das radioaktive Präparat kommt in eine Ionisationskammer, zur Messung gelangt die Stärke des von dem Präparate erzeugten Ionisationsstromes im Zustande der Sättigung. Um Schwankungen dieses Stromes leichter nachweisen zu können, dienen folgende zwei Versuchsanordnungen:

a) Differentialmethode: Gemessen wird die Stärke des zwischen zwei annähernd gleichen Strahlungsquellen fließenden Ionisationsstromes. Wären die beiden Quellen keinen Schwankungen unterworfen, so würden die Stromstärken gleich Null sein. Infolge der Schwankungen beider Quellen tritt eine gegenseitige Stromschwankung auf, deren Schwankungsgröße doppelt so groß ist, als die einer einzigen Quelle. Beobachtet werden die Nadelschwankungen eines stromanzeigenden Instrumentes als Funktion der Zeit. Diese Methode hat zum erstenmal das Vorhandensein radioaktiver Schwankungen gezeigt[2]). Sie läßt sich direkt zum Beweise verwenden, daß diese Schwankungen tatsächlich durch „Zerfallsschwankungen“ mitbedingt sind, was die Zählmethoden nicht vermögen. Sie ist sowohl auf α-, als auch auf β-Strahlen (auf letztere bloß qualitativ) anwendbar[3]).

b) Kompensationsmethode: Der durch das radioaktive Präparat erzeugte Ionisationsstrom wird durch eine konstante Stromquelle (Bronsonwiderstand) im Mittel kompensiert Das stromanzeigende Instrument zeigt wie bei a) Nadelschwankungen, deren Betrag die Hälfte des obigen ist. Die Methode wurde zum erstenmal dazu verwendet, aus der Größe der Nadelschwankungen auf die Gesamtzahl der ausgeschleuderten Partikel zu schließen; sie ist nur auf α-Partikel angewendet worden[4, 5]). (Über die Verwendung zur Messung der Ionisationsschwankungen von γ-Strahlen siehe später.)

Die Theorie dieser Meßmethoden ist im Gegensatz zu der obigen recht verwickelt und in der Literatur nicht immer einwandfrei dargestellt. Zunächst gelangt zur Messung nicht direkt die Anzahl der Einzelereignisse, sondern ein von dieser indirekt vermittelter Effekt: die Stromstärke des Sättigungsstromes. Für diese aber ist gleichzeitig auch maßgebend die Anzahl k der von jedem Partikel längs seiner Bahn erzeugten Gasionen. Wäre diese für jedes Partikel streng konstant, dann könnte die Schwankungsgröße nach Muster von Fall 2 (Kap. Ia, 4) berechnet werden; die Dispersion wäre, da $k > 1$, übernormal. Wäre dagegen k ein rein statistischer Mittelwert, dann hätten wir für den Effekt Q normale Dispersion zu erwarten. In Wirklichkeit wird höchstwahrscheinlich die Zahl k eine unternormale, direkt nicht bestimmbare

Dispersion haben, weshalb der wahre Wert von $\overline{\delta_Q^2}$ zwischen $\frac{1}{Q}$ und $\frac{k}{Q}$ liegen wird, was, da k eine große Zahl ist, eine sehr große Unbestimmtheit bedeutet, wenn auch voraussichtlich die Dispersion von k ziemlich gering und daher $\overline{\delta_Q^2}$ nahe an $\frac{k}{Q}$ liegen dürfte. Ferner sind ja die vom Instrument angezeigten Schwankungen selbst wieder schon gewisse zeitliche Mittelwerte der Schwankungen über Zeiten, über die das Instrument infolge seiner Trägheit automatisch „integriert"[7]). Schließlich muß berücksichtigt werden, daß eine gewisse Anzahl von Ionen, bevor sie an die Elektroden gelangen, sich wieder „rekombiniert" haben wird, daß also auch noch „Rekombinationsschwankungen" überlagert sind, wenn mit ungesättigten Strömen gearbeitet wird[28, 31]).

Auf weitere Details kann hier nicht eingegangen und muß auf die Literatur verwiesen werden.

B. Schwankungen in der Ionisierung.

Wie bereits im vorhergehenden erwähnt, ist wahrscheinlich die Anzahl der von einem Partikel erzeugten Ionen keine für das betreffende Radioelement genau konstante Größe, sondern gewissen Schwankungen unterworfen. Wir erwähnten, daß diese „Ionisationsschwankungen" bei der Ionisationsmethode zur Messung der Zerfallsschwankungen eine Rolle spielen.

Da die Methode der „Stoßionisation" zur Zählung der Strahlen auf diesem Prinzipe beruht, müssen auch hier die Ionisationsschwankungen einen Einfluß haben, und zwar auf die Größe der am Elektrometer registrierten Einzelausschläge. Bei der Zählmethode wird dieser Größe der Ausschläge nur insofern Bedeutung geschenkt, als man einen besonders großen Ausschlag auf das gleichzeitige Eintreten zweier Partikel in die Ionisationskammer deutet. Untersucht man dagegen die wechselnde Größe der Ausschläge als Funktion der Zeit, so kann man aus einer solchen Meßreihe offenbar Schlüsse auf die Ionisationsschwankungen direkt ziehen, deren Kenntnis, wie aus dem Obigen hervorgeht, wieder für andere Schwankungsmessungen von Bedeutung ist. Auch solche Messungen sind durchgeführt worden[10]).

Einen noch größeren Einfluß als bei den Korpuskularstrahlen haben die Ionisationsschwankungen bei γ-Strahlen, aus leicht begreiflichen Gründen, da der Ionisationsprozeß der γ-Strahlen ein sehr verwickelter sein dürfte und daher bedeutend stärker zu Schwankungen Anlaß gibt. Unter Zugrundelegung gewisser Hypothesen über die Art dieser Ionisierung zeigen Überschlagsrechnungen, daß die durch die γ-Strahlen hervorgerufenen Ionisationsschwankungen selbst so beträchtlich sein müssen, daß es nicht möglich erscheint, aus Schwankungsmessungen auf Basis der Ionisationsmethoden der γ-Strahlen Schlüsse auf die Zahl der emittierten γ-Strahlen zu ziehen[11]). Zu diesem Zwecke kann vielmehr bislang bloß die Zählmethode der Stoßionisation Verwendung finden. Dagegen sind die Messungen der durch die γ-Strahlung hervorgerufenen Schwankungen der Ionisierung von hoher Bedeutung für die Erkenntnis der Struktur der Strahlen, ob diese nämlich als Korpuskeln (nach Bragg) bzw. gerichtete Impulse (Starksche Lichtquanten), oder isotrope Ätherstrahlung anzusehen sind. Verändert man nämlich die Öffnung der Blenden, durch die die Strahlen in das Ionisationsgefäß eintreten müssen, so dürfte sich die Zahl der pro Zeiteinheit eintretenden Impulse nicht ändern, wenn die γ-Strahlen isotrope Ätherwellen sind, in den beiden anderen Fällen dagegen bei Verkleinerung der Öffnung abnehmen. Demgemäß müßten sich auch die beobachteten Schwankungen in verschiedener Weise ändern. Durch das Mitspielen der Ionisierungsschwankungen und der Trägheit des Instrumentes ist die Diskussion der nach diesen Gesichtspunkten angestellten Messungen nicht ganz einfach, doch scheint unter allen Umständen aus ihnen mit Sicherheit die Unmöglichkeit der Annahme isotroper γ-Strahlimpulse hervorzugehen[7, 12, 17, 19, 22]).

Andererseits aber zeigten Beobachtungen der gegenseitigen Schwankung zwischen zwei Ionisationsräumen, die von derselben Strahlungsquelle mit γ-Strahlen bestrahlt wurden, eine Abhängigkeit dieser Schwankungen von der gegenseitigen Distanz der beiden Gefäße, also eine „Schwankungskoppelung", die zur Annahme zwingt, daß ein einzelner „γ-Strahl" in beiden Gefäßen eine Wirkung hervorbringen kann, d. h. die γ-Emission kein vollkommen gerichteter Prozeß sein kann, so daß auch die ersten beiden Annahmen hinfällig werden[17, 18]).

Mit beiden Ergebnissen vereinbar scheint die Sommerfeldsche Impulstheorie zu sein, die den γ-Strahl zwar als allseitig sich ausbreitenden Ätherimpuls ansieht, aber so, daß die Strahlungsenergie nicht nach allen Richtungen denselben Wert hat (Bremsstrahlung der β-Strahlen). Die aus dieser Theorie sich ergebenden Koppelungseffekte stehen mit eigens dazu angestellten Versuchen in guter Übereinstimmung[18]).

C. Schwankungen der Zeit zwischen zwei Zerfallsereignissen.

Die im vorhergehenden beschriebenen Ver-

suche dienen im wesentlichen dazu, die radioaktive Schwankungsgröße zu bestimmen. Das Problem diese Abschnittes hängt mit der Schwankungsgeschwindigkeit zusammen. In unseren theoretischen Erörterungen (Kap. IB) über die Wiederkehrzeit abnormaler Ereignisse bei kontinuierlicher Beobachtung betrachteten wir die Wahrscheinlichkeit $\psi_n(t)\,dt$, daß die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden n-Ereignissen den Betrag $t \ldots t + dt$ besitzt (11c). In unserem Falle ist das n-Ereignis beispielsweise das Auftreten von n Szintillationen auf einem Schirm in der Zeit t_0. Wählt man t_0 genügend klein, so wird die Wahrscheinlichkeit, daß mehr als eine Szintillation während t_0 auftritt („gleichzeitiges Auftreten mehrerer Szintillationen"), praktisch gleich Null. Man hat dann folgendes Problem:

Die auf einen Szintillationsschirm auftreffende Strahlung sei so schwach, daß „gleichzeitig" immer nur eine Szintillation auftritt. Wie groß ist die relative Häufigkeit der Zeitintervalle t zwischen dem Auftreten zweier Lichtpunkte? Die Antwort gibt Formel (11c), in der man am besten die Konstante c_1 empirisch aus dem Beobachtungsmaterial bestimmt, da nach Formel (7c) die mittlere Wiederkehrzeit gleich $\frac{1}{c_1}$ sein muß. Derartige mit geeigneten Zeitregistriervorrichtungen aufgenommene Meßreihen ergeben gute Übereinstimmung mit Formel (11c)[14, 24, 26]. Auf ein etwas komplizierteres Wiederkehrproblem, das sich bei der bekannten „Doppelschirmmethode" ergibt, wo von zwei Beobachtern gleichzeitig auf zwei Szintillationsschirmen, die vom selben Präparat bestrahlt werden, beobachtet wird, kann hier nicht näher eingegangen werden[14].

D. Schwankungen der Reichweite.

So wie die Ionisationsschwankungen zeigen, daß der von einem Partikel längs seiner Bahn erzeugte Ionisationseffekt von einem Partikel zum anderen Schwankungen unterworfen ist, zeigt auch die geradlinige Länge dieser Bahn die „Reichweite" eines individuellen Teilchens solche Schwankungen. Beide Effekte dürften, wenigstens zum Großteil, auf die Dichteschwankungen der absorbierenden Substanz zurückzuführen sein, wodurch es kommt, daß ein Teilchen auf einer gewissen Bahnstrecke bald mehr, bald weniger Moleküle antrifft.

Die „individuellen" Reichweiteschwankungen bewirken, daß die Reichweite eines α-Strahlenbündels, die „Reichweite" schlechthin, keine genau definierte Größe ist, daß also das Bündel am Ende der Reichweite nicht schroff abbricht, sondern eine Streuung aufweist; die Ionisations-, Szintillationseffekte usw. am Ende der Reichweite allmählich abnehmen. Versuche mit der Szintillations- und Ionisationsmethode haben diese Reichweiteschwankungen experimentell aufgedeckt[13, 26]), theoretische Ansätze zu ihrer Diskussion sind auch gemacht worden[20, 27, 29, 30]); gewisse Divergenzen zwischen Experiment und Theorie deuten jedoch darauf hin, daß die derzeitigen Anschauungen über den Geschwindigkeitsabfall der α-Strahlen in der Materie noch nicht die endgültige Fassung sein können.

Literatur zu VI.

1) E. v. Schweidler, Prem. congr. de Radiologie. Liège 1905.
2) K. W. Kohlrausch, Wiener Ber. **115** (2a), 673, 1906.
3) H. Geiger, Phil. Mag. **15**, 539, 1908.
4) E. Meyer und Regener, Ann. d. Phys. **25**, 757, 1908; Verh. d. D. phys. Ges. **10**, 1, 1908.
5) E. Meyer, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **5**, 423, 1908; **6**, 242, 1909.
6) E. Regener, Verh. d. D. phys. Ges. **10**, 78, 1908; Berliner Ber. **38**, 948, 1909.
7) N. Campbell, diese Zeitschr. **11**, 826, 1910.
8) Rutherford und Geiger, Phil. Mag. **20**, 698, 1910.
8a) Rutherford und Geiger, Proc. Roy. Soc. (A), **81**, 141, 1908.
9) Th. Svedberg, Zeitschr. f. phys. Chem. **74**, 738, 1910.
10) E. Meyer, diese Zeitschr. **11**, 215, 1910.
11) E. v. Schweidler, diese Zeitschr. **11**, 225 u. 614, 1910.
12) E. Meyer, Berl. Ber. **32**, 647, 1910; diese Zeitschr. **11**, 1022, 1910; Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **7**, 279, 1910.
13) H. Geiger, Proc. Roy. Soc. (A) **83**, 505, 1910.
14) Marsden und Barrat, Proc. Phys. Soc. London **23**, 367; **24**, 50, 1911; diese Zeitschr. **13**, 193, 1912.
15) Kohlrausch und Schweidler, diese Zeitschr. **13**, 11, 1912.
16) Th. Svedberg, Die Existenz der Moleküle. Leipzig 1912.
17) E. Meyer, diese Zeitschr. **13**, 73, 1912; Ann. d. Phys. **37**, 700, 1912.
18) E. Buchwald, Ann. d. Phys. **39**, 41, 1912.
19) Laby und Burbidge, Proc. Roy. Soc. (A), **56**, 333, 1912.
20) K. F. Herzfeld, diese Zeitschr. **13**, 547, 1912.
21) Th. Svedberg, diese Zeitschr. **14**, 22, 1917; **15**, 512, 1914.
22) E. v. Schweidler, diese Zeitschr. **14**, 198, 1913.
23) T. Ehrenfest, diese Zeitschr. **14**, 675, 1913.
24) L. Bortkiewicz, Die radioaktive Strahlung ... Berlin 1910.
25) P. W. Burbidge, Proc. Roy. Soc. (A) **89**, 45, 1913.
26) F. Friedmann, Wiener Ber. **122** (2a), 1269, 1913.
27) L. Flamm, Wiener Ber. **123** (2a), 1393, 1914.
28) A. Ernst, Ann. d. Phys. **48**, 877, 1915.
29) L. Flamm, Wiener Ber. **124** (2a), 597, 1915.
30) R. W. Lawson, Wiener Ber. **124** (2a), 637, 1915.
31) E. v. Schweidler, Ann. d. Phys. **49**, 594, 1916.
32) Hess und Lawson, Wiener Ber. **125**, 307 und 661, 1916.
33) St. Meyer und E. v. Schweidler, Radioaktivität. Leipzig 1916.

Kapitel VII. Strahlungsschwankungen.

Im vorigen Kapitel besprachen wir den Fall, daß ein Elementarbestandteil eines Atoms aus einer geschlossenen in eine ungeschlossene Bahn übergeht: die radioaktive Strahlung. Ist die Gleichgewichtsstörung keine so krasse, dann geht das Partikel bloß von einer Gleichgewichtsbahn zu einer anderen geschlossenen über, wobei im allgemeinen ein Energieverlust stattfindet, der sich in Form emittierter elektromagnetischer Strahlung von bestimmter Frequenz nach außen hin kundgibt. Der Energieverlust kann dabei z. B. durch Wärmezufuhr von außen (Temperaturstrahlung), er kann aber auch durch Absorption einer anderen Strahlung gedeckt werden. Zu letzterem Typus gehört der Fall des „Strahlungsgleichgewichtes", in dem sich eine Strahlung befindet, die in einem adiabatischen Hohlraum eingeschlossen ist. Auch ein solches Gleichgewicht bietet ein Beispiel für die von uns betrachteten statistischen Gleichgewichte. Im großen betrachtet wird die Emission von jedem Flächenstück der Wand in der Zeiteinheit durch eine gleich große Absorption aufgewogen, die Energiedichte der Strahlung in jedem Volumteil des Hohlraumes zeitlich konstant sein. In mikroskopischen Dimensionen müssen auch hier Schwankungen auftreten.

Die Schwankungen der Strahlungsdichte können auf folgendem Wege berechnet werden [3]): Für die Energieschwankung in einem Volumen Δv (inkompressibler Substanz) fanden wir in Kap. III A, Formel (27)

$$\overline{\delta_e^2} = \frac{k T_0^2 v_0}{E_0^2 \Delta v} \frac{dE}{dT}$$

Nach Jeans entspricht die in einem Volum Δv eingeschlossene Strahlung des Frequenzbereiches $\omega \ldots \omega + d\omega$

$$Z = \frac{8\pi\omega^2}{c^3} \Delta v \, d\omega \qquad (35)$$

Freiheitsgraden.

Nehmen wir den Gleichverteilungssatz als gültig an, so wird nach (27a)

$$\overline{\delta_e^2} = \frac{\lambda}{Z_f} = \frac{c^3}{8\pi\omega^2 \Delta v \, d\omega}. \qquad (35a)$$

Nach der Quantenhypothese kommt analog zu (27b) dazu noch die durch die quantenhafte Struktur bedingte Schwankung, so daß

$$\overline{\delta_e^2} = \frac{1}{Z_f} + \frac{1}{Z_q}$$

wird, wo

$$Z_q = \frac{e}{h\omega} \qquad (35b)$$

Den Anteil (35a) kann man sich auch direkt ableiten aus der Überlegung, daß der resultierende Strahlungsvektor in jedem Raumpunkte durch Interferenz der aus allen Raumteilen kommenden Strahlbündel zustande kommt und daher im Laufe der Zeit unregelmäßigen Intensitätsschwankungen unterworfen sein wird. Diese Ableitung gibt als Resultat denselben Ausdruck [4]).

Auf ähnliche Weise kann man sich auch Formeln für die Schwankungen von Emission und Absorption und für die Schwankungen der sich fortpflanzenden Strahlung ableiten. Auf diese Dinge kann hier nicht eingegangen werden, um so mehr, als derzeit geringe Hoffnung besteht, solche Schwankungen experimentell nachzuweisen.

Bloß eines Versuches [1]) soll gedacht werden, Strahlungsschwankungen nachzuweisen, wo das Licht zweier gleich starker Glühlampen auf zwei photoelektrische Zellen fallen gelassen und die Schwankungen der Stromstärke zwischen den beiden Zellen galvanometrisch untersucht wurden. Die tatsächlich so aufgewiesenen Schwankungen können aber immerhin ebensowohl als Schwankungen des photoelektrischen Effektes gedeutet werden.

Literatur zu VII.

1) N. Campbell, Proc. Cambr. Phil. Soc. **15**, 310 u. 513, 1910.
2) A. Einstein, Congrès Solvay. Bruxelles 1912.
3) M. v. Laue, Verh. d. D. phys. Ges. **17**, 198, 1915.
4) H. A. Lorentz, Les théories statistiques en thermodynamique 70ff., Note additionelle IX, 1916.

Schluß.

So haben uns also, wie wir bereits in der Einleitung vorwegnahmen, die Untersuchungen über die Schwankungserscheinungen tatsächlich fast durch das gesamte, bis jetzt bekannte Gebiet der Physik geführt. Wir haben gesehen, welche bedeutenden Aufschlüsse zum Verständnis der physikalischen Vorgänge uns schon die wenigen bis jetzt genauer untersuchten Schwankungsvorgänge zu vermitteln vermögen. Es scheint deshalb von größtem Interesse, das auf diesem Gebiete Erforschte weiter auszubauen und die Untersuchungen auf andere Erscheinungen auszudehnen, um auf diese Weise schließlich auf exakt experimenteller Basis zu einer sicheren Erkenntnis des Mikrokosmos von Materie, Elektrizität und Strahlung zu gelangen.

Prag, im April 1918.

(Eingegangen 24. April 1918.)

BESPRECHUNGEN.

A. Haas, Einführung in die theoretische Physik mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. 1. Band. 8°. 384 S. m. 50 Abbildungen im Text. Berlin, Vereinigung wissenschaftlicher Verleger. 1919. M. 14.—, geb. M. 17.50 und 30% Verlagsteuerungszuschlag.

Verfasser stellt sich die Aufgabe, unter Berücksichtigung neuer Methoden und von ganz modernen Gesichtspunkten aus einen Überblick über den gegenwärtigen Stand der gesamten theoretischen Physik zu geben.

Der bisher erschienene erste Band des Werkes umfaßt die Theorie der Bewegung, der Elektrizität und des Lichtes, im einzelnen die Auffindung, Ableitung und exakte Begründung bestimmter Gesetze; dabei sollten nur solche Untersuchungen, die für die Erreichung dieses Zieles mittels eines lückenlosen, streng logischen Aufbaus notwendig erschienen, darin Aufnahme finden.

Nach einer einleitenden Darstellung von Ziel und Entwicklung der theoretischen Physik werden in einem ersten Kapitel die Gesetze des freien materiellen Punktes zunächst in analytischer Form deduziert, dann dieselben nochmals in vektoranalytischer Schreibweise zusammengestellt; von hier an bedient sich Verfasser der jetzt wohl allgemein üblich gewordenen Vektorsprache und verleiht dadurch seinem Werke ein übersichtliches Gepräge. Meines Erachtens hätten hier und auch später die wichtigen Pendelgesetze Aufnahme finden sollen, da sie unbedingt in eine Einführung in die theoretische Physik gehören.

Im folgenden Kapitel wird die Bewegung von Systemen freier Massenpunkte behandelt, während im 3. Kapitel die allgemeinen Prinzipien der Dynamik in Form des D'Alembertschen und Hamiltonschen Prinzips zur Sprache gebracht werden. Verfasser unterläßt es, auf die für die Statistik und Quantentheorie unentbehrlichen kanonischen Differentialgleichungen und Systeme mit einem verallgemeinerten kinetischen Potential einzugehen; auch wären einige Anwendungen der Lagrangeschen Gleichungen am Platze gewesen.

Besonders lehrreich sind die Betrachtungen des nächsten Kapitels über Relativitätsbewegungen, indessen vermisse ich als Anwendung das Foucaultsche Pendel, um dem Anfänger eine bestimmte Anschauung von dem für ihn erfahrungsgemäß schwierigen Begriff der Coriolis-Kraft zu geben. Zum Schluß dieses Kapitels wird kurz auf die Bedeutung der Relativitätstheorie der klassischen Mechanik hingewiesen.

Gegenstand des nächsten Kapitels bildet die Theorie des starren Körpers. So elegant die Darstellung hier ist, etwas Kreiseltheorie hätte sich Verf. nicht versagen sollen.

Im folgenden Abschnitt wird die Hydrodynamik recht stiefmütterlich behandelt, allerdings werden die wichtigsten vektoranalytischen Sätze abgeleitet.

Die nächsten Untersuchungen gipfeln in den Hauptgleichungen der Elektrodynamik; auch die Theorie der Dielektrika und Magnetika findet gebührenden Platz. Leider fehlen Betrachtungen über elektrische Schwingungen.

Es folgt dann ein Kapitel über die elementare Theorie der Schwingungen und schließlich die Theorie des Lichtes; die bedeutsame Drudesche Theorie der Metallreflexion ist reichlich kurz behandelt.

In den nächsten beiden Kapiteln werden die Hauptgleichungen der Elektronenvorstellung, die Theorie der Kathodenstrahlen, der Begriff der elektromagnetischen Masse, die Dispersionstheorie, Magnetooptik, Theorie der Molekularströme, ganz kurz einige Untersuchungen über Röntgenstrahlen und radioaktive Substanzen zusammengestellt; auch hier hätte etwas eingehender auf die besonders schönen und wichtigen Arbeiten über Kristallstruktur und Atominneres Rücksicht genommen werden müssen.

Am Schlusse des Buches geht Verf. auf das J. J. Thomsonsche und Rutherfordsche Atommodell kurz ein. Es folgt dann eine Zusammenstellung all dessen, was in dem Werke deduziert ist.

Die Tendenz des Verfassers ist eine ganz ähnliche wie die des bekannten Schaeferschen Lehrbuches der theoretischen Physik. Die Darstellung ist ebenso elegant wie verständlich, auch zeichnet eine gründliche Durchsicht das Werk aus; leider fehlen meiner Ansicht nach doch grundlegende Teile, ohne die ein volles Verständnis der theoretischen Physik nicht möglich ist. H. Falkenhagen.

M. Schlick, Allgemeine Erkenntnislehre. gr. 8. IX u. 346 S. Berlin, Julius Springer. 1918. M. 18,—, geb. M. 20,40.

Das Buch behandelt vom Standpunkt der modernen Naturwissenschaft die allgemeinen erkenntnistheoretischen Probleme.

Im Gegensatz zu den verschiedenen Richtungen der Immanenz-Philosophie vertritt der Verfasser einen realistischen Standpunkt. Er legt dar, daß die Schwierigkeiten, welche man vielerseits in der Möglichkeit des Erkennens einer über das unmittelbare Erleben hinausgehenden Wirklichkeit findet, aufgehoben werden, sobald man sich klar macht, daß es sich beim Erkennen der Wirklichkeit nicht um ein Bekanntwerden mit dem Wesen des Wirklichen handelt — die einzige uns bekannte Wirklichkeit bilden die unmittelbaren „Daten des Bewußtseins" —, sondern nur um eine begriffliche Bestimmung („Bezeichnung") der im Bereiche des Wirklichen bestehenden Relationen.

Mit seiner treffenden Kritik der positivistischen Philosophie führt Schlick die Gedanken von W. Freytag weiter.

Nur verfährt er in der Ablehnung des Positivismus nicht konsequent genug. Seine Auffassung vom Psychischen leidet an denselben Unbestimmtheiten, wie sie sich etwa in der Philosophie von Mach vorfinden.

Daher gelangt auch Schlick bei der Erörterung des psychophysischen Problems nicht zu so restloser Klarheit, wie es auf den ersten Blick den Anschein hat. Gleichwohl enthält gerade dieser Teil seiner Untersuchungen wesentliche Einsichten. Unter anderm wird hier zum erstenmale mit voller Deutlichkeit der Gedanke ausgesprochen, daß das „Physische" nicht eine besondere Art des Wirklichen bedeuten kann: Es gibt keine besondere Gattung von physischen Dingen, sondern nur eine besondere physikalische Methode des Erkennens, nämlich die Methode der exakten naturwissenschaftlichen Begriffsbildung, welcher prinzipiell alles Wirkliche zugänglich ist.

Schlicks Werk ist jedenfalls im Interesse der

Förderung und Klärung der naturphilosophischen und erkenntniskritischen Grundfragen sehr zu begrüßen.

Die Lektüre des klar und flüssig geschriebenen Buches kann dem philosophisch interessierten Physiker und Mathematiker sehr empfohlen werden.

P. Bernays.

R. Zsigmondy, Kolloidchemie. Ein Lehrbuch. 2. vermehrte und zum Teil umgearbeitete Auflage. 8⁰. XVI und 402 S. Mit 5 Tafeln und 54 Figuren im Text. Leipzig, Otto Spamer. 1918. Geh. M. 26.—, geb. M. 30.— und 20 % Teuerungszuschlag.

Daß der ersten Auflage trotz der Stockungen, die der Krieg herbeiführte, so schnell eine zweite folgen mußte, spricht an sich schon für den Wert dieses Buches. Seine Vorzüge gegenüber andern Lehrbüchern des gleichen Gebietes wurden schon beim Erscheinen der ersten Auflage hervorgehoben[1]). Es genügt daher, auf die Veränderungen gegenüber der ersten Auflage einzugehen.

Das Buch zerfällt in zwei Teile, einen allgemeinen und einen speziellen, von denen der erste in der früheren Auflage absichtlich kurz gehalten war, da der Verfasser mit Recht Bedenken trug, das an speziellen Kolloiden Gefundene zu verallgemeinern. Dazu schien ihm die junge Kolloidforschung noch nicht reif. In der neuen Auflage konnte nun der allgemeine Teil wesentlich erweitert werden. Er nimmt jetzt etwa $^1/_3$ des ganzen Buches ein und zerfällt in die vier Abschnitte: Einleitung, Systematik, physikalische Grundlagen und Gel- und Solbildung. Die letzten beiden Abschnitte wurden vor allem umgearbeitet und enthalten neben neuen Apparaten und Arbeitsmethoden die für die Kolloidlehre grundlegende Smoluchowskische Theorie der Konzentrationsschwankungen, Diffusion und Brownsche Bewegung, sowie seine Erklärung der Koagulation. Diese Erweiterung beweist, wie große Fortschritte in der Erklärung der Fundamentalversuche die letzten Jahre gebracht haben. Was die Darstellung dieser Abschnitte anlangt, so wäre gerade für den Physiker von Wert, wenn sich der Verfasser nicht damit begnügt hätte, nur die Endformeln der mathematischen Ableitungen aufzunehmen, sondern einen kurzen Hinweis gegeben hätte, wie man zu diesen kommt. Sollte, wie zu hoffen, die nächste Auflage eine weitere Ausarbeitung des allgemeinen Teils bringen, so könnte, um Wiederholungen zu sparen, die Einleitung gekürzt und in die folgenden Abschnitte hinein verarbeitet werden. Der systematische und klare Aufbau, von Anfang an eine Zierde dieses Werkes, würde dadurch noch mehr gewinnen.

Der spezielle Teil zerfällt in die beiden Abschnitte: anorganische und organische Kolloide, von denen der letztere, wenn auch gegen die vorige Auflage schon wesentlich erweitert, immer noch etwas zu kurz kommt. Die Darstellung des Abschnittes über anorganische Kolloide ist, besonders, wo es sich um das eigene Forschungsgebiet des Verfassers handelt, musterhaft.

Eine besondere Empfehlung dieser Neuauflage mitzugeben, erübrigt sich. Sie ist nicht nur eine, wie der Verf. bescheiden sagt, umgearbeitete, sondern eine verbesserte Auflage des schon bei seinem ersten Erscheinen als bestes Lehrbuch der Kolloidchemie bezeichneten Werkes. Bei der steigenden Bedeutung, die dieses neue Grenzgebiet zwischen Chemie und Physik auch für den Physiker täglich gewinnt, sollte es in keiner physikalischen Bibliothek fehlen.

Riesenfeld.

1) Diese Zeitschr. **14**, 910, 1913.

W. Jaeger, Elektrische Meßtechnik. Theorie und Praxis der elektrischen Messungen. Mit 583 Abbildungen im Text. Leipzig, J. A. Barth. 1917. Geh. M. 21.—, geb. M. 23.—.

Daß ein Bedürfnis nach einer solchen zusammenfassenden Behandlung elektrischer Meßmethoden vorhanden ist, steht außer Zweifel und das Werk Jaegers wird selbstverständlich jedem messenden Physiker willkommen sein. Jeder, der mit elektrischen und magnetischen Meßmethoden im Laboratorium zu tun hat, wird sich das Buch selbst ansehen. Der Inhalt zerfällt in folgende Teile: I. Theoretische Grundlagen, S. 1—121. Es ist gewiß verständlich, daß der Verf. das Bedürfnis gefühlt hat, die zum richtigen Verständnis der Meßmethoden erforderliche „theoretische Physik" in einem für den besonderen Zweck zugeschnittenen Artikel zu bearbeiten. Obwohl ja sicher eine solche konzentrierte Darstellung ihre Vorzüge hat, so glaube ich doch, daß die Leser über den Wert einer solchen theoretischen Einleitung ziemlich verschiedener Ansicht sein werden. Es mutet doch etwas sehr summarisch an, wenn man unter einer Überschrift „Kugelfunktionen und anderes" einen Passus von 16 Zeilen findet, oder wenn ein knapp 4 Seiten langer Artikel die Elektronentheorie behandelt. Dann sollte man sich lieber auf den Standpunkt stellen, nur Spezielles, hier Gebrauchtes zu bringen (z. B. die Theorie der Elektronenbewegung im elektrischen und magnetischen Felde) und sollte Absätze wie den Schluß auf S. 102, die man doch nur mit dem Gefühl überflüssigen Beiwerks lesen wird, gänzlich weglassen. Teil II (S. 126—151) handelt von Einheiten und Normalen, Teil III (S. 152—297) berichtet über „elektrische Meßinstrumente". Man sollte eigentlich erwarten, daß die technische Seite der Sache hier nach dem modernsten Stande der Dinge referiert würde. Das ist aber leider keineswegs der Fall. Wir finden z. B. in dem Abriß über Elektrometer kein Wort über die Arbeiten und Instrumente von G. Hoffmann, obwohl sie auf diesem Gebiete zweifellos zu den bedeutendsten gehören. Auch die Behandlung der Galvanometer ist nicht besonders modern (siehe z. B. Abbildungen, Fig. 209 und 210), während die technischen, doch immerhin einigermaßen ausgebildeten Saitengalvanometer auf S. 218 ganz kümmerlich und z. B. ohne Hinweis auf die Ausführung von Edelmann abgetan werden. Das Buch ist offenbar unter mannigfachen Kriegsschwierigkeiten erschienen, die es verschuldet haben mögen, daß recht viel Druckfehler und Irrtümer, namentlich aber empfindliche Mängel in den Literaturangaben sich bemerkbar machen. Gerade bei einem solchen, für die Laboratoriumspraxis bestimmten Werke sollte doch auf eine sorgfältige Bearbeitung der Literaturnachweise Wert gelegt werden.

Teil IV ist den „Hilfsapparaten und -vorrichtungen für Gleich- und Wechselstrom" gewidmet (S. 248—277). Teil V bringt (S. 278—360) die Meßmethoden für Gleichstrom, Teil VI die für Wechselstrom (S. 361—443). Teil VII (S. 444—466) handelt von magnetischen Messungen, während der VIII. Teil „Anwendungen elektrischer Messungen" bringt, deren erste die drahtlose Telegraphie betrifft. In einem Anhange werden die „absoluten Maße" behandelt; den Schluß bilden verschiedene Tabellen.

Im allgemeinen läßt sich über das Buch folgendes sagen. Es liegt im Wesen des behandelten Stoffes, daß es hier ganz besonders wünschenswert und fördernd ist, wenn dem Verf. aus dem Kreise derer, die das Buch praktisch benutzen werden, Verbesserungs- und Ergänzungsvorschläge zugehen. Das bearbeitete Gebiet ist so groß, daß man von einem Autor nicht erwarten kann, daß er alle Teile gleichmäßig gründlich darstellt. — In gewissem Sinne dürfte das Abfassen derartiger Werke ein Martyrium bedeuten, denn jeder Leser wünscht naturgemäß ein anderes, spezielles, ihm zufällig naheliegendes Gebiet besonders gut behandelt zu finden. H. Hörig.

W. E. Pauli u. R. Pauli, Physiologische Optik, dargestellt für Naturwissenschaftler. gr. 8°. VI u. 112 S., m. 2 Tafeln u. 70 Abbildungen. Jena, G. Fischer. 1918. Geh. M. 5.—, geb. M. 7.—.

Der Physiker, der auf dem Gebiete der Optik arbeitet, muß häufig physiologische Tatsachen heranziehen. Die großen physiologischen Fachwerke sind aber recht umfangreich und für den Nichtfachmann stellenweise nicht ganz leicht zu lesen. Andererseits verteilen sie den Stoff naturgemäß vom Standpunkte der Physiologie aus, so daß der Physiker gerade die Fragen, auf die es ihm ankommt, manchmal eingehender behandelt sehen möchte. Daher besteht ein Bedürfnis nach einem Buche, welches aus dem gesamten Stoffe das für den Physiker Wesentliche herausgreift und in einer ihm vertrauten Form genügend ausführlich darstellt. Dies Verlangen erfüllt die vorliegende Schrift. Der erste Teil, Dioptrik, handelt allgemein vom Bau des menschlichen Auges, Gang der Lichtstrahlen darin usw., ferner vom Augenspiegel, Akkommodation, Brillen, Irradiation. Der zweite Teil, Gesichtsempfindungen, bringt nach einer allgemeinen Einleitung die Probleme der Lichtmischungen, Helmholtzsche Theorie des Farbensehens, Purkinjesches Phänomen, Dämmerungssehen nebst Theorie, Farbenblindheit, Kontrasterscheinungen (hier wichtige Bemerkungen über das Auswerten photographischer Aufnahmen) nebst Theorien, Nachbilder und verwandte Erscheinungen, Webersches Gesetz und Photometrie. Der dritte Teil, Gesichtswahrnehmungen, bespricht Sehschärfe, geometrisch-optische Täuschungen, binokulares Sehen nebst Stereoskopie, einiges aus der Theorie der Raumanschauung, Sehen von Bewegungen (Stroboskop, Kinematograph). Der Physiker findet also, was er braucht; wünschenswert wäre vielleicht noch Erwähnung des Maxwellschen Fleckes und der Haidingerschen Polarisationsbüschel. Ein Quellennachweis mit kurzen Inhaltsangaben am Schluß erleichtert das Zurechtfinden in den umfassenderen Facharbeiten. Wertvoll sind die guten Abbildungen und die mehrfachen Anweisungen zu Demonstrationen und Vorlesungsversuchen. Witte.

Berichtigung

zu der Arbeit „Über die elektrischen Figuren" von Karl Przibram (diese Zeitschr. **20**, 299—303, 1919).

Unter Fig. 6, Tafel XI, soll es statt „negativ" richtig heißen: „positiv". Ferner ist irrtümlicherweise der Vermerk weggeblieben, daß alle Figuren auf ca. 5/6 natürl. Größe verkleinert sind.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. R. Glocker für Physik, an der Universität Bonn Dr. Albert Bachem für Physik, an der Universität Köln Studienrat Dr. Joseph Deuxes für Mathematik.

Ernannt: J. E. Purvis zum Dozenten für angewandte Chemie und Physik im Gesundheitswesen an der Universität Cambridge, der Privatdozent der Chemie an der Universität Leipzig Dr. Adolf Sieverts zum a. o. Professor für Physikalische Chemie an der Universität Greifswald, an der Universität Köln zu ord. Professoren Dr. August Darapsky für Chemie und Richard Rinkel für Maschinenlehre und Elektrotechnik, der Dozent an der Deutschen Technischen Hochschule Prag und Privatdozent an der Universität Wien Dr. Fritz Paneth zum a. o. Professor für analytische Chemie an der Universität Hamburg.

Berufen: Der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Breslau Geh. Regierungsrat Dr. Gerhard Hessenberg in gleicher Eigenschaft an die Universität Tübingen (nach Ablehnung der S. 257 gemeldeten Königsberger Berufung).

Ehrung: Die Preuß. Akademie der Wissenschaften in Berlin verlieh Prof. Dr. C. Dorno für seine letzten physikalisch-meteorologischen Arbeiten die Leibnizmedaille.

Vom Lehramt zurück: Der erste ständige Assistent des anorganisch-chemischen Laboratoriums der Technischen Hochschule Berlin Dr. M. v. Unruh (behufs Übertritt in die Technik), der ord. Professor der Mathematik an der Universität Halle Geh. Regierungsrat Dr. Albert Wangerin.

Angebote.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

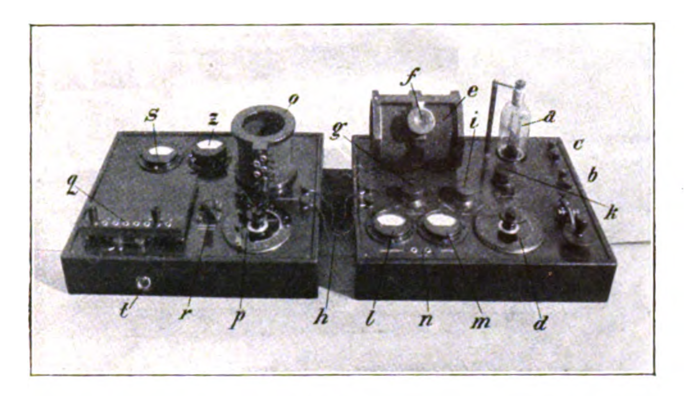


Fig. 1.

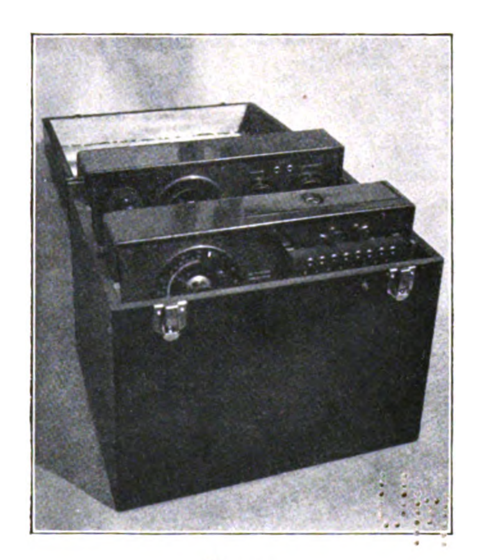
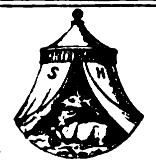


Fig. 2.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und H. Th. Simon



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 36 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 41 Mark, im Ausland 46 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstraße 2.

No. 17. 1. September 1919. No. 549. **20. Jahrgang.**

Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechung, Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen.)

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 17. 1. September 1919. 20. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 19 am 7. September 1919.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über den Einfluß horizontaler Temperaturschichtung des Seewassers auf die Reichweite von Unterwasserschallsignalen.

Von H. Lichte.

Bei der Wiederaufnahme der Schiffahrt von und nach deutschen Häfen ist die Kennzeichnung von minenfreien Fahrstraßen von erhöhter Wichtigkeit geworden. Eines der wichtigsten Hilfsmittel hierzu ist das der Unterwasserschallsignale. Daher dürfte es interessieren, über die Schallausbreitung im Wasser etwas Näheres zu erfahren.

Man ist im allgemeinen der Ansicht, das Wasser sei zur Übermittlung von Schallsignalen bedeutend besser geeignet als Luft, da es viel homogener sei. Das ist aber nicht der Fall. Vielmehr ist aus mannigfachen Gründen das Wasser in den verschiedenen Horizontalschichten akustisch inhomogen. Infolgedessen findet eine Abweichung der Schallstrahlen von der geradlinigen Bahn, eine Brechung der Schallstrahlen, statt. Die verschiedenen Ursachen für diese Brechung sollen im folgenden untersucht werden. Der Anschaulichkeit wegen werden in den einzelnen Fällen numerische Beispiele gegeben.

Die Schallgeschwindigkeit (v) in einem Medium ist abhängig von Dichte (ϱ) und Kompressibilität ($\varkappa$) des betreffenden Mediums gemäß der Beziehung

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_0 \varrho_0}}. \qquad (1)$$

Für Wasser hat man die Kompressibilität ermittelt zu 0,000049 Atm.$^{-1}$ oder in C.G.S.-Einheiten gleich

$$\frac{980{,}66 \cdot 1033{,}3}{0{,}000049} \frac{\text{cm sec}^2}{\text{g}}\,^{1)}.$$

Daher ist die Schallgeschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{\frac{1013300}{0{,}000049}} \text{ cm sec}^{-1} = 1439 \text{ m sec}^{-1}.$$

Die Größen, die die Schallgeschwindigkeit bestimmen, Kompressibilität und Dichte sind von verschiedenen Faktoren abhängig, unter anderen hauptsächlich von Temperatur, Salzgehalt und Druck.

Wir wollen nun zunächst den Einfluß dieser Faktoren feststellen und den Gang von Schallstrahlen in einer heterogenen Wasserschicht untersuchen. Am wichtigsten ist der Einfluß der Temperatur. Dieser sei daher zuerst betrachtet.

Nehmen wir an, die Temperatur des Wassers nehme gleichmäßig mit der Tiefe von der Oberfläche zum Boden hin ab. Legen wir die x-Achse (Fig. 1) in die Wasseroberfläche, die y-Achse senkrecht nach unten, so ist, da wir innerhalb einer sehr dünnen Schicht die Temperatur als konstant und den Schallstrahl als geradlinig annehmen können, nach dem Brechungsgesetz,

$$\frac{v}{\sin\alpha} = \frac{v_0}{\sin\alpha_0} = \frac{v_0}{\cos\delta}. \qquad (2)$$

Hier bedeuten v die Schallgeschwindigkeit und α den Einfallswinkel in einer beliebigen Schicht Δy. Die Werte mit dem Index 0 beziehen sich auf die Wasseroberfläche. δ ist der Winkel, unter dem der betrachtete Strahl gegen die Horizontale ausgeht. Der Strahl gehe von dem Koordinatenanfang aus. Nun ist nach Fig. 1

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\frac{v}{v_0}\cos\delta}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2\cos^2\delta}}.$$

Da

$$\frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{\varkappa_0\varrho_0}{\varkappa\varrho}},$$

1) Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 11. Aufl., S. 708, Tabelle XIX a.

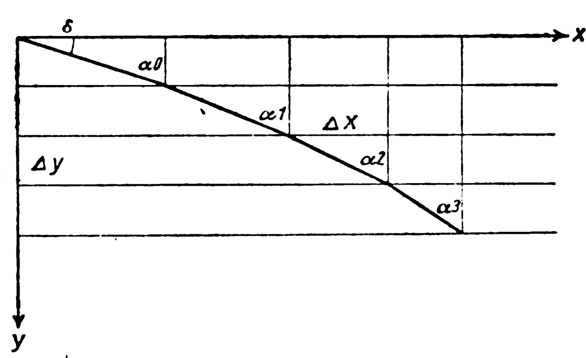


Fig. 1.

wo sich x nach dem Gesetz

$$x = x_0 (1 + \varepsilon y) \tag{3}$$

und ϱ nach dem Gesetz

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \gamma y) \tag{4}$$

mit der Wassertiefe ändern, so ist

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\dfrac{\cos\delta}{\sqrt{(1+\varepsilon y)(1+\gamma y)}}}{\sqrt{1 - \dfrac{\cos^2\delta}{(1+\varepsilon y)(1+\gamma y)}}},$$

und hieraus ergibt sich durch Integration

$$x = \int \frac{\cos\delta}{\sqrt{\sin^2\delta + \varepsilon y + \gamma y}} = \frac{2\cos\delta}{(\varepsilon+\gamma)} \cdot \sqrt{\sin^2\delta + \varepsilon y + \gamma y} + C.$$

Da für $x = 0$ auch $y = 0$ werden soll, bestimmt sich die Konstante zu

$$C = -\frac{2\sin\delta\cos\delta}{\varepsilon+\gamma} = -\frac{\sin 2\delta}{\varepsilon+\gamma}.$$

Also ist

$$\left(x + \frac{\sin 2\delta}{\varepsilon+\gamma}\right)^2 = \frac{4\cos^2\delta\sin^2\delta}{(\varepsilon+\gamma)^2} + \frac{4\cos^2\delta \cdot y}{\varepsilon+\gamma},$$

woraus folgt

$$y = \frac{\varepsilon+\gamma}{4\cos^2\delta} x^2 + \operatorname{tg}\delta \cdot x. \tag{5}$$

Diese Gleichung stellt die Gleichung unseres Schallstrahles dar. Für kleine Winkel δ, also für Strahlen, die ursprünglich horizontal verlaufen, ist

$$y = \frac{\varepsilon+\gamma}{4} x^2. \tag{6}$$

Die Gleichung (5) gilt zunächst ganz allgemein, da in ihr über die Bedeutung von ε und γ noch nichts ausgesagt worden ist. Rührt nun aber die Änderung der Kompressibilität und der Dichte mit der Wassertiefe her von einer Änderung der Temperatur T, wie wir es zunächst annehmen wollten, dann ist

$$\varepsilon = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\partial x}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \tag{7}$$

und

$$\gamma = \frac{1}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \tag{8}$$

Nun ist

$$x = 49 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{\partial x}{\partial T} = -2 \cdot 10^{-7}\ ^{1)},$$

also

$$\varepsilon = -4 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}. \tag{9}$$

Ferner ist, da $\varrho_0 = 1$ und $\frac{\partial \varrho}{\partial T}$ von der Größenordnung 10^{-4} ist[2]),

$$\gamma = -10^{-4} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}. \tag{9'}$$

Man kann also, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, γ gegen ε vernachlässigen, d. h. die Änderung der Schallgeschwindigkeit im Wasser infolge von Temperaturänderungen rührt her von einer Änderung der Kompressibilität; die Änderung der Dichte mit der Temperatur fällt praktisch nicht ins Gewicht.

Die Gleichung des Schallstrahls heißt also bei horizontaler Temperaturschichtung

$$y = -\frac{1}{\cos^2\delta} \cdot 10^{-3} \frac{\partial T}{\partial y} x^2 + \operatorname{tg}\delta \cdot x,$$

oder für einen ursprünglich horizontalen Strahl

$$y = -10^{-3} \frac{\partial T}{\partial y} \cdot x^2. \tag{10}$$

Ist beispielsweise die Wassertiefe 30 m und die Temperaturdifferenz zwischen Oberfläche und Boden 1° — oben soll die höhere Temperatur herrschen — also

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{30},$$

so ist

$$y = 3{,}33 \cdot 10^{-5} \cdot x^2.$$

Ein von einem Punkt in der Nähe der Oberfläche horizontal ausgehender Schallstrahl erreicht demnach nach etwa 1000 m Laufstrecke den Boden, wo die Schallenergie im wesentlichen absorbiert wird. Alle anderen Schallstrahlen, die von vornherein einen Winkel δ mit der Horizontalen bilden, erreichen den Boden noch früher.

---

1) Kohlrausch, l. c. S. 708, Tabelle XIXa. Für Wasser tritt ein Minimum der Kompressibilität ($= 41{,}02 \cdot 10^{-6}$) bei 62° ein. Innerhalb der praktisch vorkommenden Grenzen ist $\partial x/\partial T$ als Konstante zu betrachten.

2) Kohlrausch, l. c. S. 694, Tabelle IV. Die Dichte erreicht für 4° ein Maximum. $\partial\varrho/\partial T$ ist negativ nur für Temperaturen über 4°.

Es kann allerdings in der Akustik im allgemeinen von scharf begrenzten Schallstrahlen nicht die Rede sein. Man wird auch außerhalb des geometrischen Schallstrahles durch Beugung immer noch etwas hören.

Ist die Temperaturdifferenz zwischen Oberfläche und Boden größer, dann wird die Krümmung des Schallstrahles noch stärker, und die Entfernung, auf die der Schall gehört werden kann, wird noch kleiner als in unserem Beispiel.

Ist der Temperaturgradient entgegengesetzt gerichtet, also die Temperatur am Boden höher als an der Wasseroberfläche, so werden die Schallstrahlen nicht nach unten, sondern nach oben gekrümmt. Da nun aber die Wasseroberfläche praktisch vollkommen reflektiert[1]), so werden die Schallstrahlen zunächst unter demselben Winkel, unter dem sie eingefallen sind, nach unten reflektiert, infolge der Temperaturschichtung aber wieder nach oben gekrümmt, wenn nicht, wie es bei bewegter See möglich wäre, ein merklicher Teil der Schallenergie gleich in den Boden reflektiert und dort absorbiert wird.

Ebenso wie eine Änderung der Temperatur mit der Wassertiefe, so bewirkt auch eine Änderung des Salzgehaltes eine Brechung der Schallwellen im Wasser, und damit eine Abweichung von der geradlinigen Bahn. Die Kompressibilität nimmt mit wachsendem Salzgehalt ab, wie folgende, Krümmels Handbuch der Ozeanographie entnommene Tabelle zeigt[2]).

Salzgehalt in ‰	0	5	10	15	20
Kompressibilität $10^7 \cdot \varkappa$	490	484	478	472	466
Salzgehalt in ‰	25	30	35	40	
Kompressibilität $10^7 \cdot \varkappa$	461	455	450	422	

Angenommen, der Salzgehalt ändere sich absolut genommen um 1‰, so ändert sich die Kompressibilität um $1,2 \cdot 10^{-7}$. Die gleiche Änderung der Kompressibilität wird hervorgerufen durch eine Temperaturänderung von 0,6° C, und dem entspricht eine Änderung der Schallgeschwindigkeit von 1,8 m/sec.

Die Abhängigkeit der Dichte vom Salzgehalt läßt sich mit hinreichender Genauigkeit wiedergeben durch die Formel[3])

$$\varrho = 1 + 0{,}0008 \cdot S,$$

wo S den Salzgehalt in Promille bedeutet.

Einer absoluten Zunahme des Salzgehalts um 1 Promille entspricht also eine relative Zunahme der Dichte um 0,8‰ und eine Abnahme der Schallgeschwindigkeit um 0,4‰, d. i. um 0,58 m/sec. Der Einfluß der Dichteänderung bei wechselndem Salzgehalt auf die Schallgeschwindigkeit beträgt etwa $^1/_3$ von dem der Änderung der Kompressibilität.

1) Rayleigh, Theorie des Schalles. Deutsch von Neesen 1880, II, 98.

2) Krümmel, Handbuch der Ozeanographie, Bd. I, 1907, S. 285. Daselbst auch weitere Literatur.

3) Die Formel entspricht der in Krümmel, l. c. 1, 237, Zeile 11 mitgeteilten Formel von Knudsen.

Eine weitere Ursache für die Brechung von Schallstrahlen, die allerdings erst in großer Wassertiefe eine Rolle spielt, ist die Änderung der Schallgeschwindigkeit bei veränderlichem Druck. Dichte und Kompressibilität, die ja die Schallgeschwindigkeit bestimmen, sind nämlich vom Wasserdruck abhängig, und zwar nimmt die Dichte mit wachsendem Druck zu[1]), die Kompressibilität dagegen ab[2]).

Die prozentuelle Änderung der Dichte mit wachsendem Druck ist aber gegen die Änderung der Kompressibilität zu vernachlässigen, wie man aus den Tabellen ersieht. Man braucht also nur den Einfluß der Kompressibilität zu betrachten. Nach den Messungen von Amagat[2]) ist die Änderung der Kompressibilität von Wasser von 0° bei Druckzunahme von 1 auf 200 Atm. dieselbe wie bei Zunahme der Wassertemperatur von 0° auf 20°. In 2000 m tiefem Wasser wird also eine „schädliche" Temperaturdifferenz von 20° zwischen Oberfläche und Boden vollkommen kompensiert. In noch tieferem Wasser findet eine Bewegung der Schallstrahlen nach der Oberfläche zu statt.

Schließlich sei noch erwähnt, daß natürlich Strömungen im Wasser hinsichtlich der Hörbarkeit des Schalles eine ähnliche Rolle spielen, wie der Wind bei der Schallausbreitung in der Luft. Es ist ja bekannt, daß man Schalle in Luft mit dem Winde besser hört als gegen den Wind. Die Erklärung dafür[3]) ist in der Änderung der Schallgeschwindigkeit mit der Höhe vom Erdboden zu suchen, da ja die Windstärke mit der Entfernung vom Boden im allgemeinen zunimmt. Es wird also ein gegen den Wind gehender Schallstrahl allmählich nach oben gekrümmt und geht in einiger Entfernung über den Kopf des Beobachters hinweg. Ein Schallstrahl, der mit dem Winde geht, wird dagegen allmählich nach unten gekrümmt, so daß man in dieser Richtung infolgedessen größere Reichweite hat.

Genau so liegen die Verhältnisse im Wasser. Sie sind natürlich hier der direkten Beobachtung nicht so zugänglich wie in der Luft.

Was haben nun diese Verhältnisse für die Unterwasserschall-Reichweiten zu bedeuten?

1) Krümmel, l. c. Bd. I, S. 288.

2) Kohlrausch, l. c. Bd. I, S. 708, Tabelle XIXb.

3) Rayleigh, Theorie des Schalles. Deutsch von Neesen 1880, S. 155ff.

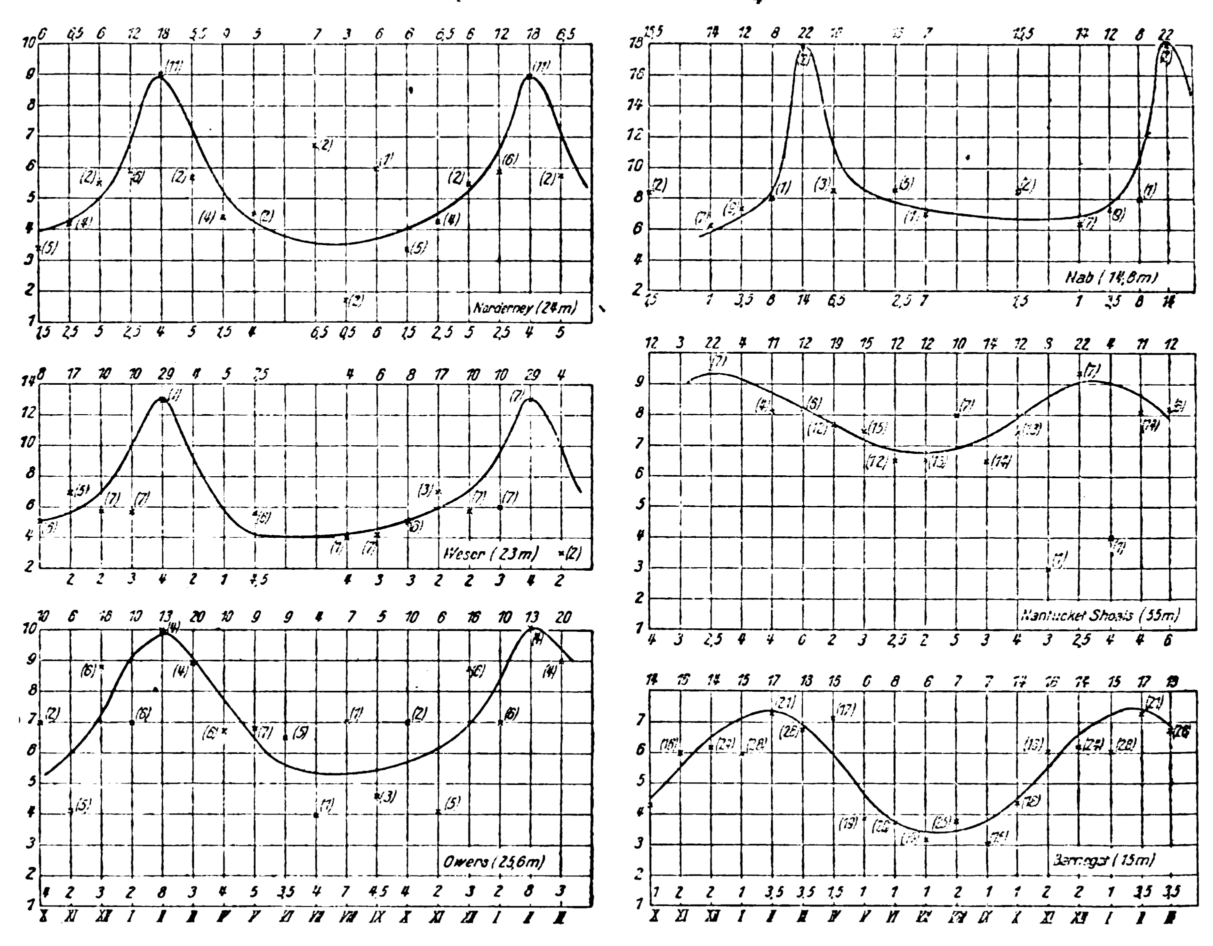


Fig. 2.

Uns interessieren hauptsächlich die Gewässer der Nord- und Ostsee. Aus den in Krümmels Handbuch[1]) mitgeteilten Tabellen ergibt sich, daß wir im allgemeinen im Sommer eine anotherme Schichtung haben, d. h. das Wasser ist oben wärmer als unten, im Winter dagegen herrscht die umgekehrte (katotherme) Schichtung vor.

Der Salzgehalt ändert sich dagegen mit der Tiefe nicht sehr. Das Wasser ist entweder homohalin, oder es findet im Sommer und Winter eine geringe Zunahme des Salzgehaltes nach der Tiefe hin statt.

Auf jeden Fall liegen die Verhältnisse so, daß der Einfluß der Salzgehaltsänderung auf die Kompressibilität im allgemeinen gering ist gegen den Einfluß der Temperaturänderung. Da außerdem in der Regel die Feuerschiffe nicht auf großen Wassertiefen liegen, brauchen wir uns praktisch nur um den Temperatureinfluß zu kümmern. Der jährliche Gang der Unterwasserschall-Reichweiten muß also im wesentlichen derselbe sein, wie der jährliche Gang des Temperaturgefälles. Man hat also bei anothermer Schichtung des Wassers, d. i. im Sommer, geringere Reichweiten zu erwarten als bei katothermer Schichtung des Wassers, d. i. im Winter.

Hiermit stimmen nun die Beobachtungen sehr gut überein. In den obigen Kurven (Fig. 2) sind einige Beobachtungen über Unterwasserschall-Reichweiten mitgeteilt, die bei verschiedenen Feuerschiffen gemacht worden sind[1]). Als Abszissen sind die Monate (römische Zahlen), als Ordinaten die Reichweiten in Seemeilen aufgetragen. Die den einzelnen Punkten in Klammern beigefügte Zahl bedeutet die Anzahl der Beobachtungen, aus denen der entsprechende

1) Krümmel, l. c. Bd. I, S. 468ff., 480ff., 349, 350.

1) Das Material ist vor dem Kriege von Handelsschiffen, die mit Unterwasserschallempfangsapparaten ausgerüstet waren, gesammelt uud von mir unter dem Gesichtspunkt obiger Theorie ausgewertet worden. Es wurde mir von Herrn Oberingenieur Wolf in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellt, wofür ihm auch an dieser Stelle freundlichst gedankt sei.

Durchschnittswert für den betreffenden Monat gewonnen worden ist. Die unterhalb der einzelnen Kurven eingetragenen Zahlen geben die kleinsten, die oberhalb der Kurven eingetragenen Zahlen die größten beobachteten Reichweiten in den betreffenden Monaten. Man sieht, daß entsprechend der vorher gegebenen Theorie die Reichweiten am größten im Winter, am kleinsten im Sommer sind. Innerhalb der einzelnen Monate selbst kommen starke Unterschiede vor, die sich durch zufällige Strömungen (Gezeitenströmungen) erklären lassen dürften, zum Teil aber auch auf die Verschiedenheit der Empfangsapparate zurückzuführen sind.

Über Reichweiten im tiefen Ozean liegen keine Beobachtungen vor. Jedenfalls darf man hier aber wegen des günstigen Einflusses des Druckes auf die Kompressibilität und damit auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles — von oben nach unten abnehmende Kompressibilität, daher zunehmende Schallgeschwindigkeit, also Bewegung der Schallstrahlen nach oben — auf bedeutend größere Reichweiten rechnen als in seichten Gewässern.

Das genaue Abnahmegesetz, d. h. die Abhängigkeit der Lautstärke von der Entfernung läßt sich aus diesen Kurven nicht entnehmen. Eingehende Versuche darüber sind in den Jahren 1915/16 ausgeführt worden, über die demnächst berichtet werden soll.

Kiel, im April 1919.

(Eingegangen 2. Mai 1919.)

Über den Sehraum.

Von Hans Witte.

Sechste Mitteilung: Der Laqueursche Sehraum.

1.

Wir blicken vom eigenen Standpunkt aus über die Erdoberfläche hin bis zu den Grenzen des Sehens. Wir wissen oder schätzen die wahren Entfernungen der Dinge, wir wissen oder schätzen die wahren Größen der Dinge, beide genau oder angenähert, wie sie wirklich sind. Außerdem erleben wir noch eine „Sehgröße". Wir sehen, daß die „Sehgröße" ferner Dinge kleiner ist als ihre wahre Größe; ferne Dinge sehen kleiner aus als sie sind. Wir fragen nach dem rechnerischen Gesetz dieser scheinbaren Verkleinerung.

2.

Um die Verkleinerungszahlen zu gewinnen, hatte ich in der vorläufigen Mitteilung[1]) beliebige Sehgegenstände herausgegriffen. So einen Menschen auf verschiedene Entfernungen, eine ferne Stadt, und anderes mehr.

Damals sollte nachgewiesen werden, daß wirklich alle Dinge verkleinert erscheinen; dafür ist dies Verfahren das gegebene. Wenn man genau messen will, empfiehlt es sich nicht.

Denn bei Menschen, Tieren und den meisten natürlich vorkommenden Dingen überhaupt stört das Wissen von den Dingen. Man weiß, daß die Dinge eine bestimmte Größe haben, oder man denkt sie sich in einer bestimmten Größe, und so kommt man nicht zum reinen Sehen. Besser nimmt man Gegenstände, bei denen man sich wenig oder gar nichts denkt, nur sieht.

Man kann sich dazu, wie gelegentlich vorgeschlagen worden ist[2]), in ein verdunkeltes Zimmer setzen und elektrische Funken beobachten. Doch ist das nicht notwendig. Bei Tageslicht und im Freien geht es auch. Man nimmt etwa glatte, ausdruckslose Stäbe, oder kreisrunde oder quadratische Scheiben, oder ähnliches.

3.

Ein ausgezeichnetes Mittel bieten menschliche Kunstbauten mit geraden, insbesondere parallelen Linien. Zum Beispiel geradlinig gebaute Häuser, Mauern, Zäune; oder auch geradlinig begrenzte Felder, Ackerfurchen, Waldränder; am besten gerade Straßen, Landstraßen, Kanäle, Wege, Eisenbahngleise. Ein gerader Weg von der festen Breite 1,80 m vervielfacht ins Unendliche das Beispiel vom fortmarschierenden Mann. Hier aber hemmt das Denken nicht, vielmehr kann sich kein Mensch von durchschnittlichem Sinnes- und Seelenleben dem Eindruck entziehen, daß die Seitenlinien stetig zusammenlaufen.

An solchen Beispielen hat man denn auch zuerst die scheinbare Verkleinerung wissenschaftlich vermerkt. Schon Lukrez spricht von dem Säulengang, der scheinbar in eine Kegelspitze zusammenläuft. Es fällt ihm schwer, solche und verwandte Erscheinungen mit seiner Lehre vom Sehen zu vereinigen[3]).

Allerdings liegt die Sache bei den parallelen Linien in einer Weise anders als bei Einzelgrößen. Die Bilder der abnehmenden Sehgrößen erscheinen mehr oder weniger gleichzeitig, zu stetigem Linienzug verbunden. Aber einen grundsätzlichen Unterschied macht das, wie Messungen zeigen, nicht.

1) H. Witte, diese Zeitschr. **19**, 142, 1918.
2) A. Müller, Zeitschr. f. Psychol. **40**, 74, 1906.
3) Lukrez, De rerum natura, herausgegeben von C. Lachmann, Berlin 1850, S. 129 (Buch 4, Vers 426 ff.).



4.

Ich darf mich nun auf vorbereitende Versuche mehrerer Forscher berufen[1]). Doch stellen diese Versuche nur die allernächste Nähe sicher, bis etwa 4 m. Sie sind nämlich im Zimmer ausgeführt, an kleinen künstlichen Nachbildungen von Baumreihen und dergleichen auf dem Arbeitstisch. Unser Ziel ist ein anderes. Wir wollen den ganzen Sehraum erforschen. Wir wollen die Verkleinerungsmessungen über den ganzen Raum hin bis zu den fernsten Grenzen des Sehens ausdehnen, wo sich die Sterne befinden. Und wir suchen außerdem noch die zugrundeliegenden, gemeinsamen Gesetze.

5.

Diese Aufgabe sieht auf den ersten Blick außerordentlich umfangreich aus. Allem Augenschein nach läßt sie sich nur so lösen, daß wir wirklich Punkt für Punkt den ganzen Sehraum ausmessen, von unmittelbarer Beobachtungsnähe bis ins Unendliche. Damit hätten wir den Rohstoff, dann würde das noch schwierigere Unternehmen kommen, die Gesetze herauszuarbeiten.

Jedoch die Lösung läßt sich, bemerkenswerterweise, ungemein vereinfachen.

Da wir, im Gegensatz zu den erwähnten Nahraummessungen, den ganzen unendlichen Raum umfassen wollen, wird es uns gestattet sein, untergeordnete Feinheiten späterer Arbeit zu überlassen. Wenn uns eine einzige Vernachlässigung zugestanden wird, können wir auf Grund einer einzigen Erfahrungstatsache die gesamten Gesetze eindimensional mit einem Griff hinstellen.

6.

Die Vernachlässigung ist diese. Jedermann beobachtet im Zimmer wie im Freien, daß gerade Linien angenähert als gerade Linien erscheinen. Bücher, Möbel, Fenster, Zimmer- und Hauswände, Wege, Straßen, Ackergrenzen usw. zeigen das unzweifelhaft. Verändert man den Standpunkt, geht man, fährt man im Wagen, so drehen sich die geraden Querlinien der Landschaft, bleiben aber dabei gerade.

Allerdings ist es nicht streng richtig. Tatsächlich besteht eine leichte Krümmung, vielleicht sogar eine doppelte. Aber weil die Krümmung gering ist, soll sie ausdrücklich außer acht bleiben.

Für das Folgende wird also angenommen: Eine wirkliche gerade Linie erscheint im Sehraum wieder als eine gerade Linie. Umgekehrt: Einer Linie, die im Sehraum als gerade erscheint, entspricht im wahren Raum eine gerade Linie.

1) G. Martius, Wundts Philos. Studien **5**, 601, 1889; F. Hillebrand, Denkschr. d. Wiener Akad. d. Wiss., math.-naturw. Klasse, **72**, 1902; W. Poppelreuter, Zeitschr. für Psychologie **54**, 311, 1910; **58**, 200, 1911, u. a. m.

7. Erstes Gesetz: Gleiche Sehgrößen.

Danach läßt sich sofort ein erstes Gesetz für die scheinbaren Verkleinerungen angeben.

Wir lassen den Blick von Fuß- oder Handnähe geradeaus vorwärts über den Raum hin bis ins Unendliche gehen. Das heißt, wir folgen geradeaus etwa dem Erdboden, oder sehen an einer Wand entlang, oder ähnlich. Wir fragen: Welches ist die Gesamtheit solcher Größen G, die gleich breit aussehen?

Das Scheinbild soll also ein Parallelstreifen $c\infty d\infty$ sein, ausgehend von der in unmittelbarer Tastnähe befindlichen Strecke $CD=cd=B=b$ (Fig. 1)[1]). Da die Scheinlinien $c\infty$

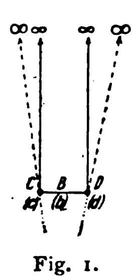


Fig. 1.

und $d\infty$ gerade sind, müssen nach 6 auch die wirklichen Linien $C\infty$ und $D\infty$ gerade sein. Da gemäß dem Grundgedanken Fernes verkleinert erscheint, müssen die wirklichen Geraden $C\infty$ und $D\infty$ auseinanderlaufen; ihr rückwärtiger Schnittpunkt liegt in der Streifenebene senkrecht hinter dem Augenmittelpunkt[2]).

Zur weiteren Vereinfachung werde angenommen, daß die linke Scheingerade $c\infty$ senkrecht unter dem Auge läuft. Dann fällt die linke wahre Gerade $C\infty$ mit ihr zusammen, und die Aufgabe meint einfach dies: Wir haben in der Blickrichtung geradeaus eine Gerade $C\infty$ etwa auf dem Erdboden gezogen, eine zweite Gerade $D\infty$ soll ihr parallel erscheinen ($d\infty$), dann muß $D\infty$ in Wirklichkeit schräg rechts ablaufend gezogen werden, wie Fig. 2 zeigt. Es handelt sich darum, die Gleichung dieser Geraden $D\infty$ rechnerisch zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke ziehen wir ein Koordinatenkreuz, die positive X-Achse sei die Richtung $C\infty$, die positive Y-Achse die Richtung CD. Die Maßzahlen X und Y messen also wahre

1) Große Buchstaben bezeichnen Punkte (C, D) und Maße (B) im wahren Raum, kleine im Sehraum. Daß $CD=cd$ oder $B=b$ ist, bedeutet, in Tastnähe stimmen wahre Größe und Sehgröße überein.

2) Das rechte Auge sei wieder geschlossen, das linke sehe.

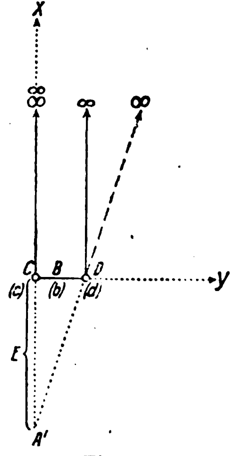


Fig. 2.

Entfernungen im wahren Raum. In erster Näherung bezeichnet X die Entfernung eines Punktes des Streifens $C\infty$ $D\infty$ vom Auge, Y die Breite des Streifens an der betreffenden Stelle. Rechnerisch ist dies Y die Ordinate der Geraden $D\infty$ und möge als solche Y_1 heißen.

Wir bezeichnen noch den rückwärts hinter dem Auge A liegenden Schnittpunkt der Geraden $C\infty$ und $D\infty$ mit A'. Die Entfernung CA' hängt aus leicht ersichtlichen geometrischen Gründen von der Streifenbreite $B = b$ nicht ab, sie kann sich nur mit der Beschaffenheit des Beobachters und äußeren Umständen wie Beleuchtung und dgl. ändern. Ihr Zahlenwert möge E genant werden. Dann heißt die gesuchte Gleichung der Geraden $D\infty$

$$-\frac{X}{E}+\frac{Y_1}{B}=1 \tag{1}$$

oder auch

$$Y_1 = B\cdot\frac{E+X}{E}. \tag{2}$$

Dies ist also diejenige Kurve, welche alle die Punkte verbindet, deren senkrechte Abstände von der gegebenen Geraden $C\infty$ dem Beobachter gleich lang zu sein scheinen, und zwar so lang wie die Ausgangslänge bzw. -breite $CD = B = cd = b$. Sie ist die „Kurve der gleichen Sehgrößen" und beantwortet die Frage: Welche Strecken sehen gleich groß aus?

8. Zweites Gesetz: Gleiche wahre Größen.

Aus ihr ergibt sich ebenso leicht die „Kurve der gleichen wahren Größen". Sie antwortet auf die Frage: Wie groß sehen gleiche Strecken aus?

Wir entnehmen zunächst aus dem Vorigen das Verkleinerungsverhältnis V. Zu diesem Zwecke betrachten wir nochmals Fig. 2. Die Scheingerade $d\infty$ ist das Bild der wahren Geraden $D\infty$. In einer beliebigen Entfernung X vom Anfangspunkt $C = c$ erscheint die Ordinate Y_1 (Streifenbreite) verkleinert auf den festen Betrag $b = B$. Das Verkleinerungsmaß V in der Entfernung X ist demnach B/Y_1, oder nach Gleichung (2)

$$V=\frac{E}{E+X}. \tag{3}$$

Für $X = 0$ ist das Verkleinerungsverhältnis sinngemäß 1, für $X = \infty$ ist es 0[1]).

Diesen Wert führen wir in die folgende Betrachtung ein. Jetzt wird also eine feste wahre Größe gegeben, d. h. ein wahrer Parallelstreifen $C\infty$ $D\infty$, sagen wir ein Weg, von der festen Breite B. Gefragt wird: wie viel sieht jede einzelne Stelle des Weges schmäler aus?

Die gegebene feste Wegbreite B wird an der Stelle X verkleinert auf einen Betrag, den wir y nennen wollen. „Klein" y, denn es ist eine Scheingröße; zur besseren Unterscheidung erhalte sie noch das Zeichen 2, heiße also y_2. Vernachlässigen wir wie oben Größen zweiter Ordnung, so wird die Verkleinerung durch das schon berechnete Verkleinerungsmaß V gegeben, es muß sein

$$\frac{y_2}{B}=V \tag{4}$$

oder nach (3)

$$y_2 = B\cdot\frac{E}{E+X}. \tag{5}$$

Die gesuchte Kurve ist demnach ein Stück einer gleichseitigen Hyperbel (Fig. 3). Setzen wir $X' = E + X$, verschieben also die Y- bzw. y-Achse bis zum Punkte A', so kommt

$$y_2 \cdot X' = B \cdot E,$$

dann hat die Hyperbel die gewohnte Lage, die Koordinatenachsen sind die Asymptoten, die Fläche des Koordinatenrechtecks beträgt $B \cdot E$. Für $X = 0$ ist y_2, wie erforderlich, gleich B, für $X = \infty$ wird y_2 Null.

Die Kurve gibt nicht an, wie die rechte Wegseite, und damit der Weg überhaupt, im ganzen aussieht. Sie ist nicht eine Beziehung zwischen beiden Scheinkoordinaten y und x, sondern zwischen der Scheinkoordinate „klein" y und der wahren Koordinate „groß" X. Sie zeigt, wie viel an jeder Stelle X des wahren Raumes der Weg schmäler (y) aussieht. Nicht, ob und wieviel diese Stelle X dem Empfinden näher rückt (x). Sie liefert also gerade dasjenige, was den Laqueurschen Sehraum[2]) kennzeichnet:

1) Die Verkleinerung $Y_1 - B = B\cdot X/E$ wächst von 0 bis ∞.

2) Fünfte Mitteilung, diese Zeitschr. **20**, 368, 1919.

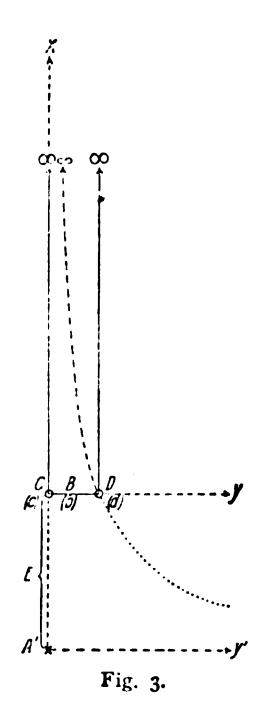


Fig. 3.

Gegeben ein fester Gegenstand, der sich vom Beobachter stetig entfernt. Erlebt wird für jede Entfernung ein bestimmter Verkleinerungsbetrag, und nur dieser Verkleinerungsbetrag der Gegenstandsgröße B wird als Funktion der wahren Entfernung X angegeben, weiter nichts.

Als Beispiel nehme man den früher benutzten fortmarschierenden Menschen (abgesehen davon, daß sich der Mensch eigentlich nicht eignet, weil man bei ihm nicht unverfälscht sieht, sondern denkt). Dann sieht der Mensch, wenn seine wahre Größe B beträgt, im Gelände soviel kleiner aus, wie der Hyperbelast angibt.

9. Drittes Gesetz: Gleiche Sehwinkel.

Das erste Verfahren hielt die scheinbare Größe fest und ermittelte die zugehörige wahre Größe Y_1. Das zweite Verfahren hielt die wahre Größe fest und ermittelte die zugehörige Scheingröße y_2. Unterlassen ist beide Male, nach dem dritten Stück zu fragen, das in Betracht kommt. Das ist der Sehwinkel φ bzw. das Netzhautbild.

Was geschieht, wenn der Sehwinkel festgehalten wird?

Das Schulbeispiel dafür[1]) ist die Auswertung eines Nachbildes. Man erzeugt im Auge ein negatives Nachbild, z. B. einer weißen oder farbigen Kreisscheibe, nähert darauf die Bezugsstelle dem Auge an und entfernt sie vom Auge, letzteres bis ins Unendliche (indem man über das freie Gelände blickt). Wie groß sieht das Nachbild in einer beliebigen Entfernung X aus?

Wir verschieben jetzt das Koordinatenkreuz XY ins Auge A. Die Achse AX ist die Blickrichtung. Dann erhalten wir die Gesamtheit derjenigen Ordinaten Y, welche einen und denselben Sehwinkel φ besitzen, indem wir durch Punkt A eine Gerade mit dem Neigungswinkel φ gegen die X-Achse ziehen. Die Gleichung dieser Geraden lautet

$$Y = X \cdot \operatorname{tang} \varphi. \tag{6}$$

Jede Ordinate Y erscheint nun in erster Näherung verkleinert nach dem obigen Verkleinerungsverhältnis

$$V = \frac{E}{E+X}. \tag{3}$$

Infolgedessen wird die Gesamtheit der Bilder

$$y_3 = \frac{E \,.\, X \cdot \operatorname{tang} \varphi}{E+X}. \tag{7}$$

Nach diesem Gesetz ändert sich der Größeneindruck, wenn man das Nachbild über das Gelände laufen läßt. Für $X = 0$ ist die Nachbildgröße y_3 Null, für $X = \infty$ ist sie $E \cdot \operatorname{tang} \varphi$; setzt man

$$E \cdot \operatorname{tang} \varphi = m, \tag{8}$$

so lautet die Gleichung einfach

$$y_3 = m \cdot \frac{X}{E+X} \tag{9}$$

Die Kurve ist wieder ein Stück eines Astes einer gleichseitigen Hyperbel. Die gewohnte Lage erscheint jetzt, wenn man einführt

$$X' = E + X$$
$$y'_3 = y_3 - m.$$

Dann kommt

$$y_3' \cdot X' = - m \cdot E.$$

Die Asymptoten sind die in Fig. 4 bezeichneten Achsen X' und y'. Die Achse X', welche im Abstand m zur Blickrichtung parallel läuft, grenzt den Höchstbetrag $m = E \cdot \operatorname{tang} \varphi$ ab, zu dem das Nachbild erst schneller, allmählich langsamer asymptotisch ansteigt.

10.

Der Laqueursche Sehraum liegt damit grundsätzlich fest. Die Hauptgleichungen (1) bis (9) bleiben nicht an die benutzten Beispiele gebunden, sie lassen sich leicht allgemein deuten.

Formel (7) läßt erkennen, daß die physikalische Begriffsbestimmung

Scheinbare Größe = Sehwinkel

im allgemeinen nicht zutrifft, nur für weite Entfernungen wird der Verlauf (nicht der Zahlen-

1) Vgl. vorläufige Mitteilung, diese Zeitschrift **19**, 142, 1918, § 19 B. Zu 8 vgl. ebenda A, zu 7 ebenda C.

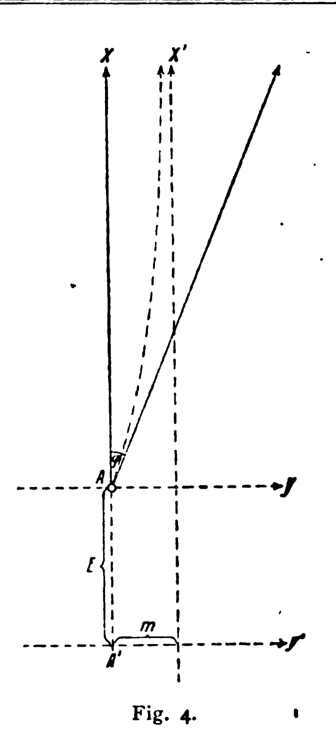


Fig. 4.

wert) der beiden Funktionen ähnlich. Formel (5) bzw. (2) zeigt dasselbe für die alte psychologische Gleichsetzung

Scheinbare Größe = Wahre Größe,

die beiden stimmen nur in der unmittelbaren Umgebung des Beobachters überein. Die tatsächliche Abnahme der Sehgröße nähert sich der psychologischen oder der physikalischen Auffassung, d. h. erfolgt langsamer oder schneller, je nachdem die Konstante E groß oder klein ist.

Ähnlich können alle anderen Fragen beantwortet werden.

II.

Vollständig wird die Beschreibung des Laqueurschen Sehraums allerdings erst, wenn man imstande ist, sie in Zahlen auszuwerten. Zu diesem Zwecke muß man freilich zum Schluß doch messen.

Aber die Messung gestaltet sich ungemein einfach. Die sämtlichen Gesetze enthalten nur eine einzige unbekannte Konstante. Nämlich die Konstante E, welche als Abstand des rückwärtigen Schnittpunktes der Scheinparallelen vom Beobachter eingeführt wurde, sodann das Höchstmaß der Netzhautbild-Auswertung abgrenzt, allgemein die Abnahmegeschwindigkeit der Sehgröße bestimmt.

Eine einzige Messung im Sehraum, eine einzige Messung derjenigen Verkleinerungszahl, die einer einzigen Entfernung $X = F$ zukommt, genügt, um die Konstante E für die zugrunde gelegte Beobachtungsrichtung zu bestimmen. Macht man diese eine Messung, so liegt der Laqueursche Sehraum auch zahlenmäßig fest.

Wolfenbüttel (Technische Hochschule Braunschweig), den 1. Mai 1919.

(Eingegangen 5. Mai 1919.)

Über Bogenstromcharakteristiken.

Von Ernst Bräuer.

Der Bogenstrom ist zugleich ein thermisches und ein elektrisches Phänomen. Die Wärmeableitung, insbesondere durch die Elektroden, ist von starkem Einfluß auf die elektrischen Größen. Die meisten Aufnahmen von Bogencharakteristiken, d. h. Spannungs-Stromstärkekurven, sind mit einer Anordnung gemacht, welche thermisch in hohem Grade willkürlich ist. Der Bogen brannte an stabförmigen Elektroden, deren Dimensionen bei allen Stromstärken die gleichen waren. Bei kleinem Strom waren die Ansatzflächen des Bogens so klein, daß die Elektroden thermisch unendliche Halbräume darstellten. Bei wachsendem Strome bedeckten sich die Endflächen der Stäbe immer mehr mit Stromlinien, bis schließlich die Fläche zu klein wurde und künstlich eine erhöhte Stromdichte erzwang, soweit nicht Stromlinien mit stark erhöhter Gasstreckenlänge nach den Mantelflächen der Elektroden übertraten.

Diese Unbestimmtheit in den Versuchsbedingungen hat auch dazu geführt, daß man lange den zischenden Zustand als durch die Stromstärke bestimmt ansah, während tatsächlich die Stromdichte maßgeblich ist. E. Rasch[1]) hat das wohl zuerst klar erkannt.

Vergleichbare Verhältnisse für verschiedene Stromstärken würde man erhalten, wenn man den Bogen zwischen großen Klötzen des Elektrodenmaterials brennen ließe, oder wenn man den Elektrodenquerschnitt proportional der Stromstärke wählen würde.

Eine einfachere Methode beruht auf folgender Überlegung: Zwischen Veränderungsgeschwindigkeiten, die so hoch sind, daß infolge der thermischen Trägheit die Stromdichte an den Elektroden nicht der stationären entspricht und so geringen Veränderungsgeschwindigkeiten, daß die Form der Elektroden in den Vorgang mit hineinspielt, muß ein breites Gebiet liegen, in dem der Zustand des Bogenstromes von der Veränderungsgeschwindigkeit fast unabhängig ist.

Wenn ich von einem Zustande ausgehend eine

1) Ewald Rasch, Das elektrische Bogenlicht. Braunschweig 1910.

Veränderung, z. B. durch Ein- und Ausschalten von Vorschalt-Widerstand, vornehme und schließlich zu dem Ausgangszustande zurückkehre, so wird die „Wärmewelle", die der ganzen Veränderung entspricht, in mehr oder minder großer Tiefe im Elektrodenmaterial auf einen bestimmten Bruchteil, z. B. den e. Teil, ihrer Amplitude abgesunken sein, je nach der Dauer der Veränderung. Ist die Dauer der Schwankung 1 sec, so ist der Betrag der Temperaturschwankung in 1 mm Entfernung bei Kohle als Elektrodenmaterial auf den 4. Teil, in 1 cm Entfernung aber bereits auf den 10^7. Teil abgesunken. Bei Silber ist die Schwankung in 1 cm Entfernung noch ein Drittel von der ursprünglichen.

Der Versuch ergibt, daß bei Kohleelektroden bei einer Veränderungsdauer unter 3 sec der Endzustand elektrisch mit dem Anfangszustand übereinstimmt. Wir müssen also annehmen, daß die Wärmewelle bei dieser Veränderungsdauer an den Grenzen des Elektrodenmaterials einen zu vernachlässigenden Betrag angenommen hat.

Andererseits folgen bei dieser Veränderungsgeschwindigkeit alle Temperaturen im eigentlichen Bogengebiete zweifellos mit großer Genauigkeit, wie sich u. a. daraus schließen läßt, daß bei steigendem Strome, solange die zu kleine Elektrodenfläche nicht eine Vergrößerung der Stromdichte erzwingt, niemals Zischen eintritt.

Nimmt man also die Charakteristik eines Bogenstromes innerhalb einer Zeit von der Größenordnung 1 sec auf, so bestehen für alle Kurventeile wirklich thermisch vergleichbare Verhältnisse, solange bei allen Veränderungen die Elektrodenfläche nicht vom Strom voll in Anspruch genommen wird.

Solche Charakteristiken entsprechen sehr genau dem stationären Zustande, wenn die Stromstärken von Bögen verglichen werden, deren Elektrodendimensionen thermisch vergleichbar sind, also z. B. bei technischen Bogenlampen, deren normale Brennströme verglichen werden. Von einer nach der bisherigen Methode statisch aufgenommenen Charakteristik kann nur ein Punkt und zwar für eine einzige Lampe verwertet werden. Nach dieser neuen Methode gibt eine Kurve die Gesamtheit aller Lampen bei normalem Strome oder verhältnismäßig gleicher Überbelastung oder sonst wie bei allen gleich verschobenen Bedingungen. Dabei ist der Ausgangs- (und der ihm gleiche End-)Punkt maßgebend für die Bedeutung aller Kurven. Gehe ich z. B. bei gleichen Elektroden von einem hohen Strome aus, so entspricht das geringer Wärmeableitung, also etwa im Verhältnis zum Strome dünnen Elektroden und umgekehrt.

Zugleich fallen bei so raschen Aufnahmen viele der technischen Schwierigkeiten fort, die nur Ungleichmäßigkeiten des Materials entspringen.

Die Ausführung solcher Aufnahmen geschieht mit dem Oszillographen, und zwar in der Weise, daß die Veränderungen mehrmals wiederholt und auf der langsam laufenden Trommel photographisch aufgezeichnet werden. Eine Oszillographenschleife wird dabei vom Bogenstrome, eine andere von der Bogenspannung beeinflußt. Es wurde eine Anzahl solcher Aufnahmen gemacht, indem der Vorschaltwiderstand des Bogens (Schieberheostat) mehrmals so stark vergrößert und wieder verkleinert wurde, daß der Bogenstrom zwischen etwa 5 A und 0,2 A variierte, und zuletzt durch weitere Widerstandserhöhung der Bogen zum Erlöschen gebracht wurde. Die Spannung war 220 Volt. Die Ausgangs- und Endwerte stimmen sehr gut überein.

Die Tabelle gibt für einige Bögen die Konstanten a und b der Formel

$$e\,i = a\,i + b.$$

(e = Bogenspannung, i = Bogenstrom), der sich die Charakteristiken im untersuchten Gebiete gut anschließen.

Für die Arytonsche Formel

$$R = \alpha + \beta l + \frac{\gamma + \delta l}{i}$$

(l = Bogenlänge, $\alpha\beta\gamma\delta$ = Konstanten) ergibt sich beim Kohlebogen (Durchmesser positiv (oben) 1,0 cm, negativ (unten) 0,8 cm

$$e = 50 + 15{,}8 l + \frac{9 + 32 l}{i},$$

und zwar bei einem Ausgangswerte von etwa 4,5 A, d. h. schwacher Belastung der Kohle und entsprechend hoher Wärmeableitung. Der hohe Wert der Minimalspannung, 50 Volt, gilt also, wenn die Elektrodendurchmesser der Stromstärke entsprechend vergrößert werden. Die nach der alten statischen Methode gefundene viel kleinere Minimalspannung (35 bis 40 Volt) entspricht ganz anderen Bedingungen, indem mit steigendem Strome die Stromdichte künstlich vergrößert wurde. Daß sich in beiden Fällen ein genügender Anschluß an die Beobachtungen durch eine Hyperbelkurve ergibt, ist rein zufällig, wenn auch bei der Kleinheit des Intervalles zwischen Einsetzen des Bogens und zischendem Zustande nicht verwunderlich.

Tabelle.

	a	b
Hg-Bogen, kurz nach Zündung, Dampfdruck klein . . .	55,6	4
Größerer Dampfdruck . . .	95,2	24
Hg-Bogen, gut eingebrannt, hoher Dampfdruck . . .	125,3	46
Reinkohlebogen, Länge 2,5 cm	90	89
„ „ 0,4 „	56,8	22
Salz (CaF_2)-Kohlebogen, Länge 2,5 cm	42	36
0,15 cm	28	10

Eine besondere Bedeutung hat dieses Verfahren für die Aufnahme der Charakteristik des Quecksilberdampfbogens (Fig. 1). In der

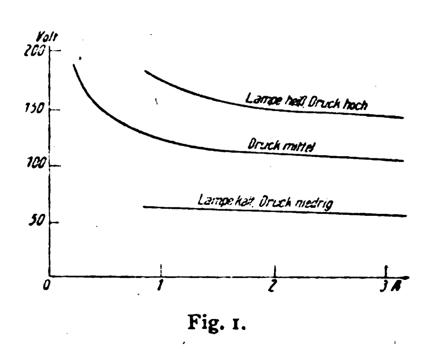


Fig. 1.

engen Quarzröhre der technischen Quarzquecksilberlampe steigt mit steigendem Strome sehr stark der *Hg*-Dampfdruck, und zwar in einer der exakten Festlegung sich entziehenden Weise, abhängig von der Außentemperatur, der Gefäßform, kurz der gesamten zufälligen Wärmeableitung. Infolgedessen besitzt auch die Charakteristik bei hohen Strömen einen steil steigenden Ast, der physikalisch höchstens zu der rein qualitativen Feststellung zu verwerten ist, daß mit steigendem Dampfdruck die Spannung des *Hg*-Bogens steigt.

Nimmt man dagegen die Charakteristik oszillographisch auf, so erhält man den tat-

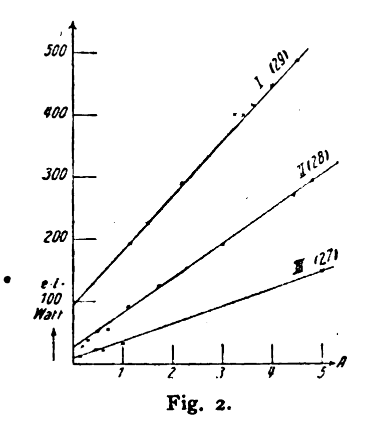


Fig. 2.

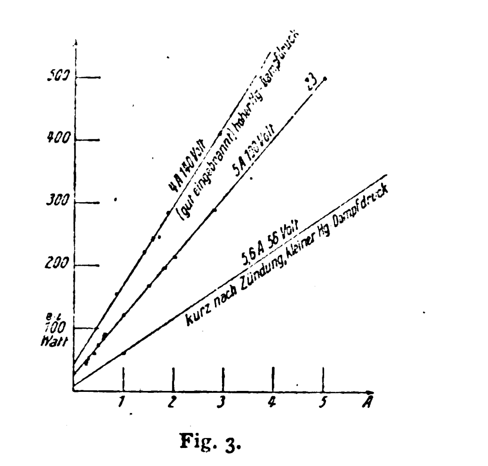


Fig. 3.

sächlichen (e-, i)-Zusammenhang für den betreffenden Druck, der z. B. für das Verhalten der Lampe bei Störungen durch Stromschwankungen auch technisch allein in Frage kommt. Es ist leicht, nach mehrmaliger Veränderung beim Ausgangswerte des Stromes auch den Ausgangswert der Spannung auf 1 Proz. genau wieder zu erhalten.

Fig. 2 gibt die (e-, i)-Kurven für eine *Hg*-Bogenlampe, ausgehend von 2,0 A 140 Volt (I) (eingebrannte Lampe, hoher *Hg*-Dampfdruck), ferner (II) von 5 A 100 Volt und von 5,8 A 56 Volt (III) (Lampe kurz nach dem Zünden, tiefer *Hg*-Dampfdruck).

Fig. 3 gibt die (ei-, i)-Kurven für den Reinkohlebogen der Tabelle I bei 2,5 cm, II bei 0,4 cm Bogenlänge. III ist ein Salzbogen (CaF_2) von 0,1 cm Länge.

Im Zusammenhange mit der Frage langsamer thermischer Änderungen ist es interessant festzustellen, welche Eindringungstiefe die Wärmeschwankungen des hochfrequenten Wechselstrombogens besitzen. D. Roschansky[1]) hat die Charakteristiken des Zinkbogens (-funkens) bis zu sehr hohen Frequenzen (10^6) aufgenommen und dabei

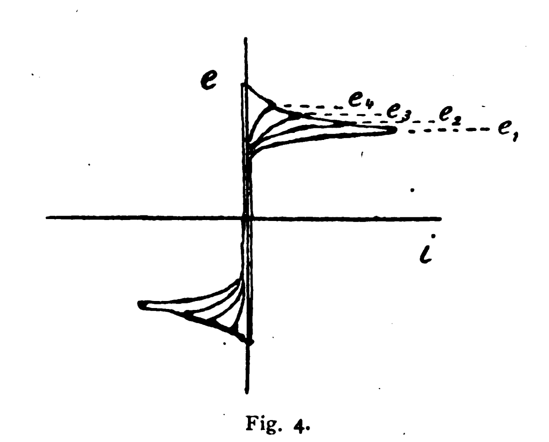


Fig. 4.

1) D. Roschansky, diese Zeitschr. 9, 627, 1908.

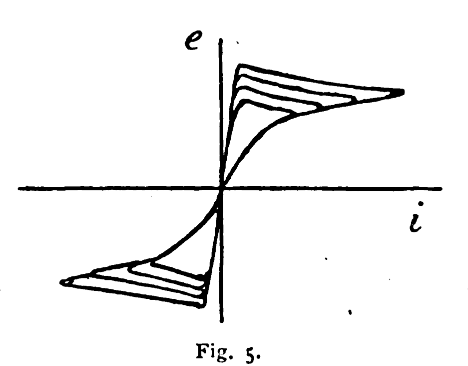


Fig. 5.

das auch früher schon gefundene Resultat bestätigt, daß die Charakteristiken immer mehr in die steigende Richtung übergehen, d. h. immer mehr Ohmschen Widerständen ähnlich werden. Das deutet darauf hin, daß der thermische Zustand der Elektroden bei schnellen Wechseln nicht mehr den Stromschwankungen folgt. Fig. 4 gibt (nach Roschansky) die Zinkbogencharakteristik für eine Periodenzahl $u \leqq 10^5$, Fig. 5 für $n = 10^5$ bis 10^6, Fig. 6 für $n = 3 \cdot 10^6$.

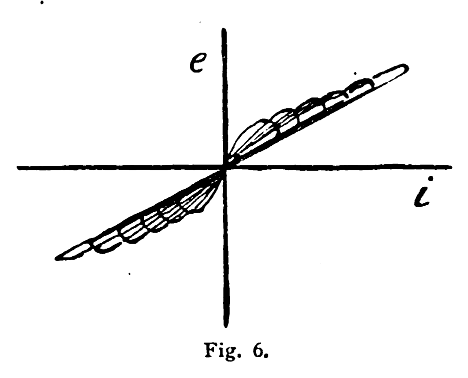


Fig. 6.

Die Tabelle enthält unter n die Frequenzen, unter a den Bruchteil, auf den die Schwankungen in 1 mm Entfernung abgesunken sind, unter b das gleiche für 1 cm, unter c die Tiefe in der die Schwankung auf den $e$ten (2,7) Teil abgesunken ist. Man sieht, daß die Eindringungstiefe selbst bei $n = 10^6$ noch recht groß im Verhältnis zu den molekularen Dimensionen, aber schon bei $n = 10^3$ verschwindend gegen die Bogen-(Funken-)Dimensionen ist.

Tabelle.

n	a	b	c
10^3	$1:2 \cdot 10^4$	$1:2,5 \cdot 10^{43}$	0,01 cm
10^4	$1:1 \cdot 10^{13}$	$1:2 \cdot 10^{130}$	0,003 „
10^5	$1:2,5 \cdot 10^{43}$	$1:2 \cdot 10^{434}$	0,001 „
10^6	$1:2 \cdot 10^{130}$	$1:8 \cdot 10^{1302}$	0,0003 „
10^7	$1:2 \cdot 10^{434}$	$1:9 \cdot 10^{4342}$	0,0001 „

(Eingegangen 12. Mai 1919.)

Kopfwelle und Knallabstandslinien.

Von A. Timpe.

Die Erscheinung des Doppelknalls bei Flachbahngeschützen hat im Kriege dazu geführt, die Gestalt der den Geschoßknall hervorbringenden Kopfwelle und der sogenannten Linien gleichen Knallabstandes genauer zu studieren. Unter einer Linie gleichen Knallabstandes versteht man den Ort aller Beobachter, für die der Zeitabstand zwischen Geschoßknall und Mündungs- oder Geschützknall einen bestimmten Wert p hat. Die nachstehenden Ableitungen haben sich für die Beantwortung der bezeichneten Fragestellung und anschließende Untersuchungen als brauchbar erwiesen.

Die Flugbahn des Geschosses werde bis zum „Loslösungspunkte", in dem die Geschoßgeschwindigkeit v unter Schallgeschwindigkeit c sinkt, als geradlinig und horizontal angenommen. Zum Bahnpunkte I, der vom Geschütze O den Abstand s hat, gehöre die Flugzeit t und die Geschwindigkeit v. Wir wollen die Form der Geschoßknallwelle K für den Zeitpunkt T bestimmen und bilden zu dem Zweck nach dem Huyghensschen Prinzip das Umhüllungsgebilde der von den Erschütterungspunkten I ausgehenden Elementarwellen, deren jede die Zeitspanne $T-t$ für ihre Ausbreitung zur Verfügung hat. Für die einzelne Welle bzw. ihren Schnitt mit der Horizontalebene gilt (s. Fig. 1):

$$f(x, y, s) = (x-s)^2 + y^2 - c^2(T-t)^2 = 0. \quad (1)$$

Zur Bestimmung der Enveloppe haben wir zu setzen:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -2(x-s) + 2c^2(T-t)\frac{dt}{ds} = 0, \quad (2)$$

wobei

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}.$$

Wir schreiben:

$$(x-s)^2 + y^2 = c^2(T-t)^2 \quad (1')$$

$$(x-s)^2 = c^4(T-t)^2 \cdot \frac{1}{v^2} \quad (2')$$

und erhalten

$$y^2 = c^2(T-t)^2 \cdot \left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right),$$

$$x = s + c^2(T-t) \cdot \frac{1}{v}$$

als Parameterdarstellung der Kopfwellenfläche. Hierin sind t und v als gegebene (etwa aus der Schußtafel zu entnehmende) Funktionen des Parameters s anzusehen.

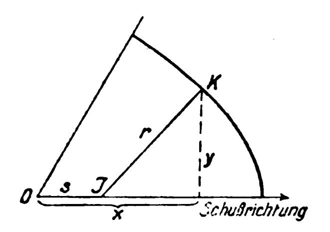


Fig. 1.

Da

$$\frac{x-s}{\sqrt{(x-s)^2+y^2}}=\frac{c}{v},$$

$$\sqrt{(x-s)^2+y^2}=c\,(T-t),$$

so ergibt sich K am einfachsten durch Abtragen der Strecke

$$r=c\cdot(T-t)$$

auf dem von I auslaufenden Strahle, der mit der Schußrichtung den Winkel φ bildet, wo

$$\cos\varphi=\frac{c}{v}. \tag{3}$$

Diese jeweils einem bestimmten s entsprechenden Strahlen bezeichnen wir kurz als die „Schallstrahlen".

Angesichts dieser einfachen Darstellungsform für die Kopfwellen liegt es nahe, für die weiteren Betrachtungen die jedem Punkt K zugeordneten Größen s und r als seine Koordinaten anzunehmen. Die Aufgabe, die Linien gleichen Knallabstandes p zu bestimmen, werden wir als gelöst ansehen, wenn wir auf jedem Schallstrahl s den Abschnitt r angeben können, in dessen Endpunkt der Knallabstand den verlangten Wert p hat.

Aus der Parameterdarstellung der Kopfwelle ergibt sich zunächst

$$x^2+y^2=s^2+2\,s\,c^2(T-t)\cdot\frac{1}{v}+c^4(T-t)^2\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{v^2}-c^4(T-t)^2\cdot\frac{1}{v^2}+c^2(T-t)^2$$

oder

$$x^2+y^2=s^2+2\frac{s\,c^2}{v}(T-t)+c^2(T-t)^2.$$

Aus dieser Beziehung gewinnen wir die Zeit T', die der Mündungsknall zum Durchlaufen der Strecke

$$OK=\sqrt{x^2+y^2}$$

braucht:

$$T'=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}=\sqrt{\frac{s^2}{c^2}+\frac{2s}{v}(T-t)+(T-t)^2}.$$

Für den Knallabstand

$$p=T'-T$$

ergibt sich daher

$$p=\sqrt{\frac{s^2}{c^2}+\frac{2s}{v}(T-t)+(T-t)^2}=T. \tag{4}$$

Um zu den Kurven gleichen Knallabstandes zu gelangen, bilden wir:

$$(p+T)^2=p^2+2pT+T^2=\frac{s^2}{c^2}+$$
$$+\frac{2s}{v}(T-t)+T^2-2Tt+t^2;$$

$$2T\left(t-\frac{s}{v}+p\right)=\frac{s^2}{c^2}-\frac{2s}{v}t-p^2+t^2;$$

$$T=\tfrac{1}{2}\frac{\frac{s^2}{c^2}-\frac{2s}{v}t-p^2+t^2}{t-\frac{s}{v}+p}.$$

$$T-t=\tfrac{1}{2}\frac{\frac{s^2}{c^2}-\frac{2s}{v}t-p^2+t^2-2t^2+\frac{2s}{v}t-2pt}{t-\frac{s}{v}+p}$$

$$=\tfrac{1}{2}\frac{\frac{s^2}{c^2}-(p+t)^2}{t-\frac{s}{v}+p}.$$

Auf dem Schallstrahl s erhalten wir somit den einen bestimmten Knallabstand p entsprechenden Abschnitt:

$$r=\frac{c}{2}\frac{\frac{s^2}{c^2}-(p+t)^2}{t-\frac{s}{v}+p}. \tag{5}$$

Indem wir s variieren lassen, erhalten wir die Gesamtheit der durch den Knallabstand p ausgezeichneten Punkte.

Zu jedem Schallstrahl s gehört für unbegrenzt wachsendes r ein Grenzwert p_∞, dem hierbei der Knallabstand p zustrebt; wir erhalten ihn, indem wir in (5) rechter Hand den Nenner = Null setzen:

$$p_\infty=\frac{s}{v}-t. \tag{6}$$

Man kann dies auch so ausdrücken, daß man sagt: Der Schallstrahl s ist Asymptote der durch den Parameter p_∞ gekennzeichneten Knallabstandslinie.

Zu diesem Ergebnis führt übrigens auch eine einfache Sonderbetrachtung (Fig. 2).

Für einen sehr weit entfernten Punkt K können die Linien OK und IK als gleichlaufend angesehen werden, so daß

$$\cos KOI=\frac{c}{v}.$$

OK ist der Weg des Mündungsknalles. Machen wir auf KO die Strecke $KI'=KI$, so gilt für

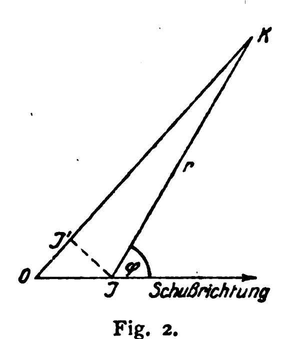


Fig. 2.

$I'K$ und IK die gleiche Schallzeit, und der zu K gehörige Knallabstand p ist gleich dem Unterschiede der auf OI' entfallenden Mündungsknallzeit und der zu I gehörenden Geschoßflugzeit t:

$$p_\infty = \frac{OI'}{c} - t = \frac{OI \cos\varphi}{c} - t$$

$$= \frac{s\frac{c}{v}}{c} - t;$$

$$p_\infty = \frac{s}{v} - t. \qquad (7)$$

Außer den Schnittpunkten mit den Schallstrahlen kann man also für jede Knallabstandslinie den Ursprungspunkt auf der Flugbahn[1]) und die Asymptote bestimmen.

Aus der Schußtafel kann man die t-Werte, die zu den von 100 zu 100 m wachsenden s gehören, unmittelbar entnehmen; für die v-Werte kann man in Annäherung die verzeichneten Endgeschwindigkeiten einsetzen.

Um die gewünschten Ursprungspunkte und

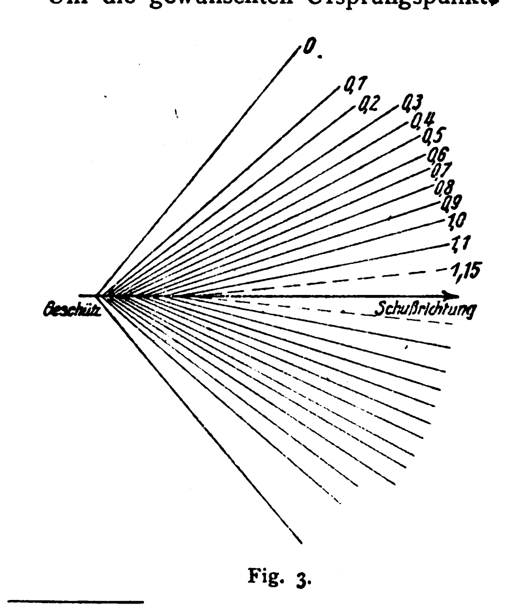


Fig. 3.

1) Gemäß $p_0 = \frac{s}{c} - t$.

Asymptoten der Knallabstandslinien $p = 0,1$; 0,2 ..... sec zu erhalten, müssen geeignete graphische Interpolationen angewendet werden.

Die solcher Weise gefundenen Kurven (Fig. 3) zeigen einen sehr gestreckten Verlauf, können also weithin durch ihre Asymptoten angenähert ersetzt werden und haben auf der Flugbahn Spitzen mit endlichen Winkeln. Bei den Kurven mit niederer Bezifferung sind diese Spitzen konkav zur Schußrichtung gestaltet, bei den anderen konvex; letztere zeigen demgemäß einen Wendepunkt.

(Eingegangen 12. Mai 1919.)

Die Nutationen des unsymmetrischen Kreisels.

Von R. Grammel.

Wenn man einem Demonstrationskreisel üblicher Bauart[1]), der in einem Punkte seiner Symmetrieachse (Figurenachse) außerhalb des Schwerpunktes gestützt ist, seine Rotationssymmetrie dadurch nimmt, daß man auf dem Schwungring, diametral gegenüber, Zusatzmassen anbringt (so daß also der Schwerpunkt nach wie vor auf der Figurenachse bleibt), so bemerkt man, daß die Präzession, welche die Figurenachse bei sehr raschen Eigendrehungen langsam um die Lotlinie beschreibt, von kleinen Nutationen begleitet ist. Eine genauere Beobachtung zeigt, daß diese Nutationen sich stark von denjenigen beim symmetrischen Kreisel unterscheiden. Durch geschickte Wahl des Anfangsstoßes kann man es mitunter erreichen, daß die sphärische Kurve, die das eine Ende der Figurenachse, die Kreiselspitze, beschreibt, das Aussehen von Fig. 2 bis 4 besitzt. Diese Figuren stellen so ziemlich die einfachsten Bilder dar, die beim unsymmetrischen Kreisel überhaupt auftreten können. Meistens ist die beobachtete Kurve viel verwickelter, etwa in der Art der Fig. 5.

Ich möchte zeigen, daß diese scheinbar komplizierten Bewegungen einem sehr durchsichtigen Prinzip untergeordnet sind, welches früher in der theoretischen Astronomie eine große Rolle gespielt hat. Der Einfachheit halber beschränke ich mich auf den Fall, daß die Figurenachse angenähert wagerecht präzessiert[2]).

1) Besonders gut eignet sich für unsere Beobachtung der Prandtlsche Kreisel (vgl. F. Pfeiffer, Zeitschr. f. Math. u. Physik 60, 337, 1912) sowie der Maxwellsche (vgl. M. Winkelmann, Zur Theorie des Maxwellschen Kreisels, Diss. Göttingen 1904), weniger gut der vielgebrauchte Fesselsche Apparat.

2) Über die mehr mathematische Theorie anderer Präzessionen soll an anderer Stelle berichtet werden.

Legen wir vom Stützpunkt aus in die drei Hauptträgheitsachsen ein xyz-System, bezeichnen mit ABC die drei Hauptträgheitsmomente, mit pqr die Komponenten des Drehvektors, mit xyz die Koordinaten einer raumfesten Marke lotrecht über dem Stützpunkt etwa in der Entfernung 1 davon, mit $\vartheta\varphi\psi$ die in üblicher Weise definierten Eulerschen Winkel, und legen wir den Schwerpunkt in die Entfernung s vom Stützpunkt auf die positive x-Achse, so gelten bei einem Kreiselgewicht G mit der Abkürzung $Q = sG$ und unter Außerachtlassung aller dissipativen Kräfte die 6 kinematischen und die 3 kinetischen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= ry - qz\\ \dot{y} &= pz - rx\\ \dot{z} &= qx - py\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= q\cos\varphi - r\sin\varphi\\ \dot{\varphi} &= p - (q\sin\varphi + r\cos\varphi)\operatorname{ctg}\vartheta\\ \dot{\psi}\sin\vartheta &= q\sin\varphi + r\cos\varphi\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}A\dot{p} - (B-C)\,qr &= 0\\ B\dot{q} - (C-A)\,rp &= Qz\\ C\dot{r} - (A-B)\,pq &= -Qy\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

mit der Bedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \qquad (4)$$

Voraussetzungsgemäß sehen wir von jetzt an q und r als klein gegen p, und x als klein gegen y und z an, wonach die zweite und dritte Gleichung (1), die zweite (2), die erste (3), sowie (4) sich zu

$$\left.\begin{aligned}\dot{y} = pz,\ \ \dot{z} = -py\\ \dot{\varphi} = p,\ \ \dot{p} = 0\\ y^2 + z^2 = 1\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

vereinfachen. Die Eigengeschwindigkeit ist also merklich konstant. Indem wir — worin keine Einschränkung liegt — die Bewegung mit

$$0 = y = q = \varphi = \psi$$

beginnen lassen, erhalten wir durch eine Reihe leicht auszuführender Integrationen aus (5) und (3)

$$\begin{aligned}y = \sin pt,\ \ z = \cos pt\\ q = b\sin\varrho t + h\sin pt\\ r = c\cos\varrho t + k\cos pt\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\varrho = p\sqrt{\frac{(B-A)(C-A)}{BC}} \qquad (|\varrho| < |p|) \qquad (6)$$

$$h = \frac{Q}{Ap}\,\frac{2C-A}{B+C-A},\quad k = \frac{Q}{Ap}\,\frac{2B-A}{B+C-A}$$

und der Bedingung für die Integrationskonstanten

$$\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{C}{B}\,\frac{C-A}{B-A}} = \sigma, \qquad (7)$$

wo σ noch eine Abkürzung bedeutet.

Damit ϱ reell, die Nutationsamplitude also dauernd klein, die Präzession mithin stabil ist, darf A nicht das mittlere Hauptträgheitsmoment sein, ein Ergebnis, das durchaus zu erwarten war und sich leicht beobachten läßt.

Wir zerspalten die Konstanten

$$\begin{aligned}b &= -(p+\varrho)\,b_1 + (p-\varrho)\,c_1\\ c &= (p+\varrho)\,b_1 + (p-\varrho)\,c_1\end{aligned}$$

mit der aus (7) fließenden Bedingung

$$\frac{b_1}{c_1} = \frac{p-\varrho}{p+\varrho}\,\frac{1-\sigma}{1+\sigma}. \qquad (8)$$

Dann liefert eine weitere Integration aus der ersten und letzten Gleichung (2)

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= \vartheta_1 + a_1\cos 2pt + b_1\cos(p+\varrho)t +\\ &\quad + c_1\cos(p-\varrho)t\\ \psi &= \frac{Qt}{Ap} + a_1\sin 2pt + b_1\sin(p+\varrho)t +\\ &\quad + c_1\sin(p-\varrho)t.\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Hierbei ist ϑ_1 eine von $\pi/2$ nur wenig verschiedene Konstante und

$$a_1 = \frac{h-k}{4p} = \frac{Q}{2Ap^2}\,\frac{C-B}{B+C-A} \qquad (10)$$

eine Abkürzung.

Zur Deutung des Inhalts der Gleichungen (9) fasse man entsprechende Glieder rechts zusammen: die ersten bezeichnen die Präzession; die zweiten bis vierten stellen die Nutationen vor, und zwar bestehen diese Nutationen, vom Standpunkt eines mitpräzessierenden Beobachters aus beurteilt, aus drei superponierten, im Sinne der Eigendrehung zirkularpolarisierten Schwingungen von den Frequenzen $2p$, $p+\varrho$ und $p-\varrho$ und den Halbmessern (Amplituden) a_1, b_1 und c_1.

Es liegt hier also eine Epizykelbewegung von derselben Art vor, wie sie das Ptolemäische System zur Erklärung der Planetenbewegung benützt hat. Die Bahn der Kreiselspitze ist eine Epizykel dritter Ordnung: sie bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit $2p$ auf einem Kreise a_1; dessen Mittelpunkt mit $p+\varrho$ auf einem Kreise b_1; dessen Mittelpunkt mit $p-\varrho$ auf einem Kreise c_1; und schließlich dessen Mittelpunkt mit der Präzessionsgeschwindigkeit Q/Ap auf einem wagerechten Kreis um die Lotlinie.

Sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich, so vereinfacht sich dieses Bild der Bewegung. Ist zunächst $A = C \neq B$, so wird $\varrho = 0$, $\sigma = 0$, $b_1 = c_1$. Die Nutationen des halbsymmetrischen Kreisels (Eigendrehung um eine äquatoriale, den Schwerpunkt tragende Achse) sind Epizykeln zweiter Ordnung mit den Frequenzen p und $2p$. Ist dagegen $A \neq B = C$, so kehrt man mit $a_1 = 0$, $\sigma = 1$, $b_1 = 0$ natürlich zum

symmetrischen Kreisel zurück, dessen Nutationen als Epizykeln erster Ordnung (sphärische Zykloiden) bezeichnet werden können, mit der Frequenz $p - \varrho = Ap/B$.

Es muß aber beachtet werden, daß nicht jede beliebige Epizykel zweiter bzw. dritter Ordnung als Bahn der Kreiselspitze möglich ist. Vielmehr wird im ersten Falle die Frequenz des Kreisels a_1 doppelt so groß als die des Kreisels b_1; im zweiten Falle ist die Summe der Frequenzen der Kreise b_1 und c_1 gleich der Frequenz des Kreises a_1. Dies hat zur Folge, daß beim halbsymmetrischen Kreisel immer eine starke und eine schwache Nutationsschwingung aufeinander folgen (Fig. 1). Die

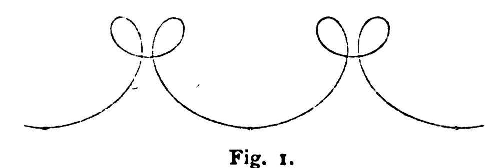


Fig. 1.

Nutation des unsymmetrischen Kreisels setzt sich, solange p und ϱ kommensurabel sind, ebenfalls aus unter sich kongruenten, in sich symmetrischen Stücken zusammen, die man wohl als Schwebungen[1]) bezeichnen könnte. Auf jede Schwebung entfällt beim halbsymmetrischen Kreisel je eine volle Eigendrehung; beim unsymmetrischen umfaßt die Schwebung $np/(p - \varrho)$ Eigendrehungen, falls $2np$ und $n(p + \varrho)$ die kleinsten multiplen Beträge von $2p$ und $p + \varrho$ sind, in welchem $p - \varrho$ ganzzahlig aufgeht (Fig. 2 bis 4). Wenn p und ϱ inkommensurabel

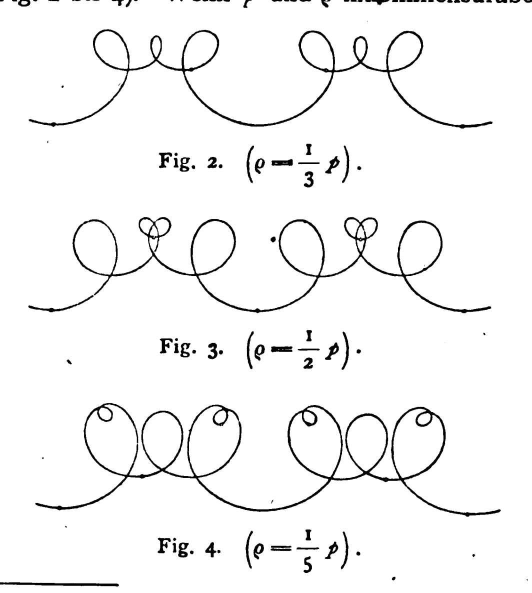


Fig. 2. $\left(\varrho = \frac{1}{3} p\right)$.

Fig. 3. $\left(\varrho = \frac{1}{2} p\right)$.

Fig. 4. $\left(\varrho = \frac{1}{5} p\right)$.

1) Auf solche Schwebungen hat beim nahezu symmetrischen Kreisel schon M. Winkelmann (a. a. O. S. 54) hingewiesen.

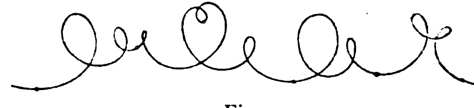


Fig. 5.

sind, so ist die Schwebungsdauer unendlich groß (Fig. 5), und die Bewegung erreicht ihren Anfangszustand nie wieder.

Jede Eigendrehung (in Fig. 1 bis 5 liegt eine solche je zwischen zwei aufeinander folgenden beringten Punkten) erzeugt i. a. zwei Schleifen, die sich natürlich je nach den Anfangsbedingungen auch spitzen oder strecken können.

Man bemerkt leicht, daß die Nutationen des Kelvinschen Gyrostaten[1]) bei angenähert wagerechter Figurenachse fast völlig die gleichen sind. Werden nämlich mit ψ das Azimut der Schneide, auf welcher der Gyrostat steht, und mit ε (statt $\pi/2 - \vartheta$) die Neigung seiner Figurenachse gegen die Wagerechte bezeichnet, und bedeutet ε_0 den kleinen Mittelwert dieser Neigung, so ändert sich lediglich die erste, aber gar nicht benützte Gleichung (1), wogegen in (3) Q in erster Annäherung durch $\varepsilon_0 Q$ zu ersetzen ist, unter s jetzt die Entfernung des Schwerpunkts von der Schneide verstanden. Infolgedessen kommt statt (9)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 + a_1 \varepsilon_0 \cos 2pt + b_1 \cos(p+\varrho)t + \\ &\quad + c_1 \cos(p-\varrho)t \\ \psi &= \frac{\varepsilon_0 Q t}{Ap} + a_1 \varepsilon_0 \sin 2pt + b_1 \sin(p+\varrho)t + \\ &\quad + c_1 \sin(p-\varrho)t. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Ein Unterschied gegen vorhin tritt nur dann ein, wenn der Gyrostat mit genau wagerechter Achse aufgesetzt worden ist. Dann verschwindet mit ε_0 außer der Präzessionsgeschwindigkeit auch die Amplitude der einen Zirkularschwingung, und die Bahn der Kreiselspitze ist eine gewöhnliche Epizykloide, welche sowohl beim halbsymmetrischen ($A = C$), wie beim symmetrischen ($B = C$) Gyrostaten in einen Kreis übergeht, und zwar durchläuft der halbsymmetrische seinen Nutationskreis mit der Eigendrehungsgeschwindigkeit p (so daß er dem Kreismittelpunkt immer die gleiche Seite zukehrt), der symmetrische im Verhältnis A/B schneller bzw. langsamer, je nachdem er abgeplattet oder verlängert ist.

1) Thomson u. Tait, Treatise on Natural Philosophy, 2. ed. (1886), I, art. 345x.

Halle, Mai 1919.

(Eingegangen 16. Mai 1919.)

Zwei mit Hilfe der neuen Verstärker entdeckte Erscheinungen.

Von H. Barkhausen.

1. Geräusche beim Ummagnetisieren von Eisen.

Durch die Verbesserung der neuen Vakuumröhren-Verstärker ist es leicht möglich, eine 10000 fache Strom-, d. h. eine 100-millionenfache Leistungsverstärkung zu erzeugen. Dadurch können noch elektrische oder magnetische Wechselfelder wahrnehmbar gemacht werden, die sich sonst wegen ihrer Schwäche unserer Kenntnis vollkommen entziehen würden. Es ist für sie gewissermaßen ein Mikroskop erfunden worden, und zwar gleich eins mit 10000 facher Vergrößerung! So hat W. Schottky kürzlich darauf hingewiesen[1]), daß man bei großen Verstärkungen die Elektronen in den Verstärkerröhren selbst gewissermaßen fliegen hören kann, da der durch sie gebildete Strom gemäß der kinetischen Gastheorie spontane Schwankungen ausführt.

Eine ähnliche Erscheinung entdeckte ich vor zwei Jahren bei Gelegenheit von Versuchen, die ich gemeinsam mit Herrn Dr. Tuczek anstellte: Eisen gibt beim Ummagnetisieren ein Geräusch; bei ganz gleichmäßiger Änderung der magnetomotorischen Kraft klappen die Molekularmagnete sprungweise in ihre neue Lage und erzeugen dadurch in einer darüber geschobenen Spule unregelmäßige Induktionsstöße, die sich im Telephon als Geräusch erkenntlich machen.

Ich habe diese Erscheinungen jetzt etwas näher verfolgt. Fig. 1 zeigt die einfache Ver-

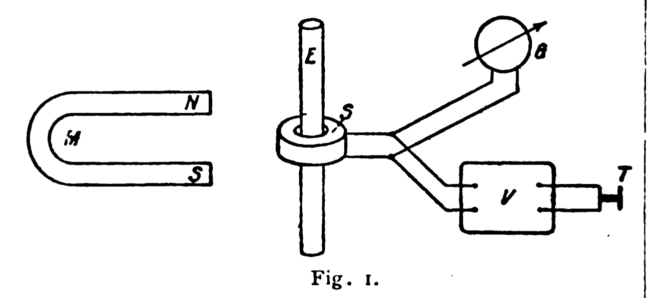


Fig. 1.

suchsanordnung. Die zu untersuchenden Eisenkerne E wurden in eine kleine Spule S von 25 mm Durchmesser und 300 Windungen hinein gesteckt. An die Spule war einerseits ein Telephon T über einen 10000 fachen Verstärker V angeschlossen, anderseits ein Spiegelgalvanometer G. Letzteres war so stark gedämpft, daß ein Ausschlag viele Sekunden lang fast unverändert bestehen blieb. Dann zeigt praktisch jede Änderung des Ausschlags eine ihm proportionale Änderung des die Spule durchsetzenden Induktionsflusses an. Bei Bewegung des 10 cm langen, U-förmigen Magneten M konnte so gleichzeitig die Änderung der Induktion und die Stärke des Geräusches beobachtet werden. Der Anteil des Eisenkerns an ersterer wurde dadurch bestimmt, daß der meist wesentlich schwächere Galvanometerausschlag bei gleicher Magnetbewegung, aber ohne Eisenkern beobachtet und abgezogen wurde. Die Bewegung geschah mit der Hand. Die Genauigkeit war daher nicht sehr groß.

Zunächst zeigte sich, daß das Geräusch um so schwächer wurde, je dicker die Kerne waren. 20 mm dicke Kerne gaben schließlich gar kein Geräusch mehr. Der Grund ist, wie später gezeigt wird, in der zu geringen Änderung der Induktion (pro Flächeneinheit) zu suchen; der kleine Magnet genügte nicht, dickere Kerne hinreichend stark zu magnetisieren. So gab ein dicht liegendes Paket Bleche ein schwächeres Geräusch, als ein einzelnes Blech aus dem gleichen Paket. Am besten geeignet waren 1 bis $^1/_2$ mm dicke Drähte oder 5 bis 10 mm breite dünne Blechstreifen. Bei Anwendung stärkerer Magnete wird man auch stärkere Eisenkerne verwenden können.

Weiter wurde an einer großen Zahl verschiedener Kerne festgestellt, daß das Geräusch um so stärker war, je weicher das Eisen war. Gehärteter Stahl gab fast gar kein Geräusch, weiches, geglühtes Eisen ein besonders starkes. Hierfür konnte aber nicht die bekanntlich geringere Magnetisierbarkeit des Stahls die Ursache sein, die sich auch durch einen etwas geringeren Galvanometerausschlag bei gleicher Magnetstellung bemerkbar machte. Denn der Unterschied im Geräusch war auch vorhanden, wenn das weiche Eisen 2- bis 3 mal schwächer magnetisiert wurde. Ganz weiches Eisen gab noch ein Geräusch, wenn der Magnet in mehr als $^1/_2$ m Abstand bewegt wurde. In größerer Nähe war bei ihm das Geräusch so stark, daß es auch ohne Verstärker im Telephon deutlich hörbar war. Der Unterschied zwischen verschiedenen Eisensorten ist so groß, daß man darauf geradezu eine Methode zur Eisenuntersuchung aufbauen könnte.

Die Änderung des Magnetfeldes wurde meist so gemacht, daß der Magnet entweder seitwärts entfernt, um 180° gedreht und wieder genähert wurde, oder so, daß er in einem bestimmten Abstande, besonders in großer Nähe, langsam um 180° herumgedreht wurde. Das Geräusch war bei dieser Bewegung an verschiedenen Stellen sehr verschieden stark. Die Änderung des Galvanometerausschlages entsprach nicht immer der Geräuschstärke. Hielt man mit einer Än-

1) Vgl. Verh. d. D. Phys. Ges. **20**, 71, 1918.

derung in Richtung R (Fig. 2) an einem Punkte A an, war sofort alles ruhig und blieb auch vollkommen ruhig, wenn man von A eine Rückwärtsbewegung bis B machte, überhaupt den Magneten zwischen A und B beliebig hin und her bewegte. Sobald man aber die Lage A mit dem Magneten nur ein wenig überschritt, setzte ganz plötzlich das volle Geräusch wieder ein. Dabei wurden bei weiterer Bewegung in Richtung R die Grenzen A und B gewissermaßen nach rechts mit weiter geschoben. Die Grenze A blieb auch dann bei beliebiger Bewegung zwischen A und B überraschend scharf erhalten. Die Grenze B war unscharf, das Geräusch schwoll langsam an, wenn man über B hinaus, etwa bis C, zurückging. Gleichzeitig wurde dann auch die Grenze A unscharf, etwa in der in Fig. 3 angedeuteten Weise. — Das Galvanometer zeigte auch im Bereich zwischen A und B ziemlich starke Änderungen. Es war in seiner Bewegung auch kein Sprung zu bemerken, wenn A überschritten wurde und des Geräusch plötzlich einsetzte. Doch war die Beobachtungsmethode nicht sonderlich genau.

Bei den dicken Kernen wurde wahrscheinlich selbst bei stärkster, mit dem Magneten herstellbarer Änderung das Gebiet $A—B$ nicht überschritten. Daher konnte bei diesen, wie oben bemerkt, kein Geräusch eintreten.

Man kann sich dies eigentümliche Verhalten des Eisens vielleicht in folgender Weise erklären: Die einzelnen Molekularmagnete schließen sich zu mehr oder weniger großen Verbänden mit mehr oder weniger großer Stabilität zusammen. Ein Geräusch entsteht nur bei der Sprengung oder Bildung größerer Verbände. Bei einer Bewegung gemäß Fig. 2 ändern sich in dem Bereich

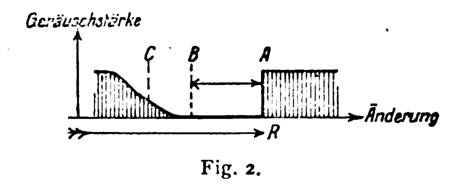


Fig. 2.

$A—B$ nur die kleinen Verbände, es entsteht kein Geräusch. Bei einer Bewegung über B hinaus werden allmählich auch die mittleren und größeren Verbände in Richtung $-R$ in Mitleidenschaft gezogen. In Richtung $+R$ sind dagegen alle kleineren und mittleren Verbände schon bei der ersten, von weit her bis A gekommenen Änderung überwunden. Es sind nur noch die größeren, in dieser Richtung stabileren Verbände übrig geblieben, die erst bei einer weiteren Änderung über A hinaus überwunden werden. — In guter Übereinstimmung mit dieser Vorstellung hört man bei Änderung über B hinaus ein gleichmäßiges, leises Sausen, während über A hinaus ein lautes prasselndes Geräusch einsetzt, in dem man bei sehr langsamer Änderung, z. B. wenn der Magnet in großer Entfernung bewegt wird, einzelne knallartige Stöße deutlich unterscheiden kann. — Im Stahl scheinen die Molekularmagnete nicht die Fähigkeit zu haben, sich zu größeren Verbänden zusammenzuschließen. Man hört bei ihm immer nur das leise Sausen. — Auch das durch Fig. 3 dargestellte Verhalten

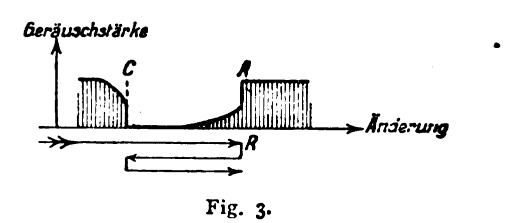


Fig. 3.

ist mit dieser Vorstellung in Übereinstimmung. Die bei der Rückwärtsbewegung (von B bis C in Fig. 2) ummagnetisierten schwachen Verbände werden in Richtung R wieder überwunden, bevor A erreicht ist.

Nicht recht erklärlich ist eine Erscheinung, die bei einem Streifen aus papierdünnem, ganz weichem Eisenblech eintrat. Eine Drehung des Magneten um 180° ergab das stärkste Geräusch, wenn der Magnet einen Abstand von 10 cm hatte. Beim Drehen in ganz geringem Abstande war das Geräusch merkwürdigerweise ganz schwach, auch wenn der Magnet ganz langsam herumgedreht wurde.

Eine genauere Untersuchung wäre, auch im Hinblick auf die praktische Anwendung, beim Magnetdetektor von Marconi und beim Telegraphon von Poulsen erwünscht.

2. Pfeiftöne aus der Erde.

Während des Krieges wurden Verstärker auf beiden Seiten der Front in ausgedehntem Maße zum Abhören feindlicher Ferngespräche benutzt. Infolge schlechter Isolation, zum Teil auch schon durch Induktionswirkung, breiten sich vagabundierende Erdströme in der weiteren Umgebung der Fernsprechleitung aus. Wenn diese auch äußerst schwach sind, so können sie doch durch die enorme, herstellbare Verstärkung noch hörbar gemacht werden. Die Abhörschaltung zeigt Fig. 4. Die beiden, meist einige 100 m weit auseinander liegenden Erdungen A, B führen einfach über den Verstärker zum Telephon.

Zu gewissen Zeiten hört man im Telephon einen ganz merkwürdig pfeifenden Ton. An der Front hieß es, man höre „die Granaten fliegen". Soweit eine Bezeichnung durch Buch-

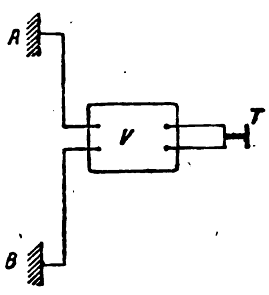


Fig. 4.

staben möglich ist, klang der Ton etwa wie piou. Physikalisch war es meiner Ansicht nach eine Schwingung von annähernd gleich bleibender Amplitude, aber sich sehr schnell ändernder Frequenz, etwa so, wie in Fig. 5 gezeichnet ist,

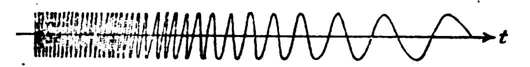


Fig. 5.

beginnend mit den höchsten hörbaren Tönen, die ganze Tonskala durchlaufend und mit den tiefsten hörbaren Tönen abklingend. Durch die Eigenschaften des Verstärkers werden dabei die Töne um die Frequenz 1000 herum besonders stark hervorgehoben. Der ganze Vorgang dauerte fast eine volle Sekunde lang. An manchen Tagen waren diese Pfeiftöne so stark und häufig, daß sie ein Abhören zeitweise unmöglich machten. Die Erscheinung hing sicher mit meteorologischen Einflüssen zusammen. Sie trat besonders des Vormittags an warmen Tagen im Mai und Juni auf, unterschied sich aber vollständig von den normalen atmosphärischen Störungen, die nur ein Knacken oder Brodeln im Telephon erzeugen. Die Erdelektroden, die gelegentlich auch Geräusche geben, können ebenfalls kaum die Ursache für die Pfeiftöne sein. Zunächst ist ein meteorologischer Einfluß auf oft tief vergrabene Erddrähte sehr unwahrscheinlich; dann traten ganz dieselben Pfeiftöne auch im Meere bei in Seewasser tauchenden Kupferelektroden auf. Und wie sollte schließlich ein so merkwürdiger, periodischer Vorgang an den Elektroden entstehen?

Viel näher liegt der Gedanke, daß der Verstärker selbst, etwa durch eine besonders starke atmosphärische Störung angestoßen, derartige Eigenschwingungen erzeugt. Ich habe mich aber vergeblich bemüht, im Laboratorium durch starke Schaltstöße und direkte Funkenüberschläge an einem solchen Verstärker Pfeiftöne hervorzurufen. Auch sind mir bei meinen zahlreichen Versuchen mit den Verstärkern sonst niemals solche Pfeiftöne begegnet.

Wodurch freilich in der Erde und im Meere zeitweise schwache Wechselströme so eigentümlicher Art entstehen können, erscheint zunächst unerklärlich. Vielleicht können hier weitere Mitteilungen aller derer, die mit diesen Apparaten zu tun gehabt haben, zur Aufklärung beitragen.

Dresden, Institut für Schwachstromtechnik, Mai 1919.

(Eingegangen 17. Mai 1919.)

Der Böenmesser, ein neues Instrument zur hydrodynamischen Untersuchung des Windes.

Von R. Seeliger.

(Mit Tafel XIV.)

Bekanntlich ist die Geschwindigkeit des Windes nicht zeitlich konstant oder nur langsam veränderlich, sondern sie schwankt dauernd in raschen Pulsationen um einen jeweiligen Mittelwert, eben um die „Windgeschwindigkeit“ im gewöhnlichen Sprachgebrauch. Erst seit wenigen Jahren hat man diesen raschen Pulsationen — die man als „Struktur des Windes“ bezeichnet — größere Aufmerksamkeit zugewandt; die bis jetzt vorliegenden Resultate einer genaueren Analyse haben auch bereits manche bemerkenswerte Gesetzmäßigkeiten ergeben und jedenfalls gezeigt, daß es sich — abgesehen von der großen praktischen Bedeutung für die Flugtechnik — um einen Vorgang handelt, der auch den Physiker interessieren dürfte[1]). An der verhältnismäßig geringen Ausdehnung des Beobachtungsmaterials trägt nun wohl hauptsächlich der Mangel an zur Untersuchung der Windstruktur geeigneten Instrumenten Schuld. Die bis jetzt vorliegenden Apparate, die sogenannten Böenschreiber[2]), sind alle recht kompliziert und kostspielig und erfordern eine stationäre Aufstellung und sorgfältige Wartung. Dagegen fehlt es noch ganz an einem handlichen transportablen Instrument, das etwa von der Größe und konstruktiven Einfachheit der üblichen Windmeßgeräte (Handanemometer mit Schalenkreuz oder Wildsche Stärketafel), nicht nur wie diese die mittlere Windgeschwindigkeit, sondern auch die Größe der genannten raschen Pulsationen bequem zu messen gestattet. Abgesehen von der weitgehenden Verwendungsmöglichkeit in der Praxis der Flugtechnik (ein Ersatz der jetzt üblichen und naturgemäß nur

1) R. Seeliger, Die Struktur des Windes, Die Naturwissenschaften 1917, S. 749.

2) R. Seeliger u. E. Bräuer, Die Methoden zur Untersuchung der Struktur des Windes, Met. Zt. 1918, 30, 82, 124.

rohen Schätzung der Böigkeit des Windes nach dem Gefühl scheint ein dringendes Bedürfnis zu sein), würde ein solches Instrument eine empfindliche Lücke in den Terminbeobachtungen der meteorologischen Stationen auszufüllen ermöglichen und durch regelmäßige Messung nicht nur der mittleren Geschwindigkeit, sondern auch der mittleren Schwankung derselben der wissenschaftlichen Windforschung bisher fehlendes Material verschaffen; vor allem aber würde es durch das Studium der Windstruktur im Freiballon der Theorie Anhaltspunkte von prinzipieller Bedeutung geben können.

Maßgebend für die Konstruktion eines derartigen Instruments sind nun die folgenden allgemeinen Gesichtspunkte. Dasselbe wird prinzipiell wie alle Windmeßgeräte aus einem mechanischen System bestehen müssen, welches durch den Winddruck in Bewegung gesetzt wird und der Forderung genügt, daß diese Bewegung den zeitlichen Variationen des Winddrucks nun nicht nur im Mittel, sondern bis in die Einzelheiten getreu folgt. Dazu ist aber nach bekannten Sätzen über erzwungene Bewegungen hinreichend und notwendig, daß seine Eigenfrequenz — geeignete Dämpfungsverhältnisse vorausgesetzt — groß ist gegen die Frequenz der höchsten harmonischen Komponente der äußeren Kraft (d. h. des Winddrucks), die man noch getreu wiedergegeben zu haben wünscht und die in unserem Falle, selbst für weitgehende Ansprüche zu etwa 5 sec^{-1} anzusehen sein dürfte. Aus praktischen Gründen brächte es nun erhebliche Nachteile mit sich, wenn man das genannte mechanische System direkt dem Wind aussetzen würde. Man wird deshalb in der üblichen Weise den Druck durch ein Staugerät aufnehmen und erreicht dadurch zwei Vorteile, nämlich: 1. Man kann die Stelle, an welcher die Geschwindigkeit des Windes gemessen werden soll, recht bequem in genügende Entfernung von dem in seinen Bewegungen zu beobachtenden mechanischen System verlegen und so alle Störungen ausschalten, welche durch den Körper des Beobachters infolge der Deformation der Stromlinien entstehen können. 2. Man kann durch Verwendung eines geeigneten Staugerätes eine genaue Orientierung gegen die Richtung des Windes unnötig machen; dies ist, da mit den Geschwindigkeitsschwankungen stets auch Richtungsschwankungen verbunden sind, sogar unbedingtes Erfordernis zu einer einwandfreien Messung und ist auf anderem Wege kaum zu erreichen. Als Staugerät, daß etwa in einiger Entfernung über dem Kopf des Beobachters fixiert zu denken ist, habe ich seiner für den vorliegenden Zweck vorzüglichen Eigenschaften wegen eine Doppelstauscheibe benutzt, die von Gerdien und Holm[1]) beschrieben worden ist und deren Angaben bis zu etwa 25° Neigung gegen die Windrichtung praktisch unabhängig vom Neigungswinkel sind.

Es handelte sich nun darum, die vom Staugerät erzeugte Druckdifferenz zu messen. Die übliche Methode der Druckmessung mit einem Flüssigkeitsmanometer ist für ein tragbares Instrument naturgemäß schon deshalb nicht zu verwenden, weil sie eine peinlich genaue Orientierung gegen die Vertikale und eine sehr stabile erschütterungsfreie Aufstellung erfordert. Auch die Verwendung von Membranmanometern führte nach vielen vergeblichen Versuchen zu keinem befriedigenden Resultat, wenigstens nicht für den vorliegenden Zweck, und zwar in erster Linie wegen der Schwierigkeiten, die Bewegung der Membran durch eine gegen Stöße genügend empfindliche Übertragung der Messung zugänglich zu machen. (Wie nebenbei bemerkt sei, eignen sich ihrer vorzüglichen elastischen Eigenschaften wegen Membranmanometer nach meinen Erfahrungen jedoch sehr gut für Böenschreiber, falls eine stabile Aufstellung mit optischer Registrierung z. B. nach dem Vorgang von Nernst und des Physiologen Frank gewählt werden kann.) Die genannten Schwierigkeiten zu beheben ist mir nun durch die folgende Anordnung gelungen, die meines Erachtens noch für viele andere Zwecke als Mikromanometer gute Dienste leisten dürfte, nämlich überall da, wo eine stabile Aufstellung des Druckmeßapparats sich nicht durchführen läßt. Man kann nämlich die statische Druckmessung ersetzen durch eine dynamische, d. h. durch die direkte Messung der Strömungsgeschwindigkeit in einer das Staugerät kurzschließenden Rohrleitung, und zwar im Prinzip einfach dadurch, daß man ein empfindliches Druckpendel (ähnlich der Wildschen Stärketafel) anbringt. Benutzt man als Direktionskraft für dieses nicht die Schwerkraft, sondern elastische Kräfte, so wird man praktisch vollkommen unabhängig von der Orientierung gegen die Vertikale und bei geeigneter Wahl des in die Strömung gebrachten Systems zugleich von äußeren Erschütterungen. Vorzüglich bewährt hat sich nun eine dünne elastische Lamelle[2]), welche an einem Ende festgeklemmt mit dem anderen

1) Gerdien, Ein Apparat zur Untersuchung der Windstruktur (Anemoklinograph). Jahrb. wissenschaftl. Ges. f. Flugtechnik 2, 67—78, 1913/14. — R. Holm, diese Zeitschr. 20, 27, 1919.

2) Der Einfachheit halber benutzte ich zunächst Spaltlamellen aus Glimmer, die in der Praxis aber wohl besser durch Metallstreifen z. B. aus dünnem versilberten Federstahl, zu ersetzen sein werden. In dem benutzten Modellapparat hatte das Glimmerplättchen die Dimensionen $15 \times 2 \times 0{,}013$ mm.

in die Strömung hineinragt und deren Ausbiegungen aus der Gleichgewichtslage in einem Mikroskop mit Okularmikrometer gemessen wird[1]). Die folgende einfache Überschlagsrechnung gibt über die zu erwartenden Verhältnisse hinreichende Auskunft. Natürlich handelt es sich dabei, wie generell gleich bemerkt sei, um nicht mehr als nur eine Abschätzung von Größenordnungen, die aber für unsere Zwecke auch vollkommen genügt. Wo ich durch Messungen im künstlichen Windstrom — ich konnte eine nach dem Muster des Prandtlschen Windkanals gebaute Anordnung auf der ehemaligen Militär-Hauptwetterwarte in Charlottenburg benutzen — einen direkten Vergleich mit der Erfahrung erhalten habe, hat sich jedenfalls hinreichende Übereinstimmung ergeben.

Die von dem Staugerät an den Enden der Rohrleitung erzeugte Druckdifferenz p ist für eine Windstärke von V m/sec gegeben durch

$$p = 0{,}005\, V^2 \text{ mm } Hg = 6{,}5\, V^2 \text{ Dyn/cm}^2. \quad (1)$$

Die mittlere Geschwindigkeit v der Strömung in der Rohrleitung ergibt sich daraus, wenn wir — was der Größenordnung nach hier wohl erlaubt ist — nach Poisseuille rechnen, in cm/sec zu

$$v = \frac{r^2}{8l} p \cdot \frac{1}{\eta} = 0{,}8 \frac{r^2}{l} \frac{V^2}{\eta}, \quad (2)$$

worin r der Radius, l die Länge der Leitung in Zentimetern ist. Wählen wir $2r$ von der Größenordnung 1 cm, l von der Größenordnung 100 cm, so wird

$$v = 0.1\, V^2, \quad (3)$$

beide Geschwindigkeiten nun gemessen in m/sec. Nun betrachten wir eine Lamelle von der Länge λ, von der Breite β und der Dicke δ (mm). Wirkt auf diese am Ende der Längsseite eine Kraft P kg, so ist die Ausbiegung (mm)

$$h = \frac{4\lambda^3}{\delta^3 \beta} \frac{P}{E}. \quad (4)$$

Der Druck auf eine Fläche von 1 qm in einem Luftstrom von der Geschwindigkeit v m/sec ist nun empirisch gefunden worden zu rund 0,1 v^2 [2]) kg, so daß eine Fläche von der Länge $\alpha\lambda$ und der Breite β (entsprechend dem in die Strömung tauchenden Teil unserer Lamelle) den Druck erleidet

$$P = 0{,}1\, v^2 \alpha \lambda \beta \cdot 10^{-6}. \quad (5)$$

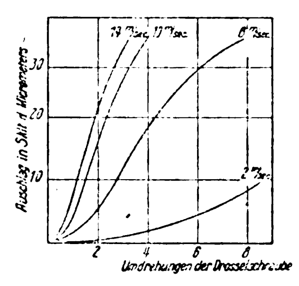
Die Gleichungen 3, 4, und 5 ergeben also für die Ausbiegung bei einer Windgeschwindigkeit V die gesuchte Endformel:

1) Bei richtiger Beleuchtung erscheint die Kante der Lamelle als scharfe leuchtende Linie im Gesichtsfeld.
2) Vgl. etwa Lanchester, Aerodynamik, Bd. I.

$$h = 4 \cdot 10^{-9}\, \alpha \frac{\lambda^4}{\delta^3 E} V^4. \quad (6)$$

Wir wollen nun z. B. verlangen, daß noch bei einer Windgeschwindigkeit von 2 m/sec die Ausbiegung 0,1 mm beträgt. Setzen wir entsprechend etwa den tatsächlichen Verhältnissen $\lambda = 20$, $\alpha = \frac{1}{4}$, $E = 2 \cdot 10^4$ (gültig für Stahl und Glimmer), so bekommen wir für die Dicke δ der Lamelle die Größenordnung 0,01 mm, die sich ohne große Schwierigkeiten praktisch erreichen läßt.

Zugleich erkennt man aus Gl. (6), daß die Elongation mit V sehr rasch ansteigen würde. Um einen genügend großen Meßbereich zu haben bzw. nicht mit verschiedenen Lamellen arbeiten oder zwecks Vergrößerung des Meßbereiches die Empfindlichkeit der Anordnung unnötig herabsetzen zu müssen, ist es deshalb praktisch, die Strömung durch eine Mikrometerschraube abzudrosseln (die etwa direkt in Windgeschwindigkeiten geeicht ist). Es dient dann die Lamelle bei der Messung der mittleren Windgeschwindigkeit sozusagen als Nullinstrument und die Pulsationen bewirken Elongationen um jeweils dieselbe Ausgangslage; ihre Größe wird an der Okularskala abgelesen und die absolute Größe der entsprechenden Geschwindigkeitsschwankungen ist unmittelbar aus den Elongationen und aus der jeweiligen Stellung der Mikrometerschraube mit Hilfe graphisch gegebener Eichkurven zu entnehmen.



Die Genauigkeit der Geschwindigkeitsmessung ergibt sich unmittelbar aus Gl. (6). Ist die im Okularmikrometer noch beobachtbare Verschiebung Δh, so ist nämlich:

$$\frac{\Delta V}{V} = 10^9 \cdot \frac{\delta^3 E}{\lambda^4} \frac{1}{16\alpha} \frac{\Delta h}{V^4}. \quad (7)$$

Setzen wir für Δh etwa 1/50 mm[1]), so er-

1) Es entsprachen bei den Versuchen 28 Skalenteile des Okularmikrometers einer Elongation von 1 mm.

halten wir für die oben angegebene Dimensionierung der Lamelle einen Fehler von nur 4 Proz. bei $V = 2$ m/sec und einen entsprechend kleineren für größere Geschwindigkeiten. Für kleinere Geschwindigkeiten als 2 m/sec sind naturgemäß die prozentuellen Fehler größer (ca. 60 Proz. bei $V = 1$ m/sec) entsprechend der hier gewählten Empfindlichkeit von $h = 0,1$ mm bei $V = 2$ m/sec, doch könnte durch Verwendung nur wenig dünnerer Lamellen — die Dicke δ geht in der dritten Potenz ein — ohne jede praktische Schwierigkeit die Genauigkeit noch erheblich gesteigert werden. Zu bemerken ist ferner, daß die Nullage praktisch absolut konstant ist; durch die Verwendung der Drosselschraube wird eine elastische Überbeanspruchung der Lamelle vermieden, so daß elastische Nachwirkungen in beobachtbarer Größe nicht auftreten. Endlich ist noch ein Wort zu sagen über den Einfluß der Temperatur auf das elastische System und auf die Strömung in dem Meßkanal. Sowohl die geometrischen Dimensionen wie der Elastizitätskoeffizient der Lamelle ändern sich nämlich mit der Temperatur; diese Einflüsse sind jedoch hier vollkommen zu vernachlässigen. Man findet nämlich aus Gl. (6) durch Differentiation nach der Temperatur bei konstantem V und nach Gl. (7) für den Einfluß jener den prozentuellen Fehler zu

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} - \frac{\Delta E}{E}\right), \tag{8}$$

und dieser ist selbst für die praktisch schon extrem große Schwankung von -30^0 auf $+30^0$ nur etwa 1 Proz.[1]), also durchaus zu vernachlässigen. Das Instrument zeigt also auch in diesem Punkt — und zwar ohne eine, z. B. bei Membranmanometern notwendige besondere Temperaturkompensation — sehr befriedigende Eigenschaften.

Störender wird dagegen der zweite oben genannte Temperatureinfluß wirken, da er sich vorläufig nur durch eine rein empirirische Reduktion der Beobachtungen mit Hilfe von Eichkurven eliminieren läßt, die bei verschiedenen Temperaturen aufgenommen sind. Es ist das der Einfluß auf den Koeffizienten η der inneren Reibung und damit auf die Strömungsgeschwindigkeit v im Lamellenrohr. Zur Abschätzung des so entstehenden Fehlers entnehmen wir aus den Gl. (2), (4) und (5), daß cet. par.

$$h \sim 1/\eta^2.$$

1) Über einen anderen Einfluß von Temperatur und Barometerstand auf die Angaben jedes hydrodynamischen Windmessers vgl. die zitierte Arbeit von Bräuer und Seeliger.

Rechnen wir nach der Sutherlandschen Formel für η in Abhängigkeit von der Temperatur, so finden wir die folgenden Werte

t	-30^0	-10^0	0^0	$+10^0$	$+30^0$
h_0/h_t	1,20	1,07	1,00	0,93	0,85

Wesentlich gemildert wird allerdings die Bedeutung dieses Fehlers durch den Umstand, daß für wissenschaftliche Zwecke in erster Linie das Verhältnis der Geschwindigkeitsamplitude zur mittleren Geschwindigkeit interessiert, bei dessen Bildung dieser Fehler herausfällt.

Die Eigenfrequenz des Grundtones der Lamelle endlich ergibt sich nach bekannten Formeln zu

$$N = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\delta}{\lambda^2} \frac{m^2}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{s}}, \tag{9}$$

woraus mit $m = 1,87$, $E = 2 \cdot 10^{12}$, $s = 2,5$ und den oben benutzten Größenverhältnissen $\lambda = 2$ und $\delta = 10^{-3}$ (cm!) der Wert von rund 30 folgt, der also der eingangs aufgestellten Forderung genügt. In Strenge wäre natürlich das System (Lamelle + Luftsäule im Rohr) zu betrachten; da bei den hier in Betracht kommenden Rohrlängen die Frequenz des Grundtones dieser Luftsäule jedoch weit oberhalb der Frequenz der Lamelle liegt, kann man hier wohl auf die sehr komplizierte Theorie des Gesamtsystems verzichten. Die Dämpfung der Lamelle hat sich durch besondere Versuche (Anreißen mit einer feinen Glasspitze unter dem Mikroskop) als hinreichend stark ergeben, nämlich als nahezu aperiodisch. Inwieweit die Dämpfung des Gesamtsystems mit hereinspielt, sollen weitere Versuche ergeben; die bisherigen Erfahrungen scheinen aber zu zeigen, daß Störungen von dieser Seite nicht in Betracht kommen.

In praxi wird man das Instrument natürlich empirisch eichen müssen. Derartige Eichkurven, erhalten in einem künstlichen Windstrom (vgl. oben), dessen Geschwindigkeit mit einem Prandtlschen Staugerät und Toluol-Mikromanometer festgelegt wurde, sind für einen Modellapparat in der umstehenden Figur reproduziert und dürften den typischen Verlauf derselben generell wiedergeben. Sie dienen zur graphischen Konstruktion der für den praktischen Gebrauch bestimmten Eichkurven, welche die mittlere Windgeschwindigkeit und die „Böigkeit des Windes" (maximale Amplitude) unmittelbar zu entnehmen gestatten aus der Ablesung am Okularmikrometer und der Stellung der Drosselschraube.

Das Modellinstrument, welches nach diesen soeben auseinandergesetzten Prinzipien durchkonstruiert wurde, ist auf Tafel XIV in Totalansicht und im Konstruktionsschnitt wiedergegeben, die im wesentlichen wohl ohne weiteres

verständlich sein werden. Die Herstellung hat die Firma C. P. Goerz in Berlin-Friedenau übernommen, welche auch den patentrechtlichen Schutz des neuen Meßprinzips erhalten hat. Über eingehende Versuche werde ich demnächst a. a. O. berichten, da an dieser Stelle wohl nur die mitgeteilten physikalischen Grundlagen interessieren dürften.

Greifswald, Mai 1919.

(Eingegangen 19. Mai 1919.)

BESPRECHUNGEN.

E. Lasker, Die Philosophie des Unvollendbar. gr. 8°. XII u. 626 S. m. 3 Abbildungen. Berlin u. Leipzig, Vereinigung wissenschaftlicher Verleger. 1919. M. 24.—, geb. M. 28.— und Teuerungszuschlag.

Der Inhalt dieses sehr gedankenreichen Buches ist die Darlegung einer Entwickelungs-Philosophie, welche alle Gebiete des Denkens, Wertens und Handelns von den Grundtatsachen des Lebens aus begreifen will.

Den Prozeß des Fortschreitens der Wissenschaft faßt Lasker unter dem Gesichtspunkt der vitalen Anpassung auf, ohne doch dabei in die Fehler des Pragmatismus zu verfallen. Die allgemeinsten leitenden Maximen der wissenschaftlichen Forschung fallen für ihn zusammen mit denjenigen methodischen Prinzipien, welche alles Handeln überhaupt betreffen, den Prinzipien eines vollkommen geführten („macheidischen") Kampfes, die in einer allgemeinen Theorie des Kampfes auseinandergesetzt werden.

Der Gedanke, welcher im Titel des Werkes angedeutet ist, besteht in einer Anwendung der Paradoxien der Mengenlehre zur Widerlegung der streng physikalischen Weltauffassung, d. h. des mathematisch gefaßten Materialismus. Soweit sich Laskers mengentheoretische Argumentation gegen diese Ansicht wendet, wird man sie als bündig anerkennen müssen. Hingegen ist bei den weiteren Folgerungen, die Lasker an seinen Beweis knüpft (er geht bis zur vollständigen Leugnung des Determinismus), die Begründung verschiedentlich nicht zwingend.

Die Methodenfragen der Physik werden in dem Kapitel über das „Problem der Ursächlichkeit" behandelt. Hier vertritt Lasker den Standpunkt der strengen Kontinuums- und Nahewirkungstheorie. Dabei bemerkt er freilich nicht, daß die Newtonsche Theorie der Gravitation den Forderungen der Nahewirkungstheorie widerstreitet; die Beachtung dieses Umstandes hätte ihn wohl veranlaßt, sich weniger ablehnend gegen die Relativitätstheorie zu verhalten, zumal da seine Auffassung von physikalischem Zustand und von Kausalität mit der Relativitätstheorie durchaus vereinbar ist.

Laskers methodische Ausführungen über die Physik enthalten viele treffende Bemerkungen, allerdings auch einiges Anfechtbare. So wird bei der Erörterung des Kraftbegriffs die Newtonsche Kraft fälschlich als bestimmend für die Geschwindigkeit, anstatt für die Beschleunigung, erklärt und somit das wesentliche des Galileischen Trägheitsprinzips übersehen.

Von der Begründung, die Lasker für das Prinzip der Stetigkeit gibt, dürfte der Anhänger der Atomistik nicht überzeugt werden; sie beruht letzten Endes auf einer petitio principii. Überdies wird der Logiker inbetreff des mathematischen Kontinuums an Lasker die Frage richten, worauf er denn die Behauptung gründe, daß das Kontinuum als der „Inbegriff aller durch den Grenzbegriff zu erzeugenden Zahlen" eine „vollendbare" Menge ist. Dies bedürfte gerade bei Laskers Standpunkt eines genauen Nachweises, der freilich, wenn er in strenger Form gelänge, nichts Geringeres bedeuten würde als die Lösung des Hauptproblems in der logischen Grundlegung der mathematischen Analysis.

In den Abschnitten über die Methode und die Gesetze der Psychologie findet sich manches für den Physiker sehr Interessante, indem hier u. a. von der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie gehandelt wird. —

Die Bedeutung des Laskerschen Werkes liegt vor allem in den großzügigen systematischen Gedanken, durch welche die philosophischen Grundprobleme der Physik, der Psychologie und der Ethik, neuartig beleuchtet werden, und in der Weltanschauung, die hier ihren gedanklichen Ausdruck findet.

Zugleich ist das Buch dadurch sehr wertvoll, daß es dem Leser, von dem keinerlei besondere philosophische oder fachwissenschaftliche Vorkenntnisse gefordert werden, eine reiche Auswahl an Gedanken früherer und zeitgenössischer Philosophen sowie an Begriffsbildungen und Theorien aus der Mathematik und Physik in schöner Darstellungsweise zur Kenntnis bringt.

P. Bernays.

Tagesereignisse.

Technischer Literatur-Kalender 1919. Anfang 1920 soll im Verlage R. Oldenbourg, München und Berlin, die 2 Ausgabe des Technischen Literatur-Kalenders erscheinen. Sie soll im Anhang eine Übersicht enthalten, die die Namen der auf einem umgrenzten technischen Gebiete, und zwar nicht nur in Buchform, sondern auch durch Mitarbeit an Zeitschriften tätigen technischen Schriftsteller des deutschen Sprachgebietes gemäß ihren eigenen Angaben zusammenstellen soll. Die bereits in der ersten Ausgabe verzeichneten Autoren erhalten die Fragebogen zur Ergänzung unaufgefordert zugesandt. Fehlende technische Schriftsteller wollen sich im Interesse der Vollständigkeit des Werkes mit der Schriftleitung, Oberbibliothekar Dr. Otto, Berlin W 57, Bülowstr. 74, in Verbindung setzen.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Dr. K. G. Jonas für Chemie, an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Walter Georgii für Meteorologie, an der Technischen Hochschule Wien Dr. Kurt Stockert für Nahrungsmittelchemie.

Ernannt: Frau Marie Curie, Professor der Physik an der Sorbonne in Paris zum ord. Professor der Radio-



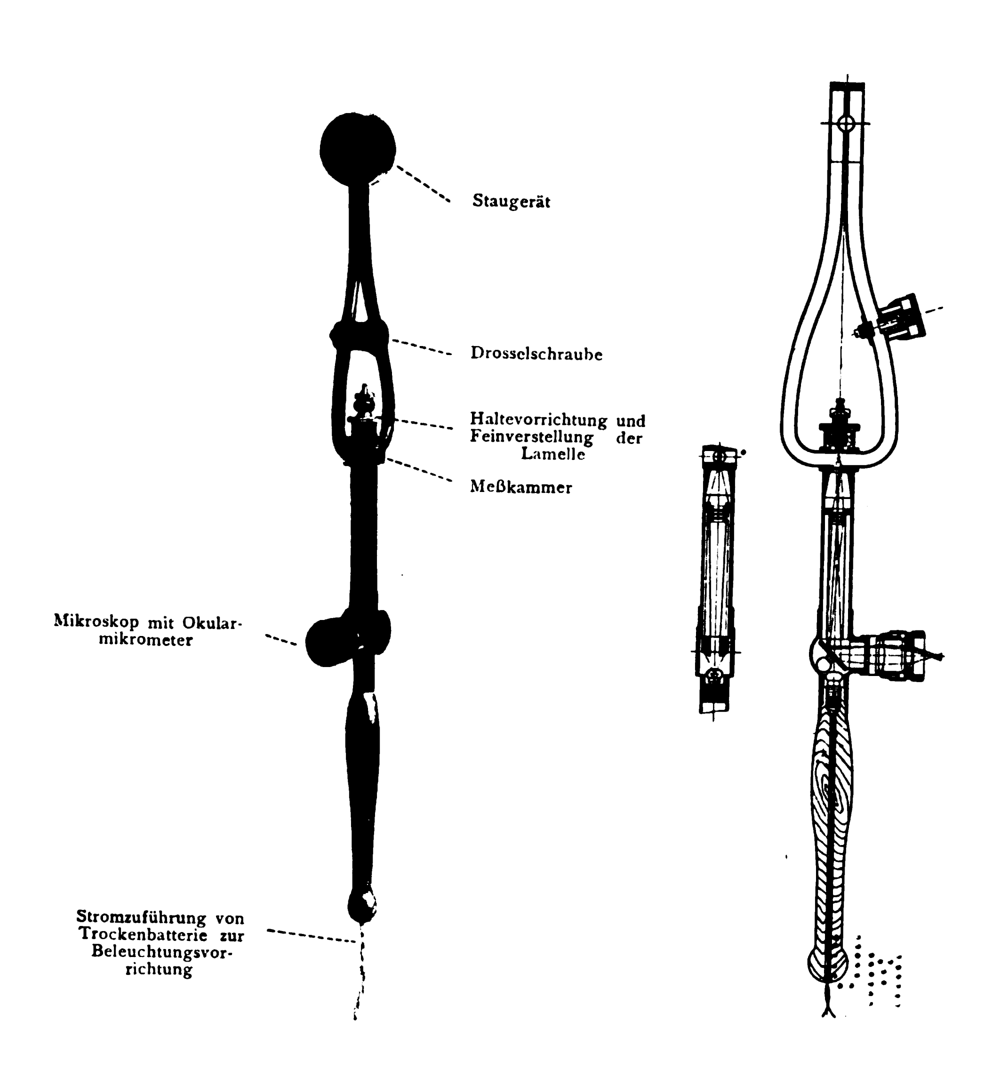
logie an der Universität Warschau, J. H. Robertson von der Universität Edinburgh zum Dozenten für Chemie an der Südafrikanischen Grubenschule in Johannesburg, Dr. G. G. Henderson zum Professor der Chemie an der Universität Glasgow an Stelle des verstorbenen Professors John Ferguson, der ord. Professor der Physik an der Deutschen Universität Prag Dr. Anton Lampa zum Sekretär für Volksbildung im deutsch-österreichischen Unterrichtsamt in Wien, der vor kurzem in den Ruhestand getretene Direktor des Physikalischen Staatslaboratoriums in Hamburg Dr. August Voller zum ord. Honorarprofessor der Physik an der Universität Hamburg, der Privatdozent an der Universität und Technischen Hochschule in Wien Dr. Johann Radon zum a. o. Professor für Mathematik an der Universität Hamburg, Dr. Otto Müller zum Dozenten für Elektrotechnik, theoretische Elektrotechnik und Fernmeldetechnik am Friedrich-Polytechnikum Köthen, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen Dr. Erich Hecke in gleicher Eigenschaft an der Universität Hamburg, der Assistent der Remeis-Sternwarte in Bamberg Dr. Ernst Zinner zum Kustos der Kommission für die internationale Erdmessung in München, der a. o. Professor an der Universität Freiburg i. B. Dr. Wolfgang Gaede zum ord. Professor der Experimentalphysik an der Technischen Hochschule Karlsruhe, die a. o. Professoren an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Anton Schwaiger und Dr. Joachim Teichmüller zu ord. Professoren der Elektrotechnik an derselben Hochschule, der Direktor der Badischen Anilin- und Sodafabrik in Ludwigshafen Geh. Hofrat Dr. August Bernthsen zum ord. Honorarprofessor in der naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät der Universität Heidelberg, der Privatdozent an der Universität Göttingen Professor Dr. Alfred Coehn zum a. o. Professor für Physikalische Chemie an derselben Universität, der ord. Professor der Chemie an der Universität von Wales in Aberystwyth Alexander Findlay in gleicher Eigenschaft an der Universität Aberdeen, A. G. Walden von der Universität Edinburgh zum ord. Professor der Chemie am Wilson College in Bombay, W. W. Stewart zum Professor für Chemie am Queens College in Belfast, der Privatdozent an der Universität Wien Dr. Eduard Haschek zum a. o. Professor der Physik an derselben Universität, der ord. Professor der Chemie an der Universität Rostock Dr. Paul Pfeiffer in gleicher Eigenschaft an die Technische Hochschule Karlsruhe, Dr. Paul Haas und Dr. F. W. Goodbody zu Dozenten für Fabrikchemie bzw. medizinische Chemie an der Universität London, F. W. Dootson zum Dozenten für Chemie und W. H. Miller zum Dozenten für organische Chemie an der Universität Cambridge, D. H. Bangham zum Dozenten für Chemie und Dr. J. K. Wood zum Dozenten für Physikalische Chemie an der Universität Manchester, Dr. Adolf Kaufmann zum a. o. Professor der speziellen organischen Chemie an der Universität Genf, Dr.-Ing. Jaroslav Milbauer zum ord. Professor der chemischen Technologie der anorganischen Stoffe und praktischen Photographie an der Böhmischen Technischen Hochschule Prag, Dr. Samuel Smiles, Assistent Professor am University College in London, zum ord. Professor für organische Chemie am Armstrong-College in New Castle, der Privatdozent für organische Chemie an der Technischen Hochschule Berlin Professor Dr. Hugo Simonis zum a. o. Honorarprofessor an derselben Hochschule.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Kiel Geh. Regierungsrat Dr. Leo Pochhammer.

Verliehen: Dem Privatdozent für Chemie an der Universität Freiburg i. B. Dr. Robert Schwarz der Titel a. o. Professor.

Gestorben: Der ord. Professor der organischen Chemie an der Universität Leiden Dr. Antoine Paul Nicolas Franchimont, der ord. Professor der Physikalischen Chemie an der Universität Athen Dr. Demetrius Tsakalatos, der frühere Professor der Chemie an der Universität Oxford Vernon Harcourt F. R. S., der frühere Observator an der Berliner Sternwarte Professor Dr. Viktor Knorre.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

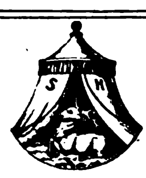


R. Seeliger, Der Böenmesser, ein neues Instrument zur hydrodynamischen Untersuchung des Windes.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und H. Th. Simon



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 50 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 55 Mark, im Ausland 62 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstraße 2.

No. 18. | 15. September 1919. No. 550. | 20. Jahrgang.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen, B. = Besprechung.)



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 18. 15. September 1919. 20. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 20 am 21. September 1919

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Kenntnis des zischenden Lichtbogens.

Von Ernst Bräuer.

Bei Überschreitung eines von allen Variablen des Bogenstroms abhängigen Stromwertes geht der Lichtbogen an Kohle- und vielen anderen Elektroden in den Zustand des Zischens über unter Verminderung seiner Spannung um etwa 10 Volt. Der Übergang erfolgt bei steigendem Strome i bei wenig höheren i-Werten als bei fallendem.

Zur Erklärung des zischenden Zustandes sind verschiedene Hypothesen aufgestellt worden. E. Rasch[1]) nimmt stürmisches Verdampfen an, welches das Zischen — es ist nicht ganz ersichtlich, ob durch die einfache mechanische Ausströmung des Dampfes oder auf dem Umwege über eine Beeinflussung der elektrischen Größen — erzeugen soll. Das erstere ist ausgeschlossen, da die aus dem Abrande der Elektroden zu errechnende Dampfgeschwindigkeit viel zu klein ist (1 bis 10 cm pro sec). Der zweiten Auffassung schließt sich der Verfasser an. Ferner hat Frau Ayrton[2]) die Vermutung ausgesprochen, daß dem Zischen ein Oxydationsvorgang zugrunde läge.

Aus den Ayrtonschen Messungen am ruhigen Kohlebogen leitet Rasch (l. c.) eine Formel für die Stromdichte I an der Anode in Abhängigkeit von Strom i und Bogenlänge l ab:

$$I = \frac{ai}{bl + ci} = \frac{a}{\frac{bl}{i} + c}; \qquad (1)$$

a, b usw. sind Konstante.

I nimmt also ab mit wachsender Bogenlänge, d. h. mit abnehmendem geometrischen Zwange auf die Stromlinien. Wir schließen daraus auf eine Neigung der anodischen Stromdichte, sich zu verkleinern, welche aber nicht darauf beruhen kann, daß bei kleinerer Stromdichte der anodische Potentialfall kleiner ist. Das ergibt sich aus der Stromstärkeabhängigkeit des Anodenfalles (Ayrton):

$$v_a = d + \frac{l}{i} \qquad (2)$$

in Verbindung mit (1): Das Anodenpotential sinkt also mit wachsender Stromdichte.

Der anodische Potentialfall kann gemäß der Poissonschen Gleichung bei linearer Anordnung

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -4\pi\varrho$$

(V = Potential, ϱ = Raumladungsdichte, x = Normale zur Anodenfläche) nur durch negative Raumladung im Gase dicht vor der Anode hervorgebracht sein. Diese negative Ladung und damit der Anodenfall würde stark herabgesetzt werden, wenn träge positiv geladene Teilchen von der Anode ausgingen. Es ist nun anzunehmen (aus den bei gröberen Partikeln deutlich erkennbaren Abstoßungskräften und dem Phänomen der Anodenstrahlen), daß ein großer Teil der in Dampfform ausgestoßenen Teilchen der Anodensubstanz die Oberfläche mit positiver Ladung verläßt. Da bei gleichem Anodenfalle v_a der größeren Stromdichte I eine stärkere Verdampfung entspricht, hat die (v_a-, I)-Kurve fallenden Verlauf. Die elektrischen Verhältnisse streben nach Verkleinerung von v_a also Erhöhung der anodischen Stromdichte.

Welcher Punkt der (v_a-, I)-Kurve entspricht nun dem tatsächlich eintretenden Zustande? Die Antwort darauf kann nur in großen Zügen

1) Ewald Rasch, Das elektrische Bogenlicht, Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1910. S. 137ff.
2) H. Ayrton, Inst. El. Eng. 28, 400, 1899; Electric Arc. London.

gegeben werden, solange diese Kurve nicht mit großer Genauigkeit[1]) bekannt ist.

Die zugeführte Energie ist $v_a \cdot I$; wächst diese beim Fortschreiten zu größerer Stromdichte, so ist der Zustand labil; es stellt sich bei erhöhter Stromdichte eine höhere Anodentemperatur ein, die v_a vermindert, I also weiter erhöht. Die Bedingung für den stabilen Zustand ist also

$$\frac{d(v_a \cdot I)}{dI} < 0 \qquad (3)$$

$$v_a + I\frac{dv_a}{dI} < 0$$

$$\frac{v_a}{I} < -\frac{dv_a}{dI}. \qquad (4)$$

Geometrisch heißt das: Die Tangente an die (v_a-, I)-Kurve ist im stabilen Gebiete steiler im negativen Sinne gegen die I-Achse geneigt als die „Gleichstromwiderstandslinie", die Gerade vom Nullpunkt nach dem betrachteten Kurvenpunkte (Fig. 1). Im stabilen Gebiete muß die (v_a-, I)-Kurve steiler als die gleichseitige Hyperbel abfallen.

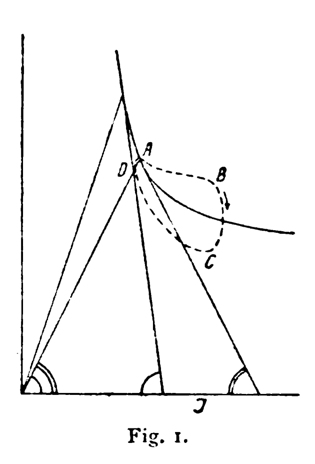


Fig. 1.

Da wir annehmen müssen, daß bei zunehmender Stärke der Verdampfung der Prozentsatz positiv geladener Teilchen unter den Dampfmolekülen sinkt, so wird die Steilheit der Kurve bei kleinem v_a abnehmen und ein Zustandsprodukt erreicht werden, für den $-\frac{dv_a}{dI}$ gleich, und hinter ihm kleiner als $\frac{v_a}{I}$ wird. Der Zustand ist hier also labil. Während für kleinere I einer Vergrößerung von I die sinkende Temperatur und einer Verkleinerung von I der steigende Anodenfall entgegen wirkte, wobei wahrscheinlich die Zustände in der positiven Säule und die Divergenz der Stromlinien (Vergrößerung der Gasstrecke) im wesentlichen den tatsächlichen Zustandspunkt bestimmten, strebt für I, die jenseits dieses kritischen Punktes liegen, der Zustand dahin, I immer weiter zu erhöhen.

Diese spontane Erhöhung der Stromdichte I geht jedoch nicht bis ins Unendliche. Einmal kann sich eine Gasentladung nicht auf einen punktförmigen Querschnitt zusammenziehen, weil die Ionen nicht bloß in Richtung der elektrischen Kraft, sondern infolge der Zusammenstöße auch nach den Seiten Geschwindigkeitskomponenten besitzen. Außerdem haben wir durch die Verdampfung es mit einer Produktion von Gas zu tun, welches sich seitlich als Aureole stark ausbreitet und so hohe Leitfähigkeit besitzt, daß ein beträchtlicher Teil des Stromes durch das Aureolengas fließt, wodurch die Anodenenergie $v_a \cdot I$ sinkt. Dabei kann sehr wohl auch die Oxydation eine Rolle spielen, indem durch sie die Ionisation des Aureolengases erhöht wird.

Überschreitet durch Veränderung einer der Bogenstromvariablen der (v_a-, I)-Zustand den kritischen Wert

$$\left(\frac{d(v_a \cdot I)}{dI}\right) = 0,$$

so beginnt spontan die Strombahn sich unter Verminderung von v_a zusammenzuziehen, und zwar bewegt sich der Zustand nicht auf der statischen Kurve, sondern, da die erhöhte Verdampfung erst nach einer gewissen Erhöhung der Anodentemperatur eintritt, in einer flacheren Bahn mit höheren v_a-Werten ($A - B$) (in Fig. 1). Dabei steigert sich die Verdampfung, da das Produkt $v_a \cdot I$ erhöht ist auf einen anormalen Betrag und es findet Ausstoßung einer Dampfwolke statt (Punkt B). In diesem Augenblicke sinkt durch den entstehenden Nebenschluß durch das leitende Gas der Zustand plötzlich zu kleineren, infolge des aufgespeicherten Wärmeüberschusses, sogar den statischen Betrag noch unterschreitenden v_a-Werten (C). $B - C$ ist aber ein stabiler Kurventeil, bei dem mit sinkenden v_a auch die Anodenenergie sinkt. Es besteht also die Tendenz zu rückläufiger Bewegung, die unter allmählicher Auskühlung auf dem ebenfalls stabilen Kurventeile $C - D$ erfolgt und in das instabile Gebiet mit positiver Neigungstangente von A überleitet.

Der Zustand umläuft also eine „Hysteresisschleife" mit stark wechselnder Geschwindigkeit, die wesentlich durch thermische Vorgänge bedingt ist. Der Umlaufssinn entspricht einer

1) Die Ayrtonschen Messungen geben die (v_a, I)-Kurven und die Stromdichtenmessungen leider nicht unter gleichen Bedingungen.

geleisteten Arbeit. Bei jedem Umlauf wird ein akustischer Impuls auf die umgebende Atmosphäre ausgeübt, der bei geringer thermischer Leitfähigkeit des Materials (Kohle) einen hohen (Zisch-)Ton darstellt; bei hoher Leitfähigkeit ist der Ton oft über der Hörgrenze, so bei den „Zisch“-Formen der Metallbögen bei tiefem Druck[1]), die ebenfalls typische Aureolen besitzen.

Die Beobachtungen bestätigen die entwickelte Theorie des Zischens. Sie verlangt, daß die anodische Stromdichte einen gewissen Betrag überschreitet. Tatsächlich errechnet Rasch (l. c., S. 141) aus den Ayrtonschen Messungen die Zischgrenze bei Überschreiten einer Stromdichte von 70 A/qcm, ebenso gab Luggin[2]) an, daß Zischen bei 50 A/qcm eintritt.

Ferner tritt das Zischen bei größerer Bogenlänge später ein (vgl. Ayrton, Electric Arc, London), entsprechend den größeren Wärmeverlusten.

Daß das Eintreten des Zischens mit einer Erhöhung der anodischen Stromdichte zusammenhängt, geht auch aus folgendem hervor: Ein an kalter Anode zündender Lichtbogen besitzt starke Zischneigung, die nach dem „Einbrennen“ verschwindet. Dieses Einbrennen besteht nur darin, daß der Bogen sich seitlich ausdehnend immer weitere Randzonen in seine Basis einbezieht, zuerst also auf kleinerer Fläche mit erhöhter Stromdichte brennt.

Ebenso besitzt der Wechselstrombogen, der sich bei jeder Halbperiode neu entwickeln muß, und zwar anodisch an der kühleren Elektrode, die kurz zuvor Kathode war, mindestens sicher während eines Teiles der Periode, abnormal hohe Stromdichte. Dem entspricht eine erheblich höhere Zischneigung als beim Gleichstrombogen bei ähnlicher Stromstärke.

La Rosa[3]) hat sowohl durch spektrale Untersuchung wie durch Versuche über das Schmelzen von Kohlenstoff wahrscheinlich gemacht, daß die Temperatur in dem mit hoher Frequenz schwingenden Bogen (also vor allem an der Anode) höher ist als in dem gewöhnlichen Bogen. Ein „Zischen“ ist hier natürlich nicht möglich, solange die Schwingungsfrequenz gleich oder höher ist als die Zischfrequenz.

Den direkten Nachweis, daß der Bogen bei wachsender Stromstärke mit erhöhter Stromdichte und anormal hoher Kathodentemperatur brennt, hat M. Reich[4]) wenigstens für die kathodische Ansatzfläche durch kinematographische Aufnahmen erbracht. Fig. 2 und 3 geben

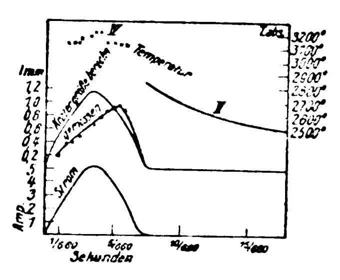


Fig. 2.

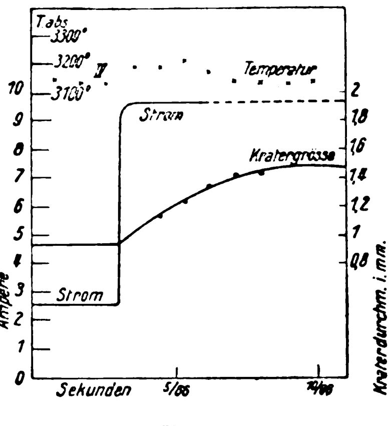


Fig. 3.

von ihm erhaltene Kurven. Sehr instruktiv ist Fig. 4, welche zeigt, wie der Bogen nach starker

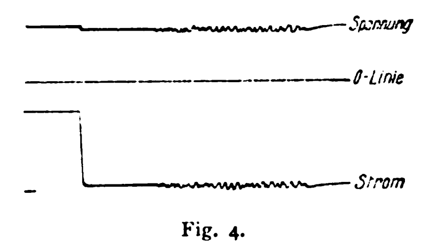


Fig. 4.

Erhöhung des Stromes zunächst, offensichtlich infolge der starken Wärmeableitung, trotz erhöhter Stromdichte ruhig brennt, dann eine Zeit lang zischt und schließlich nach genügendem Absinken der Stromdichte wieder ruhig wird.

Charlottenburg, 4. Februar 1919.

(Eingegangen 12. Mai 1919.)

1) A. Hagenbach u. H. Veillon, diese Zeitschr. 11, 833, 1910.
2) Wien. Ber. 98 (II), 1192, 1889.
3) La Rosa, Ann. d. Phys. (4) 29, 249; 30, 369, 1909.
4) M. Reich, diese Zeitschr. 7, 73, 1906.

Untersuchungen an Funkeninduktoren beim Betriebe von Röntgenröhren.

Von Friedrich Voltz.

(Mit Tafel XV.)

1. In zwei früheren Arbeiten, diese Zeitschr. **16**, 133, 1915 und **16**, 213, 1915, habe ich gemeinsam mit Janus eine von mir angegebene Methode, die Stromkurven hochgespannter Ströme darzustellen, beschrieben und gezeigt, wie es mittels dieser Methode leicht ist, die Stromkurven zu beobachten, mit welchen Hochspannungssystemen man auch immer es zu tun haben und welche Veränderungen man auch immer hier vornehmen mag. Diese Methode habe ich inzwischen verbessert und ausgestaltet. Infolge der Kriegsverhältnisse konnte ich jedoch meine seinerzeit aufgenommenen systematischen Versuche nicht weiter fortsetzen. Die erste und bisher einzige systematische Versuchsreihe wurde von E. v. Seuffert mit meiner Methode an Röntgenmaschinen gemacht und auch beschrieben[1]). Nachdem nunmehr mit Eintritt anderer Verhältnisse es mir möglich geworden ist, meine Versuche in dieser Richtung wieder aufzunehmen, habe ich einige systematische Versuchsreihen unter Belastung der Hochspannungsquelle mit Röntgenröhren mit der inzwischen verbesserten Methode ausgeführt und diese will ich im nachfolgenden beschreiben. Es sei hier bemerkt, daß diese Versuchsreihen nur ein Teil einer größeren Untersuchung, die ich in gemeinsamer Zusammenarbeit mit Wintz für medizinische Zwecke vornahm, sind, die an anderer Stelle beschrieben werden soll, da sie über den Rahmen dieser Zeitschrift weit hinausgeht. Hier seien nur die Ergebnisse der Stromkurvenuntersuchungen behandelt.

2. Zu den Versuchen wurde, wie bereits erwähnt ist, die von mir angegebene und in dieser Zeitschr. **16**, 133, 1915 beschriebenen Methode angewandt. Die Verbesserungen, welche ich inzwischen vorgenommen habe, bestehen darin, daß einmal eine bedeutend größere Gehrckesche Röhre in einen größeren Propeller eingebaut wurde. Der Motor, welcher den Propeller antreibt, ist bedeutend leistungsfähiger und gestattet auf eine höhere Tourenzahl des Propellers zu kommen. Außerdem habe ich an der Einrichtung eine Meßvorrichtung angebracht, durch welche es mir möglich wurde, sowohl die Höhe des Glimmlichtes in Millimetern abzulesen, als auch die Größe der Basis der Stromkurven in gleichem Maße festzustellen. Ebenso konnte die Höhe des Glimmlichts einzelner Teilentladungen in Millimetern festgelegt werden. Dadurch konnte ich jede einzelne Entladungskurve genau untersuchen und graphisch auswerten.

Die zu den Versuchen benutzte Hochspannungsquelle war ein Symmetrieinduktorium der Reiniger, Gebbert & Schall A.-G. Der elektrische Aufbau dieses Instrumentariums ist schematisch in Fig. 1 dargestellt.

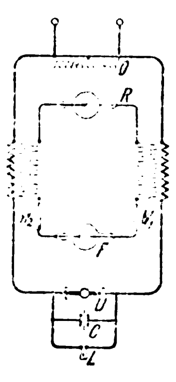


Fig. 1.

Das Symmetrieinduktorium besteht aus zwei völlig getrennten Spulenhälften. In der einen sekundären Stromkreishälfte liegt die Röntgenröhre R und in der anderen Stromkreishälfte eine Ventilfunkenstrecke F und zwei Wasserwiderstände W_1 und W_2. Der sekundäre Stromkreis ist also symmetrisch, ebenso wie auch der Primärstromkreis völlig symmetrisch aufgebaut ist. Auf der einen Seite dieses elektrischen Kreises befindet sich der Regulierwiderstand O zur Regulierung der Primärstromstärke, auf der anderen Seite befindet sich der Gasunterbrecher U und der Kondensator C, sowie eine Sicherheitslampe L. Durch diese völlig symmetrische Schaltung von Röntgenröhre, Ventilfunkenstrecke und Induktoren wird, wie die Erfahrung gezeigt hat, das erreicht, was zur Erzeugung besonders kurzwelliger Röntgenstrahlenkomponenten notwendig ist. Erstens wird verhindert, daß die von der Funkenstrecke, wie von jeder, ausgehenden schnellen elektrischen Schwingungen zur Röntgenröhre gelangen und deren Widerstandswert herabsetzen, weil diese Schwingungen von den Windungen der Sekundärspulen und den Wasserwiderständen W_1 und W_2 abgedrosselt werden[1]). Zweitens kann die elektrische Aufladung, die nach jedem einzelnen Stromstoß an den Elektroden der Röntgenröhre zurückbleibt und eben-

---

1) Münchn. med. Wochenschr. 1915, Heft 19.

1) Vgl. Janus, Fortschritte a. d. Gebiete der Röntgenstrahlen **24**, 453, 1917.

falls die Röhre leitfähiger macht, also auch den Widerstandswert derselben herabsetzt, zu den Metallmassen der Sekundärspule abfließen, weil die die Leitung trennenden Vorrichtungen, wie Ventilfunkenstrecke usw. nicht zwischen Röntgenröhre und Induktoren liegen.

In die Verbindung zwischen der Röntgenröhre R und der einen Sekundärspule war nun die rotierende Glimmlichtröhre eingebaut.

Zugleich mit der Untersuchung der Stromkurven wurde auch das von der Röntgenröhre R ausgehende Röntgenstrahlengemisch elektrometrisch untersucht und auf seine medizinische Verwendbarkeit geprüft. Die Beschreibung dieser Versuche würde jedoch, wie bemerkt wurde, über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen und soll deshalb an anderer Stelle gemeinsam mit Wintz erfolgen.

Der Hochspannungskreis wurde mit drei verschiedenen Arten von Röntgenröhren belastet und zwar einer selbsthärtenden Siederöhre[1]), einer Lilienfeldröhre und einer Coolidgeröhre. Bei der Lilienfeldröhre wurde die Qualität des emittierten Strahlengemisches verändert und zwar so, daß drei verschiedene „Wellenlängenmittelwerte“[2]) (Härtegrade) des Gemisches dargestellt wurden.

In der Versuchsanordnung war außerdem die Möglichkeit gegeben, die Größe der Kapazität C, welche dem Unterbrecher U parallel geschaltet ist, systematisch zu verändern und zwar von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm bis $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm, um so den Einfluß der Größe der Kapazität auf die Entladung sowohl, als auch auf das emittierte Röntgenstrahlengemisch zu studieren.

Ein Glockerscher Analysator[3]) gestattete weiter das von der Röntgenröhre ausgehende Röntgenstrahlengemisch qualitativ und quantitativ zu analysieren.

3. Mit der eben beschriebenen Versuchsanordnung wurde zunächst die Lilienfeldröhre betrieben. Der Wellenlängenmittelwert des Röntgenstrahlengemisches sei mit 15 bezeichnet, entsprechend der elektrischen Schaltung der Röhre. Nun wurden bei diesem Röhrenzustand der Reihe nach die Kapazitäten $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm bis $9 \cdot 9 \cdot 10^6$ cm dem Unterbrecher U parallel geschaltet und die Stromkurven untersucht und graphisch ausgewertet. Das Resultat dieser Messungen ist in Tafel XV Fig. 1 aufgezeichnet. Die Betrachtung der Tafel XV Fig. 1 läßt folgende Schlüsse zu:

Bei einer Kapazität von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm zeigt die Stromkurve 8 kräftige Entladungen, deren Maximalwerte in einer Exponentialkurve abzufallen scheinen. Die Kapazität $2 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm ergibt nur mehr 6 Teilentladungen; auch hier liegen die Scheitelwerte auf einer Exponentialkurve. 5 Entladungen erhalten wir bei $3 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm Kapazität. Bei einer Kapazität von $4 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm sind es nur mehr 4 Teilentladungen und bei einer solchen von $5 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm sind es ebenfalls 4 Einzelstromstöße. Das gleiche Bild haben wir bei einer Kapazität von $6 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm. Bei einer Kapazität von $7 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm und einer solchen von $8 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm wird die vierte Teilentladung zu einer kleinen nachklingenden Entladung. Ebenso ist dies bei einer Kapazität von $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm der Fall. Wenn wir die Kurven in ihrer Folge weiter genauer betrachten, so sehen wir, daß bei einer Kapazität von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm bis etwa $4 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm die einzelnen Teilentladungen voneinander isoliert zu sein scheinen, während bei der weiteren Vergrößerung der Kapazität die Teilentladungen ineinander übergehen.

Nach dieser Versuchsreihe wurde nunmehr der Zustand der Lilienfeldröhre derart verändert, daß das Strahlengemisch bedeutend kurzwelliger wurde. Der Wellenlängenmittelwert dieses Gemisches sei mit 20 bezeichnet, wieder entsprechend der elektrischen Schaltung der Röhre. Bei diesem Röhrenzustand wurden nun der Reihe nach ebenfalls die Kapazitäten $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm bis $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm dem Unterbrecher parallel geschaltet und auch hier wieder die Stromkurven untersucht und graphisch ausgewertet. Das Resultat der Messungen ist in Tafel XV Fig. 2 aufgezeichnet. Die Betrachtung der Tafel XV Fig. 2 läßt folgende Schlüsse zu:

Bei einer Kapazität von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm zeigt das Kurvenbild 8 kurze Entladungen, deren Maximalwerte wieder in einer Exponentialkurve abzufallen scheinen. Die Kapazität von $2 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm ergibt nur mehr 6 Teilentladungen, auch hier liegen die Scheitelwerte auf einer Exponentialkurve. 5 Entladungen erhalten wir bei $3 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm Kapazität. Bei einer Kapazität von $4 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm sind es 5 Teilentladungen, während bei einer solchen von $5 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm 4 Teilstromstöße beobachtet werden. Eine kräftige Entladung und zwei kurze nachklingende Entladungen beobachten wir bei einer Kapazität von $6 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm. Eine Kapazitätssteigerung auf $7 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm ergibt eine kräftige Hauptentladung, die in zwei weiteren, kleineren Entladungen ausklingt. Das gleiche Bild erhalten wir, wenn wir an Stelle von $7 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm, $8 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm und $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm dem Unterbrecher U parallel schalten. Betrachten wir hier die Kurven in ihrer Folge genauer,

1) Vgl. Wintz, Münchn. med. Wochenschr. 1917, Nr. 29.

2) Vgl. Voltz, Fortschr. a. d. Gebiete d. Röntgenstrahlen 26, 78, 1918.

3) Vgl. Glocker, Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstrahlen 24, 91, 1916; diese Zeitschr. 17, 488, 1916.

so sehen wir, daß bei einer Kapazität von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm bis $2 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm die einzelnen Teilentladungen voneinander isoliert zu sein scheinen, während bei der weiteren Vergrößerung der Kapazität die Partialentladungen ineinander übergreifen.

Der Zustand der Lilienfeldröhre wurde nunmehr weiter derart geändert, daß das Strahlengemisch abermals kurzwelliger wurde. Der Wellenlängenmittelwert dieses Gemisches sei entsprechend der Schaltung der Lilienfeldröhre mit 25 bezeichnet. Bei diesem Röhrenzustand wurden nun der Reihe nach ebenfalls die Kapazitäten $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm bis $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm dem Unterbrecher U parallel geschaltet und auch hier wieder die Stromkurven untersucht und graphisch ausgewertet. Das Resultat der Messungen ist in Tafel XV Fig. 3 aufgezeichnet. Die Betrachtung der Tafel XV Fig. 3 ergibt folgende Schlüsse.

Bei einer Kapazität von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm ergeben sich im Kurvenbild 7 kräftige Teilentladungen, deren Maximalwerte wieder auf einer Exponentialkurve liegen. Die Anzahl der im Kurvenbild beobachteten Teilentladungen verringert sich auf 6 Entladungen, wenn man die Kapazität von $2 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm dem Unterbrecher U parallel schaltet. Eine Steigerung der Kapazität auf $3 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm ergibt 5 Teilentladungen; die gleiche Anzahl von Teilstromstößen erhalten wir bei einer Kapazität von $4 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm. Bei einer Kapazität von $5 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm erhalten wir nur mehr 4 Teilentladungen, während die Steigerung der Kapazität auf $6 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm nur mehr drei Entladungen beobachten läßt, deren dritte sehr klein ist. Die Kapazität von $7 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm zeigt ebenfalls drei Teilstromstöße. Auch hier ist der dritte Stromstoß sehr klein. Die gleichen Stromkurvenbilder können wir beobachten bei den Kapazitäten $8 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm und $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm. Eine genauere Betrachtung der Stromkurvenbilder zeigt auch hier, daß teilweise die einzelnen Partialentladungen voneinander isoliert erscheinen. Vollständig ist dies aber nur der Fall bei der Kapazität von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm, während bei größeren Kapazitäten die Teilentladungen entweder ganz oder teilweise ineinander überfließen.

An Stelle der Lilienfeldröhre wurde nunmehr die Coolidge-Röntgenröhre in den Hochspannungskreis eingeschaltet. Der Zustand der Coolidgeröhre wurde bei diesen Versuchen nicht verändert, sondern es wurde mit einer konstanten Heizstromstärke von 2,5 Ampère gearbeitet. Nun wurden auch hier wieder der Reihe nach die Kapazitäten $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm bis $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm dem Unterbrecher U parallel geschaltet und die Stromkurven untersucht und graphisch ausgewertet. Das Resultat der Messungen ist in Tafel XV Fig. 4 aufgezeichnet. Die Betrachtung der Tafel XV Fig. 4 ergibt folgende Schlüsse:

Bei einer Kapazität von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm ergeben sich im Kurvenbild eine Reihe von Teilentladungen, die allerdings nicht vollständig ausgeprägt sind. Man kann etwa fünf Teilentladungen erkennen. Die Anzahl der Teilentladungen, welche im Kurvenbild beobachtet werden können, verringert sich, wenn man die Kapazität auf $2 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm steigert. Auffällig ist hier das starke plötzliche Abfallen der Stromkurve. Eine weitere Steigerung der zum Unterbrecher U parallel liegenden Kapazität bewirkt, daß die Stromkurve aus einer Entladung besteht, der kleinere Teilentladungen nachfolgen. Diese Teilentladungen werden kleiner und kleiner und verschwinden bei einer Kapazität $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm fast vollständig.

In der letzten Versuchsreihe wurde in den Hochspannungskreis eine selbsthärtende Siederöhre eingeschaltet. Der Röhrenzustand wurde während der ganzen Versuchsreihe mittels des von Wintz[1]) angegebenen und beschriebenen Regenerierautomaten konstant gehalten. Die sekundäre Stromstärke war während der Untersuchungen mit der selbsthärtenden Siederöhre konstant 2,5 Milliampère. Wie in den vorausgegangenen Versuchsreihen wurden hier nun gleichfalls der Reihe nach die Kapazitäten $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm bis $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm dem Unterbrecher U parallel geschaltet und die Stromkurven untersucht und aufgenommen mittels des beschriebenen graphischen Verfahrens. Das Resultat der Messungen ist in Tafel XV Fig. 5 aufgezeichnet. Die Betrachtung der Tafel XV Fig. 5 ergibt folgende Schlüsse:

Bei einer Kapazität von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm ergeben sich im Kurvenbild 3 Teilentladungen. Die Begrenzungslinien der Stromkurven beziehungsweise ihre Teilentladungen sind aber nicht, wie wir es in den vorausgegangenen Kurvenbildern beobachten konnten, scharfe, sondern die eigentlichen Entladungskurven sind überlagert von feinen Zacken, die besonders deutlich beobachtet werden können, wenn die Größe der Kapazität gesteigert wird. Die Anzahl der Teilentladungen, welche im Kurvenbild beobachtet werden können, verringert sich, wenn man die Kapazität auf $2 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm steigert, und zwar werden es hier zwei Teilentladungen. Die weitere Steigerung der Kapazität auf $3 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm und mehr bewirkt, daß die eigentlichen Teilentladungen verschwinden und die Stromkurve nur mehr aus einer einzigen Entladung besteht.

4. Betrachtet man die beiden Primärspulen

1) Wintz, Münchn. med. Wochenschr. 11, 382, 1916.

des Symmetrieinduktoriums zusammen mit der dem Unterbrecher U parallel geschalteten Kapazität C als Schwingungskreis, in welchem bei schneller Öffnung des Stromes im Unterbrecher Schwingungen zustande kommen, die auch analog im Sekundärkreis auftreten, wenn man von der Rückwirkung des Sekundärkreises auf den Primärkreis absieht, so lassen sich diese Schwingungen für alle Möglichkeiten berechnen, solange der Sekundärkreis nicht belastet wird und in demselben also kein Strom fließt. Der Berechnungsmöglichkeit entziehen sich diese Schwingungen jedoch, sobald der Sekundärkreis mit Röntgenröhren oder auch nur mit einer Glimmlichtröhre belastet wird. Die berechneten Vorgänge, also die Vorgänge im Sekundärkreis ohne Belastung geben jedoch manchen interessanten Vergleich mit den experimentell aufgefundenen Stromkurven, weshalb für das verwendete elektrische System die Vorgänge berechnet wurden.

Die Selbstinduktion des Kreises wurde nach der Formel (1) berechnet

$$L = \frac{(\pi \cdot N \cdot d)^2}{l} \cdot \frac{\mu}{1 + \nu(\mu + 1)}. \qquad (1)$$

Hier bedeuten N die Windungszahl der Primärspule, d den Durchmesser des Eisenkerns, l die Länge des Eisenkerns, μ die Permeabilität und ν den relativen Entmagnetisierungsfaktor. Es ergibt sich für die Selbstinduktion einer Spule der Wert:

$$L = 0{,}1065 \text{ Henry} = 0{,}1065 \cdot 10^9 \text{ cm}. \qquad (2)$$

Die rechnerische Auswertung des nach der schnellen Öffnung des Stromes im Unterbrecher U auftretenden Schwingungsvorganges führt zu dem Wurzelausdruck (3)

$$2\pi n = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{w^2}{4 L^2}} \qquad (3)$$

Hier ist L die Selbstinduktion des Kreises, C die Kapazität des Kreises und w der Widerstand des Kreises.

Aus der Gleichung (3) ergeben sich die nachfolgenden Gleichungen (4) und (5)

$$n = \frac{\sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{w^2}{4 L^2}}}{2\pi}, \qquad (4)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{w^2}{4 L^2}}}. \qquad (5)$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Schwingungszeiten T und die Frequenzen n bei Veränderung der Primärkapazität C berechnen. Die aus den Rechnungen sich ergebenden Werte sind in der Tabelle I eingetragen.

Tabelle I.

C in cm	T in Sek.	n
$1 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,002898	345
$2 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,004098	244
$3 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,005020	200
$4 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,005870	170
$5 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,006481	154
$6 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,007099	141
$7 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,007688	130
$8 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,008198	122
$9 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,008695	115

Aus den ersten drei Versuchsreihen nun, welche durch die Tafel XV Fig. 1, 2 und 3 illustriert werden, ergeben sich die Werte der Tabelle II.

Tabelle II.

Kap. in cm	$1 \cdot 9 \cdot 10^5$	$2 \cdot 9 \cdot 10^5$	$3 \cdot 9 \cdot 10^5$	$4 \cdot 9 \cdot 10^5$	$5 \cdot 9 \cdot 10^5$	$6 \cdot 9 \cdot 10^5$	$7 \cdot 9 \cdot 10^5$	$8 \cdot 9 \cdot 10^5$	$9 \cdot 9 \cdot 10^5$
n_0 bei Zustand 15	8	6	5	4	4	4	4	4	4
n_0 „ 20	8	7	6	5	4	4	3	3	3
n_0 „ 25	7	6	5	4	3	3	3	2	2

In dieser Tabelle II bedeutet n_0 die Anzahl der beobachteten vollen Teilstromstöße.

Trägt man die Werte aus den Tabellen I und II in ein Koordinatensystem ein, wobei als Ordinatenwerte die Kapazitäten aufgetragen werden mögen, so ergeben sich die Kurven I, II, III, IV der Fig. 2. Man ersieht aus dem Vergleich der Kurven ein vollständig analoges Verhalten. So wie die Zahl der Frequenzen mit Vergrößerung der Kapazität C abnimmt, so nimmt auch die Anzahl der Teilentladungen ab.

Komplizierter liegen die Verhältnisse, wenn in das Hochspannungssystem an Stelle der Lilienfeld-Röntgenröhre eine Coolidgeröhre oder eine selbsthärtende Siederöhre eingeschaltet wird. Doch kann auch hier zwischen der Steigerung der dem Unterbrecher U parallel geschalteten Kapazität und dem Abnehmen der Teilentladungen eine Beziehung beobachtet werden. Zwischen dem Geringerwerden der Frequenzen und dem Abnehmen der Teilentladungen und der Zusammensetzung des von der Röntgenröhre ausgehenden Strahlengemisches besteht gleichfalls ein bestimmter Zusammenhang, dessen

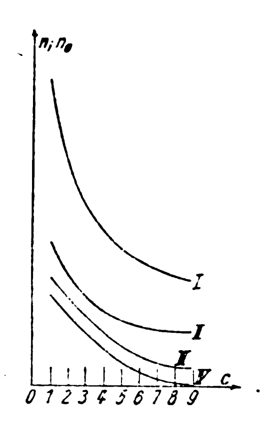


Fig. 2.

Darstellung jedoch an dieser Stelle und in diesem Rahmen zu weit führen würde. Er soll an anderer Stelle ausführlich behandelt werden. Hier soll nur soviel erwähnt sein, daß das Strahlengemisch mit abnehmender Zahl der Teilentladungen weit weniger heterogen ist.

Zusammenfassung.

1. Es wird gezeigt, wie sich die Stromkurven hochgespannter Ströme verändern bei ein und derselben Röhre und ein und demselben Röhrenzustand, wenn man die zum Unterbrecher parallel liegende Kapazität verändert und wie außerdem die Stromkurven bei verschiedenen Röhren verschieden sind.

2. Es ergibt sich eine Parallele zwischen den abnehmenden Frequenzen und den weniger werdenden Teilentladungen bei steigender Kapazität.

Auch zwischen der Anzahl der Frequenzen beziehungsweise zwischen der Anzahl der Teilstromstöße und der Zusammensetzung des in diesem Falle emittierten Röntgenstrahlengemisches ergibt sich eine Parallele in dem Sinne, daß mit dem Abnehmen der Teilstromstöße das Strahlengemisch weit weniger heterogen wird.

Die beschriebenen Untersuchungen wurden im Versuchslaboratorium der Universitätsfrauenklinik Erlangen ausgeführt.

(Eingegangen 25. März 1919.)

Eine elektrodynamische Methode zur Erforschung des Erdinnern.

(Dritte Mitteilung.)

Versuche von Helmut Kröncke in Deutsch-S.-W.-Afrika.

Von Heinrich Löwy.

Nachdem 7 Jahre seit meiner letzten Arbeit[1]) auf diesem Gebiet vergangen sind, will ich heute über den Stand der Frage berichten. Ich bin in letzter Zeit öfters auf die Ansicht gestoßen, daß sich meine Pläne und Methoden zur elektrischen Erforschung des Erdinnern als undurchführbar erwiesen haben, ja ich habe selbst bis vor kurzem gemeint, daß man bei der weiteren Bearbeitung dieser Fragen auf wesentliche Schwierigkeiten gestoßen sei. Das ist aber nicht der Fall. Die Sache liegt vielmehr so, daß seit 1912 — abgesehen von den Krönckeschen Tropenversuchen im Jahre 1914 — die beiden Hauptfragen, nämlich: das Tropenproblem und die unterirdische Telegraphie auf große Distanzen überhaupt nicht bearbeitet wurden. Seit dem Fernversuch zwischen den Kalibergwerken in Ronnenberg und Weetzen (Januar 1912) ist kein weiterer Versuch gemacht worden. Die Expedition auf die Sinai-Halbinsel der Herren Dr. Erich Mayer und Dr. Max Werner im Sommer 1916 wurde aber so vorzeitig — nach 3 wöchentlicher Dauer – abgebrochen, daß sie als ernsthafter Beitrag zu dieser Frage nicht in Betracht kommt. Es wurde nur an zwei verschiedenen Orten experimentiert. In einem Bericht an das Preußische Kriegsministerium wird mitgeteilt, daß die Versuche „infolge der starken nächtlichen Feuchtigkeit keinen Erfolg hatten“ und daß „nach Aussagen aller Landeskenner“ die Verhältnisse auf der ganzen Sinai-Halbinsel ähnlich liegen. Das ist nicht richtig. John Ball, der auf der Sinai-Halbinsel Triangulationen vorgenommen hat, berichtet („The Geography and Geology of West-Central Sinai“ Cairo, Governement Press, 1916, pag. 5), daß im Gegenteil das Klima vorherrschend trocken ist: „The climate of this part of Sinai, as of the peninsula as a whole, is temperate and dry ... Rain occasionally falls, but the average yearly amount is probably under an inch ... How clear the air may be in the district is illustrated by the fact that many triangulation sights have been taken over distances exceeding 100 kilometres, the longest

1) H. Löwy u. G. Leimbach, Zweite Mitteilung. diese Zeitschr. 13, 397, 1912. Die später veröffentlichte Notiz in der Zeitschr. des Ver. deutsch. Ing. 58, 1700, 1914 betrifft lediglich Prioritätsfragen.

being one of 166 kilometres". Nur vereinzelt, speziell in der Nähe der Küste, treten allerdings ganz abnorm große Feuchtigkeiten auf: „On the tracts near the coast, warm wet mists are apt to fill the air for days at a time, even in winter, and the lack of evaporation from the skin makes one very uncomfortable when climbing under these conditions . . .". Ich meine, daß Versuche außerhalb dieser Randzonen Erfolg haben würden. Nur die elektrischen Aufschlußarbeiten im Bergbau[1]) wurden in der Zwischenzeit gefördert. Hier sind schöne Erfolge erzielt worden[2]), obwohl diese Fragen wesentlich schwieriger sind als das Tropenproblem. Beim Wassernachweis in Kali-Bergwerken z. B. muß nämlich verlangt werden, daß auch sehr dünne Wasseradern nicht übersehen werden, weil dadurch ein ganzes Bergwerk gefährdet werden könnte. Ein solches Übersehen ist beim Wassersuchen in den Tropen ohne Belang, hier interessiert man sich ja hauptsächlich für große weit ausgedehnte Wasseransammlungen.

Sämtliche seit 1912 gemachten Arbeiten sind von den Physikern der „Physikalischen Werkstätten" (früher: „Erforschung des Erdinnern") G. m. b. H. in Göttingen unter der Leitung von Herrn Dr. Gotthelf Leimbach durchgeführt worden. Ich habe auf diese Arbeiten keinen Einfluß genommen und erst kürzlich Gelegenheit gehabt, sie näher kennen zu lernen. Dies gilt auch von der Kröncke-schen Expedition, über die hier zum erstenmal berichtet wird.

Im April 1914 ging Herr Dr. Helmut Kröncke nach Deutsch Süd-West-Afrika und hat dort mit Unterstützung des Deutschen Reichskolonialamts von Ende Mai bis zum Ausbruch des Weltkrieges, Anfang August 1914, mittels der elektrischen Methoden nach Wasser gesucht. Er hat speziell die Kapazitäts- und Dämpfungsmethode[3]) und die von Leimbach angegebene „Viertelwellenlängenmethode"[4]) erprobt. Im folgenden teile ich einen Auszug aus den Briefen mit, die Herr Dr. Kröncke an Herrn Dr. Leimbach gerichtet hat. Zum besseren Verständnis bemerke ich, daß es sich bei der erstgenannten Methode um einfache Kapazitäts- und Dämpfungsmessungen an einer symmetrischen, auf dem Boden ausgebreiteten Antenne handelt. Aus dem Vergleich der Werte an verschiedenen Orten wird auf das Vorhandensein von Wasser oder Erz geschlossen, die Tiefe wird aus der Zunahme der Kapazität bei sukzessiver Verlängerung der Antenne bestimmt. In theoretisch einfacher Weise bestimmt sich die Tiefe bei dem Leimbachschen „Viertelwellenlängenverfahren". Dasselbe beruht auf folgendem Gedanken: Befindet sich eine Antenne parallel über einer reflektierenden Fläche, so wird die Senderschwingung durch die reflektierten Wellen beeinflußt, und zwar besonders stark, wenn die Distanz ein ganzes Vielfaches einer Viertelwellenlänge ist. Diese Methode setzt — wie alle Reflexionsmethoden — das Vorhandensein einer gut reflektierenden Fläche voraus. In allen Fällen, wo der Übergang von der isolierenden Oberschicht zu den leitfähigen Schichten in stetiger Weise erfolgt, muß man auf das Kapazitätsverfahren zurückgreifen. Kröncke hat daher auch in den im folgenden beschriebenen Versuchen die Kapazitätsmethode durchweg zum Nachweis und zur Bestimmung der Richtung der unterirdischen Ströme, die Viertelwellenlängenmethode zur Bestimmung der Tiefe benutzt (vgl. Brief Nr. 4).

1) H. Löwy, Kapazitäts- und Dämpfungsmethode, D.R.P. Nr. 254478, angemeldet 2./4. 1912.

2) G. Leimbach u. E. Mayer, diese Zeitschr. **14**, 447, 1913; G. Leimbach, Kali **8**, Heft 7, 1914; **11**, Heft 4, 1917; W. Schwarzenauer, Kali **8**, Heft 12, 1914.

3) H. Löwy, D.R.P. Nr. 254478 angemeldet 2./4. 1912.

4) G. Leimbach, D.R.P. Nr. 273339 angemeldet 26./3. 1913.

Aus den Briefen von H. Kröncke.

Brief Nr. 1. (Aus Karibib, D. S.-W.-Afrika, 28. Mai 1914.)

„Gestern habe ich hier in Karibib meine ersten Versuche gemacht, deren Resultate ich vorwegnehmen möchte.

Meine Absicht war, zunächst einmal den groben Effekt der Wirkung des Wassers auf die Antenne zu bekommen. Deshalb machte ich nur Wellenlängenmessungen bei Summererregung mit verschiedenen Antennenlängen. Die ersten Messungen (A) machte ich in einer Gegend, wo eine Reihe ergiebiger Brunnen sind, wo also mit Sicherheit Wasser zu erwarten ist. Dann ging ich etwa 1000 m weiter, um die Messungen zu wiederholen (B).

Fig. 1.

Resultate:

		A		
l	15	30	55	100 m
S_1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
λ[1]	13[illegible]	21[illegible]	4[illegible]	[illegible]

		B		
l	15	30	55	100 m
S_1	9400	9400	9400	26 700 cm
λ	151	269	478	1020 m

Als Antenne konnte ich blanken Draht benutzen, trotzdem die Gegend durchaus nicht vegetationslos ist. Der Boden ist aber vollkommen trocken. Wovon die allerdings nur wenigen Pflanzen existieren, ist nicht zu erkennen (sie sehen aber auch darnach aus). An den Messungen überraschte mich zuerst, daß die Messungen bei B erheblich größere Kapazitäten ergaben als bei A, bis mir [illegible] mitteilte, daß gerade da, wo ich die Messungen B machte, auch mit der Wünschelrute eine Wasserader in angeblich geringer Tiefe nachgewiesen wäre, über deren Verlauf er aber nichts sagen konnte. Überhaupt weiß kein Mensch Bestimmtes über die hiesigen Wasserverhältnisse zu sagen. Die Angaben der Tiefe der Quellen bei den einzelnen Brunnen [illegible] ken mit Eleganz zwischen 8 m und 45 m, daß es eine Freude ist. Auch weiß kein Mensch, auch die Geologen nicht, ob hier ein Grundwasserspiegel vorhanden ist oder nicht. Meine nächsten Versuche werde ich nun zuerst in sicher trockenem[2] Gebiete machen, und wenn ich dazu auf die Berge klettern muß, die ziemlich leicht [illegible] sind.

Meines Erachtens können wir mit den [illegible] paar Messungen sehr zufrieden sein. Wenn sie auch quantitativ absolut nichts besagen, so folgt doch aus ihnen, daß wir es mit ganz erheblichen Wirkungen zu tun haben".

Brief Nr. 2 (2. Juni 1914.)

„Von meinen weiteren Versuchen ist zu berichten, daß die Kapazitätsmethode unter genau denselben Verhältnissen, wie im letzten Brief beschrieben, die Wellenlängen

1.	125	211	350	715 m	auf halber Höhe
2.	114	174	335	--[3]) m	auf der Spitze
3.	117	202	362	—[3]) m	von zwei Hügeln

ergab.

Der Berg Nr. 2 besteht anscheinend nur aus Marmor. 1 und 3 wahrscheinlich Granit mit Kalk, vielleicht in einiger Tiefe. An der Stelle 1 sitze ich jetzt an der Vier[illegible]wellenmethode. Wasser könnte nach den Messungen in etwa 100 m Tiefe sein (hier sage ich natürlich so etwas nicht). Jedenfalls ist damit über die Methode noch nichts entschieden. Wo hier die [illegible] gar [illegible] bekannt sind, kann ich nichts tun, als zunächst an möglichst verschiedenen Stellen Material sammeln. Ich habe so λ, $\mathfrak{d}$ und I^2 (d. h. Wellenlänge, Dämpfungsfaktor und Strom) mit und ohne Kondensator parallel zur Funkenstrecke bei verschiedenen Antennenlängen und bei reichlicher Variation [illegible] und Verkürzungskondensatoren [illegible]. Von jetzt ab werde ich aber nur noch mit Kondensator parallel zur Funkenstrecke [illegible]".

Brief Nr. 3 (aus Karibib, [illegible]).

„Von den Messungen bei den [illegible] Marmorwerken ist vor allem zu bemerken, daß zunächst die Kapazitätsmessungen [illegible] Brunnen, der bei 45 m Wasser [illegible] in Karibib dieselben Wellenlängen [illegible] wie hier. Dann ging ich weiter [illegible] Brunnen fort, und entsprechend [illegible] Wellenlänge auf einen ziemlich konstanten Wert. Aber an einer Stelle gab es darauf noch einmal eine ganz kolossale Abnahme der Antennenkapazität, und zwar an einer Stelle, wo mit der Wünschelrute ein Wasserkessel [illegible] war. Was da nun los ist, weiß man nicht, [illegible] dort noch nicht gebohrt ist. Aber die [illegible] hat seiner Zeit den Wasserlauf [illegible] durch den ganzen Berg angegeben. [illegible] es nun für möglich, daß dort eine ziemlich große Kluft vorliegt, wie sie in Marmor häufiger vorkommen. Die Kluft könnte dann vielleicht unten etwas Wasser führen. [illegible] könnte ich aber nur auf Grund von Dämpfungsmessungen etwas sagen. Dafür habe ich aber noch keine sicheren Grundlagen durch Messungen über trockenem Gestein. Diese werde ich hoffentlich in Kubas bekommen. Die Dämpfungen waren aber auch hier in Karibib über Wasser in 32 m Tiefe (nach der $\lambda/4$-Methode gemessen, daher noch Vorsicht!) sehr klein; bei fast ungekürzter Antenne etwa 0,4, sonst viel weniger (parallele Kapazität natürlich)".

Brief Nr. 4 (aus Kubas, 16. Juni 1914).

„Ich habe mich jetzt überzeugt, daß das wichtigste Wasservorkommen hier in Südwest das in verhältnismäßig schmalen, unterirdischen Strömungen ist. So ist hier in Kubas ein Rivier, das auch Wasser führt, aber das Rivier wird von einem ganz schmalen Wasserstrom geschnitten, der viel mehr Wasser und in geringerer Tiefe führt. Vorläufig ist es mir noch nicht möglich gewesen, eine unterirdische

1) λ = Wellenlänge.
2) Soll heißen: „wasserlosem".
3) Für 100 m lange Antennen war kein Platz.

Wasserfläche von größerer Ausdehnung aufzutreiben, um die Verfahren mit zwei Antennen zu benutzen, und ich bin auf die Kapazitäts- und Viertelwellenmethode beschränkt geblieben. Ich werde auch noch einige Zeit damit genügend zu tun haben, diese beiden Verfahren unter den verschiedensten Verhältnissen anzuwenden, aber ich bin schon jetzt überzeugt, daß sie beide einer lohnenden praktischen Verwendung fähig sind. Ich mache jetzt die Sache immer so, daß ich zunächst mittels der Kapazitätsmethode einen Wasserlauf und seine Richtung feststelle. Zu dem Zwecke messe ich λ und $\mathfrak{d}$ bei gestreckten Antennen und schwenke dann erst die eine und dann die andere Antennenhälfte um die Apparatur herum[1]), wobei ich immer λ und $\mathfrak{d}$ messe. So habe ich hier

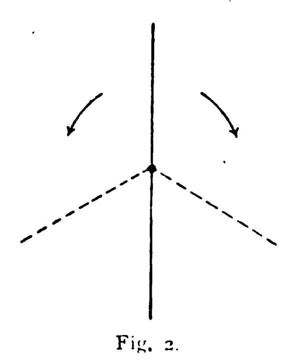


Fig. 2.

in Kubas schon an drei Stellen den Ort und die Richtung eines Wasserlaufes festgestellt. Dann lege ich die Antenne der Länge nach

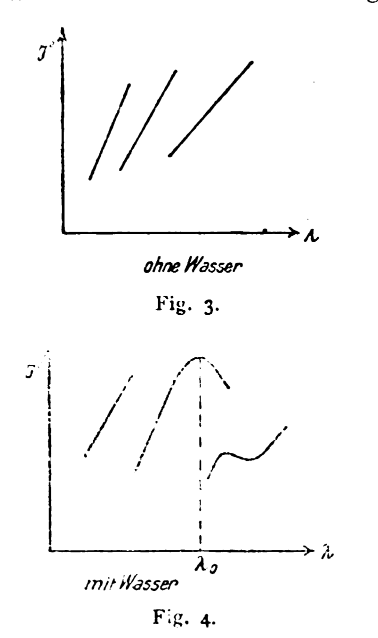


Fig. 3.

Fig. 4.

in die gefundene Richtung und bestimme mittels der $\lambda/4$-Methode die Tiefe, wie die Figuren zeigen. Die beiden Maxima in der rechten Figur (Fig. 4) dürften beide derselben Wellenlänge λ_0 entsprechen. Weil ich erst in einigen Tagen die Brunnen abloten kann, konnte ich ε für Granit noch nicht genau bestimmen[1]). Es scheint für Granit etwa $\varepsilon = 6$ zu sein, für Kalk etwa $\varepsilon = 4$.

Ich bin, wie gesagt, fest überzeugt, daß unsere Verfahren hier die Anwendung lohnen, aber ich glaube, daß dafür nur die Kapazitäts- und die $\lambda/4$-Methode in Betracht kommen werden. Die anderen sind viel zu kompliziert. Bei der $\lambda/4$-Methode lasse ich die Antennenlänge konstant und ändere sie nur in sehr großen Sprüngen. Das übrige mache ich mit Spulen und Drehkondensatoren".

Brief Nr. 5 (aus Farm Kubas, 26. Juni 1914).

„Gestern und heute habe ich hier im Höllenschluchtrevier, 4 km von Kubas, nach Wasser gesucht. Hier wollte der Farmer, Herr Meyer (Meyers gibt es hier nämlich auch) in der nächsten Zeit bohren lassen. Ich habe also die beste Gelegenheit, die Brauchbarkeit unserer Verfahren wirklich vorzuführen. An der Stelle, an der gebohrt werden sollte, ist nach meinen Messungen nicht viel Wasser zu erwarten, oder höchstens in großer Tiefe. Dagegen habe ich etwa 60 m davon entfernt eine Stelle angegeben, wo ziemlich viel Wasser sein kann und in 12 m Tiefe. Wegen der geringen Tiefe soll nun schon nächste Woche angefangen werden, einen Brunnen zu machen; die Arbeit wird nur acht bis vierzehn Tage in Anspruch nehmen, so daß ich vielleicht noch selbst die Sache mir ansehen kann, vor allem der Übergang vom Trockenen ins Feuchte, und genaue Tiefenmessung zur Bestimmung von ε machen kann".

Der letzte Brief vor Ausbruch des Weltkrieges ist von Kubas, 18. Juli datiert. Kröncke berichtet darin von einer fünftägigen Tour ins Innere des Landes, die er — zu Studienzwecken — mit einem Geologen der Deutschen Kolonialgesellschaft unternahm. Die elektrischen Instrumente konnte er nicht mitnehmen. Am 8. August wurde die Mobilmachung in S.-W.-Afrika erklärt. Am 9. August meldet er sich in Outjo zum Eintritt in die 6. Kompagnie und wird Ende Oktober in einem Gefecht verwundet. Der nächste Brief ist aus der Gefangenschaft geschrieben.

Brief Nr. 6 (Gefangenlager, 13. Oktob. 1915).

„Zu Otjiwaronge hatte ich bei Ausbruch des Krieges an einer Bohrstelle, die von Geologen angegeben war, die Wassertiefe auf etwa

1) Die gegenseitige Kapazität der Antennenhälften tritt hierbei noch nicht in Wirksamkeit.

1) ε ist die Dielektrizitätskonstante.

75 m angegeben. Die Bohrung ergab bei 73 m Wasser, das aber nicht reichlich genug zufloß. Leider wurde weiteres Bohren eingestellt. Ich halte es für wahrscheinlich, daß in etwas größerer Tiefe noch Wasser gekommen wäre".

Brief Nr. 7 (Kamp Aus, Verkehrszug I, 29. Jan. 1916).

„Von Angaben über Wasser, die ich auf Grund von Messungen vor dem Kriege machte, traf die von der Farm Audawib-Ost ein, wo schon gebohrt wurde und wo in Übereinstimmung mit den Messungen kein Wasser angetroffen wurde. Ferner in Otjiwaronge sagte ich an einer Stelle, wo gebohrt werden sollte, daß bei etwa 75 m Wasser zu erwarten sei. Bei 73 m wurde Wasser angetroffen, aber nur wenig. Leider wurde die Bohrung nicht fortgesetzt. Ich hatte zwar ausdrücklich erklärt, daß ich über die Menge noch nichts aussagen könnte, aber meiner Ansicht nach kann eine schwach wasserführende Schicht in so großer Tiefe keine starken Reflexionswirkungen hervorbringen, noch dazu durch eine nicht unbeträchtliche Grundwasserfeuchtigkeit in 10 m Tiefe hindurch. Meiner Ansicht nach mußte mindestens bis 85 m gebohrt werden. Außerdem machte ich nur noch die schon vor dem Kriege mitgeteilte Angabe bei Kubas[1]); ein Resultat ist mir noch nicht bekannt".

Das ist der letzte Brief, der hier für uns von Interesse ist. Dr. Kröncke befindet sich noch immer in S.-W.-Afrika. Die wichtigsten Ergebnisse seiner Versuche sind:

1. Die Antenne kann ohne Isolation auf den Erdboden gelegt werden (Nr. 1).

2. Die Kapazitätsmessungen ergeben an verschiedenen Orten markante Unterschiede (Nr. 1). Abnahme der Kapazität beim Erheben auf Hügeln (Nr. 2) oder beim Entfernen von einem Brunnen (Nr. 3). Die Kapazität hat an verschiedenen Orten bei gleicher Tiefe des Grundwassers den gleichen Wert (Nr. 3).

3. Es gelangen fünf Nachweise von unterirdischen Strömen mit Angabe der Richtung durch Kapazitätsmessungen und Tiefenbestimmung mittels der $\lambda/4$-Methode (Nr. 4, 5 und 6). Eine von diesen Messungen konnte durch eine Bohrung kontrolliert werden und wurde bestätigt.

Wien, April 1919.

(Eingegangen 30. Mai 1919.)

1) Brief Nr. 5.

Anmerkung.

Herr Dr. Kröncke ist eben aus Afrika zurückgekehrt und hat eine Korrektur der vorliegenden Mitteilung durchgesehen. Auf einer Karte (aus Einbeck, den 9. Aug. 1919) schreibt er mir: „Daß es möglich ist, mittels elektrischer Wellen Wasser festzustellen und dessen Tiefe zu messen, ist nach meinen Versuchen nicht mehr zweifelhaft".

Göttingen, August 1919.

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Der Energieinhalt der Festkörper im Lichte der neueren Forschung[1]).

Von Erwin Schrödinger.

Einleitung. Übersicht.

Die folgende Darstellung würde sich um ein Stück harmonischer und abgerundeter haben gestalten lassen, hätte sich der Referent nicht peinlich zur Pflicht gemacht, auch nicht über eine einzige der noch recht zahlreichen Unebenheiten des Stoffes mit glatter Zunge hinwegzugleiten. Dies und die überall gebotene äußerste Knappheit des Ausdrucks wird die Lektüre zu einer nicht eben leichten und teilweise unbefriedigenden machen. Ein kurzer Abriß des Inhalts vorausgeschickt, mag darin etwas bessern.

Die im Anschluß an die kinetische Gastheorie und an das Gesetz von Dulong und Petit entwickelte klassische Vorstellung, daß jedem Freiheitsgrad die gleiche mittlere Wärmeenergie kT zukommt (§ 1), erweist sich als unhaltbar (§ 2), selbst wenn man die Zahl der Freiheitsgrade durch Komplexbildung variieren läßt (§ 3).

1) Neuere zusammenfassende Darstellungen mit gleichem oder verwandtem Thema: F. Richarz, Die Theorie des Gesetzes von Dulong und Petit, Zeitschr. f. anorg. Chem. **58**, 356; **59**, 146, 1908. s. a. Derselbe, Ann. d. Phys. **39**, 1617, 1912; Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 365, 1916. — A. Eucken, Neuere Untersuchungen über den Temperaturverlauf der spezifischen Wärme, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **8**, 489, 1911. — Derselbe, I. Conseil Solvay, Deutsche Ausgabe, S. 376 ff. Halle a. S., Knapp. 1914. — A. Wigand, Neuere Untersuchungen über spezifische Wärmen, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **10**, 54, 1913. — E. Grüneisen, Molekulartheorie der festen Körper, II. Conseil Solvay, Brüssel 1913. — W. Nernst, Vorträge über die kinetische Theorie usw („Wolfskehl-Woche" Göttingen 1913), S. 63 ff.; Teubner. Leipzig 1914. — Derselbe, Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes, Kap. III u. IV, Halle a. S. Knapp. 1918. — E. Schrödinger, Die Ergebnisse der neueren Forschung über Atom- und Molekularwärmen. Die Naturwissenschaften **5**, 537 u. 561, 1917.

Nimmt man aber als Vergleichskörper („Thermometer") statt des idealen einatomigen Gases Hohlraumstrahlung von der empirischen (d. i. Planckschen) Zusammensetzung (§ 4), so findet man für die mittlere Energie eines Freiheitsgrades von der Frequenz ν den Wert

$$\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}. \qquad (A)$$

§ 5 und 6 behandeln die Beziehungen dieses Ausdruckes zur Quantentheorie der Strahlung und zum Nernstschen Wärmesatz und sind für den logischen Aufbau entbehrlich. — Schreibt man allen Freiheitsgraden des Festkörpers das gleiche ν und jedem die mittlere Wärmeenergie (A) zu, so führt das zu einer Temperaturabhängigkeit von C_v (§ 7), welche von der neueren Experimentalforschung (§ 8) im allgemeinen bestätigt wird (§ 9). Theoretische und experimentelle Erwägungen deuten aber auf eine Vielheit von Schwingungszahlen (§ 10). Sie ergibt sich daraus, daß man die möglichen Bewegungen des Festkörpers als Ganzen in Normalschwingungen zerlegt (§ 11) und jeder derselben wieder den Energiewert (A) zuschreibt. Schon eine verhältnismäßig rohe Abschätzung des „Spektrums" der Normalschwingungen (§ 12) klärt den C_v-Verlauf quantitativ auf für jene „thermisch einfachen" Körper, für die er als Funktion von T/Θ universell ist (§ 13). Die charakteristische Körperkonstante Θ (von der Dimension einer Temperatur), die eng verknüpft ist mit einer gewissen oberen Grenzfrequenz, weist interessante Beziehungen auf nicht nur (der entwickelten Theorie gemäß) zu den elastischen, sondern auch noch zu anderen Eigenschaften des Materials, insbesondere stimmt die Grenzfrequenz selbst mit der Frequenz etwa vorhandener Reststrahlen nahe überein (§ 14). Aber trotz der schönen Erfolge erweisen Experiment und Theorie die entwickelte Anschauung nur als vorläufige Näherung, in Strenge gültig nur für tiefste Temperaturen (§ 15, 16) und aus vielen Gründen ausbaubedürftig (§ 17, 18).

Eine strenge Theorie muß zur Berechnung des mechanischen Spektrums von unserer Kenntnis der Raumgitterstruktur der festen Materie Gebrauch machen (§ 19—22). Die Durchführung beleuchtet grell Vorzüge und Fehler der früher benutzten Näherung. Letztere liegen a) in der Annahme nur einer Grenzfrequenz, b) in der Nichtberücksichtigung der Anisotropie aller echten Festkörper, c) in der Nichtberücksichtigung einer mechanischen Dispersion, die für höchstfrequente elastische Wellen als Folge der Gitterstruktur auftritt. Einige halb-empirische Formelbildungen lassen sich formal begründen. Eine vollständige Vorhersage des thermisch-energetischen Verhaltens aus dem elastischen oder optischen Verhalten (Reststrahlen) allein erweist sich als theoretisch ausgeschlossen.

Damit erscheint der positive Teil der Theorie, soweit er bis jetzt vorliegt, abgeschlossen. Als eine nicht minder wichtige Leistung des Ansatzes (A) erscheint es aber, daß er die offenkundige energetische Passivität gewisser Gruppen von Freiheitsgraden aufklärt (§ 23 u. 24). Bis jetzt am wenigsten geklärt ist die Rolle der Elektronen beim Aufbau des Gitters und besonders das energetische Verhalten der freien Metallelektronen (§ 25).

Ein Anwachsen von C_v über den Dulong-Petitschen Wert hinaus bei hoher Temperatur würde der Theorie nicht unverständlich sein. (§ 26). Experimentell mit voller Sicherheit fest gestellt ist ein solches Verhalten für die Ferromagnetika und wird hier durch die Langevin-Weißsche Theorie des „champ moléculaire" gut verständlich. Eine bessere Anpassung dieser Theorie an die Raumgittermodelle scheint aber nötig (§ 27.) —

Die Regeln von Dulong und Petit und Neumann-Kopp. Die klassische Theorie[1]).

§ 1. Die ältesten Erfahrungssätze über die Abhängigkeit des Energieinhaltes der Festkörper von der Temperatur sind bekanntlich die beiden folgenden:

a) Thermisch äquivalente Portionen verschiedener Elemente, d. h. solche Massen derselben, denen man für gleiche Temperaturerhöhung die gleiche Wärmemenge zuführen muß, erweisen sich meist sehr angenähert als chemisch äquivalent, d. h. sie stehen im Verhältnis der chemischen Atomgewichte. Nach der Atomtheorie enthalten sie also gleichviel wirkliche Atome. Für ein Grammatom (d. h. $N = 6{,}17 \times 10^{23}$ Atome) und 1^0 C sind meist nahe bei 6,4 cal nötig[2]).

b) Eine chemische Verbindung hat meist nahe dieselbe Wärmekapazität wie die unverbundenen Komponenten zusammen[3]).

Beide Regeln haben dem Chemiker bei Atomgewichtsbestimmungen die wertvollsten Dienste geleistet. Von ihnen theoretisch Rechenschaft zu geben, wurde der dynamisch-statistischen Theorie der Wärme um vieles leichter, als ihren nur sehr approximativen Charakter und ihr — in einigen Fällen — völliges Versagen zu erklären. Die neuere Experimentalforschung hat diese „Ausnahmen" als, bei tiefer Temperatur, allgemein und in der Temperaturabhängigkeit der Atom- und Molwärmen wurzelnd festgestellt.

1) Ausführlicher referiert bei A. Wigand l. c.

2) Dulong u. Petit 1818.

3) Neumann (1831), Regnault (1840), Kopp (1864). Näheres über beide Regeln etwa bei W. Nernst, Theoretische Chemie 5. Aufl. S. 263 ff.

Die experimentell ermittelte Temperaturabhängigkeit und damit auch jene sogenannten Ausnahmen theoretisch zu verstehen, bildet den hauptsächlichen Gegenstand dieses Referats. —

Der von der älteren Forschung als häufigster Wert oder „Häufungsstelle" der Atomwärme bezeichnete Wert 6,4 cal/°C gilt für die „Atomwärme bei konstantem Druck" $C_p = A\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p$ (U = Energieinhalt pro Gramatom, T = absolute Temperatur, p = Druck, A = kalorisches Arbeitsäquivalent $= 2{,}387 \times 10^{-8}\ \frac{\text{cal}}{\text{erg}}$). Die „Atomwärme bei konstantem Volum"

$$C_v = A\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v \tag{1}$$

(V = Atomvolum) ist nach der reinen Thermodynamik (1. Hauptsatz) kleiner, erstens um die äußere Ausdehnungsarbeit

$$A \cdot 3\alpha p \tag{2}$$

(3α = kubischer, thermischer Ausdehnungskoeffizient), die bei festen Körpern unter Atmosphärendruck stets unmeßbar klein ist, zweitens um den Betrag der „inneren" Arbeit.

$$A \cdot 3\alpha V\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T. \tag{3}$$

Hier kann man in bekannter Weise, mittels des 2. Hauptsatzes den experimentell unbequemen letzten Faktor eliminieren und erhält unter Vernachlässigung von (2):

$$C_p - C_v = A \cdot \frac{9\alpha^2 V T}{\varkappa}, \tag{4}$$

wo

$$\varkappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \tag{5}$$

die isotherme kubische Kompressibilität ist.

Bringt man diese Korrektion (soweit die nötigen Daten bekannt) an den C_p der Elemente an, so rückt die Häufungsstelle von etwa 6,4 (für C_p) auf etwa 6,0 cal/°C (für C_v)[1]).

Das ist sehr genau das Doppelte von C_v der einatomigen Gase[2]), deren gesamtes thermisches und elastisches Verhalten fast restlos durch die Annahme verständlich wird, daß ihr Energieinhalt ausschließlich in fortschreitender Bewegung der Atome besteht und ausschließlich von der Temperatur (nicht vom Volumen) abhängt; und zwar gilt für ein Grammatom, bei der Temperatur T

$$U = \frac{3RT}{2},\ C_v = A\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v = \frac{3AR}{2} \backsim 3\ \text{cal}/°\text{C},$$

wo R, die universelle Gaskonstante, $= 8{,}315 \cdot 10^7$ erg/°C, $AR = 1{,}985$ cal/°C. D. h. die Energie der fortschreitenden Bewegung beträgt durchschnittlich pro Freiheitsgrad (d. i. für ein Atom in einer Koordinatenrichtung):

$$E = \frac{U}{3N} = \frac{kT}{2N} = \frac{kT}{2};$$
$$k = \frac{R}{N} = 1{,}347 \times 10^{-16}\ \text{erg}/°\text{C}. — \tag{7}$$

Im Gegensatz zu Gasen und Flüssigkeiten wechseln im festen Körper die Atome nicht ihre Plätze, wie aus dem Fehlen der Diffusion und der Brownschen Ortsveränderung kleinster submikroskopischer Einschlüsse folgt. Die Wärmebewegung jedes Atoms kann hier also nur in Schwingungen um einen gewissen mittleren Ort bestehen, an welchem das Atom durch die Wirkung seiner Nachbarn festgehalten wird. Seine Energie wird dann nicht ausschließlich kinetischer, sondern auch potentieller Art sein.

Nichts liegt darum näher, als jene einfache Beziehung zwischen C_v der Festkörper und einatomigen Gasen dahin zu deuten, daß die Atome des Festkörpers dieselbe mittlere Energie der fortschreitenden Bewegung besitzen wie die Gasatome, daß aber — wie es bei einem durch unregelmäßige Stöße hin- und hergeworfenen Pendel bei kleinen Ausschlägen tatsächlich der Fall wäre — ein durchschnittlich ebenso großer Betrag jeweilig als Energie der Lage aufgespeichert ist.

Eine schärfere statistisch-mechanische Analyse erweist diese Schlüsse als folgerichtig. Sie liefert einmal das berühmte Boltzmannsche Äquipartitionstheorem[1]), wonach sich die Bewegungsenergie zweier in Wechselwirkung stehender mechanischer Systeme im Zeitmittel wie die Zahlen ihrer Freiheitsgrade verhalten (und bei „sehr vielen" Freiheitsgraden „fast immer" sehr angenähert wie diese Zahlen). Wenden wir das etwa auf einen festen Körper und auf das *He*-Thermometer an, mit dem wir seine Temperatur messen, so folgt die Gleichheit der mittleren kinetischen Energie pro Freiheitsgrad, die also auch für den festen Körper den Wert (7) haben muß. Die Gleichheit der potentiellen und kinetischen Energie ergibt sich exakt, wenn die Kräfte zwischen den Atomen lineare (Vektor-)Funktionen ihrer gegen-

1) F. Richarz, Wied. Ann. 48, 708, 1893; G. N. Lewis, Zeitschr. f. physik. Chem. 32, 364, 1900; Zeitschr. f. anorg. Chem. 55, 200, 1907; Journ. Amer. chem. soc. 29, 1165 u. 1516, 1907; E. Grüneisen, Ann. d. Phys. (4), 26, 401, 1908.

2) W. Dittenberger, Diss. Halle 1897; R. Thomas; Diss. Marburg 1905; A. Eggert, Diss. Marburg 1910, M. Pier, Zeitschr. f. Elektrochem. 15, 536, 1909.

1) L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie Bd. II, Kap. 3 u. 4. — J. H. Jeans, I. Solvay-Kongreß S. 45 ff., der deutschen Ausgabe.

seitigen Lagenänderung sind[1]), oder, wie Richarz[2]) zeigt, angenähert, wenn, bei beliebigem stetigen Kraftgesetz die Lagenänderungen nur genügend klein sind (dann ist nämlich die Linearität angenähert erfüllt; einfachstes Beispiel: Pendel).

§ 2. Dieser letzte Schritt, der die Theorie erst von einer allzu speziellen Voraussetzung zu befreien und darum zu stärken scheint, versetzt ihr, wenigstens in dieser einfachen Form, den Todesstoß. Während die erste Form die erwünschte Möglichkeit zu bieten scheint, die „Streuung" von C_v und auch die erheblicheren Abweichungen vom „kanonischen" Wert $3AR \cong 6$ in plausibler Weise auf Abweichungen der Kraftgesetze von der Linearität zurückzuführen[3]), treibt der Richarzsche Gedankengang unausweichlich zu der Forderung, daß bei abnehmender Amplitude, also bei abnehmender Temperatur, der Energieinhalt des Grammatoms dem Wert

$$U = 3RT, \tag{8}$$

also C_v dem Wert $3AR$ asymptotisch zustreben sollte[4]).

Das Gegenteil ist der Fall. Die unternormalen C_v nehmen mit sinkender Temperatur rasch noch weiter ab[5]), und — was freilich erst die neueren Untersuchungen gezeigt haben — bei genügend tiefer Temperatur sinken alle Atom- und Molekularwärmen fester Stoffe auf kleine Bruchteile des kanonischen Wertes herab[6]).

Aus diesem Widerspruch gibt es offenbar zwei Auswege: entweder man nimmt an, daß die Zahl der Freiheitsgrade veränderlich ist, und zwar bei tiefer Temperatur weit unter $3N$ herabgeht; will man das nicht, so folgt, daß die durchschnittlichen Bewegungsenergien von Fest- und von Gas-Atomen im Wärmekontakt im allgemeinen verschieden sind. — Endlich wäre noch eine Verquickung beider Annahmen möglich, die freilich allen festen Boden unter den Füßen raubt.

§ 3. Der erste Weg ist zuerst von Richarz[7]) und später noch mehrmals betreten worden in einer Form, die in der Boltzmannschen Theorie der zwei- und mehratomigen Gase ein Vorbild hat: es sind die sogenannten Agglomerations- oder Komplexbildungshypothesen[8]).

Die Molekularwärme der zweiatomigen Gase wird nur in einigen Fällen (z. B. Cl_2, Br_2, J_2) doppelt so groß gefunden, wie die der einatomigen, niemals größer, wie man erwarten könnte auf Grund der Überlegung, daß zu der kinetischen Energie der sechs Freiheitsgrade der fortschreitenden Bewegung noch interatomare Energie der Lage hinzutritt. Wohl aber ist sie z. B. bei H_2, N_2, O_2 kleiner; nämlich nur ungefähr

$$C_v = \frac{5}{2} A R \quad (\text{statt } \frac{6}{2} A R, \text{ oder mehr.}) \tag{9}$$

Es fehlt also anscheinend im Molekül ein ganzer Freiheitsgrad! Das hat Boltzmann bekanntlich mit Erfolg dahin gedeutet, daß das Atompaar in diesen Fällen starr zusammengewachsen ist und einen Körper von der Symmetrie und den mechanischen Eigenschaften eines starren, vollkommen glatten Rotationsellipsoids bildet.

In ähnlicher Weise lassen alle Formen der Agglomerationshypothese die Zahl der Freiheitsgrade im Festkörper bei sinkender Temperatur durch Bildung immer größerer starrer Komplexe in dem zur Erklärung des C_v-Verlaufes erforderlichen Maße abnehmen.

Gegen diesen Ausweg steht erstens, daß die Kompressibilität auch bei den tiefsten erreichten Temperaturen, wo die Bildung starrer Komplexe schon sehr weit vorgeschritten sein müßte, nur um Prozente abzunehmen pflegt[1]). — Zweitens würde diese Auffassung ganz unvermittelt neben die eingangs erwähnte Erfahrungstatsache treten, daß im Falle der chemischen Bindung — der Komplexbildung κατ' ἐξοχήν — bei Festkörpern so häufig keine nennenswerte Änderung der gesamten Wärmekapazität auftritt. — Drittens endlich ist die Agglomerationstheorie auf einer erheblichen gedanklichen Härte aufgebaut, die dadurch nicht gemildert wird, daß sie auch schon der Theorie der mehratomigen Gase eigentümlich ist.

Man überlege sich nur: in beiden Fällen ist nicht davon die Rede, daß ein (einzelner, individueller) Freiheitsgrad allmählich ausscheidet, daß er um so weniger Energie aufnimmt, je fester die Bindung. Sie mag so „steif" sein, wie sie will, er wird immer noch den vollen Betrag kT (den doppelten wie im Falle der Ungebundenheit!) aufnehmen. Axiomatische Starrheit wird verlangt, damit er — dann aber auch völlig — ausscheide.

Wenn diese Diskontinuität auch nicht notwendig auf „Sprünge" im C_v-Verlauf führen muß, so erweckt doch schon der gedankliche Sprung Unbehagen genug, um die Auffassung von Haus

1) L. Boltzmann, Wien. Ber. 63 (II), S. 731, 1871.
2) F. Richarz, Wied. Ann. 67, 702, 1899.
3) F. Richarz, Marb. Ber. 1906, S. 187.
4) Anders Wigand l. c. S. 70f.
5) H. F. Weber, Pogg. Ann. 154, 367 u. 553, 1875; Behn, Wied. Ann. 66, 237, 1898; Ann. d. Phys. 1, 257, 1900; Tilden, Phil. Trans. 201, 37, 1903.
6) Ausführliche Literatur später.
7) F. Richarz, Marb. Ber. 1904, S. 1.
8) M. Reinganum, diese Zeitschr. 10, 351, 1909; J. Duclaux, C. R. 155, 1015, 1912; J. chim. phys. 11, 157, 1913; C. Benedicks, Ann. d. Phys. (4) 42, 133, 1913; A. H. Compton, Phys. Rev. (2) 5, 338; 6, 377, 1915; hierzu: F. Schwers, ibid. 8, 117, 1916.

1) Vgl. E. Grüneisen, Verh. d. D. Phys. Ges. 13, 502, 1911.

aus zu einer nur provisorischen zu stempeln. Sie geht in der Tat in der neueren Theorie völlig auf, unter Beseitigung der Diskontinuität und Herbeiführung des erwünschten „Je—Desto“-Verhältnisses, und zwar sozusagen von selbst, ohne daß etwa gerade dies den Ausgangspunkt oder das Ziel der neueren Auffassung bilden würde. Als reife Früchte von ihrem Baum wird uns auch die Lösung einiger anderer Schwierigkeiten zufallen, vor allem der Frage: Was ist's mit der Rotationsenergie der Atome? — Warum scheinen die zahlreichen optischen bzw. elektrischen Freiheitsgrade, auf die wir aus dem komplizierten Bau der Spektren fast mit Notwendigkeit schließen müssen, vom Energieaustausch praktisch ausgeschlossen zu sein? (s. u. § 23 u. 24).

Der Strahlungswert für die Oszillatorenergie[1]).

§ 4. Sehen wir von einer zahlenmäßigen Verminderung der Freiheitsgrade ab (und vorläufig auch von den beiden zuletzt geäußerten Bedenken), so beweist der starke Abfall bei tiefen Temperaturen des Verhältnisses

$$\frac{C_v \text{ des Festkörpers}}{C_v \text{ des } He\text{-Thermometers}}$$

bündig, daß die Fest-Atome zwar vielleicht in vielen, aber sicher nicht in allen Fällen dieselbe Translationsenergie wie die mit ihnen im Wärmegleichgewicht stehenden Gasatome besitzen; mithin: Ungültigkeit des Äquipartitionstheorems.

Wenn nun schon in der Berechnung des Gleichgewichts: Festkörper-Gas ein Verstoß gegen die Tatsachen liegen soll, welcher andere Weg von annähernd derselben theoretischen Zwangläufigkeit bietet sich dar, um einen Anhaltspunkt für die Wärmeenergie des Festkörpers zu gewinnen? Gibt es einen Körper, den wir in seinem gesamten thermodynamischen Verhalten auch nur ebenso klar durchschauten, wie das — in der Natur so nahe verwirklichte — ideale einatomige Gas?

Die Theorie der Wärmestrahlung[2]) behauptet, daß es einen „Körper“ gibt, der uns, wenigstens in einigen Hauptpunkten, sogar noch sicherer bekannt ist: das Vakuum. Es gelingt der reinen Thermodynamik im Verein mit der Maxwell-Hertzschen Elektrodynamik, nachzuweisen (Boltzmann), daß ein vollkommenes Vakuum, wenn es nur mit Körpern einer Temperatur im Strahlungsaustausch steht, einen mit T^4 proportionalen (Strahlungs-)Energieinhalt haben muß. Ja sogar über die Verteilung der Energie auf Schwingungszahlen vermag schon die reine Thermodynamik (2. Hauptsatz) eine Aussage zu machen (Wiensches Verschiebungsgesetz). Sei $u(\nu, T)d\nu$ die räumliche Energiedichte mit Schwingungszahlen zwischen ν und $\nu + d\nu$, dann muß u von der Form sein

$$u(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right). \tag{10}$$

Die Erfahrung bestätigt das speziellere Plancksche Strahlungsgesetz

$$u(\nu, T) = \left(\frac{8\pi h}{c^3}\right)\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \tag{11}$$

wo k dieselbe Abkürzung wie oben, Gl. (7), c die Vakuumlichtgeschwindigkeit, h die sog. Plancksche Konstante, die sich empirisch zu

$$h = 6{,}55 \cdot 10^{-27} \text{ erg.sec} \tag{12}$$

ergibt. — Bringen wir nun an unserem Festkörper statt, oder besser noch, nebst dem *He*-Thermometer ein „Strahlungsthermometer“ an, etwa indem wir in ihn eine Höhlung bohren, welche durch genügend dicke Schichten des Körpers nach außen allseitig abgeschlossen ist und nur ein kleines Beobachtungsfenster besitzt, dann können wir schon nach dem Stefan-Boltzmannschen T^4-Gesetz die Temperatur des Körpers an der austretenden Strahlung erkennen. Sie wird an beliebigen Körpern mit gleicher (Helium-)Temperatur gleich intensiv, ja sogar von derselben, durch (11) gegebenen spektralen Zusammensetzung sein. Mit dieser Strahlung steht also jeder Körper im Wärmegleichgewicht. — Aber wie sollen wir daraus einen Anhaltspunkt für die Energie der Körperatome gewinnen?

Da jede wirkliche Wandsubstanz denselben Strahlungszustand hervorbringt, haben wir mit Planck die Kühnheit, dies auch für eine möglichst vereinfachte und dadurch der Rechnung zugängliche „ideale“ Wandsubstanz zu fordern. Wir lassen die Wand aus einer „Mischung“ einfacher elektrischer Oszillatoren mit linearer Schwingungsgleichung[1]) von allen möglichen Eigenschwingungszahlen bestehen. Die Oszillatoren sollen räumlich so weit getrennt sein, um sich gegenseitig nicht direkt zu beeinflussen, aber doch eine genügend mächtige Hülle um den Hohlraum bilden, um jeden Strahlungsaustausch mit der Außenwelt zu hindern. Dann befindet sich einer von den innersten Resonatoren mit der Eigenschwingungszahl ν in einem homogen-isotropen Strah-

1) Die Darstellung folgt in der Hauptsache dem Gedankengang von A. Einstein, I. Solvay-Kongreß, Bericht Einstein; Ann. d. Phys. (4) 35, 683ff. 1911.

2) Siehe M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung. Leipzig, J. A. Barth. 1. Aufl. 1906. 2. Aufl. 1913.

1) Etwa: Zwei entgegengesetzt geladene kleine Massen, auf einer Geraden beweglich, durch quasielastische Kraft verbunden.

lungsfeld von bekannter Beschaffenheit und es läßt sich berechnen, daß seine durchschnittliche Energie $E(\nu, T)$ mit der Energiedichte $u(\nu, T)$ seiner Eigenschwingungszahl in der einfachen Beziehung stehen muß

$$E(\nu, T) = \frac{c^3}{8\pi\nu^2} u(\nu, T). \tag{13}$$

Setzen wir hier das empirisch bestätigte Strahlungsgesetz (11) ein, so ergibt sich

$$E(\nu, T) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = kT \frac{x}{e^x - 1}; \quad x = \frac{h\nu}{kT}. \tag{14}$$

Für denselben Resonator im Wärmegleichgewicht mit Gasatomen würde das Äquipartitionstheorem geben

$$E(\nu, T) = kT. \tag{15}$$

Die Einführung der Hilfsvariabeln x setzt den für das Folgende wichtigen Umstand in Evidenz, daß der Faktor, um den (14) sich von (15) unterscheidet, eine Funktion des Verhältnisses T/ν ist. Für große T oder kleine ν fallen beide Ausdrücke zusammen; je kleiner T und je größer ν ist, ein um so kleinerer Bruchteil des Äquipartitionswertes kommt dem Oszillator nach unserer jetzigen Überlegung zu. Die Kurven I und II der Fig. 1 sollen den genauen Sachverhalt noch besser veranschaulichen.

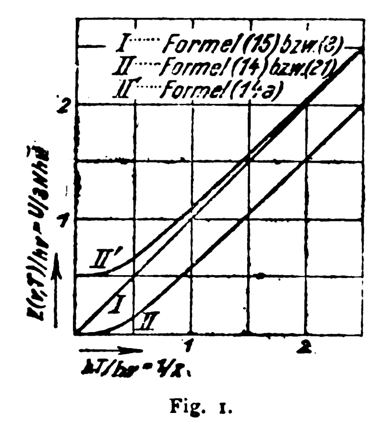


Fig. 1.

Würde sich nun der Oszillator in den beiden Fällen wirklich auf verschiedene E-Werte einstellen, so wäre für ein System: Strahlung — Oszillatoren — Gas, thermodynamisches Gleichgewicht unmöglich, jedenfalls würde das (scheinbare) Gleichgewicht zwischen zwei Bestandteilen von der räumlichen Anordnung und von der Anwesenheit oder Abwesenheit des dritten abhängen, was den thermodynamischen Grundtatsachen widerspricht. Entweder (14) oder (15) muß falsch sein, wenn unser Oszillatoren-Ensemble nicht eine utopische, thermodynamisch undenkbare Idealisierung der wirklichen Materie ist.

Mit Planck und Einstein glauben wir das nicht, halten (15) für falsch, und (14) für die oben geforderte Richtigstellung — natürlich zunächst für den Fall des einfachen Oszillators, aber im Wärmegleichgewicht mit jedem beliebigen System.

Die beiden Planckschen Hypothesen[1]).

§ 5. Den eben beschriebenen Weg hat zuerst Planck beschritten, damals freilich in umgekehrter Richtung. Er schloß aus (13) und (14) auf (11), während wir eben (mit Einstein) von (11) und (13) auf (14) geführt wurden. Natürlich konnte Planck (14) nicht aus der gewöhnlichen statistischen Mechanik gewinnen, da diese immer nur auf (15) und mit Rücksicht auf (13) in unerbittlicher Hartnäckigkeit auf das (sinnlose) Rayleigh-Jeanssche „Strahlungsgesetz"

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 \tag{16}$$

führt, was die Unmöglichkeit des thermodynamischen Gleichgewichts zwischen Strahlung und Materie bedeuten würde[2]). Man kommt nach Planck zu (14) durch die Hypothese, daß die Oszillatoren der Eigenschwingungszahl ν die Strahlungsenergie nur in „Quanten" von der Größe $h\nu$ emittieren und absorbieren. Dann kommen nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung die hochfrequenten und darum (nach Annahme) „hochquantigen", die kleinere Portionen verschmähen, zu kurz.

Diese erste Form der Quantenannahme stand mit der sonst konsequent verwendeten Mechanik und Elektrodynamik in allzu schroffem Widerspruch. Wollte man die quantenhafte Struktur in die Strahlung selbst verlegen, so sanken mit dem Gebäude der Wellenoptik die Theorien der Interferenz und Beugung, ja ein Teil des Fundaments der Planckschen Rechnungen selbst in Schutt und Staub. Andernfalls — bei normaler Struktur der Strahlung — mußte der Resonator kraft einer Art „Prophetengabe" schon am Beginn jedes Absorptionsaktes „wissen", ob der auffallende Wellenzug auch lang genug anhalten werde, um ihm einen ganzen Betrag $h\nu$ zu liefern. — Jedenfalls bestanden und bestehen für die erste Plancksche Theorie große Schwierigkeiten und es ist wertvoll zu wissen, daß es ausreicht, sich die Absorption kontinuierlich nach den Gesetzen der Mechanik und Elektrodynamik und nur die Emission quantenhaft zu denken. Und

1) Planck, Theorie der Wärmestrahlung 1. Aufl. 1906 (1. Fassung); 2. Aufl. 1913 (2. Fassung).

2) Das folgt auch direkt aus dem Äquipartitionstheorem, wenn man erwägt, daß der Strahlung nach unserer Auffassung unendlich viele Freiheitsgrade zukommen (Jeans).

zwar soll Emission nur beim Passieren der ausgezeichneten Energiewerte

$$h\nu,\ 2h\nu,\ 3h\nu,\ \ldots n h\nu \ldots \qquad (17)$$

je mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit erfolgen, und wenn sie eintritt, eine vollständige sein (sog. zweite Plancksche Theorie). Natürlich führen diese Annahmen zu einer von (13) etwas abweichenden Beziehung, weil der Oszillator vor Erreichung der ersten Stufe $h\nu$ überhaupt nicht emittiert. Seine Energie wird daher auch im schwächsten Strahlungsfeld langsam mindestens bis $h\nu$ ansteigen und in der Grenze für verschwindendes Feld den Durchschnittswert $\frac{h\nu}{2}$ behalten. Die Rechnung führt auf

$$E(\nu, T) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{h\nu}{2}, \qquad (14a)$$

während die Strahlungsformel (11) ungeändert bleibt. Formel (14a) wird durch Kurve II' (Fig. 1) dargestellt. Das Glied $h\nu/2$, um das sich (14) und (14a) unterscheiden, ist die vielberufene Nullpunktsenergie. Solange es sich nur um Energieänderungen handelt und ν sich nicht ändert, ist es unerheblich, ob man mit ihr rechnet oder ohne sie. An den wenigen Punkten, wo sie für die Atom- und Molwärmen der Festkörper von Bedeutung werden könnte, werden wir im folgenden besonders darauf hinweisen, sonst aber stets mit dem einfacheren Ausdruck (14) arbeiten. — —

Es hat nicht an Versuchen gefehlt, die so unnatürliche und gezwungene Quantenannahme überhaupt ganz zu vermeiden und Formeln wie (11), (14), (14a) u. ä. auf Grund durchaus kontinuierlicher Vorstellungen über den Energieaustausch abzuleiten[1]). Doch war bisher keinem dieser Versuche ein voller Erfolg beschieden und es scheint im Gegenteil, daß „irgend etwas Diskontinuierliches" in den Voraussetzungen durchaus unentbehrlich ist — wenn man es nicht, wie im § 4 geschehen, vorzieht, dieses vage hypothetische Element einfach durch das empirische Strahlungsgesetz zu ersetzen.

Die Beziehung zum Nernstschen Wärmesatz.

§ 6. Für $T = 0$ verschwindet nach (14) nicht nur die Oszillatorenergie selbst, sondern auch ihr Differentialquotient nach T, den man als „Wärmekapazität" des Oszillators bezeichnen kann. Auf die Vermutung, daß die spezifischen Wärmen aller festen (und flüssigen) Körper bei tiefer Temperatur gegen Null konvergieren, wird man nun nach Nernst und Planck noch von einer ganz anderen Seite her geführt.

Eine der vielen Formen, das Nernstsche Wärmetheorem[1]) auszusprechen, ist die: In der Nähe des absoluten Nullpunktes sollen alle chemischen oder physikalischen Umwandlungen zwischen „kondensierten" (d. i. festen oder flüssigen) Systemen ohne Änderung der Entropie sich abspielen.

Planck[2]) geht einen Schritt weiter und verlangt, daß dieses additive Verhalten der Entropie zwischen endlichen Entropiewerten statthaben soll (nicht etwa zwischen unendlich großen, was nach Nernst noch zulässig wäre). Da nun die Entropie S eines Körpers, von irgendeinem zugänglichen Anfangszustand aus gezählt, gegeben ist durch

$$S = \int^{T} \frac{C_p\, dT}{T}, \qquad (18)$$

das Integral genommen für eine Zustandsänderung bei konstantem Druck, so kann S für $T = 0$ nur endlich bleiben, wenn dort C_p (und daher nach (4) auch C_v) verschwindet[3]). — Dann ist es — und zwar nur auf eine Art — möglich, die untere Integralgrenze in (18) allgemein so festzulegen, daß diese Gleichung selbst zum konzisesten Ausdruck des Wärmetheorems in der Planckschen Erweiterung wird; nämlich durch die Festsetzung

$$S = \int_0^T \frac{C_p\, dT}{T}. \qquad (19)$$

In dieser allgemeinen Festlegung der bisher noch in jedem einzelnen Fall ganz unbestimmten Entropiekonstante sieht Planck den tieferen Zusammenhang zwischen dem Nernstschen Wärmetheorem in der allgemeinen Thermodyna-

1) Z. B.: R. C. Tolman, Phys. Rev. 4, 145, 1914; S. Ratnowsky, Verh. d. D. Phys. Ges. 17, 64, 1915; K. Försterling, Ann. d. Phys. (4) 47, 1127, 1915. — Von bes. Interesse ist: W. Nernst, Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 83, 1916; vgl. hierzu L. Zehnder, Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 134, 181, 1916.

1) W. Nernst, Gött. Nachr. 1906, S. 1. — Für die umfangreiche Literatur s. F. Pollitzer, Die Berechnung chemischer Affinitäten nach dem Nernstschen Wärmetheorem. Stuttgart, F. Enke. 1912; W. Nernst, Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes, Halle a. S. W. Knapp 1918.

2) M. Planck, Vorlesungen über Thermodynamik, 3. Aufl. Leipzig, Veit & Co. 1911, S. 266ff.; diese Zeitschrift 13, 165, 1912; Ber. d. D. Chem. Ges. 45, 5, 1912.

3) Nach Nernst läßt sich umgekehrt aus dem Verschwinden der Atomwärmen sein Wärmetheorem streng beweisen. — W. Nernst, Berl. Ber. 1912, S. 134; M. Polanyi, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 333, 1914; 17, 315, 1915; K. Czukor, ibid. 16, 486, 1914; ferner S. 72ff. u. 194ff. der zitierten Nernstschen Monographie. — Kritik: A. Einstein, H. A. Lorentz, I. Solvay-Kongreß S. 243f. der deutschen Ausgabe; A. Einstein, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 820, 1914.

mik und der Quantentheorie in der Atomdynamik[1]).

Nach Boltzmann muß sich für ein thermodynamisches System, von dem wir uns ein bestimmtes atomkinetisches Bild entworfen haben, die Entropie eines thermodynamisch bestimmten Zustandes („Makrozustand") berechnen lassen nach der Gleichung

$$S = k \lg W. \tag{20}$$

Hier ist W ein Maß der Wahrscheinlichkeit des Zustandes, nämlich die Anzahl der durch die Werte aller Atomvariablen festgelegten Zustände des atomkinetischen Bildes („Mikrozustände"), welche den betreffenden Makrozustand realisieren. Nun ist W offenbar unendlich, d. h. unbestimmbar, solange man nicht übereinkommt, wie stark sich zwei Mikrozustände unterscheiden müssen, damit wir sie als verschieden ansehen. Es wird eine Art Zellenteilung des Gebietes der Mikrozustände nötig. Nach Boltzmann ist die absolute Größe der Zellen willkürlich[2]), wenn die Teilung nur genügend fein ist. Dadurch bleibt, wie in der thermodynamischen, so auch in der atomistischen Entropiedefinition eine additive Konstante unbestimmt. Wenn nun die Tatsachen eine allgemeine Festlegung der thermodynamischen Entropiekonstanten nahelegen, so kann man vermuten, daß die Größe der Zellen eben doch nicht willkürlich ist, daß vielmehr dem Gebiete der Mikrozustände, dem „Phasenraum", in jedem Falle eine ganz bestimmte „wahrscheinlichkeitstheoretische Struktur" zugeschrieben werden muß.

In der Tat laufen nun beide Planckschen Hypothesen über den Energieaustausch der Resonatoren darauf hinaus, eine ganz bestimmte Zellteilung im Zustandsgebiet einer Gesamtheit von Oszillatoren herzustellen. Für die erste Fassung leuchtet das unmittelbar ein, da nach ihr der Oszillator überhaupt nur einer abzählbaren Menge von Energiewerten fähig sein soll[3]). Aber auch nach der zweiten Fassung haben Zustände zwischen $nh\nu$ und $(n+1)h\nu$ bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit W als unwesentlich verschieden zu gelten, weil ein Oszillator, wenn er den Wert $nh\nu$ einmal überschritten hat, zwangläufig, ohne Eingreifen irgendeines Zufallsaktes, alle Zwischenwerte der Energie bis $(n+1)h\nu$ in ganz bestimmter Zeitfolge durchläuft — und keinen dieser Werte auf eine andere als die angegebene Weise erreichen kann[4]).

1) M. Planck, Ber. d. D. Chem. Ges. **45**, 5, 1912; diese Zeitschr. **13**, 165, 1912.

2) Die relative Größe wird durch den Liouvilleschen Satz der Mechanik bestimmt.

3) Die Schwingungsphase des Oszillators wird als unerheblich betrachtet.

4) M. Planck, Berl. Ber. 1917, S. 324.

Die Theorie des Energieinhalts der Festkörper hat bis heute noch nicht den hohen Flug genommen, den die konsequente Weiterbildung dieser Gedankenketten[1]) fordern würde. Weniger kühn, weniger konsequent, aber auch weniger Fährlichkeiten ausgesetzt, hat sie den Weg einer sinngemäßen direkten Übertragung der einfachen Oszillatorformel (14) auf die einzelnen Freiheitsgrade des Festkörpers betreten: vorerst unsicher tastend, dann mit wachsender Zuversicht, da die Tatsachen ihn immer mehr als heuristisch gangbar erwiesen.

Die „monochromatische" Theorie der Atomwärmen[2]).

§ 7. Von den Eigenschaften der idealisierten Oszillatorenmaterie tritt in dem Ausdruck (14) für die durchschnittliche Energie eines Oszillators (und in jeder Form der quantentheoretischen Begründung dieser Formel) nur dessen Eigenschwingungszahl ν auf. Die Vermutung liegt nahe, daß (15) immer dann einer Richtigstellung bedürfen wird, wenn der Bewegungsvorgang, um den es sich handelt, irgendwelche Art von Periodizität aufweist; und weiter: daß an die Stelle von (14) der Ausdruck (15) immer dann zu treten hat, wenn es sich um ein Gebilde handelt, das, sich selbst überlassen, einfach harmonische Schwingungen ausführt. Da nun die Schwingungen der Atome im wirklichen Festkörper sicherlich als eine Art periodischer Bewegung anzusprechen sind, kann man versuchen, ob sich ihr Energieinhalt nicht wenigstens in einfachen Fällen (etwa für die festen Elemente oder einzelne unter ihnen) dadurch darstellen läßt, daß man die Formel (14) ganz unmittelbar auf die translatorischen Freiheitsgrade der Atome überträgt, mit einer für jeden solchen Festkörper charakteristischen Eigenschwingungszahl.

Bezeichnen wir diese wieder mit ν, so würde dann den $3N$ Freiheitsgraden der N Atome eines Grammatoms die Schwingungsenergie zukommen

$$U = 3N \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = 3RT \frac{x}{e^x - 1}; \quad x = \frac{h\nu}{kT}, \tag{21}$$

und wenn ν von T unabhängig ist, die Atomwärme:

1) M. Planck, Verh. d. D. Phys. Ges. **17**, 407, 438, 1915; Berl. Ber. 1915, S. 909; Ann. d. Phys. **50**, 385, 1916; Berl. Ber. 1916, S. 653. — A. Einstein, Verh. d. D. Phys. Ges. **19**, 116, 1917;

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) **22**, 180, 800, 1907; **34**, 170, 590, 1911.

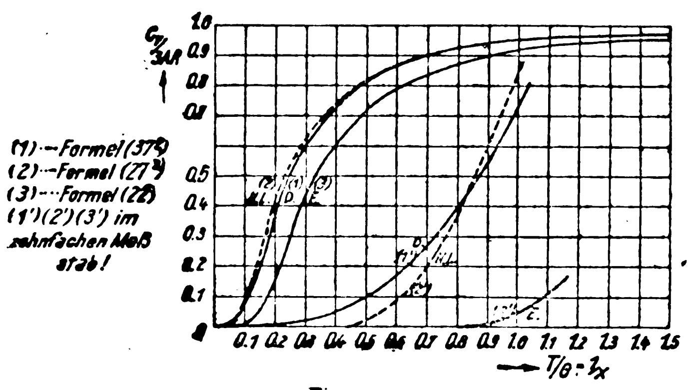


Fig. 2.

$$C_v = A\frac{\partial U}{\partial T} = A\cdot 3N\frac{h^2\nu^2}{kT^2}\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)^2}$$

$$= 3AR\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2}. \qquad (22)$$

Die x-Darstellung setzt wieder in Evidenz, daß 1. der Faktor, um den U sich vom Äquipartitionswert (8) unterscheidet, 2. die Größe C_v, nur vom Verhältnis T/ν abhängen. Für (im Vergleich zu h/k) große Werte dieses Verhältnisses nähern sich die genannten Größen der Einheit bzw. dem Dulong-Petitschen Wert $3AR$, für kleine Werte verschwinden beide exponentiell. Für thermische Überlegungen ist es oft vorteilhaft, statt ν die Temperaturgröße

$$\Theta = \frac{h\nu}{k} \qquad (23)$$

einzuführen, wobei dann $x = \Theta/T$ wird. Zur Veranschaulichung von (21) und (22) trägt man am besten $U/3Nh\nu$ als Funktion von $1/x$ auf (Fig. 1, Kurve II), und $C_v/3AR$ als Funktion derselben Größe (Fig. 2, Kurve (3)).

Die Frequenz[1]) ν, mit welcher die Atome ihre Mittellagen umzittern, wird man wie beim Pendel, bei der Unruhe usw. bestimmt denken durch die Masse des Atoms und durch die Wechselwirkungskräfte zwischen den Atomen, die es dahin zurückzutreiben suchen. Ebendiese Kräfte treten aber auch als Reaktionskräfte gegen eine beliebige Deformation, d. h. als Elastizität des Körpers auf. Hohe Frequenz, und darum nach (21) und (22) stärker unternormale Schwingungsenergie und Atomwärme, werden wir zu erwarten haben: 1. bei geringer Masse 2. bei starker Direktionskraft; daher: 1. bei kleinem Atomgewicht, 2. bei geringer „Deformabilität".

Diese Schlüsse treffen, besonders was den Einfluß des Atomgewichtes anlangt, schlagend zu. Die Elemente, die am stärksten gegen die Dulong-Petitsche Regel verstoßen, stehen alle ganz im Anfang des periodischen Systems:

Element:	C (Diam.)	B	Be	Si
Atomgewicht:	12	11	9	28
C_p circa:	1,7	2,8	3,7	4,6 cal/°C.

Vom Diamant, dem klassischen Beispiel, ist außerdem seine geringe Zusammendrückbarkeit[1]) und große Härte bekannt. Auch den leichten Atomen H und O mußten die Chemiker zur Aufrechthaltung der Neumann-Koppschen Regel schon lange die abnormalen Werte 2,3 bzw. 4,0 cal/°C zuschreiben[2]).

Für den Versuch, ν quantitativ zu berechnen, scheint ein detaillierteres Strukturbild nötig. Auf Grund eines solchen werden wir unsere ganz provisorischen Überlegungen später weitgehend zu modifizieren haben. Immerhin enthält (22) schon eine so bestimmte Aussage über die Form des Atomwärmeverlaufs, — er soll in gewissem Sinn universell sein, wenn man nur den Temperaturmaßstab nach (23) der Natur des Körpers anpaßt — daß es nötig ist, bevor wir weiter schreiten, das Experiment als sicheren Führer an unsere Seite zu rufen.

1) Wir verwenden diesen Ausdruck promiscue mit „Schwingungszahl" für die reziproke Dauer einer ganzen Schwingung; die „Zahl der Schwingungen in 2π-Sekunden" kommt in diesem Aufsatz nirgends vor.

1) Th. W. Richards, Zeitschr. f. physik. Chemie 61, 183, 1907.

2) Vgl. W. Nernst, Theoretische Chemie, 5. Aufl., S. 174 ff.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

J. Biehle, Die Analyse des Glockenklanges. Archiv für Musikwissenschaft d. Institutes f. musikwissenschaftl. Forschung Bückeburg. 1918. S. 289.

J. Biehle, Vergleichende Bewertung der Bronze- und Gußstahlglocken. Verlag des deutschen Pfarrerblattes. Dieskau 1918.

Die Notwendigkeit, für die während des Weltkrieges im vaterländischen Interesse eingeschmolzenen Bronzeglocken Ersatz zu schaffen und bei dem anhaltenden Mangel an Bronze an deren Stelle Gußstahl als Material zu verwenden, läßt uns plötzlich gewahr werden, daß wir so gut wie gar kein Mittel in der Hand haben, die Glocke ihrem eigensten Wesen, dem Klange nach, in irgend einer meßbaren Weise zu bewerten. Ebenso unsicher ist unsere Theorie über die Beziehungen zwischen Form und Material einerseits und Klang und Tonhöhe andererseits.

Prof. Biehle, der seinerzeit dahinwirkte, daß bei der Enteignung auch der Klangwert als Befreiungsgrund anerkannt wurde, hat ein Verfahren ausgebildet, den akustischen Zustand einer Glocke objektiv zu bestimmen und den Befund graphisch darzustellen. Seine Arbeiten sind neben den von Lord Rayleigh wohl die einzigen, die das physikalische Problem der Glocke wissenschaftlich behandeln. Die Ergebnisse seiner langjährigen Studien bieten in der Tat einen wertvollen, bisher fehlenden Maßstab bei der Beurteilung einzelner Glocken und ganzer Geläute. Die wesentlichen Momente seiner Theorie sind die folgenden:

Das Klangbild einer Glocke setzt sich aus einer Reihe von Eigentönen zusammen, die je nach der Güte der Glocke mehr oder minder harmonisch gruppiert sind, und zwar zeigt eine gute Glocke mindestens in guter Annäherung ein Tonanalität, die sich in der Regel auf den zweiten Teilton aufbaut, so daß dieser als der Grundton, der erste Teilton dagegen als der Unterton anzusehen ist. Bedeutsam für das Klanggebilde ist ferner der dritte Teilton, der mit seinem Abstande von einer großen oder kleinen Terz vom zweiten Teilton als „Charakteristik" der Glocke die Eigenart als Dur oder Moll aufprägt. Alle Eigentöne sind deutlich erregbar und in der Tonhöhe genau bestimmbar. Biehle bezeichnet diese reellen Bestandteile des Klanges als akustische Konstanten im Gegensatz zu dem Schlagtone, der weder auf dem Wege der Resonanz erregbar ist, noch mit anderen Tönen Schwebungen eingeht. Wegen dieser seiner Unfaßbarkeit als der „imaginäre Ton" bezeichnet, hat er bei den Glocken, wie sie vorwiegend gegossen werden, seine Lage in der Nähe des reellen Tones und ist im idealen Falle mit diesem identisch; dann ist der Hauptton, die Verbindung von Grundton und Schlagton, völlig rein. Aus dieser ganzen Sachlage erklärt sich die deutlich wahrnehmbare Mehrstimmigkeit des Glockenklanges.

Die Teiltöne entstehen in der Weise, daß sich ähnlich wie bei der Platte, Knoten in Polarlinien und in Kreislinien ausbilden; vgl. das Schema

Kreise	4	6	8	10 Polarlinien
0	1.	3.	5.	7.
1	2.	4.	6.	8. Teilton.

Wie nun Biehle bei der Untersuchung von vielen hundert Glocken festgestellt hat, bilden sich die ungeradzahligen Teiltöne leichter und hörbarer aus als die geradzahligen, bei denen die Mantelfläche durch einen Knotenkreis geteilt werden muß. Mehr als einen Knotenkreis zu bilden, ist die Glocke anscheinend nicht fähig, weshalb die große Zahl der unharmonischen Teiltöne ausscheidet, die z. B. die Platte mit Hilfe mehrerer Knotenkreise hervorbringt.

Biehle nahm die qualitative Analyse in der Weise vor, daß er sehr gute, meßbar veränderliche Stimmgabeln auf die Glocke aufsetzte und durch Resonanz erklingen ließ. Da der Klang aber erst dann als bekannt gelten kann, wenn die Teiltöne auch quantitativ bestimmt sind, nahm Biehle die in der Luft hervorgerufenen Schwingungen photographisch mittels einer durch Hebelübersetzung mit einem kleinen Spiegel verbundenen Kolloidiummembran von 30 mm durch einen Lichtstrahl auf. Die Vergrößerung war 1 : 330. Zwischen den beiden hierbei notwendigen Übeln, Unempfindlichkeit oder Resonanzeinwirkungen, wählte er das letztere. Bei der Kompliziertheit der aufgenommenen Klangkurven ist diese Fehlerquelle an sich außerordentlich mißlich.

Die Klangkurven wurden rechnerisch nach der Fouriermethode ausgewertet und ergaben z. B. in einem Falle eine reine und vollständige harmonische Reihe, in der einzelne Teiltöne stark hervortraten, während die Grundschwingung außerordentlich schwach vertreten war. Dies Ergebnis stand im Gegensatz zu dem mit den Resonanzgabeln gefundenen, das nur als grobe Annäherung an eine harmonische Reihe angesehen werden konnte, bei der einzelne Glieder ausgelassen sind. Biehle hält es daher für fraglich, das Problem auf dem Wege der mathematischen Behandlung zu lösen und hat dafür in der Folge die Methode der experimentellen Analyse weiter ausgebaut.

Er teilt auf Grund eines sehr reichen Untersuchungsmaterials (Analyse von etwa 450 Glockenklängen) die Glocken je nach ihrem Klangcharakter in vier verschiedene Typen ein: 1. Die ideale Glocke, ein vermutlich unerreichbarer Typus mit streng harmonischer Teiltonreihe, die sich von der Naturskala nur durch Auslassen einzelner Glieder unterscheidet. Schlagton und Grundton sind identisch.

2. Die normale Glocke, die praktisch vorhanden ist und die dem idealen Typ am nächsten steht, also für den Wiederaufbau des Glockenbestandes zunächst in Frage kommt. Grundton und Schlagton fallen noch zusammen, die übrigen Teiltöne weichen schon merklich von der Naturskala ab.

3. Die verminderte und

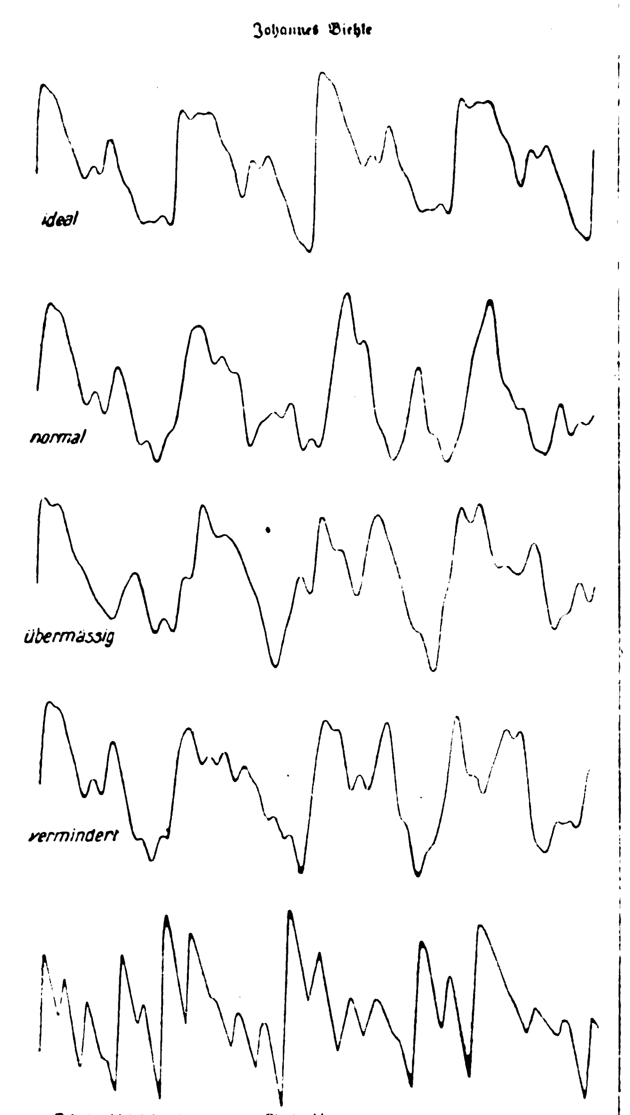
4. die übermäßige Glocke weichen vom normalen Typus in der Art ab, daß die Naturskala entweder zusammengedrängt oder auseinander gestreckt erscheint. Grundton und Schlagton decken sich nicht, sondern liegen bis zu einer sechstel Oktave auseinander, vgl. das Schema auf der nächsten Seite.

Die Schwingungen sind hierbei auf einen gleichen Unterton (100) bezogen.

Um der Annahme, daß zum wenigsten die bei der Glocke stark vertretenen ungeradzahligen Teiltöne nach oben in ihrer Stärke im umgekehrten Verhältnis ihrer Schwingungszahlen, die geradzahligen dagegen erheblich mehr abnehmen, setzt Biehle die angenähert anzunehmenden Amplituden der Teiltöne ein und berechnet danach ideale Klangkurven für die verschiedenen Typen. Es läßt sich mit diesen ein Vergleich zu den photographisch gewonnenen Kurven anstellen, ohne jedoch die Gewähr zu geben, daß man

Intervalle	Idealer Typus	Normal. Typus	Über-mäß.Typ.	Vermind. Typus
Unterton	100	100	100	100
Grundton	200	191	164	213/212
Schlagton	200	191	172	207
Charakt. Ton 1. Terz	250	230	206	246
Quinte	300	294	292	301
Oktave	400	379	342	408
2. Terz	500	519	451	574
2. Quinte	600	563	507	612
Septime	—	—	597	—
2. Oktave	800	776	698	839

bei der großen Mannigfaltigkeit der Komponenten und der möglichen Phasenverschiebungen den Klang in bestimmterer Weise analysieren kann. Trotzdem sind diese synthetischen Kurven theoretisch von Interesse; es dürften wohl so umfangreichen Berechnungen von Wellenbewegungen in einem solchen Umfange und von derartiger irrationaler Zusammensetzung noch nicht durchgeführt worden sein. Wir geben daher diese Kurven zugleich mit einem photographisch aufgenommenen Klangbilde einer „verminderten" Glocke wieder, um zu zeigen, daß die photographisch gewonnene Kurve charakteristische Züge der verminderten synthetischen Kurve aufweist.



Teil der Lichtbildaufnahme eines Glockenklanges.

Die zweite Frage von Wichtigkeit ist die des Zusammenhanges zwischen Form und Klang der Glocke. Die Form ist gegeben durch den Querschnitt der Wandung, d. h. durch die Rippe. Biehle hat auch diese Beziehungen untersucht und auf seine vier typischen Fälle bezogen. Darnach kann man sich den Klang der idealen, praktisch nicht vorhandenen Glocke als überaus wohllautend und ausgeglichen vorstellen. Während die normalen, tatsächlich im Gebrauch befindlichen Glocken bei innerer Ruhe wenig auffallen, bestechen die übermäßigen durch größere Tonmasse. Sie verursachen jedoch infolge ihrer inneren Unstimmigkeiten im Zusammenwirken mit anderen Glocken erhebliche Störungen, falls nicht durch eine Steigerung des Übermäßigen, die Möglichkeit ausgenutzt wird, die innere Unstimmigkeit in ein harmonisches Verhältnis umzubilden, so daß dann diese Glocken trotz des unreinen Haupttones als voller Akkord, beinahe wie drei Glocken zu klingen vermögen. Ein guter Zusammenklang mit anderen Glocken ist aber nur unter gewissen Voraussetzungen möglich. Die Glocke mit verminderter Rippe verhallt kurz; es wäre interessant, zu untersuchen, in welcher Weise die enge Lage der Teiltöne mit dem ungünstigem akustischen Wirkungsgrad zusammenhängt.

Biehle untersucht in einer weiteren Schrift die beiden Glockenarten, Bronze und Stahl, in ihrer Klangwirkung.

Da Stahl eine viermal höhere Zerreißbarkeit hat als Bronze, sind Gußstahlglocken in den üblichen Wandstärken bisher niemals gesprungen. Eine Umlagerung oder ein Zusammenrammen der Moleküle durch die Schläge des Klöppels bzw. durch Erschütterungen beim Läuten sind nicht möglich, während Bronzeglocken stark aushöhlen und dann öfters springen, also eine geringere Lebensdauer haben.

Die Tonhöhe der Glocke ist im allgemeinen durch den Durchmesser bestimmt, d. h. die Höhe des Tones nimmt bei wachsendem Durchmesser ab, sie nimmt dagegen mit der Wandstärke zu. Da sie ferner proportional der Schallgeschwindigkeit im Glockenmateriale ist (Gußstahl 5000—5100, Bronze etwa 3500 m/sek.) steht die Stahlglocke gegenüber einer Bronzeglocke von gleicher Größe und Stärke um eine große Terz oder Quarte höher.

Biehles zahlreiche Untersuchungen beweisen, daß im akustischen Verhalten ein prinzipieller Unterschied zwischen Bronze und Stahl nicht nachweisbar ist. Dagegen ist bei Stahl die Resonanzfähigkeit der Teiltöne gehemmter, weil die Stahlglocken aus gießtechnischen Gründen im Verhältnis zu ihren physikalischen Eigenschaften meist zu dick gegossen werden. Bei gleichen Mensurenverhältnissen im ganzen Tonbereich würden die Resonanzverhältnisse für Bronze und Stahl ähnliche sein. Die Mensur für kleine Stahlglocken ist ungünstiger als die für große, man sollte nicht über a^1 hinausgehen. Volle Kraft und Tonrundung wird aber erst eine Sexte tiefer, bei c^1 erreicht. Das Gebiet für Bronze liegt höher und führt bis zum es^2, sollte aber bei einem Dreigeläut nicht über das c^2 gehen.

Da die Mensur die Resonanzfähigkeit und den Klangcharakter bestimmt, darf man nicht Klänge gleicher Höhe von verschiedenen Instrumenten verglei-

chen, man muß also Bronzeglocken mit Stahlglocken vergleichen, die etwa um eine Quarte tiefer erklingen, ein Umstand, der bisher ganz übersehen worden ist. Bei einem Vergleich ist weiter zu berücksichtigen, daß bei gleicher Tonhöhe die Stahlglocke größeren Durchmesser hat, also mehr Schallenergie aussenden kann. Unter sinngemäßer Berücksichtigung der physikalischen Eigenschaften, der Mensurierung und schließlich des Preises sind mithin beide Glocken in der Mittellage als gleichwertig, in der Höhe die Bronze als überlegen anzusehen. Die Frage der richtigen Mensurierung ist aber noch nicht ausreichend geklärt. Biehle hat daher in weiterer Verfolgung dieses Problems Stahlglocken (vom Stahlwerk Torgau unter Verwendung eines Sonderstahles) nach seiner Theorie gießen lassen und dabei den Beweis erbracht, daß Stahlglocken klanglich gleichwertig mit Bronzeglocken, in mancherlei Beziehung diesen sogar überlegen, herstellbar sind. Wie ich mich selbst überzeugte, fehlt diesen Versuchsglocken jede Härte und alles Blecherne des Klanges.

Für die Beurteilung der Geläute ist Biehles Forderung von fundamentaler Bedeutung, daß die Glocken Klangeinheiten zu bilden haben, d. h. es soll z. B. der Hauptton einer kleineren Glocke mit der Charakteristik der nächstgrößeren übereinstimmen. Bei Stahlglocken ist dieses Gesetz im erhöhten Maße zu beachten; besitzen diese als Charakteristik die kleine Terz, so ergibt sich nur bei einem verminderten Dreiklange volle Reinheit im Zusammenklange, was Biehle übrigens mit seinen Versuchsglocken ebenfalls nachzuweisen imstande war. Stahl hat die Eigenart, daß die tiefen Töne sofort hervortreten, die hohen also überdecken, bei Bronze dagegen entwickeln sich zuerst die Obertöne, während die tieferen nachfolgen, die Stahlglocken erklingen daher dunkler als die bronzenen. Schließlich ist noch zu beachten, daß bei jenen der Anschlag des Klöppels tonlich zunächst spröde wirkt. Während den Bronzeglocken das Wogen und Wallen der Tonmassen eigen ist, zeichnet sich die Gußstahlglocke durch majestätische Ruhe und Größe aus.

Nach alledem kommt Biehle am Ende seiner Untersuchungen zu folgenden vier Sätzen:

1. Gußstahlglocken folgen im akustischen Aufbau denselben Gesetzen wie die Bronzeglocken.
2. Die geringere Resonanzfähigkeit der einzelnen Teiltöne ist bei Gußstahl durch die abweichende Mensurierung zu erklären.
3. Mit zunehmender Größe und Tiefe werden die klanglichen Verhältnisse der Gußstahlglocke im Verhältnis zur Bronze und unter Berücksichtigung des Preises immer günstiger.
4. Die Zusammenstellung zu Geläuten muß, wie überhaupt bei Glocken, bei Gußstahl im erhöhten Maße ihrer inneren Natur nach erfolgen.

Neben diesen, den Physiker interessierenden Fragen untersucht Biehle noch weitere, wie insbesondere sehr eingehend die des Gebrauchs nach liturgisch-konfessionellen Rücksichten. F. Weisbach.

Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus. In 5 Bänden. Herausgeg. von Leo Graetz. Lex. 8. Mit Abbildungen. Leipzig, Joh. Ambr. Barth. 1. Band, 2. Lieferung. 263 S. 1914. M. 12.—. 1. Band. 3. Lieferung (Schlußheft des 1. Bandes). VIII u. 340 S. 1918. M. 19.20.

Über die 1. Lieferung des 1. und 2. Bandes ist in dieser Zeitschrift **15**, 813, 1914 schon berichtet worden und bei der Gelegenheit bereits auf die Wichtigkeit dieses Werkes hingewiesen. Der Krieg hat den Plan, das Werk in wenigen Jahren vollständig fertigzustellen, nicht zur Ausführung gelangen lassen, und so werden denn manche Artikel nicht mehr ganz dem modernsten Stande der Forschung entsprechen, wenn das Werk abgeschlossen vorliegt. Immerhin wird hierdurch keine allzugroße Schädigung des Werkes entstehen, da einmal in der Kriegszeit gerade in den Dingen, die in zuerst veröffentlichten Artikeln besprochen sind, nicht allzuviel Neues geschaffen wurde, und da ferner die erschöpfende Berücksichtigung aller bekannt gewordenen und bisher sichergestellten Tatsachen, wie sie im Werk angestrebt ist, dem Buch als Nachschlagewerk bleibenden Wert geben muß.

In der erstgenannten Lieferung befinden sich neben den Aufsätzen „Dielektrizität" von E. Schrödinger (75 S.), „Die Anomalien der dielektrischen Erscheinungen" von E. v. Schweidler (30 S.), „Elektrostriktion und Magnetostriktion" von R. v. Hirsch (27 S.), die besonders bemerkenswerten Abhandlungen: „Elektrooptik" von W. Voigt (50 S.) und „Pyroelektrizität und Piezoelektrizität" von E. Riecke (80 S.). Die Elektrooptik von Voigt bringt auf 50 Seiten einen hervorragend klaren, übersichtlichen und, man möchte sagen, einfachen (in Ansehung der Schwierigkeit der Materie) Überblick über das Gebiet, so daß der Aufsatz nicht allein als Nachschlagebuch, sondern dem fortgeschrittenen Studierenden und Fachgenossen auch als Lehrbuch warm empfohlen werden kann. Nach einer kurzen Bemerkung über die Notwendigkeit der Trennung der direkten und indirekten elektrooptischen Effekte — als direkt wäre der Effekt, d. i. die Änderung der optischen Eigenschaften der Körper bei Einwirkung eines elektrischen Feldes, zu bezeichnen, „wenn er übrig bliebe, selbst bei künstlicher Kompensierung aller andern durch das Feld hervorgerufenen, insbesondere mechanischen Veränderungen der Körper, als indirekt dagegen, wenn er unter den genannten Umständen ausbliebe" — werden zunächst in zwei größeren Kapiteln die vielen experimentellen Forschungsergebnisse besprochen und zwar in einer Weise, daß ihr z. T. erst viel später erkannter innerer Zusammenhang überall deutlich hervortritt. Das 3. Kapitel handelt von den Theorien des elektrooptischen Effektes.

Auch des Aufsatzes von Riecke als einer Betrachtung der pyroelektrischen und piezoelektrischen Erscheinungen von einem einen klaren Überblick über das ganze Gebiet gewährenden Standpunkt mag hier besonders gedacht werden, auch er sei als Lehrbuch denen warm empfohlen, die eine ins einzelne führende Monographie dieses Gebietes durcharbeiten wollen.

Dem Charakter der zu behandelnden Materie entsprechend stellen die anderen Aufsätze, auch die beiden der 3. Lieferung des 1. Bandes, „Galvanische Elemente" von M. Trautz (277 S.) und „Thermoelektrizität" von K. Baedeker (30 S.) eingehende Berichte dar, die in erster Linie zum Nachschlagen geeignet sind. Ausführliche Inhaltsverzeichnisse, kurze Abschnitte und Unterabteilungen erleichtern die Benutzung derselben. Von besonderer Wichtigkeit ist dies z. B. bei dem äußerst reichhaltigen, umfangreichen Bericht über die galvanischen Elemente von Trautz. Es ist darin ein gewaltiges Material verarbeitet und zusammengestellt in recht übersichtlicher Weise. Nach einem einleitenden Kapitel über den Voltaeffekt gibt der Verf. zunächst eine Übersicht über die galvanischen Elemente und daran anschließend über die Messungen an galvanischen Elementen (ein Kapitel,

welches allerdings in mindestens gleicher Ausführlichkeit von Jäger in „Meßapparaten und Meßmethoden für stationäre Ströme", 1. Lieferung des 2. Bandes, behandelt wurde). Dieser erste Abschnitt ist also dem galvanischen Elemente in seiner Rolle als Stromquelle gewidmet; der 2. Abschnitt bezieht sich auf die Theorie der galvanischen Elemente und damit auf die Probleme der Unwandlung der chemischen und elektrischen Energie ineinander oder mit anderen Worten auf die Probleme des Zusammenhanges zwischen chemischer Affinität und elektrischer Energie. Trautz hat selbst auf dem Gebiet der Thermodynamik galvanischer Ketten manchen wichtigen Aufschluß in eigenen Untersuchungen gewonnen und das hat ihm die kritische Sichtung des Materials naturgemäß erleichtert und die klare Darstellung des Stoffes mit Hervorheben des Wesentlichen ermöglicht. Den Schluß bildet ein Abschnitt über die kapillarelektrischen Erscheinungen und Einzelpotentiale.

Die Berichte der 2. Lieferung berücksichtigen die Literatur bis Mitte bzw. Ende 1912, der Bericht von Trautz die bis Ende 1914; der Bericht von Baedeker „Thermoelektrizität", der im wesentlichen 1913 fertiggestellt war, wurde nach Baedekers Tod — er fiel am 6. Aug. 1914 bei Lüttich — vom Herausgeber bis 1916 fortgeführt. S. Valentiner.

O. Wiener, Physik und Kulturentwicklung. 109 S. m. 72 Abbildungen. Leipzig, B. G. Teubner. 1919. M. 4.40, geb. 5.50 ohne Teuerungszuschlag.

Das Buch, das aus Hochschulkursen des Verfassers im Felde hervorgegangen ist, bringt in äußerst dankenswerter Weise, auch für das große Publikum einen Ausblick, wie sich die Physik als ein ganz besonders wichtiger Zweig der Wissenschaft in der Kulturentwicklung darstellt. Der Verfasser kommt in der Einleitung zu den 3 Arten der Einwirkung der Physik auf die Kulturentwicklung: nämlich durch Erweiterung der Sinne, durch Erweiterung des Geistes und durch Erweiterung der Gliedmaßen. Im ersten Teil werden daher in knappester Form die absoluten und die Unterschieds-Empfindlichkeiten der einzelnen physikalischen Apparate im Vergleich zu äußeren Sinnen und die Erweiterung derselben auf ganz neue, zunächst nicht faßbare Erscheinungen wie Elektrizität, Röntgenstrahlen usw. besprochen. Die Erweiterung des Geistes ist durch einen kurzen Überblick über die Entwicklung der Physik, die immer mehr auf Vereinheitlichung des Weltbildes hindrängt, reizvoll geschildert. Im 3. Teil werden zunächst die Energievorräte der Erde besprochen, um dann anschließend den Nutzeffekt und die Leistung der einzelnen Maschinen im Vergleich mit der menschlichen Leistung klarzulegen. Der Schluß bringt noch einmal einen Überblick und Ausblick auf die Beziehung der Naturwissenschaft und Technik zur Kultur. Reiche Literaturangaben und zahlreiche Abbildungen sind beigegeben. Auch für den Physiker ist das Büchlein eine sehr anregende Lektüre. Neubert.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Privatdozent für Chemie an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Professor Dr. Willy Marckwald zum ord. Honorarprofessor ebenda, Dr. E. Knecht zum Professor für Technische Chemie an der Universität Manchester.

Verliehen: Dem ord. Professor der Chemie an der Universität Wien Dr. Wilhelm Schlenk der Titel Hofrat, dem Mitglied des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Chemie in Dahlem Dr. Lise Meitner der Titel Professor.

Gestorben: Der ord. Professor der Physik am Caming College in Lucknow (Indien) H. W. Ward.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

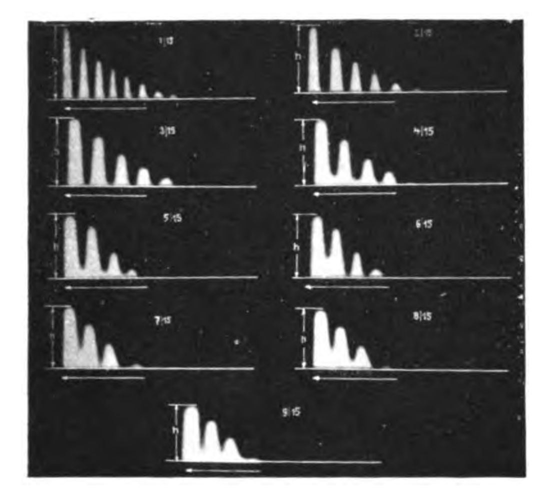


Fig. 1.

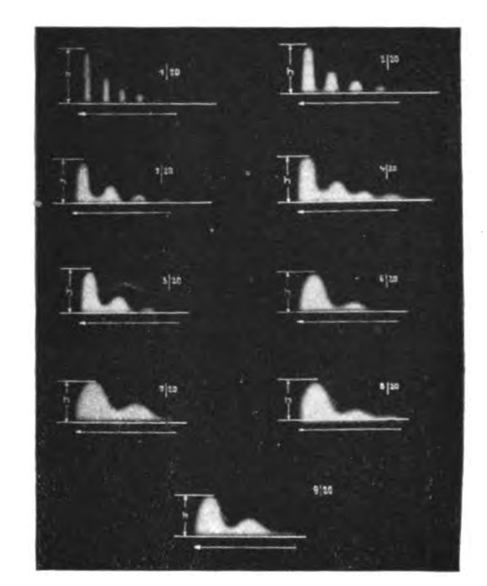


Fig. 2.

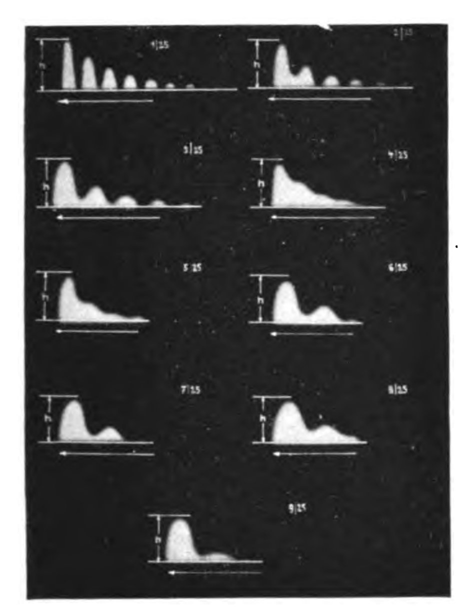


Fig. 3.

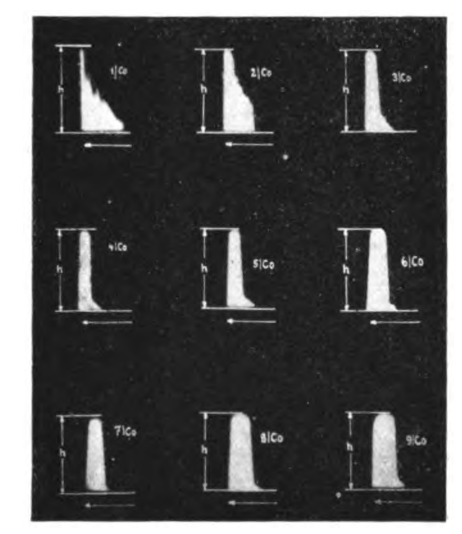


Fig. 4.

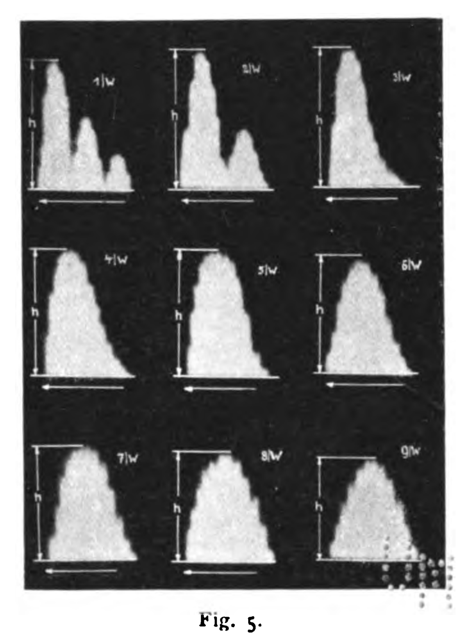


Fig. 5.

F. Voltz, Untersuchungen an Funkeninduktoren beim Betriebe von Röntgenröhren.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.



Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und **H. Th. Simon**



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 50 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 55 Mark, im Ausland 62 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 19. 1. Oktober 1919. No. 551. **20. Jahrgang.**

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen, B. = Besprechung.)

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 19. — 1. Oktober 1919. — 20. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 21 am 18. Oktober 1919.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Eine elektrodynamische Methode zur Erforschung des Erdinnern.

(Vierte Mitteilung.)

Der Höhenregulator.

Von Josef Popper-Lynkeus und Heinrich Löwy.

Will man ein größeres Gebiet systematisch mit Hilfe der Kapazitäts- und Dämpfungsmethode erforschen, so kommt es darauf an, die Meßinstrumente möglichst rasch an viele, weit auseinander liegende Orte zu schaffen. In Wüsten und unwegsamen Landstrichen bedeutet das eine wesentliche Schwierigkeit und es liegt nahe, sie durch Benutzung von Luftschiffen oder Flugzeugen zu überwinden. Hier erhebt sich aber eine neue Schwierigkeit. Man kann natürlich nicht wagen, irgendwo mitten in einer Wüste zu landen. Man muß also die Messung im Fluge vornehmen. Das Luftschiff muß sich — an den zu untersuchenden Stellen — bis nahe an den Boden herabsenken und in möglichst konstantem Abstand darüber hinwegfliegen. Zu diesem Zweck muß an dem Höhensteuer ein Regulator angebracht werden, der bewirkt, daß bei jeder noch so kleinen Änderung der Bodendistanz das Steuer im entgegengesetzten Sinne betätigt wird.

Die Messung im Fluge hat — außer der Vermeidung der Abflug- und Landungsschwierigkeiten — den Vorteil, daß die für die einzelne Messung erforderliche Zeit auf ein Minimum gebracht wird. Gebiete von ungeheurer Ausdehnung könnten in kurzer Zeit erforscht werden. Mit drei Luftschiffhallen: in Kairo, Tripolis und Marokko könnte man — bei einem Aktionsradius von 1000 km — die nordafrikanischen Wüsten (Sahara, Sandwüste Igidi, Libyen und das nördliche Numidien) sowie einen großen Teil Arabiens, ganz Syrien und das westliche Mesopotamien bis Kleinasien beherrschen.

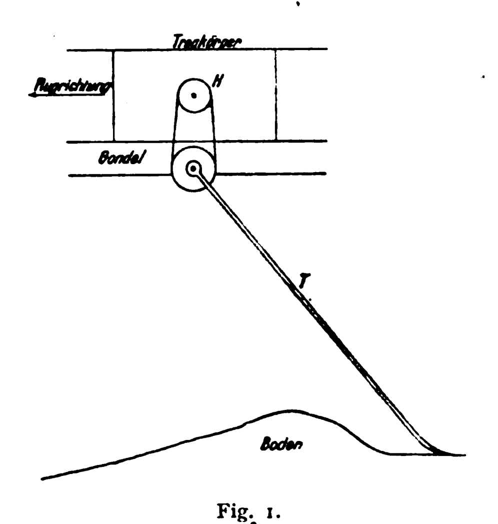


Fig. 1.

Fig. 1 stellt die Wirkungsweise des Höhenregulators in rein schematischer Weise dar, und zwar an dem Beispiel eines Lenkballons, bei dem die Höhensteuerflächen — wie bei dem Luftschiff „Le Temps" der Zodiac-Gesellschaft — mitten über der Gondel angebracht sind. H ist die Achse des Höhenruders, T ein skiartiges Tastorgan, das — bei Annäherung an den Erdboden — ausgestreckt wird und während des Bodenfluges auf dem Boden schleift. Durch eine Kettenübertragung wirkt der Taster in der Weise auf das Höhensteuer, daß beim Aufdrücken auf den Erdboden ein Aufziehen, beim Abheben vom Boden ein Sinken bewirkt wird. In der Praxis wird man als Taster einen gespannten Draht benutzen, der zugleich als Zuleitung zur Erdantenne dient. Der Regulator kann bei verschiedenen Höhensteuersystemen

verwendet werden; im folgenden beschränken wir uns jedoch auf das dynamische Höhensteuer.

Soll der Regulator auf plötzliche Änderungen der Bodendistanz genügend rasch reagieren, so müssen Steuerflächen von ziemlicher Größe verwendet werden. Wir betrachten zunächst den Fall, daß das Luftschiff die Höhenlage ohne Schrägstellung seiner Längsachse ändert; es sollen also sowohl vorn als hinten Höhensteuer vorhanden sein, die beide mit dem Regulator verbunden sind. Das Wesentliche ist nun, daß die an dem Höhensteuer angreifende Luftkraft K von dem Abstand des Luftschiffs vom Boden abhängt. Bezeichnen wir mit z den Abstand des Luftschiffs von einer als Normalniveau angenommenen Horizontalebene (Abszisse in der Fig. 2), mit h den Abstand der Erdoberfläche von diesem Normalniveau, so ist also K eine Funktion von $z - h$. Bezeichnen wir die Masse des Luftschiffs mit m und setzen

$$\frac{K}{m} = f(z - h),$$

so lautet die Regulatorgleichung:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = f(z - h), \qquad (1)$$

wo f eine graphisch gegebene Funktion von $z - h$ ist. Nämlich: Die Luftkraft K am Höhensteuer ist

$$K = c(\beta) \cdot \mu \cdot F \cdot w^2,$$

wo F die Steuerfläche, w die Horizontalgeschwindigkeit des Luftschiffs und c einen Koeffizienten bedeutet, der als Funktion des Anstellwinkels β der Steuerfläche graphisch gegeben ist. $\mu = {}^1/_8$ ist die Dichte der Luft. Die Beziehung zwischen β und $z - h$ ergibt sich aus den kinematischen Eigen-

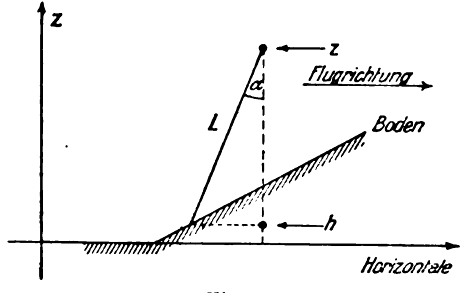


Fig. 2.

schaften des Regulators. Wir nehmen an, daß der Taster L (Fig. 2) in seiner Normallage ($K = 0$) einen Winkel $\alpha = 45^0$ mit der Lotrechten einschließt. Für $\alpha = 45^0$ soll also $\beta = 0$ sein. Fixieren wir ferner das Übersetzungsverhältnis der beiden Kettenräder (etwa zu 1 : 1), so haben wir jedem Werte von β einen bestimmten Wert von α zugeordnet, und kennen, da $L \cos \alpha = z - h$ ist, auch die Beziehung zwischen β und $z - h$. Genau genommen ist β der Winkel zwischen der Steuerfläche und der Horizontalebene und ist beim Traversieren des Luftschiffes $\left(\frac{dz}{dt} \mp 0\right)$ vom Anstellwinkel γ

$$\gamma = \beta - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{w} \frac{dz}{dt}$$

verschieden. Um diese Differenz zu kompensieren muß man das Übersetzungsverhältnis und das Steuerungsintervall (über den Bereich konstanter Steuerwirkung hinaus) vergrößern.

Für den „Zeppelin I" ist die Fläche des vorderen und hinteren Höhensteuerpaares $F = 44\ \text{m}^2$, die maximale Horizontalgeschwindigkeit $w = 15$ m/sec, das Gewicht 13000 kg, die Masse $m = \frac{13000}{9{,}8} = 1326$, also $\frac{K}{m} = 0{,}8\ c(\beta)$. In der Fig. 3 haben wir die Werte der Funktion $\frac{K}{m} = f(z - h)$, für einige Argumente $z - h$ berechnet. Die Funktion $c(\beta)$ haben wir den Veröffentlichungen der Göttinger Versuchsanstalt entnommen. Als Seitenverhältnis der Steuerfläche wurde 1 : 3 angenommen. Als normale Distanz $z = z_0$ des Luftschiffes vom Boden wurde $z_0 = 10$ m, also die Tasterlänge

$$L = z_0 \cos 45^0 = 14{,}3 \text{ m}$$

gewählt. Für $z - h < 7{,}15$ bzw. $z - h > 12{,}44$ hat die Funktion den konstanten Wert $f = +0{,}37$, bzw. $f = -0{,}37$. In der Fig. 3 haben wir die absoluten Beträge der Funktion aufgetragen, um die Symmetrie der Steuerwirkung besser hervortreten zu lassen. Die Regulatorwirkung ist um so intensiver, je schärfer das Minimum (für $z - h = z_0$) ausgeprägt ist. Durch geeignete Wahl des Übersetzungsverhältnisses kann man dieses Minimum beliebig verschärfen, doch wird man da nicht zu weit gehen, weil sonst die Regulatorwirkung ruckartig erfolgen und den Insassen des Luftschiffes unangenehm fühlbar würde.

Die Größe h ist als Funktion der Zeit t gegeben, sie gibt an, in welcher Weise der Abstand des unteren Tasterendes von dem Normalniveau (Abszissenachse in Fig. 2) sich während des Fluges verändert. Durch $h(t)$ wird also — bei gegebener Horizontalgeschwindigkeit des Luftschiffes — der speziellen Beschaffenheit des Bodenprofils Rechnung getragen. Auch der Einfluß von Vertikalböen kann durch passende Wahl der Funktion $h(t)$ berücksichtigt werden.

Über $h(t)$ wollen wir folgende Annahme machen: Das Luftschiff soll während des Fluges über vollkommen ebenem Terrain plötzlich in

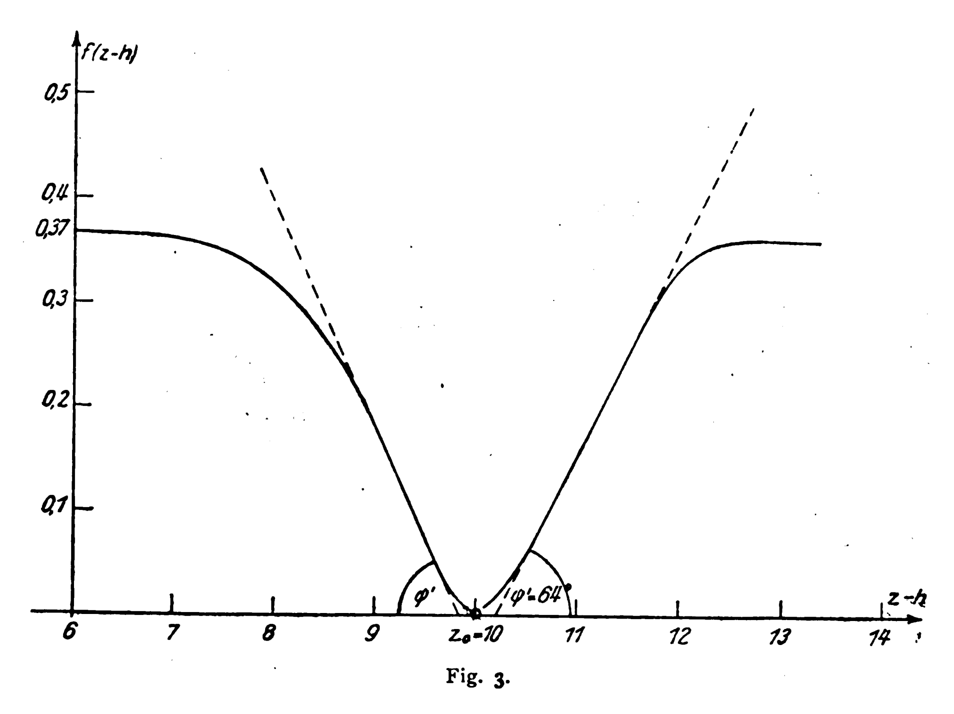


Fig. 3.

eine vertikal nach abwärts gerichtete Böe von der Geschwindigkeit v geraten, d. h. wir setzen: $h = vt$. Das entspricht dem Fall, daß das Luftschiff — bei vollkommener Windstille — auf eine Böschung von arc tg $\frac{v}{w}$ Graden stößt, falls w die Horizontalgeschwindigkeit des Luftschiffes ist.

Die Kraft am Höhensteuer muß so groß sein, daß das Luftschiff nie am Boden aufstößt, d. h. die Kurven $z(t)$ und $h(t)$ dürfen sich nirgends schneiden. Setzen wir für $f(z - h)$ den maximalen Wert $f_{max} = + 0{,}37$, so ergibt Gleichung (1)

$$z = \frac{f_{max}}{2} t^2 + z_0.$$

Diese Parabel wird von der Geraden $h = vt$ nicht geschnitten, wenn

$$f_{max} \geqq \frac{v^2}{2 z_0} \quad (2)$$

ist. Bei einer Vertikalböe von $v = 10$ m/sec Geschwindigkeit (entsprechend einem Böschungswinkel von 33°) und einer Normaldistanz $z_0 = 10$ m, ist also $f \geqq 5$, d. h. die Steuerfläche muß 5:0,37, d. h. wenigstens das 13fache der normalen Größe ($F = 44$ m²) betragen, um aus einer Höhe von 10 m über dem Boden Böen von 10 m/sec parieren zu können. Durch graphische Integration der Gleichung (1) kann man zeigen, daß dieses unter der Annahme $f(z - h) = f_{max}$ abgeleitete Resultat nahe an der wahren Lösung liegt. Wir haben die Integration für die normal Steuerfläche ($F = 44$ m²), sowie für die 10-, 20- und 30mal so große durchgeführt: die gesuchte Lösung liegt zwischen 10 und 20. Alle Kurven, die einer kleineren Steuerfläche entsprechen, schneiden die Böschungslinie. Durch Vergrößerung des Übersetzungsverhältnisses kann man übrigens dem Fall $f = f_{max}$ beliebig nahe kommen.

Die Vergrößerung der Steuerfläche läßt sich durch Anbringung von Zusatzhöhensteuern vornehmen, die erst während des Bodenfluges — zugleich mit dem Regulator — an das Normalsteuer geschaltet werden. Die Arbeit zur Betätigung des Steuers wird man durch sog. „Servo-Motoren" verrichten lassen, wie sie für Großflugzeuge vorgeschlagen wurden[1]). Die Größe der Steuerfläche könnte übrigens durch andere Wahl des Seitenverhältnisses (z. B. 1 : 1,5) und Steuerungsintervalls ($0 \leqq \beta \leqq 40^0$) etwa um die Hälfte vermindert werden.

In der Praxis erfolgt die Höhenänderung des Luftschiffs durch Schrägstellung. An Stelle der Regulatorgleichung (1) treten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} J \frac{d^2\psi}{dt^2} &= f(z - h) \\ \frac{dz}{dt} &= w \sin \psi \end{aligned}\right| \quad (3)$$

für die beiden Unbekannten $\psi(t)$ und $z(t)$. ψ bedeutet den Winkel zwischen der Längs-

1) R. v. Mises „Fluglehre". Berlin, Springer 1918, S. 144.

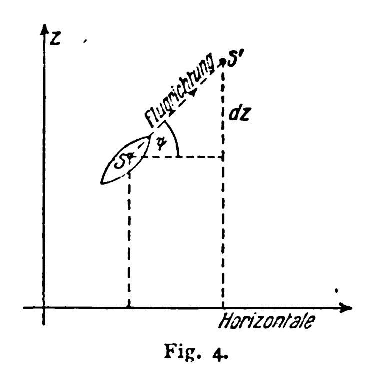


Fig. 4.

achse des Luftschiffes und der Horizontalen (Fig. 4), J das Trägheitsmoment, f das vom Höhensteuer ausgeübte Drehmoment. Die zweite der Gleichungen (3) drückt aus, daß die Veränderung der Höhenlage $\mathfrak{z}$ dadurch zustande kommt, daß sich das Luftschiff in der Richtung der um den Winkel ψ gedrehten Längsachse mit der Geschwindigkeit w fortbewegt. Die Funktion $f(\mathfrak{z}-h)$ ist wieder graphisch gegeben. Die Auflösung ist auf graphischem Wege durchzuführen, oder aber man begnügt sich, wie zuvor, die Gleichungen für konstantes $f = f_{max}$ zu integrieren.

Auf eine andere Auffassung der Steuerwirkung macht uns Herr Prof. v. Mises aufmerksam: Durch die Schrägstellung des Luftschiffes tritt eine vertikale Komponente des Propellerzuges S auf; es wäre also hiernach:

$$\left.\begin{aligned} J\frac{d^2\psi}{dt^2} &= f(\mathfrak{z}-h) \\ m\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} &= S\sin\psi \end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

In Wirklichkeit sind natürlich beide Ursachen wirksam und superponieren sich. Für die Konstruktion des Luftschiffs ergibt sich aus (3) bzw. (3′) die Forderung, die Größen

$$\frac{f\cdot w}{J} \text{ bzw. } \frac{f\cdot S}{m\cdot J}$$

möglichst groß zu machen.

Die (angenäherte) Symmetrie der Steuerwirkung (Fig. 3) wurde durch die besondere Wahl der kinematischen Eigenschaften des Regulators erzielt, nämlich durch den Umstand, daß wir für die Normalstellung des Tasters $\alpha = 45^0$ und das Übersetzungsverhältnis der Kettenräder gleich 1 : 1 gewählt haben. Man könnte leicht auf die Meinung kommen, daß im Gegenteil die Kraftverteilung asymmetrisch zu wählen sei, da doch der Ausgangspunkt $\mathfrak{z}_0 = +10$ m auf der positiven $\mathfrak{z}$-Achse liegt. Das ist aber nicht richtig. Nämlich: In der $\mathfrak{z}$-t-Ebene werden symmetrisch zur Geraden $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0$ liegende Bahnkurven as und $a\bar{s}$ (Fig. 5) durch symmetrische Kraftverteilungen nach Art der Fig. 3 erzeugt (Behauptung I). Solche symmetrische Bahnkurven erreichen aber immer gleichzeitig die Normallage (Behauptung II).

Beweis der Behauptung I. Symmetrische Bahnkurven $s(t)$ und $\bar{s}(t)$ werden gemäß Gleichung (1) durch gleiche, aber entgegengesetzte Kräfte erzeugt. Solche entgegengesetzt gleiche Kräfte wirken nun aber in der Tat in irgend zwei, dem gleichen Wert von t entsprechenden Punkten, wenn wir irgendeine um den Wert $\mathfrak{z} - h = \mathfrak{z}_0$ symmetrische Kraftverteilung zugrunde legen. Für irgendeinen beliebigen Wert $t = \tau$ (Fig. 5) ist nämlich für die Kurve $s(t)$:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + i \text{ und } \mathfrak{z} - h = \mathfrak{z}_0 + (i - h),$$

wo i der Abstand des betrachteten Punktes von der Geraden, $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0$ und h die Ordinate der „Böschungslinie“ $h(t)$ für $t = \tau$ ist. Für den entsprechenden Punkt auf der symmetrischen Bahnkurve $\bar{s}(t)$ ist:

$$\bar{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}_0 - i \text{ und } \bar{\mathfrak{z}} - \bar{h} = \mathfrak{z}_0 - (i - h);$$

wo $\bar{h}$ die Ordinate der symmetrischen Böschungslinie $\bar{h}(t)$ für $t = \tau$ ist. Da bei symmetrischer Kraftverteilung für jedes beliebige $\mathfrak{z}$

$$f(\mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}) = -f(\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z})$$

ist, so wirken also in den beiden Punkten tatsächlich entgegengesetzt gleiche Kräfte.

Beweis der Behauptung II. Die Bahnkurven erreichen die Normallage, wenn $\mathfrak{z} - h = \mathfrak{z}_0$ bzw. $\bar{\mathfrak{z}} - \bar{h} = \mathfrak{z}_0$ wird. Nun ist

$$\mathfrak{z} = \frac{f}{2}t^2 + \mathfrak{z}_0 \text{ und } h = vt$$

und

$$\bar{\mathfrak{z}} = -\frac{f}{2}t^2 + \mathfrak{z}_0 \text{ und } \bar{h} = -vt.$$

Wie man sieht, erreichen beide Kurven zur gleichen Zeit, nämlich für

$$t_{norm} = \frac{2v}{f} \qquad (4)$$

die Normallage.

Wir bemerken ferner, daß für beide Kurven ebenfalls gleichzeitig, nämlich für $t = \frac{t_{norm}}{2} = \frac{v}{f}$

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{dh}{dt} \text{ und } \frac{d\bar{\mathfrak{z}}}{dt} = \frac{d\bar{h}}{dt}$$

wird. Die beiden Kurven schlagen also gleichzeitig die zur Böschungsebene parallele Richtung ein. Im weiteren Verlauf wendet sich die eine Kurve $s(t)$ immer mehr von der zugehörigen Böschungslinie ab, während die symmetrische $\bar{s}(t)$ immer mehr auf ihre Böschungslinie zuläuft.

Das ist nun allerdings eine wesentliche und

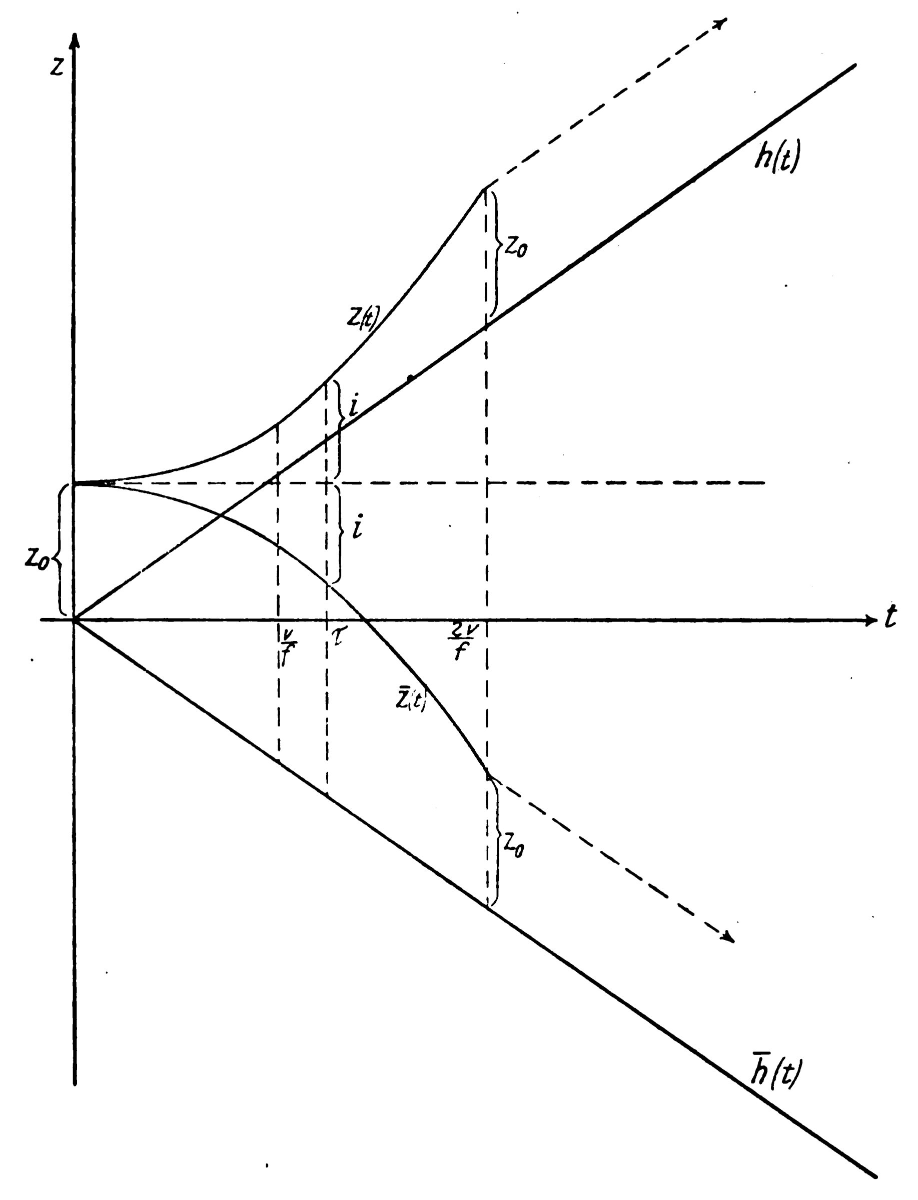


Fig. 5.

offenbar höchst bedenkliche Dissymmetrie im Verhalten der beiden Bahnkurven. Wählt man f für die Bahnkurve $s(t)$ nach der Ungleichung (2), so haben die Parabel und die zugehörige Gerade $h(t)$ keinen Schnittpunkt. Die symmetrische Parabel und Böschungslinie haben jedoch stets — wie immer f gewählt wird — einen Schnittpunkt (der andere fällt auf die negative t-Achse) für die Zeit

$$t_k = \frac{v}{f} + \sqrt{\frac{v^2}{f^2} + \frac{2\mathfrak{z}_0}{f}}. \qquad (5)$$

Glücklicherweise ist

$$t_k > t_{norm}, \qquad (6)$$

d. h. die Bahnkurve $\bar{s}(t)$, die ja nur für ein bestimmtes Intervall (nämlich wo $f(\mathfrak{z} - h) = f_{max}$) mit der Parabel zusammenfällt, erreicht noch vor der Katastrophe die Normallage und wendet sich von der Böschung ab.

Aus der zuvor durchgeführten Abschätzung erkennt man, welch ein Wagnis jegliche Landung ist und wie man in jedem einzelnen Fall auf den glücklichen Zufall angewiesen ist, daß nicht gerade eine Böe auftritt. Eine Landung mit einem Luftschiff ist sicher gefährlicher als ein Bodenflug, weil dort die dynamischen Vorsichtsmaßregeln versagen. Bei Flugzeugen wäre allerdings eine Sicherung der Landung durch einen Regulator denkbar; doch müßte die Luft-

kraft am Höhensteuer nicht von $\mathfrak{z} - h$, sondern von der zeitlichen Änderung von $\mathfrak{z} - h$ abhängig gemacht werden, derart, daß für Werte von $\frac{d(\mathfrak{z} - h)}{dt}$, die einen Normalwert übersteigen, die Zusatzsteuerkräfte in Wirksamkeit treten. Das könnte beispielsweise durch ein elektromagnetisches Induktionsrelais verwirklicht werden.

Die noch übrig bleibenden, vom Regulator nicht beseitigten Höhenschwankungen sind für die elektrische Messung ohne Belang. Die Messung besteht nämlich in der Bestimmung der Eigenwellenlänge eines offenen Schwingungskreises, nämlich einer Antenne von 100 und mehr Meter Länge, die am rückwärtigen Teile der Gondel befestigt ist, während das andere Ende, mit einem Spanngewicht versehen, auf dem Boden nachschleift. Zur Ausbreitung des Gegengewichts wäre der Tragkörper zu benützen. Durch die Höhenschwankungen wird nun das an der Gondel befestigte Ende gehoben und gesenkt und der angrenzende Teil des Drahtes mehr oder weniger vom Boden abgehoben. Der Minimalwert von $\mathfrak{z} - h$ bzw. der Maximalwert von $\bar{\mathfrak{z}} - \bar{h}$ treten gleichzeitig für $t = \frac{v}{f}$ auf, und zwar ist

$$\left.\begin{aligned} \min(\mathfrak{z} - h) &= \mathfrak{z}_0 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{f} \\ \max(\bar{\mathfrak{z}} - \bar{h}) &= \mathfrak{z}_0 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{f}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

in unserem Beispiele ($\mathfrak{z}_0 = 10$, $v = 10$, $f = 5$) ist also $\min(\mathfrak{z} - h) = 0$ und $\max(\bar{\mathfrak{z}} - \bar{h}) = 20$, d. h. die größte Abweichung von der normalen Bodendistanz $\mathfrak{z}_0 = 10$ m beträgt in beiden Fällen 10 m. Würde die Antenne in ihrer ganzen Länge um diesen Betrag gehoben oder gesenkt, so wäre mit einem maximalen Fehler von 10 m in der Tiefenbestimmung eines Grundwasserspiegels zu rechnen. In Wirklichkeit wird aber nur das eine Drahtende gehoben und gesenkt, der größere Teil des Drahtes bleibt am Boden liegen, der Fehler wird also wesentlich geringer sein. Außerdem ist die Zeit der Höhenschwankung so kurz, daß schon aus diesem Grunde ein wesentlicher Fehler nicht zu befürchten ist. Die ganze Zeit bis zur Erreichung der Normallage dauert ja nach (4) für unser Beispiel ($v = 10$, $f = 5$) nur 4 Sekunden und kann — ebenso wie die maximale Höhenschwankung — durch Vergrößerung von f noch kleiner gemacht werden.

Das Luftschiff erreicht die Normallage mit der vertikalen Geschwindigkeit

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)_{t_{\text{norm}}} &= +2v \\ \left(\frac{d\bar{\mathfrak{z}}}{dt}\right)_{t_{\text{norm}}} &= -2v \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

d. h., das Luftschiff eilt mit doppelter Böengeschwindigkeit der Böe entgegen. Der Taster, der bis zu diesem Augenblick immer im gleichen Sinne gewirkt hat, erreicht seine Ausgangsstellung, die Luftkraft am Höhensteuer ändert ihr Vorzeichen. Im weiteren Verlauf der Bewegung schwankt die Kraft um Null herum und wir dürfen in erster Annäherung

$$f(\mathfrak{z} - h) = -(\mathfrak{z} - h - \mathfrak{z}_0)\operatorname{tg}\varphi \quad (9)$$

setzen, wo φ der Neigungswinkel der $f(\mathfrak{z} - h)$-Kurve gegen die $(\mathfrak{z} - h)$-Achse in der Nähe der Stelle $\mathfrak{z} - h = \mathfrak{z}_0$ ist. In Fig. 3 ist die Einheit der Ordinate das 10 fache der Abszisseneinheit, also besteht zwischen φ und dem dortigen Winkel φ' die Beziehung $\operatorname{tg}\varphi = 10 \operatorname{tg}\varphi'$. Setzen wir $\mathfrak{z} - h - \mathfrak{z}_0 = \zeta$ und berücksichtigen, daß $\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2}$ wegen $\frac{d^2h}{dt^2} = 0$, so geht Gl. (1) über in

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\zeta \cdot \operatorname{tg}\varphi. \quad (10)$$

Das Auftreten der Schwingungsgleichung charakterisiert den stationären Bewegungszustand. Das Luftschiff führt beim Fortschreiten in einer zur Böschungslinie parallelen Richtung Schwingungen von der Schwingungsdauer T

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}} \quad (11)$$

aus (Fig. 5). In der Fig. 3 ist $f_{\max} = 0.37$, in unserem Beispiele hatten wir $f_{\max} = 13 \cdot 0{,}37 = 5$ gewählt. Also ist für unser Beispiel $\operatorname{tg}\varphi = 13 \cdot 10 \cdot \operatorname{tg}\varphi' = 130 \operatorname{tg} 64^0 = 266{,}5$, und $T = 0{,}38$ sec. Doch ist zu beachten, daß Ansatz (9) nur gilt, wenn die Kräfte $f(\mathfrak{z} - h) < f_{\max}$ sind, also nur bei nicht zu starken Böen. In diesem Fall hängt die Schwingungsdauer nur von dem Winkel φ, d. h. nur vom Übersetzungsverhältnis der Kettenräder ab. Für starke Böen kann man die Schwingungsdauer berechnen, indem man ausgehend von der Stelle $t = \frac{2v}{f}$ die Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (8) bis an die Stelle fortsetzt, wo neuerdings $\mathfrak{z} - h = \mathfrak{z}_0$ wird. Dieser Zustand wird von beiden Bahnkurven $s(t)$ und $\bar{s}(t)$ zur selben Zeit $t = \frac{4v}{f}$ mit der Geschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = 0$ erreicht. Das ist aber der Anfangszustand ($t = 0$), der ganze Vorgang wieder-



holt sich von hier ab periodisch. Die Schwingungsdauer ist

$$T = \frac{4v}{f}. \qquad (12)$$

In unserem Beispiel ($v = 10$, $f = 5$) wäre $T = 8$ sec, also wesentlich größer als der zuvor berechnete Wert für schwache Böen. Nun haben wir aber die extrem hohe Böengeschwindigkeit $v = 10$ m/sec unseren Berechnungen zugrundegelegt, um bei der Dimensionierung der Zusatzsteuerflächen möglichst sicher zu gehen. Bei einer Windgeschwindigkeit von 10 m/sec würde man aber mit einem Luftschiff überhaupt nicht fliegen. Es werden also viel geringere Werte von v — bei gleichbleibendem f —, also viel geringere Schwingungsdauern auftreten. Geometrisch gesprochen: Die Böschungslinien $h(t)$ und $\bar{h}(t)$ in Fig. 5 sind in Wirklichkeit — bei unveränderter Lage und Gestalt der Bahnkurven — stärker gegen die t-Achse gedreht: also wird die Normallage früher erreicht, d. h. die Schwingungsdauer vermindert. Zugleich vermindert sich auch die Schwingungsamplitude. Diese ist definiert durch den absoluten Betrag von:

$$\max\left\{\mathfrak{z}_0 - (\mathfrak{z} - h)\right\} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{f}. \qquad (13)$$

Zeichnen wir in dem Diagramm (Fig. 5) eine Schar von Bahnkurven entsprechend verschiedenen Werten von $f = f_{max}$, so können wir unmittelbar daraus ablesen, wie groß die Steuerfläche gemacht werden muß, damit — für eine vorgegebene maximale Böengeschwindigkeit — die Schwingungsamplitude einen bestimmten Wert nicht übersteigt. Unsere vorige Behauptung können wir kurz so aussprechen: Die Kraftverteilung ist symmetrisch zu wählen, weil symmetrische Bahnkurven die gleiche Schwingungsdauer haben.

Wien, Mai 1919.

(Eingegangen 30. Mai 1919.)

Über den Sehraum.

Von Hans Witte.

Siebente Mitteilung: Versuch, die Sehfernen zu bestimmen.

1.

Der Laqueursche Sehraum[1]) zeigt, wie groß die Dinge im wahren Raum aussehen. Er nennt von den wahren Raummaßen die wahre Größe Y und die wahre Entfernung X, von den Sehmaßen nur die Sehgröße y. Wenn er beansprucht, mit diesen drei Zahlangaben das tatsächliche, bewußte Zahlerlebnis der Durchschnittsmenschen zu beschreiben, so hat er recht.

Dennoch befriedigt das Erreichte nicht ganz. Ich weiß mich mit meinem verehrten Freunde eins, wenn ich sage, der Laqueursche Sehraum treibt über sich selber hinaus. Man wünscht immer wieder, auch über Sehfernen x irgend etwas aussagen zu können. Man empfindet, erst durch diese Aussage werde das Gesamtbild abgeschlossen werden. Man hofft beides um so mehr, als es mit so verhältnismäßig einfachen Mitteln gelungen ist, den Laqueurschen Größensehraum zu fassen.

2.

Eins wird man außerdem noch hoffen: Nämlich, daß von da aus Licht auf die Grundschwierigkeit fallen werde, die früher[1]) mehrfach besprochen worden ist. Es handelt sich um die „Raumbedingung“:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\text{Sehferne}}{\text{Sehgröße}} &= \frac{\text{Wahre Entfernung}}{\text{Wahre Größe}}\\ \frac{x}{y} &= \frac{X}{Y}\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

In der vorletzten Mitteilung wurde eingehend gezeigt, daß man nicht darauf rechnen kann, diese Raumbedingung zu erfüllen. Sie würde auf Grund der bekannten Sehgrößen y himmlischer Gebilde („Tellermond“ usw.) einen unverständlich engen Sehraum fordern, von der Größenordnung höchstens 44 m für die äußerste Sehferne $(x)_{X=\infty}$.

Was damals auseinandergesetzt wurde, bleibt bestehen. Es scheint nach wie vor unmöglich, das menschliche Erleben in derart enge Sehfernen hineinpressen zu wollen. Es besteht nicht die geringste Aussicht, Sehfernen herauszudeuteln, die auch nur angenähert zu jenen winzigen Maßen passen. Aber was man erwarten darf, ist dies: daß man findet, wieviel — es wird vermutlich sehr viel sein! — die tatsächlichen Sehfernen von jenem unmöglichen Kleinstraum abweichen; vielleicht auch, warum.

3.

Da wir nicht an dem festen Leitband der Raumbedingung (1) in die gesuchten Tiefenabmessungen eindringen, sind wir anscheinend dies-

---

1) H. Witte, Über den Sehraum, sechste Mitteilung, diese Zeitschr. 20, 389, 1919.

1) Vorläufige Mitteilung, diese Zeitschr. 19, 142, 1918; zweite Mitteilung, ebenda 20, 61, 1919; fünfte Mitteilung, ebenda 20, 368, 1919.



mal wirklich genötigt, einzeln zu messen. Wir müssen, so scheint es, wirklich die fraglichen Sehfernen durch Ausmessen des ganzen Raumes vom Beobachter bis in die Unendlichkeit zahlenmäßig bestimmen, und müssen dann noch diese Messungen mit einer möglichst umfassenden Anzahl von Menschen wiederholen, um den Durchschnitt zu finden, um den sich die Sehfernen-Gesamtbilder der einzelnen Menschen verteilen.

Übrigens ist nicht nur dieser Durchschnitt für uns wichtig. Um alles zu übersehen, werden wir auch fragen müssen, welche Zahlen das Höchstmaß der vorkommenden Abweichung von dem besprochenen, unmöglichen Kleinstraum darstellen. Diese Frage nach dem denkbaren „Höchstraum" der tatsächlich vorkommenden Sehfernen-Gesamtbilder wollen wir besonders im Auge behalten.

4.

Wir gehen also ins Gelände und versuchen, die Sehfernen aller möglichen Dinge zu messen. Da zeigt sich nun, was nach dem früher Gesagten zu erwarten war. Es geht völlig anders als bei den Sehgrößen. Schon die Aussagen einer einzelnen Versuchsperson sind außerordentlich unsicher, schwanken hin und her und wollen sich durchaus nicht zu einer geordneten Gesamtheit zusammenschließen. Je mehr Versuchspersonen man hinzunimmt, umso schwankender, unsicherer, widerspruchsvoller wird das Bild.

Für die Frage: „Wie groß sieht der Kirchturm da hinten aus?" besitzt der Durchschnittsmensch sein Nähnadel- oder Finger-Maß. Für die Frage: „Wie weit entfernt sieht der Kirchturm aus?" besitzt er ein solches Maß unmittelbar nicht.

5.

Dennoch wird es uns gelingen, auch die Sehfernen zu fassen, und zwar genau wie die Sehgrößen mit einem Griff. Eine einzige Erfahrungstatsache, eine einzige Vernachlässigung liefert die Gesetze.

Die Tatsache ist dieselbe wie bei den Sehgrößen, und die Vernachlässigung ist dieselbe. Die Tatsache: daß gerade Linien angenähert als Gerade erscheinen. Die Vernachlässigung: daß wir sie als genau gerade ansehen wollen.

Wir gehen auf das Ergebnis des vorigen Aufsatzes zurück und wenden noch einmal dieselbe Tatsache und dieselbe Vernachlässigung an.

6.

Das zweite Gesetz des Laqueurschen Sehraums hieß

$$y = B \cdot \frac{E}{E + X}. \tag{2}$$

Gegeben war ein fester Parallelstreifen $C\infty D\infty$ von der Breite $CD = B$, der sich vom Beobachter bis ins Unendliche erstreckt. Etwa ein Weg. Die Blickrichtung (mit einem Auge, dem linken) war die linke Parallele $C\infty$. Dann sagt Formel 2, wie klein (y) die Breite B des Parallelstreifens an jeder Stelle X aussieht. X ist die wahre Entfernung, $Y = B$ die wahre Größe, y die Sehgröße. E ist eine noch zu bestimmende Zahl, die Konstante des Laqueurschen Sehraums.

7.

Das Bild der Gleichung 2 ist eine gleichseitige Hyperbel. Das Aststück $D\infty$, welches die Sehgrößen darstellt, zeigt nochmals Fig. 1.

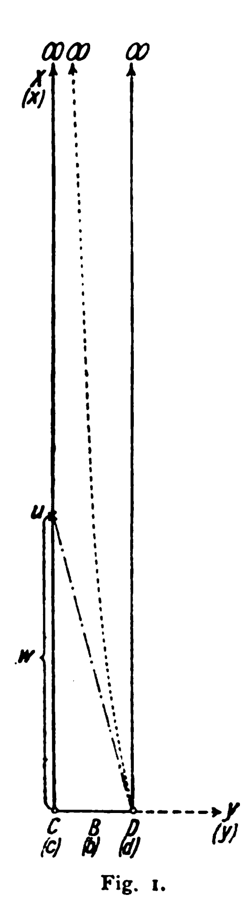


Fig. 1.

Dieses Hyperbelstück $D\infty$ sieht der Beobachter nicht. Wohl sind die Zahlen, von denen er weiß, die drei, welche die Hyperbelgleichung 2 miteinander verbindet: wahre Entfernung X, wahre Größe B, Sehgröße y. Er erlebt sie auch in derjenigen Zahlgröße, wie sie dem Gesetz 2 entspricht. Aber statt des Hyperbelstücks $D\infty$ sieht er eine gerade Linie.

Das beweist zunächst, daß es Sehfernen gibt. Der Beobachter verbindet mit der Sehgröße y nicht die wahre Entfernung X zum Sehbild, sondern eine andere Entfernung: Eine Scheinentfernung, eine Sehferne x. Zugleich aber wird dadurch das Mittel gegeben, über die Sehferne x etwas auszusagen. Denn x muß derartig in das Gesetz eingehen, daß eben nicht der Hyperbelast erscheint, sondern eine gerade Linie.

8.

Die gerade Linie erscheint gegenüber der Richtung $D\infty$ nach links verdreht. Sie schneidet also die Richtung $C\infty$ in einem gewissen Punkte u. Dieser Punkt u ist derjenige Punkt, in den die beiden Bildgeraden cu und du der Wegkanten $C\infty$ und $D\infty$ zusammenzulaufen scheinen. Er ist der Bildpunkt der Unendlichkeit, das Seh-Unendlich, die Grenze des Sehraums. Die Strecke $cu = w$ mißt die Entfernung vom Beobachter zu dieser Grenze in Scheinmaßen des Sehraums. Würde der Sehraum z. B. (wie nach Herrn v. Sterneck[1])) in einen 10 km-Kreis zusammengeschoben erscheinen, so wäre $w = 10000$ m[2]).

9.

Der Anfangspunkt der Scheinkoordinaten x und y soll derselbe sein, wie der der wahren Koordinaten X und Y, also der Punkt $C = c$. Dann lautet die Gleichung der Geraden du

$$\frac{x}{w} + \frac{y}{B} = 1$$

oder

$$y = B \cdot \frac{w - x}{w}. \tag{3}$$

In diese Gleichung muß die Gleichung 2 übergehen, wenn man statt der wahren Entfernung X die Sehferne x einführt. Das Bindeglied ist neben der wahren Größe B die Sehgröße y: Die Sehgröße y der wahren Größe B erscheint nicht an der Stelle X, sondern an der Stelle x, zahlenmäßig muß y in beiden Gleichungen (2) und (3) dasselbe sein. So ergibt sich

$$\frac{E}{E + X} = \frac{w - x}{w} \tag{4}$$

oder

$$x = \frac{w \cdot X}{E + X} \tag{5}$$

als das gesuchte Gesetz für die Sehfernen.

10.

Der Grundzug dieses Gesetzes 5 ist folgender.

1) R. v. Sterneck, Der Sehraum auf Grund der Erfahrung. Leipzig, J. A. Barth, 1907.

2) Was diese Scheinmaße eigentlich bedeuten, wird in einem späteren Aufsatz besprochen werden.

In nächster Nähe sind wahre Entfernung X und Sehferne x gemeinschaftlich Null. Dann wachsen beide an, die wahre Entfernung X bis ∞, die Sehferne x bis zu dem endlichen Seh-Unendlich w.

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} X' &= E + X \\ x' &= x - w, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

so geht (5) über in

$$x' \cdot X' = -w \cdot E. \tag{7}$$

Das Schaubild des Zusammenhangs in einem Koordinatenkreuz X', x' ist also ein Aststück einer gleichseitigen Hyperbel mit dem Asymptotenrechteck $E \cdot w$. Die Fig. 2 u. 3 zeigen die

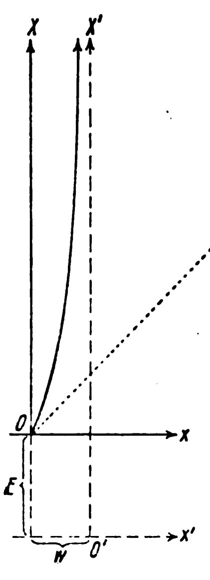


Fig. 2.

zwei Hauptfälle $w < E$ und $w > E$. Die wahren Entfernungen X rechnen jedesmal vom Punkte O, die Sehfernen x eines beliebigen Punktes X werden durch die an der Stelle X nach rechts bis zum Schnitt mit der Kurve gezogene Ordinate x bestimmt. Legt man durch O eine um 45° gegen die Kreuzachsen gerichtete Gerade, so mißt deren Ordinate nochmals die wahre Entfernung X, der Ordinatenunterschied zeigt bildlich den Unterschied zwischen wahrer Entfernung und Sehferne, anfangs 0, zuletzt ∞.

11.

Nach diesem Gesetz müssen die Sehfernen x von den wahren Entfernungen X abhängen. Würde dies Gesetz nicht bestehen, so kämen nicht die tatsächlich gesehenen geraden Linien heraus.

Es ist zuzugeben, der Weg zu diesem Er-

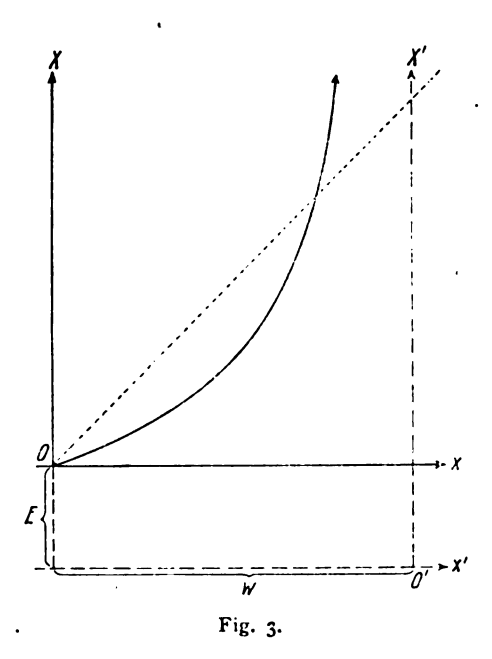


Fig. 3.

gebnis sieht etwas nach einem Schleichweg aus. Vorher Schwanken und Unbestimmtheit, jetzt plötzlich ein rechnerisches Gesetz! Kann man überhaupt sagen, man habe jetzt das Gesetz gefunden, nach welchem wir die Sehfernen wirklich erleben? Der Durchschnittsmensch erlebt, bewußtermaßen, zahlengesetzlich geordnete Sehfernen nicht; welchen Sinn hat es, ihm vorzuschreiben, dies ist dein Gesetz?

Man kann zunächst nur sagen, das Gesamtbild verhält sich so, als ob man Sehfernen erlebte und diese Sehfernen nach dem Gesetz 5 sähe. Wenn und soweit es gesetzlich geordnete Sehfernen als selbständige bewußte Erlebnisse gibt, müssen sie sich nach dem Gesetz 5 regeln.

12.

Eins läßt sich noch hinzufügen. Die Gleichung 5 enthält außer den veränderlichen Größen x und X zwei feste, E und w. Dabei ist E die Konstante des Laqueurschen Sehraums, w das Seh-Unendlich, die Sehferne x für $X = \infty$.

Ob die Konstante E für alle Menschen und Umstände genau gleich ist, haben wir noch nicht entschieden. Jedenfalls hat man Grund, zu zweifeln, ob w immer gleich sei. Wenn verschiedene Menschen verschiedene und räumlich-zeitlich schwankende Aussagen über Sehfernen machen, wird das am einfachsten in einer Verschiedenheit der Scheingrenze w zum Ausdruck kommen. Je nachdem das Seh-Unendlich w größer oder kleiner ist, ändert sich der ganze Verlauf der Zahlenwerte für die Sehfernen x.

Die unendliche Menge verschiedener Möglichkeiten für die Unendlichkeitssehferne w scheint geeignet, das große Schwanken in den Aussagen über die Sehfernen zu erklären.

13.

Aber der unendlichen Fülle erwächst eine Schranke. Wir betrachten nochmals die Schaubilder 2 und 3. Sie standen für die beiden Hauptgruppen dieser unendlich vielen Möglichkeiten, 2 für die kleinere Gruppe bis $w = E$, 3 für die größere von $w = E$ bis $w = \infty$. Man sieht unmittelbar, daß die letztere Gruppe ausscheidet.

Für $w > E$ würde es scheinbare Entfernungen geben, die größer wären als die zugehörigen wahren Entfernungen. Das zeigen schon die Schaubilder, ebenso nach Gleichung 5 der Unterschied

$$X - x = \frac{X \cdot (E - w + X)}{E + X}. \tag{8}$$

Er ist bei positivem X nur dann dauernd positiv, wenn $E > w$ ist, andernfalls wäre er zwischen $X = 0$ und $X = w - E$ negativ.

Nun besteht darüber kein Zweifel, daß die Sehferne jeden Ortes und jeder Zeit kleiner sein muß als die wahre Entfernung. So sehr die einzelnen Angaben der Versuchspersonen schwanken, darin stimmen sie alle überein; soweit sie es überhaupt wagen, Bestimmtes anzugeben, geben sie kleinere Werte an als die wahren[1]). Daß das ganze Raumsehen auf einem Zusammenschieben des Sehraumes beruht, haben auch alle Fachschriftsteller immer als grundlegende Erfahrungstatsache hingestellt, das Gegenteil würde widersinnig erscheinen.

So bleibt von der unendlichen Menge der Möglichkeiten in der Tat nur die erste Gruppe übrig, die sich bis $w = E$ erstreckt.

14.

Hervorragend beachtet zu werden verdient der Grenzfall $w = E$ selber. Er zeigt den denkbar weitesten Sehraum, der vorkommen kann. Also den „Höchstraum", dessen Berechnung in § 3 als besonders wünschenswert bezeichnet wurde.

Das Schaubild (Fig. 4) enthält jetzt als Asymptotenrechteck das Quadrat E^2, die Gleichung 5 wird einfach

$$x = \frac{E \cdot X}{E + X}. \tag{9}$$

Die unter 45° geneigte Gerade, welche die wahre Größe X darstellt, ist jetzt Hyperbeltangente. Die Kurve der Sehfernen schmiegt

1) Selbstverständlich sind tatsächliche Irrtümer auszuschließen, z. B. wenn man in einer künstlichen Landschaft Spielzeughäuser für ferne wirkliche Häuser hält, u. dgl.

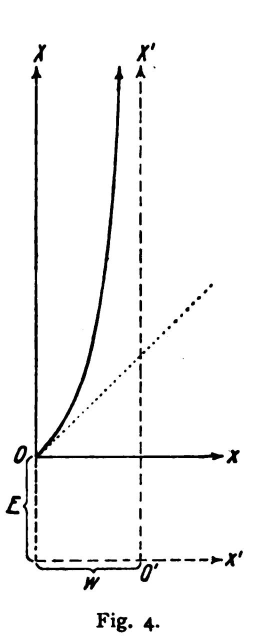


Fig. 4.

sich anfangs an die Kurve der wahren Entfernungen an, wahre Entfernung und Sehferne sind nicht nur für $X = 0$, sondern auch in der näheren Umgebung gleich; der Unterschied $X - x$ ist anfangs von der zweiten Ordnung klein, nämlich

$$X - x = \frac{X^2}{E + X}. \qquad (10)$$

Auch in Fig. 1 erscheint jetzt an der Hyperbel die Tangente; die wirklich gesehene Scheingerade $du = Du$ berührt die gedachte Hyperbel $D\infty$ des Laqueurschen Sehraums (in Fig. 1 so gezeichnet). Die Tangente trennt auch hier die Fälle $w < E$ und $w > E$, auch hier ist leicht zu sehen, weshalb der letztere ausscheidet.

15.

Die Gleichung (9) kann noch anders geschrieben werden,

$$E \cdot x + X \cdot x = E \cdot X \qquad (11)$$

oder

$$\frac{1}{X} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{E}. \qquad (12)$$

Das ist die Linsenformel, und zwar für eine Konkavlinse von der Brennweite $-E$. Die wahre Entfernung X stellt die Gegenstandsweite dar, die Sehferne x die Bildweite. Danach kann man den Zusammenhang bequem übersehen. Während der Gegenstandspunkt von 0 bis ∞ wandert, wandert der Bildpunkt von 0 bis E. Besitzt man eine Konkavlinse von dieser Brennweite $-E$ und sieht mit dem einen Auge hindurch, mit dem anderen frei in die Landschaft, so mißt die Stelle, wo der Horizont des Linsenbildes den freien ebenen Raum des wahren Bildes trifft, die Unendlichkeitsgrenze des Sehraums. Das gesamte Linsenbild liegt mit jedem Punkte der Stelle X des Raumes auf, die dem Größenmaß der Sehferne x entspricht[1]).

Dies gilt für den Höchstsehraum, $w = E$. Für jedes andere w liegt jeder einzelne Sehpunkt x näher, und zwar, wie sich aus (9) und (5) ergibt, im Verhältnis w/E.

16.

Zuletzt heißt es auch hier, messen. Doch geht es auch mit dem Messen ähnlich wie beim Laqueurschen Größensehraum: Da wir das Gesetz haben, gestaltet sich die Messung wieder höchst einfach; wenigstens grundsätzlich. Grundsätzlich brauchen wir — die Laqueursche Konstante E als gemessen vorausgesetzt — nur eine einzige Sehferne x zu messen, dann wird die Zahl w und damit der ganze Entfernungssehraum bestimmt. Leider aber auch nur grundsätzlich. Der tatsächlichen Messung auch nur einer einzigen Sehferne stehen die Schwierigkeiten entgegen, die oben auseinandergesetzt worden sind.

17.

Sie entfallen für den Höchstsehraum $w = E$. Dieser Höchstsehraum enthält überhaupt nur eine Konstante, die Konstante E des Laqueurschen Sehraums. Ist die Laqueursche Konstante bekannt, so liegt der Höchstsehraum zahlenmäßig fest.

1) Wohlverstanden, das Linsenbild ist nicht das Sehbild, es zeigt nur den Sehraum im Verhältnis zum wahren Raum. Das tatsächliche Sehbild ist das sehräumlich erlebte Bild des freien Auges selber; das sehräumlich erlebte Linsenbild ein Bild dieses Bildes.

Wolfenbüttel (Technische Hochschule Braunschweig), im Mai 1919.

(Eingegangen 20. Mai 1919.)

Kolorimetrische Untersuchungen. IV[1]).

Von Otto Meißner.

1. Der Anwendungsbereich der Farbfilter.

Wie ich bereits in einer früheren Mitteilung erwähnte, hatte Geheimrat Wilhelm Ostwald die Güte, mir sieben von ihm selbst hergestellte Farbfilter und eine etwas engere Grauskala als in der Farbfibel zuzusenden.

1) Vgl. die früheren ähnlich betitelten Aufsätze in dieser Zeitschrift.

Zum Teil hatte er den Anwendungsbereich der Filter selbst darauf geschrieben, zum andern Teil habe ich ihn bestimmt, auch die Ostwaldschen Angaben nachgeprüft, wobei ich z. T. bis zu 5 c verschiedene Grenzen erhielt, meist, aber nicht immer, im Sinne der Verengerung des Anwendungsbereichs. Die Prüfung geschah sehr einfach in der Weise, daß ich mir durch das zu prüfende Farbfilter den in der „Farbenfibel" sich findenden Farbenkreis betrachtete. Dabei ergibt sich folgendes: Eine Anzahl Farben sieht gleichmäßig hell, eine annähernd komplementäre (d. h. um 50 c verschiedene), gleichmäßig dunkel aus. Für jene Farbenreihe dient das Filter als „Durchlaßfilter" (+). Betrachtet man eine Farbe dieser Reihe durch das Filter, und hat sie nach der Grauleiter die Helligkeit h (in Prozenten), so ist der Schwarzgehalt s der Farbe

$$s = 100 - h.$$

Für das andere Gebiet wird das Farbfilter als „Sperrfilter" benutzt. Hat eine Farbe dieses Gebiets die Helligkeit w, so ist w direkt ihr Weißgehalt. (Die Reinheit $r = 100 - w - s$.)

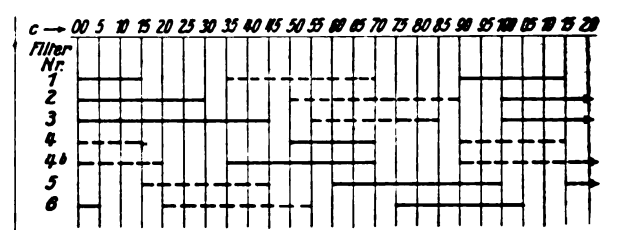
Alles Menschenwerk ist unvollkommen, und so ist es unvermeidlich, daß sehr reine Farben, namentlich rote bei Verwendung der grünen Sperrfilter 5, 6 und 1, doch nicht ganz farblos erscheinen, wenigstens für mein Auge. Hierdurch wird natürlich die Bestimmung des Grau(Schwarz- und Weiß-)gehaltes einigermaßen erschwert und verunsichert. Doch ist daran nichts zu ändern.

Ich fand folgende Anwendungsgebiete der Farbfilter:

Filter Nr.	+-Durchlaßfilter	—-Sperrfilter
1	90 . . . 15	35 . . . 70
2	00 . . . 30	50 . . . 90
3	00 . . . 45	55 . . . 85
4	50 . . . 70	90 . . . 15
4b	35 . . . 70	90 . . . 20
5	60 . . . 00	15 . . . 45
6	75 . . . 05	20 . . . 55

Bei den grünen Filtern 1, 5, 6 erscheint mir das Grau der Skala infolge des bekannten Kontrastes rötlich! Bei den andern vier Filtern habe ich mit meinen Augen, oder vielmehr dem stets benutzten, etwas besseren rechten, nichts von einer Komplementärfärbung erkennen können.

Auf die umgekehrte Frage: Welche Filter gehören als Paß- oder Sperrfilter zu einer vorgelegten c, gibt die nachstehende, von 5 zu 5-Einheiten (c) des 100 teiligen Farbkreises fortschreitende Tabelle I Auskunft; Fig. 1 stellt dasselbe graphisch dar; ein langer Strich be-



deutet: Anwendungsbereich als Paßfilter, ein durchbrochenes (— — —) Anwendungsgebiet als Sperrfilter.

Tabelle I.

c	Durchlaßfilter +	Sperrfilter —
00—05	1 2 3 6	4 4b
05—10	1 2 3	4 4b
10—15	1 2 3	4 4b
15—20	2 3	4b 5
20—25	2 3	5 6
25—30	2 3	5 6
30—35	3	1 5 6
35—40	3 4b	1 5 6
40—45	3 4b	1 5 6
45—50	4b	1 6
50—55	4 4b	1 2 6
55—60	4 4b	1 2 3
60—65	4 4b 5	1 2 3
65—70	4 4b 5	1 2 3
70—75	5	2 3
75—80	5 6	2 3
80—85	5 6	2
85—90	5 6	2 4
90—95	1 5 6	4 4b
95—00	1 5 6	4 4b

Wie man sieht, sind fast immer für eine bestimmte Farbe 2, ja drei Farbfilter benutzbar, was natürlich eine willkommene Kontrolle bietet.

2. Weitere Untersuchungen über das Ausbleichen im Tageslicht.

Die bereits in der vorigen Mitteilung beschriebenen Papierstückchen setzte ich vom 20. III. 1919 ab abermals 30 Tage lang dem Tageslicht aus und bestimmte die Fortschritte des Ausbleichens. Die Ergebnisse der Messungen finden sich in Tabelle II; U = unbelichtet, B_1 = nach 24 tägiger, B_2 = nach 54 tägiger Belichtung.

Für die Löschblattstückchen III—VII erhält man im Mittel:

	c	w
B_1—U	$-0{,}3 \pm 0{,}6$	$+12{,}6 \pm 3{,}1$
B_2—B_1	$+0{,}1 \pm 2{,}9$	$+\ 8{,}4 \pm 1{,}5$

s	r	g
$+13{,}3 \pm 3{,}5$	$-25{,}9 \pm 4{,}8$	$+2{,}0 \pm 8{,}7$
$-\ 0{,}0 \pm 2{,}1$	$-\ 8{,}4 \pm 2{,}5$	$+4{,}5 \pm 1{,}8$

(g bedeutet den Weißgehalt des Graus:

$$g = \frac{100\,w}{w + s},$$

Tabelle II.

Nr.		c	w	s	r	g
I.	U	53,7 ± 0,3	07,0 ± 0,8	74,2 ± 1,5	18,8 ± 1,7	8,6
	B_1	53,0 0,0	17,7 2,1	69,8 4,0	12,5 4,5	20,3
	B_2	53,0 0,5	26,7 1,1	67,0 2,9	06,3 3,2	35,2
II.	U	14,0 0,0	04,8 0,5	93,0 0,8	02,3 0,9	4,8
	B_1	14,8 0,3	08,5 0,8	86,8 1,0	04,7 1,4	8,9
	B_2	14,0 1,0	10,0 1,2	86,7 1,6	03,3 2,0	10,3
III.	U	00,7 0,3	45,0 3,4	18,7 3,1	36,7 4,1	71,0
	B_1	00,8 0,2	54,2 2,6	23,3 3,3	22,5 4,2	70,2
	B_2	00,7 0,7	57,0 2,0	26,3 1,5	16,7 2,6	68,4
IV.	U	11,0 0,7	31,7 2,6	31,7 1,7	36,6 3,1	50,0
	B_1	10,5 0,3	36,7 2,1	38,3 1,1	25,0 2,3	49,3
	B_2	09,7 1,7	45,3 2,7	32,5 1,7	22,2 3,2	58,3
V.	U	31,0 0,7	41,2 1,5	25,5 1,4	33,3 2,0	62,8
	B_1	30,5 0,3	42,5 2,1	38,5 1,1	19,0 2,4	52,6
	B_2	30,7 1,5	52,7 1,9	36,2 2,0	11,1 2,8	59,4
VI.	U	54,3 0,4	15,2 0,6	23,3 2,5	61,5 2,6	39,3
	B_1	54,0 0,0	36,7 2,5	44,2 3,3	19,1 4,1	45,8
	B_2	(57,0 5,0)	48,8 0,8	50,0 0,0	01,2 0,8	49,5
VII.	U	84,7 0,3	10,7 0,4	28,7 3,2	60,6 3,2	27,5
	B_1	84,5 0,3	36,7 2,8	49,8 3,8	13,5 4,5	42,7
	B_2	(82,5 2,5)	45,0 1,3	49,2 2,0	05,8 2,4	47,8

d. h. auch g ist in Prozenten angegeben, wie w, s und r). Die ursprüngliche Reinheit der fünf Löschblattfarben 45,7 ist auf 19,8 nach der ersten, auf 11,4 nach der zweiten Belichtung herabgegangen. Will man bereits aus diesem Material eine exponentielle Abhängigkeit der Reinheit von der Belichtungszeit ableiten, etwa $r = r_0 e^{-ct}$, so ergibt sich nach Ausgleichung ($r_0 = 43{,}6$ und) c etwa $= \frac{0{,}01}{M}$, wo M den „Modul" der natürlichen Logarithmen bedeutet, t ist in Tagen, r in Prozenten angegeben zu denken. Man findet, daß die Reinheit der Löschblattfarben etwa binnen Monatsfrist in Licht auf die Hälfte herabsinkt; es ist dieser Zeitraum sozusagen ihre „Halbwertszeit". Nach einem halben Jahr ist die Reinheit auf 1 Proz., praktisch also so gut wie auf 0, herabgesunken. Doch sind zu einer exakteren Bestimmung von c natürlich noch mehr Beobachtungsreihen nötig. Vielleicht regen diese Zeilen andere an, sich ebenfalls damit, und vielleicht mit besseren Hilfsmitteln, zu befassen.

Im einzelnen ist bemerkenswert die starke Aufhellung („Vergrauung") der blaugrünen Farben (I, VI, VII) sowie die starke Reinheitsabnahme der anfangs relativ sehr reinen, daher „schön"[1]) aussehenden grünen und blauen Löschblätter; die Reinheit der gelbroten ist viel schwächer gesunken. Gleichwohl habe ich vorderhand aus beiden Sorten die Mittel (s. o.) gebildet.

1) Im Russischen bedeutet прекрасъ (prekras) schön eigentlich: sehr rot! — Insbesondere machen „dunkelklare" Farben ($w \backsim o$) einen „schönen" Eindruck; großer Schwarzgehalt läßt sie nur „gesättigt", nur gelbe (grüngelbe ca. 95 — orange ca. 20) anders, nämlich „braun", erscheinen.

Tabelle III.

Färbung junger Laubblätter.

Baumart	c	w	s	r
1. Buche, Fagus silvatica	93,6 ± 1,0	14,0 ± 5,7	45,0 ± 7,1	41,7 ± 9,1
2. Eiche, Quercus sessiliflora	93,3 ± 1,0	15,8 ± 0,5	66,0 ± 7,8	18,2 ± 9,5
3. Linde, Tilia sp. sp.	93,3 ± 3,1	13,7 ± 3,2	56,0 ± 11,6	30,3 ± 12,0
4. Rüster, Ulmus sp.	93,8 ± 0,4	16,4 ± 5,1	62,6 ± 11,4	21,0 ± 12,2
5. Pappel, Populus alba	93,0	6,0	70,0	24,0
6. Birke, Betula sp.	90,0 ± 1,0	9,0 ± 1,0	78,5 ± 5,5	12,5 ± 5,6
7. Flieder, Syringa v.	90,7 ± 1,2	6,7 ± 2,7	82,3 ± 8,2	11,0 ± 8,7
8. Eberesche, Sorbus auc.	88,2 ± 1,9	10,0 ± 8,7	78,8 ± 4,8	11,2 ± 10,0
9. Spiraee	87,5 ± 2,5	8,5 ± 2,5	70,0 ± 5,0	21,5 ± 5,6

3. Die Blattfärbung im Herbst und Frühling.

Wie im Herbst die längst voll ausgefärbten, habe ich in diesem Frühjahr eine große Anzahl etwa halb ausgewachsener junger Laubblätter kolorimetrisch untersucht; durch Anthokyan rotgefärbte Jungblätter sind in der Zusammenstellung (Tabelle III, S. 445) nicht enthalten[1]).

Für die Blätter von 1—5 ergeben sich folgende Differenzen im Sinne Herbstfarbe—Frühlingsfarbe:

Diff. H.—F.	*c*	*w*	*s*	*r*	*g*
1.	—4	—10	+45	—35	—20
2.	—4	— 7	+19	—12	—10
3.	—5	—10	+33	—23	—16
4.	—6	— 8	+25	—17	—11
5.	—8	0	+20	—20	— 2
Mittel:	—5,4 ± 0,8	—7,0 ± 1,8	+28,4 ± 4,9	—21,4 ± 3,9	—11,8 ± 2,9

Die Mittelwerte selbst sind für die bezeichneten Baumarten im Frühling:

$c = 93{,}4 \pm 0{,}1$, $w = 13{,}2 \pm 1{,}8$,
$s = 59{,}9 \pm 4{,}2$, $r = 26{,}9 \pm 4{,}2$.

Diese Baumarten sind hier die vorherrschenden. Die Reinheit sinkt also im Laufe des Sommers auf weniger als ein Viertel ihres Anfangsbetrags, der Weißgehalt nimmt auf die Hälfte ab, der Schwarzgehalt um die Hälfte zu, die Farbe verschiebt sich um 5 *c* nach dem Blau (Grün) hin. Aber auch der Endwert 88 ist noch gelbgrün, was ja auch das griech. χλωρός bedeutet. („Reines" Grün, ca. 80 *c*—75 ist schon etwas bläulich — wird vulgär als „giftgrün", d. h. Schweinfurter Grün, bezeichnet. Ich habe diese Farbe noch nicht untersucht.)

1) Für rote junge Pappeln und Eichblätter fand ich $c = 10$, $w = 11$, $s = 83$, also $r = 6$, d. h. viel kleiner als bei den grünen. Das rührt wohl daher, daß das rotblaue Anthokyan das gelbgrüne Chlorophyll fast neutralisiert; dies bedingt auch wohl den großen Schwarzgehalt dieser Blätter. Übrigens ist die Untersuchung der starken Spiegelwirkung gerade dieser Blätter halber sehr schwierig und unsicher.

Potsdam, 19. Mai 1919.

(Eingegangen 26. Mai 1919.)

Notiz über eine besondere Klasse von Determinanten und ihre Anwendung bei Stabilitätsstudien an Atommodellen.

Von Harry Schmidt.

Untersucht man die Stabilität der Elektronenringe des Thomsonschen Atommodells in der Ebene ihrer Gleichgewichtslage mit Hilfe der Schwingungsmethode, so fordert dieses Stabilitätskriterium[1]) die Realität sämtlicher Frequenzen q, die sich als Wurzeln der beiden folgenden Gruppen von je n Schwingungsgleichungen berechnen lassen:

$$(A_0 - mq^2)\varrho_1 + A_1\varrho_2 + A_2\varrho_3 + \cdots + A_{n-1}\varrho_n - 2ma\omega iq\Phi_1 + aB_1\Phi_2 + aB_2\Phi_3 + \cdots = 0$$
$$(A_0 - mq^2)\varrho_2 + A_1\varrho_3 + A_2\varrho_4 + \cdots - 2ma\omega iq\Phi_2 + aB_1\Phi_3 + aB_2\Phi_4 + \cdots = 0$$
— — — — — — — — — — — — — —
$$(A_0 - mq^2)\varrho_n + A_1\varrho_1 + A_2\varrho_2 + \cdots - 2ma\omega iq\Phi_n + aB_1\Phi_1 + aB_2\Phi_2 + \cdots = 0 \qquad \text{(I)}$$

und

$$2im\omega q\frac{\varrho_1}{a} - B_1\frac{\varrho_2}{a} - B_2\frac{\varrho_3}{a} - \cdots + (C_0 - mq^2)\Phi_1 - C_1\Phi_2 - C_2\Phi_3 - \cdots = 0$$
$$2im\omega q\frac{\varrho_2}{a} - B_1\frac{\varrho_3}{a} - B_2\frac{\varrho_4}{a} - \cdots + (C_0 - mq^2)\Phi_2 - C_1\Phi_3 - C_2\Phi_4 - \cdots = 0$$
— — — — — — — — — — — — — —
$$2im\omega q\frac{\varrho_n}{a} - B_1\frac{\varrho_1}{a} - B_2\frac{\varrho_2}{a} - \cdots + (C_0 - mq^2)\Phi_n - B_1\Phi_1 - C_2\Phi_2 - \cdots = 0. \qquad \text{(II)}$$

In diesen Gleichungen bedeuten die Größen A, B und C gewisse Konstanten[2]); m ist die Masse, ω die Winkelgeschwindigkeit eines Elektrons und a der Radius des Elektronenringes im Gleichgewichtsfall, während durch die kleinen Größen ϱ und Φ die vorgenommenen Verrückungen der einzelnen Elektronen in der Gleichgewichtsebene bestimmt werden. (I) und (II) können als $2n$ lineare, homogene Gleichungen mit den $2n$ Unbekannten ϱ und Φ, welche im allgemeinen nicht sämtlich gleich null sind, aufgefaßt werden. Damit daher diese Gleichungen nebeneinander bestehen können, muß die Determinante Δ ihrer Koeffizienten verschwinden. Diese Determinante läßt sich leicht als Spezialfall ($m = 2$) einer allgemeineren Determinante R von der Ordnung $m \cdot n$ auffassen, welche die folgende Beschaffenheit besitzt. Ihr Matrix setzt sich aus m^2 quadratischen Matrizen zusammen:

$$\begin{matrix} a_1 b_1 c_1 \cdots p_1 \\ a_2 b_2 c_2 \cdots p_2 \\ a_3 b_3 c_3 \cdots p_3 \\ — — — — \\ a_m b_m c_m \cdots p_m, \end{matrix}$$

wobei z. B. d_k die Matrix

1) Vgl. J. J. Thomson, Phil. Mag. 7, 241, 1904; ferner auch H. Schmidt, Leipziger Dissertation 1919, § 5 (im Druck befindlich).
2) Vgl. l. c.

$$\begin{matrix} d_{k1}\, d_{k2}\, d_{k3} \cdots d_{kn} \\ d_{k2}\, d_{k3}\, d_{k4} \cdots d_{k1} \\ - - - - - \\ d_{kn}\, d_{k1}\, d_{k2} \cdots d_{k(n-1)} \end{matrix}$$

bedeutet, so daß also sämtliche Teilmatrizen unserer Determinante Matrizen einer Zirkulante (zyklischen Determinante) sind[1]).

Man sieht nämlich sofort, daß

$$\Delta = R(-1)^{\frac{m}{2}(n-1)(n-2)} \tag{1}$$

wird. Es gilt nun der folgende Lehrsatz:

Eine Determinante $m \cdot n$ ter Ordnung der vorerwähnten Art läßt sich in ein Produkt von n Determinanten m-ter Ordnung zerlegen:

$$R = (-1)^{\frac{m}{2}(n-1)(n-2)} \cdot \prod_{i=1}^{n} R_i,$$

wobei

$$R_i = \begin{vmatrix} a_1(\varepsilon_i)\, b_1(\varepsilon_i)\, c_1(\varepsilon_i) \ldots p_1(\varepsilon_i) \\ a_2(\varepsilon_i)\, b_2(\varepsilon_i)\, c_2(\varepsilon_i) \ldots p_2(\varepsilon_i) \\ a_3(\varepsilon_i)\, b_3(\varepsilon_i)\, c_3(\varepsilon_i) \ldots p_3(\varepsilon_i) \\ - - - - - - - - \\ a_m(\varepsilon_i)\, b_m(\varepsilon_i)\, c_m(\varepsilon_i) \ldots p_m(\varepsilon_i) \end{vmatrix} \tag{2}$$

ist. Die Elemente der Determinanten R_i werden aus den Elementen der Teilmatrizen von R mit Hilfe von ε_i (der durch den Index i gekennzeichneten n-ten Einheitswurzel) in einer Weise zusammengesetzt, die aus dem folgenden Beispiel zu ersehen ist:

$$d_k(\varepsilon_i) = d_{k1} + \varepsilon_i d_{k2} + \varepsilon_i^2 d_{k3} + \cdots + \varepsilon_i^{n-1} d_{kn}. \tag{3}$$

Der Beweis des vorstehenden Satzes kann durch Multiplikation der Determinante R mit einer passend gewählten Hilfsdeterminante $m \cdot n$-ter Ordnung erbracht werden[2]); weit einfacher jedoch ist der folgende Weg[3]). Man kann eine Determinante R der in Rede stehenden Art als Determinante der quadratischen Form

$$F = \sum_{hkrs} [h, k, r + s]\, x_r^h\, y_s^k \tag{4}$$

auffassen, wobei r und s von 1 bis n sowie h und k von 1 bis m laufen und wobei

$$[h, k, t] = [h, k, t + \lambda n]$$

sein soll. Indem wir in Gl. (4) r durch $t = r + s$ ersetzen, erhalten wir:

$$F = \sum_{hkst} [h, k, t]\, x_{t-s}^h \cdot y_s^k, \tag{5}$$

wobei jetzt h und k von 1 bis m sowie s und t von 1 bis n laufen. Nun werde F der Transformation:

$$\begin{aligned} x_r^h &= \sum_{\varrho} \varepsilon^{r\varrho}\, \xi_\varrho^h \quad (\varrho = 1, 2 \ldots n) \\ y_s^k &= \sum_{\sigma} \varepsilon^{s\sigma}\, \eta_\sigma^k \quad (\sigma = 1, 2 \ldots n) \end{aligned} \tag{6}$$

unterworfen, wobei ε die n-te Einheitswurzel ist. Da also

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

ist, so wird

$$\sum_{s=1}^{n} \varepsilon^{\mu s} = \begin{cases} n, & \text{falls } \mu \text{ durch } n \text{ teilbar;} \\ 0, & \text{falls } \mu \text{ nicht durch } n \text{ teilbar.} \end{cases} \tag{7}$$

Dann wird:

$$\sum_{s} x_{t-s}^h \cdot y_s^k = \sum_{\varrho\sigma s} \varepsilon^{\varrho(t-s)+\sigma s}\, \xi_\varrho^h \cdot \eta_\sigma^k, \tag{8}$$

oder da gemäß Gl. (7)

$$\sum_{s=1}^{n} \varepsilon^{(\sigma-\varrho)s} = \begin{cases} n, & \text{falls } \varrho = \sigma \\ 0, & \text{falls } \varrho \neq \sigma \end{cases} \tag{9}$$

ist,

$$\sum_{s} x_{t-s}^h\, y_s^k = \sum_{\varrho} n\, \varepsilon^{\varrho t}\, \xi_\varrho^h\, \eta_\varrho^k. \tag{10}$$

Dann wird:

$$F = n \sum_{hk\varrho} (h, k, \varrho)\, \xi_\varrho^h \cdot \eta_\varrho^k, \tag{11}$$

wobei:

$$(h, k, \varrho) = \sum_{t} [h, k, t]\, \varepsilon^{\varrho t} \tag{12}$$

gesetzt wurde. Da nun die Determinante der transformierten Form gleich dem Produkt aus der Determinante R der ursprünglichen Form und den Transformationsdeterminanten sein muß, so wird:

$$R = n^{m \cdot n} \cdot D^{-2m} \cdot \prod_{\varrho=1}^{n} |(h, k, \varrho)|, \tag{13}$$

wenn

$$D = |\sum_{\varrho} \varepsilon^{r\varrho}| = |\sum_{\sigma} \varepsilon^{s\sigma}| \tag{14}$$

ist. Nun wird gemäß Gl. (7):

$$D^2 = |\sum_{\varrho} \varepsilon^{(r+s)\varrho}| = \begin{vmatrix} 0\,0\,0 \cdots 0\,n\,0 \\ 0\,0\,0 \cdots n\,0\,0 \\ - - - - - \\ 0\,n\,0 \cdots 0\,0\,0 \\ n\,0\,0 \cdots 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \cdots 0\,0\,n \end{vmatrix} = n^n \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}},$$

und folglich:

$$R = (-1)^{\frac{m}{2}(n-1)(n-2)} \cdot \prod_{\varrho=1}^{n} |(h, k, \varrho)|. \tag{15}$$

Da aber gemäß Gl. (2):

$$|(h, k, \varrho)| = R_i$$

ist, so wird Gl. (15):

$$R = (-1)^{\frac{m}{2}(n-1)(n-2)} \prod_{i=1}^{n} R_i, \tag{16}$$

und unser Satz ist bewiesen.

1) Für $m = 1$ wird R eine einfache Zirkulante.

2) Näheres s. H. Schmidt, l. c. § 7.

3) Diesen zweiten Beweis verdanke ich einer Mitteilung von Herrn Professor Herglotz-Leipzig.

Zur Anwendung auf die oben genannte Determinante Δ setzen wir zur Abkürzung (indem wir die Einheitswurzeln wieder durch ε bezeichnen):

$$\varepsilon_k A_1 + \varepsilon_k^2 A_2 + \varepsilon_k^3 A_3 + \cdots + \varepsilon_k^{n-1} A_{n-1} = L_k,$$
$$\varepsilon_k B_1 + \varepsilon_k^2 B_2 + \varepsilon_k^3 B_3 + \cdots + \varepsilon_k^{n-1} B_{n-1} = i M_k$$

und

$$\varepsilon_k C_1 + \varepsilon_k^2 C_2 + \varepsilon_k^3 C_3 + \cdots + \varepsilon_k^{n-1} C_{n-1} = N_k.$$

Dann wird gemäß Gl. (16) unter Berücksichtigung von Gl. (1):

$$\Delta = \prod_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} A_0 - mq^2 + L_k & ai(M_k - 2m\omega q) \\ -\frac{i}{a}(M_k - 2m\omega q) & C_0 - mq^2 - N_k \end{vmatrix}.$$

Die Forderung $\Delta = 0$ führt demnach zu n Gleichungen von der Form:

$$(A_0 - mq^2 + L_k)(C_0 - mq^2 - N_k) = (M_k - 2m\omega q)^2,$$

und man erkennt leicht, daß diese Gleichungen $2n$ unabhängige Wurzeln q entsprechend den $2n$ Freiheitsgraden der n Elektronen in der Ebene ihrer ungestörten Gleichgewichtslage liefern.

Hamburg, Mai 1919. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 3. Juni 1919.)

Gleichgewichts- und Stabilitätsstudien am Haasschen Modell des positiven Kerns der Atome.

(Vorläufige Mitteilung[1]).)

Von Harry Schmidt.

Vor einiger Zeit hat A. Haas[2]) über die Konstitution des positiven Kerns der Atome die folgenden Anschauungen entwickelt. Ist N das auf ganze Zahlen abgerundete Atomgewicht des betreffenden Elementes, so setzt sich der Atomkern (im Sinne der Bohrschen Theorie) aus N positiven Elektronen zusammen, die sich innerhalb einer Kugel von homogener negativer Elektrizität von insgesamt n Elementarladungen angeordnet befinden, wobei n derart bestimmt ist, daß $(N - n)$ gleich der Kernladungszahl des Elementes wird. Der Radius a eines positiven Elektrons berechnet sich dabei aus der Formel für die elektromagnetische Masse

$$m = \frac{2}{3c^2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{a},$$

wenn m gleich der Masse eines Wasserstoffatoms und ε gleich dem elektrischen Elementarquantum gesetzt wird (c = Lichtgeschwindigkeit); er wäre daher rund 1800 mal kleiner als der Radius eines negativen Elektrons. Man bekommt demnach ein Bild des Atomkerns, wenn man das Thomsonsche Atommodell hinsichtlich des Volumens billionenmal verkleinert und in ihm nun die Rollen der positiven und der negativen Elektrizität vertauscht, außerdem aber berücksichtigt, daß die Gesamtmasse der in der negativen Kugel eingeschlossenen positiven Elektrizität nicht so groß ist wie die negative Kugelladung selbst.

Um nun für die einzelnen Elemente zu spezielleren Kernkonstitutionsbildern zu gelangen, wurde eine eingehendere Untersuchung der Möglichkeit und Stabilität von Gleichgewichtszuständen ruhender und rotierender Elektronengruppen im Thomsonschen Atombild[1]) durchgeführt. Mit der Auffindung möglicher Gleichgewichtslagen von Elektronen, die sich in Form einfacher und zwei konzentrisch ähnlicher regulärer Polygone, ferner in Form einer Doppelpyramide und eines rechtwinkligen Prismas, schließlich einfacher und zwei konzentrisch ähnlicher regulärer Polyeder innerhalb einer äquivalenten Kugel von homogener positiver Elektrizität angeordnet befinden, hat sich bereits A. Haas[2]) eingehender befaßt, während die Stabilitätsverhältnisse bei ebenen Elektronenringen von J. Thomson[3]) untersucht worden sind. Indem jenen aufgezählten Anordnungen noch die Gruppierung in Form einer einfachen Pyramide hinzugefügt wurde, dürften sämtliche Grundtypen von Elektronenkonfigurationen behandelt sein, auf welche sich die komplizierteren Formen zurückführen lassen.

Die Ermittlung möglicher Gleichgewichtszustände geschah auf Grund der Forderung, daß dann die potentielle Energie der gesamten Konfiguration ein Extremum werden muß. Man macht den Kugelmittelpunkt zum Anfang eines Koordinatensystems, stellt die potentielle Energie als Funktion der $3N$ Koordinaten der N Elektronen dar und bildet die partiellen Ableitungen, deren Verschwinden zur Berechnung der erfor-

1) Die ausführlichere Veröffentlichung erfolgt in der im Druck befindlichen Leipziger Dissertation des Verfassers: „Über die Möglichkeit und Stabilität von Gleichgewichtszuständen ruhender sowie rotierender Elektronengruppen innerhalb einer im allgemeinen nicht äquivalenten Kugel von homogener positiver Elektrizität".

2) A. Haas, diese Zeitschr. 18, 400, 1917.

1) Unter Verallgemeinerung auf nicht äquivalente Kugelladungen. Die Vertauschung von positiver und negativer Elektrizität spielt ja bei den Gleichgewichts- und Stabilitätsuntersuchungen keine Rolle.

2) A. Haas, Wiener Ber. 120, 1111, 1911.

3) J. J. Thomson, Phil. Mag. 7, 237, 1904.

derlichen Daten führt. Wegen der symmetrischen Eigenschaften sämtlicher betrachteten Konfigurationen kann sich dabei die Untersuchung auf ein einziges Elektron beschränken.

Als Stabilitätskriterium gelangt das Lejeune-Dirichletsche zur Anwendung, das für den Fall von Stabilität das Vorhandensein eines Minimums der potentiellen Energie fordert. Die Übertragung der für ruhende Systeme streng gültigen Dirichletschen Schlußweise auf stationäre Bewegungsformen wird einer Diskussion unterworfen, und es gelangt dasjenige Verfahren zur Anwendung, das für die Stabilität das meiste verlangt, mithin bei der Unsicherheit unserer Kenntnis über die möglichen Störungen im Innern des Atomkerns die sichersten Resultate gewährleistet. Bei der Durchführung der Rechnungen wurde mit großem Nutzen Gebrauch von dem an dieser Stelle[1]) vorstehend mitgeteilten Determinantensatz gemacht. In bezug auf die Einzelheiten muß auf die ausführlichere Publikation verwiesen werden.

Die Resultate der Untersuchung lassen sich wie folgt zusammenfassen. Sämtliche oben aufgezählten Grundformen von Elektronenanordnungen liefern im allgemeinen eine große Anzahl möglicher Gleichgewichtslagen. Die Struktur der Gruppierungen ist um so sperriger, je geringer die Ladung der positiven Kugel ist, und für jede Form der Anordnung lassen sich die Mindestwerte dieser Kugelladung berechnen, welche zur Ermöglichung einer Gleichgewichtslage erforderlich sind. Wird im Mittelpunkt ein Elektron hinzugefügt, oder rotiert die Konfiguration um eine feste, durch den Kugelmittelpunkt verlaufende Achse, so tritt im allgemeinen eine Deformation der Konfigurationen ein. Für besondere Fälle ist das Folgende zu bemerken. Bei den konzentrisch-ähnlichen regulären Polygonen nähern sich mit wachsender Elektronenzahl die beiden Ringe einander mehr und mehr, während sie sich gleichzeitig immer weiter vom Kugelmittelpunkt entfernen. Dasselbe gilt für Rotation mit wachsender Geschwindigkeit. Ebenso werden bei den rechtwinkligen Prismen mit zunehmender Elektronenzahl einerseits und wachsender Rotationsgeschwindigkeit andererseits die beiden parallelen Polygone immer größer, während sie zugleich einander immer näher rücken. Und Entsprechendes gilt schließlich auch für die Pyramiden und Doppelpyramiden, indem sie unter den genannten Umständen immer flacher und flacher werden, und ihre Grundfläche sich dabei unter ständiger Vergrößerung mehr und mehr der Peripherie der positiven Kugel nähert. Der von A. Haas[1]) aufgestellte Satz, daß bei jeder beliebigen Konfiguration sämtliche Winkel, welche die zu den verschiedenen Elektronen gezogenen Kugelradien miteinander bilden, von der Rotation völlig unbeeinflußt bleiben, bedarf demnach der Einschränkung auf ebene Konfigurationen.

Diese große Fülle der an sich möglichen Gleichgewichtslagen wird aber gewaltig reduziert, wenn man die Stabiltät der Gleichgewichtszustände als weitere Forderung hinzutreten läßt. Dann ergibt sich nämlich zunächst, daß sämtliche Doppelringe, rechtwinklige Prismen und Doppelpolyeder ausscheiden müssen. Von den regulären Polyedern stellen nur das Tetraeder und das Oktaeder, von den ebenen Ringen nur einige wenige Spezialfälle stabile Anordnungen dar. Ferner liefern die Pyramiden und Doppelpyramiden einige Beispiele stabiler Anordnungen, und man kann daher zusammenfassend sagen, daß, falls überhaupt die Möglichkeit stabiler Anordnungen von größeren Elektronenzahlen im Sinne der Haasschen Kerntheorie besteht, dieses nur in Form mehrfacher ebener Ringe von verschiedenen Elektronenzahlen oder aber von solchen räumlichen Anordnungen in Frage kommen kann, bei denen sich mehrere einfache Ringe von verschiedenen Elektronenzahlen in parallelen Ebenen symmetrisch um eine durch den Kugelmittelpunkt verlaufende Achse angeordnet befinden.

Wie erwähnt, sind derartige Anordnungen zum Teil bereits von J. J. Thomson[2]) näherungsweise untersucht worden. Nun stehen aber in zahlreichen Fällen, worauf schon A. Haas[3]) aufmerksam gemacht hat, die Thomsonschen Resultate mit der ersten Grundbedingung für jede Gleichgewichtslage im Widerspruch, mit der Bedingung nämlich, daß die Resultierende der Abstoßungskräfte, die auf jedes einzelne Elektron von allen übrigen ausgeübt werden, genau die entgegengesetzte Richtung haben muß, wie die radial zum Mittelpunkt wirkende Anziehungskraft, die auf das betrachtete Elektron von der positiven Elektrizität ausgeübt wird. Es bleibt dabei fraglich, ob stabile Gleichgewichtslagen von so hohen Elektronenzahlen, wie sie von Thomson angegeben worden sind, überhaupt möglich sind; jedenfalls aber erscheint es angebracht, jene Anordnungen erneut zu untersuchen, und wir behalten uns vor, diese Untersuchung auf Grund der hiermit gelieferten Vor-

1) H. Schmidt, diese Zeitschr. **20**, 446, 1919.

1) Vgl. A. Haas, Wiener Ber. **120**, 1169, 1911.
2) J. J. Thomson, l. c.
3) A. Haas, Wiener Ber. **120**, 1113, 1911.

arbeiten demnächst auszuführen. Ihre Ergebnisse werden uns dann die Möglichkeit bieten, die Haasschen Grundvorstellungen durch speziellere Bilder zu erweitern und ihre Brauchbarkeit an den physikalischen Folgerungen zu prüfen, die sich aus ihnen werden ableiten lassen.

Hamburg, Anfang Juni 1919. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 4. Juni 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Der Energieinhalt der Festkörper im Lichte der neueren Forschung.

Von Erwin Schrödinger.

(Fortsetzung.)

Die experimentelle Methodik.

§ 8. Nachdem H. F. Weber[1]) die starke Temperaturabhängigkeit der unternormalen Atomwärmen festgestellt, J. Dewar[2]) die Allgemeinheit des Phänomens wahrscheinlich gemacht hatte, waren auch von experimenteller Seite her die beiden Forderungen gegeben: a) zu möglichst tiefer Temperatur vordringen, b) das Intervall, welches praktisch das „∂T“ in Gleichung (1) bildet, möglichst einengen, damit man behaupten kann, wahre, nicht mittlere, Atomwärmenwerte zu messen. Eine präzise Methode, die das leistet, wurde zuerst von Eucken[3]), Nernst[4]) und einem Stab von Mitarbeitern ausgebildet. Ihnen verdankt man den weitaus größten Teil des heute zur Verfügung stehenden, nach Kriterium b) brauchbaren[5]) Beobachtungsmaterials. Eine Reihe sehr peinlicher und engmaschiger Präzisionsmessungen, von W. H. Keesom und H. Kamerlingh-Onnes[6]) wesentlich nach derselben Methode ausgeführt, bildet die wertvollste Ergänzung.

Fig. 3 zeigt die klassisch einfachste Ausführung. Der Kalorimeterblock K ist an zwei dünnen Pt-Drähten in dem Glasgefäß G frei aufgehängt. G steht in einem versilberten Dewar-Gefäß (nicht gezeichnet), mit flüssiger Luft oder H_2, dessen normaler Siedepunkt (ca. 20° K), wenn nötig, durch Absaugen der Dämpfe noch herabgedrückt wird. Nachdem G und K die Temperatur des Bades angenommen, wird G auf äußerstes Hochvakuum entleert (Molekularpumpe; im Vakuum rotgeglühte, dann im flüssigen Luft- oder H_2-Bad gekühlte Kokosnußkohle). Dieses Hochvakuum bildet den vitalsten Teil der Anordnung, da es bei tiefer Temperatur (geringe Strahlung!) und geringer Temperaturdifferenz zwischen G und K (sie erreicht höchstens wenige Grade) fast absolute Wärmeisolation garantiert.

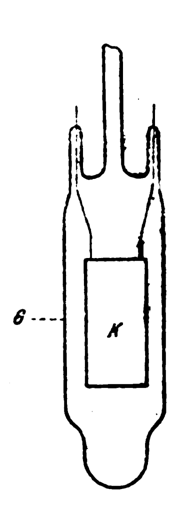


Fig. 3.

K besteht für einen guten Leiter (Fig. 4,

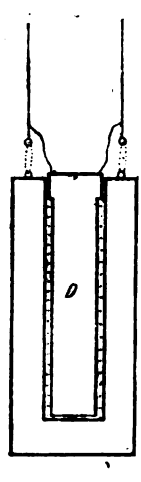


Fig. 4.

1) H. F. Weber, Pogg. Ann. 154, 367, 553, 1875.
2) J. Dewar, Proc. Roy. Inst. March 25, 1904; Proc. Roy. Soc. (A) 76, 325, 1905.
3) A. Eucken, diese Zeitschr. 10, 586, 1909.
4) W. Nernst, Ann. d. Phys. (4) 36, 395, 1911. S. a. Literatur zur Tab. II.
5) Aus mittleren Atomwärmen lassen sich nie präzise Schlüsse ziehen. Wir werden sie im folgenden nur zur Ergänzung benutzen und nur solche Stoffe erwähnen, für welche zum mindesten auch einige wahre C_v gemessen sind.
6) Siehe Lit. zu Tab. II.

doppelter Maßstab) einfach nur aus einem — zweiteiligen — Block des zu untersuchenden Metalls selbst. Um den Dorn D ist elektrisch isoliert ein Pt-Draht von 80—100 Ω Widerstand geführt, der Zwischenraum mit Paraffin ausgegossen, der Dorn im äußeren Blockteil festgeschlagen. — Der Pt-Draht dient zur elektrischen Heizung und als Widerstandsthermometer. Nach Durchkältung und Evakuation von G und etwa $^1/_2$-stündiger Verfolgung des meist verschwindend kleinen „Ganges", wird etwa 1 Minute lang ein Heizstrom (Größenordnung $^1/_{10}$ A) durch den Draht gesandt, dabei der Anstieg und wieder etwa $^1/_2$ Stunde lang der Gang des Pt-Widerstands beobachtet. Wenn der Temperaturkoeffizient des letzteren als Funktion der Temperatur bekannt ist, wird C_p in bekannter Weise (und unter Anbringung naheliegender Korrektionen) gefunden.

Der Anschluß des Pt-Thermometers an thermodynamisch festgelegte Fixpunkte bildet natürlich einen integrierenden Bestandteil aller solchen Untersuchungen. Er erfolgte an die Siedepunkte von CO_2, O_2, H_2 und an Widerstandskurven anderer Pt-Sorten und von Blei, die in Leiden mit Gas- und Dampfspannungsthermometern ermittelt waren. Auch wurden gasthermometrische Methoden unmittelbar zur Kontrolle herangezogen[1]). —

Für schlechter leitende Körper besteht K aus einem dünnwandigen Silber- oder (besser) Kupfergefäß, das sie aufnimmt und zur Erhaltung des Wärmekontakts mit Wasserstoff gefüllt bleibt, daher gasdicht verlötet sein muß. Der Widerstandsdraht verläuft im Innern oder auch außen herum. Eine neuere Form von K zeigt Fig. 5.

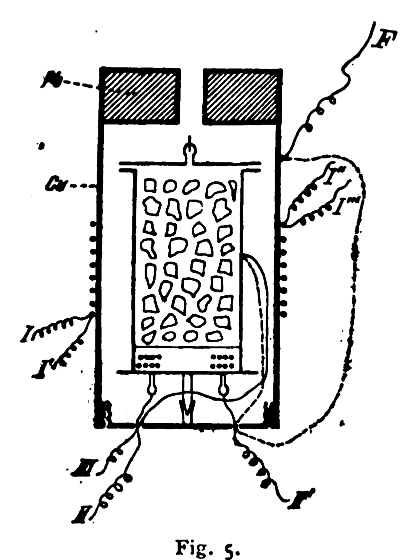


Fig. 5.

1) Vgl. bes. Lindemann u. Schwers, diese Zeitschr. **14**, 766, 1913.

Hier ist das eigentliche Kalorimetergefäß zum Schutz gegen Strahlungsaustausch mit G noch von einem Kupfermantel Cu umgeben, der mit einem Bleiblock Pb thermisch beschwert ist. Die Temperatur des letzteren Systems mißt das Widerstandsthermometer I-I′-I″-I‴, die Temperaturdifferenz zwischen ihm und dem eigentlichen Kalorimeter das Thermoelement III-III′. II-II′ ist die Heizung. —

Zwei Umstände sind ausschlaggebend für den Erfolg dieser Methoden: a) daß die Wärmeleitfähigkeit der Metalle (und Kristalle überhaupt) bei tiefer Temperatur nicht, wie gelegentlich vermutet wurde, sehr klein, sondern sehr groß wird[1]); b) die starke Abnahme der Atomwärmen selbst. Das durch beide Umstände enorm gesteigerte Temperaturleitvermögen, ferner das bekannte Verhalten der Strahlungseffekte (rohproportional mit T^4) und die absolute Wärmeisolation des Hochvakuums lassen die ganze Anordnung, je tiefer die Temperatur sinkt, mit zusehends gesteigerter Präzision funktionieren.

Prüfung der „monochromatischen" Theorie. „Thermisch einfache" Stoffe.

§ 9. Schon die rohen Beobachtungswerte für die Atomwärmen bei konstantem Druck (C_p), die nach diesen Methoden, in einigen Fällen bis hinab zu 14° K gemessen wurden, zeigen auf den ersten Blick eine schlagende allgemeine Übereinstimmung mit dem von Einstein (s. o. Gl. (22)) und Nernst (s. o. § 6) vorhergesehenen Verlauf. Für eine quantitative Prüfung von (22) muß natürlich wieder die Korrektion (4) in Betracht gezogen werden.

Da die nötigen Daten: Ausdehnungskoeffizient α, Kompressibilität $\varkappa$ und Atomvolumen V in der Regel höchstens für Zimmertemperatur bekannt sind, ist es wichtig zu bemerken, daß die Korrektion, die bei Zimmertemperatur meist einige Prozent beträgt (etwa 3—6 Proz., im einzelnen Ausnahmefällen 10—15 Proz.), auch prozentuell betrachtet, mit einer höheren als der ersten Potenz der Temperatur abnimmt und bei jenen Temperaturen, bei denen gerade das charakteristische Gepräge des C_v-Verlaufs hervortritt, meist schon auf verschwindend kleine Beträge gesunken ist. Man darf darum nach Nernst[2]) und auf Grund der Messungen Grüneisens[3]), von der (auch oder vielmehr gerade bei den tiefsten Temperaturen) sehr geringen Variabi-

1) Vgl. A. Eucken, Ann. d. Phys. (4) **34**, 185, 1911.
2) W. Nernst, Zeitschr. f. Elektrochem. **17**, 817, 1911; Ann. d. Phys. (4) **36**, 425, 1911.
3) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. (4), **26**, 401, 1908; **33**, 65, 1910.

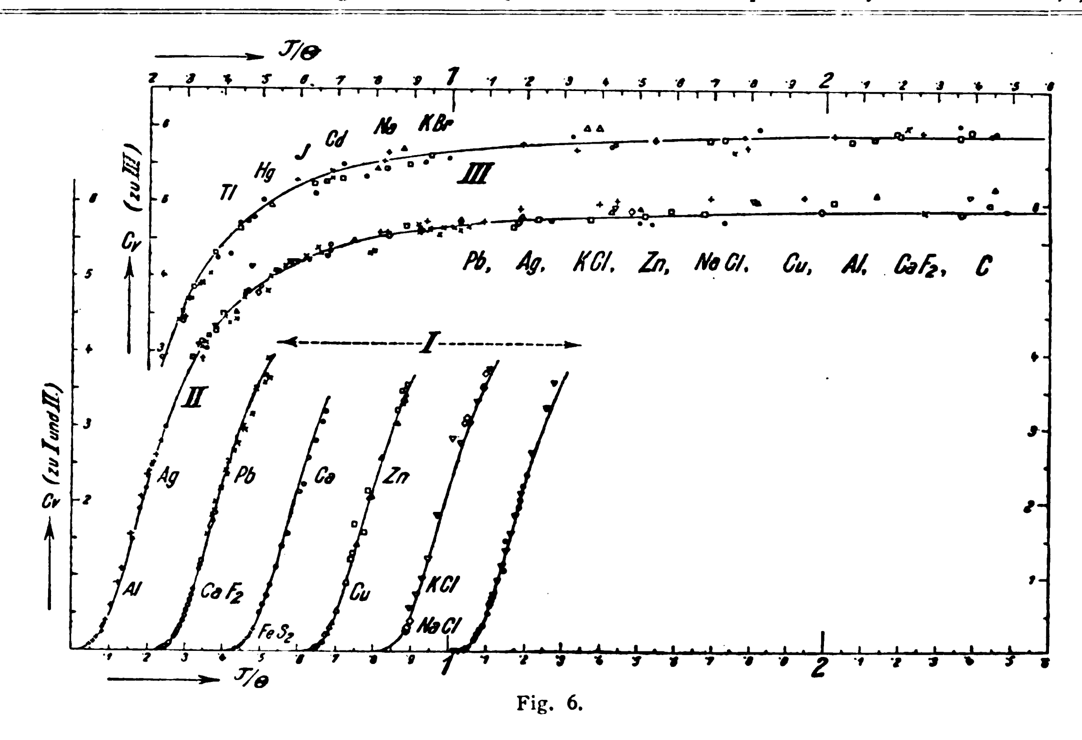


Fig. 6.

lität von $\varkappa$ und V ganz absehen. Für α wäre das keineswegs gestattet, da es nach einer — in den meisten untersuchten Fällen gut bestätigten — Beziehung von Grüneisen[1]) gerade mit C_p selbst proportional ist. Ebendies ermöglicht, das Korrektionsglied in der Form anzusetzen

$$C_p - C_v = A' C_p^2 T \tag{24}$$

und die Materialkonstante A' aus einem zusammengehörigen Wertesystem von α, V, $\varkappa$, C_p durch Gleichsetzen von (4) und (24) zu bestimmen.

Nach Nernst soll sich außerdem A' von Körper zu Körper wie die reziproke Schmelztemperatur ändern. Es handelt sich dabei sicher nicht um ein exaktes Gesetz[2]), doch liefert

$$A' = \frac{0{,}0214 \text{ cal}^{-1}}{T_s} \tag{25}$$

mit (24) in der Tat meist so brauchbare Werte (s. Tab. I), daß man der Versuchung nicht widerstehen kann, C_p-Messungen, für deren Reduktion sonst jeder Anhaltspunkt fehlt, auf diese Weise einer theoretischen Diskussion zugänglicher zu machen[3]). —

1) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. (4), 33, 65, 1910; 39, 257, 1912; Verh. d. D. Phys. Ges. 13, 426 u. 491, 1911. — S. a. S. Ratnowsky, Ann. d. Phys. (4) 38, 637, 1912; Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 75, 1913.

2) S. W. H. Keesom und Kamerlingh-Onnes, Proc. Amst. 18, 1253, 1916.

3) Einer noch mehr vereinfachten Form des Korrektionsgliedes

$$C_p - C_v = a\, T^{3/2}$$

liegt die Auffassung zugrunde, daß sich C_p^2 in dem Bereich, wo das Glied überhaupt in Betracht kommt, grob angenähert wie konst. $\times\, T^{1/2}$ verhält.

Tabelle I.

		Al	Cu	Ag	Pb	Pt	$NaCl$	KCl
$\frac{C_p}{C_v}$	thermodynamisch (Gl. 4)	1,042	1,025	1,047	1,055	1,019	1,051	1,038
	nach (24) u. (25)	1,040	1,027	1,032	1,068	1,019	1,036	1,039

Soll nun den Überlegungen, die zu der Beziehung (22) geführt haben überhaupt irgendwelche allgemeinere Bedeutung zukommen, so wird sich aus dem, sorgfältig auf C_v korrigierten, Beobachtungsmaterial wenigstens eine Klasse von Stoffen hervorheben müssen, deren C_v-Verläufe durch Änderung des Temperaturmaßstabes mit einiger Näherung zur Deckung gebracht werden können (s. o. § 7). Und wenn das zutrifft, so sind wir wohl berechtigt, das thermische Verhalten dieser Körperklasse als besonders einfach anzusehen und bei unseren weiteren theoretischen Erörterungen zum Führer zu nehmen. In Tab. II und Fig. 6 habe ich alle jene Körper zusammengestellt, welche bis jetzt ein derart einfaches Verhalten gezeigt haben. Die gemessenen (auf C_v reduzierten) Atomwärmenwerte sind auf einer Kurve gesammelt (II i. d. Fig.), nur mußte dieselbe, um das ungeheure Beobachtungsmaterial aufnehmen zu können, in ihrem ersten Teil noch

Tabelle II (hiezu Fig. 6).

Körper, deren C_v-Verlauf in dem in Spalte 5 angegebenen Temperaturbereich bei passender Wahl von Θ (Spalte 7) durch Formel (37^2) dargestellt wird.

1			2	3	4	5	6	7	8
Zeichen in Fig. 6			Stoff	Formel	Kristallsystem	Temperaturintervall	$C_p - C_v \times 10^5$	Θ	Neuere Literaturstellen:
I	II	III							
×	×		Blei	*Pb*	regul.	14—573	$3{,}2\, C_p^2 T$	88	Nernst 1, 2, 3, 4; Eucken und Schwers, K.-Onnes 2, Griffiths, Koref, Magnus, Schübel
		○	Thallium	*Tl*	?	23—301	$2{,}7\, C_p^2 T$	96	Nernst 7, Ewald, Koref, Russell
		□	Quecksilber	*Hg*	regul.	31—232	$21 \cdot T^{3/2}$	97	Pollitzer, Koref, K.-Onnes 1
		×	Jod	*J*	rhombisch	22—298	$10 \cdot T^{3/2}$	106	Nernst 1, 3; Günther, Koref
		+	Kadmium	*Cd*	regul.	50—380	$3{,}2\, C_p^2 T$	168	Griffiths, Ewald
		△	Natrium	*Na*	regul. / quadr.	50—240[1])	$3{,}8\, C_p^2 T$	172	Griffiths, Koref
		●	Bromkali	*KBr*	regul.	79—417	$2{,}7\, C_p^2 T$	177	Nernst 1, 2; Koref, Magnus
	●		Silber	*Ag*	regul.	35—873	$2{,}5\, C_p^2 T$	215	Nernst 1, 2, 3, 6; Griffiths, Koref, Magnus, Rolla, Schübel
○			Kalzium	*Ca*	?	22—62[2])	0	226	Günther
▽	▽		Sylvin	*KCl*	regul.	23—550	$2{,}0\, C_p^2 T$	230	Nernst 1, 2, 4, 6; Koref, Magnus, Russell
□	□		Zink	*Zn*	rhomb. / hexag.	33—673	$2{,}6\, C_p^2 T$	235	Nernst 1, 4; Griffiths, Pollitzer, Magnus, Schübel, Lindemann
◇	◇		Steinsalz	*NaCl*	regul.	25—664	$2{,}7\, C_p^2 T$	281	Nernst 1, 2, 6; Koref, Magnus, Russel
△	△		Kupfer	*Cu*	regul.	14—773[1])	$1{,}3\, C_p^2 T$	315	Nernst 1, 2, 4, 6; K.-Onnes 2, 3; Griffiths, Rolla, Koref, Magnus, Schübel, Lindemann
	+		Aluminium	*Al*	regul.	19—773	$2{,}2\, C_p^2 T$	398	Nernst 1, 2, 4, 6, 7; Griffiths, Koref, Magnus, Schübel
○			Eisen	*Fe*	regul.	32—95[1])	0	453	Günther, Griffiths, Ewald, Schübel
○	○		Flußspat	CaF_2	regul.	17—328	$A' C_p^2 T^3$)	474	Eucken u. Schwers, Koref
+			Pyrit	FeS_2	regul.	22—57[1])	$A' C_p^2 T^3$)	645	Eucken u. Schwers, Ewald
▼	◀		Diamant	*C*	regul.	30—1169	$0{,}6\, C_p^2 T$	1860	Nernst 1, 2, 5, 6; Ewald, Koref, Dewar, Weber

1) *Na*, *Cu*, *Fe*, FeS_2 weichen von da an nach oben von der Kurve ab.
2) *Ca* bei höherer Temperatur fraglich.
3) Von den Verfassern thermodynamisch berechnet.

Literatur zu Tabelle II: J. Dewar, Proc. Roy. Soc. (A) **76**, 325, 1905. — A. Eucken u. F. Schwers, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 578, 1913. — R. Ewald, Ann. d. Phys. (4) **44**, 1213, 1914. — E. H. Griffiths u. Ezer Griffiths, Proc. Roy. Soc. (A) **88**, 549, 1913; **90**, 557, 1914. — P. Günther, Diss. Berlin 1916; Ann. d. Phys. (4) **51**, 828, 1916. — Koref, Berl. Ber. 1910, S. 247; Ann. d. Phys. **36**, 49, 1911. — Lindemann, Berl. Ber. 1910, S. 250. — A. Magnus, Ann. d. Phys. (4) **31**, 597, 1910; diese Zeitschr. **14**, 5, 1913. — Nernst 1: Ann. d. Phys. (4) **36**, 395, 1911; Nernst 2: N. u. Lindemann, Zeitschr. f. Elektrochem. **17**, 817, 1911; Nernst 3: Berl. Ber. 1910, S. 262; Nernst 4: Berl. Ber. 1911, S. 306; Nernst 5: N. u. Lindemann, Berl. Ber. 1911, S. 494; Nernst 6: N. u. Lindemann, Berl. Ber. 1912, S. 1160; Nernst 7: N. u. Schwers, Berl. Ber. 1914, S. 355. — K.-Onnes 1: K.-O. u. Holst, Amst. Proc. **17**, 760, 1914 [Leiden Comm. 142c]; K.-Onnes 2: W. H Keesom u. K.-O., Amst. Proc. **17**, 894, 1915 [Leiden Comm. 143]; K.-Onnes 3: W. H. Keesom u. K.-O., Amst. Proc. **18**, 484, 1916 [Leiden Comm. 147]. — F. Pollitzer, Zeitschr. f. Elektrochem. **17**, 5, 1911; **19**, 515, 1913; Ders., Die Berechnung chemischer Affinitäten nach dem N.schen Wärmetheorem S. 150 [Stuttgart 1912]. — L. Rolla, Cim. (6) **9**, 215, 1915. — A. S. Russel, diese Zeitschr. **13**, 59, 1912. — P. Schübel, Zeitschr. f. anorg. Chem. **87**, 81, 1914. — H. F. Weber, Pogg. Ann. **154**, 367 u. 553, 1875.

mehrmals parallel nach rechts (I), in ihrem oberen Teil noch einmal parallel aufwärts verschoben (III) zur Darstellung gebracht werden. Abszisse ist die durch einen gewissen, für jeden Körper passend gewählten Temperaturwert Θ dividierte absolute Temperatur; Θ und einige andere Angaben über die einzelnen Stoffe, das in Betracht gezogene Temperaturintervall und die Literatur ist aus der Tabelle II und den Anmerkungen zu entnehmen.

Die weitgehende allgemeine Übereinstimmung mit Einsteins Formel (22), zeigt ein Blick auf die frühere Fig. 2 (Kurve (3)), auf welcher die jetzt betrachtete „empirische" Kurve als Kurve (1) zur Darstellung gebracht ist. Ja beim Anblick der Fig. 2 könnte man vermuten, daß (1) und (3) durch eine weitere Änderung des Temperaturmaßstabes vollkommen ineinander übergeführt werden könnten; mit anderen Worten: daß die gewählten Θ-Werte noch keineswegs die zur Anpassung an die Einsteinsche Funktion günstigsten sind. Letzteres ist natür-

Tabelle III.
(C_v des Kupfers.)

Abs. Temp. T	beob. von K.-Onnes C_v	berechnet n. (22) m. $\Theta = 221{,}23$		berechnet n. (27²) mit				berechnet n. (37²) $\Theta = 318{,}25$	
				$\Theta = 334{,}8$		$\Theta = 321$			
		C_v	Diff.	C_v	Diff.	C_v	Diff.	C_v	Diff.
14,51	0,0396	0,0003	−0,0393	0,004	−0,036	0,006	−0,034	0,044	+0,004
15,59₅	0,0506	0,0008	−0,0498	0,008	−0,043	0,011	−0,040	0,052	+0,001
20,19₅	0,1155	0,0125	−0,1030	0,053	−0,062	0,066	−0,050	0,118	+0,002
29,73	0,377	0,194	−0,183	0,342	−0,035	0,403	+0,026	0,368	−0,009
40,22	0,870	0,741	−0,129	0,880	+0,100	0,99	+0,12	0,851	−0,019
50,04	1,434	(1,434)	(0,000)	(1,43)	(0,00)	1,54	+0,11	1,40	−0,03
60,33	2,08	2,13	+0,05	1,98	−0,10	2,11	+0,03	2,01	−0,07
69,66	2,58	2,73	+0,15	2,45	+0,13	2,59	+0,01	2,53	−0,05
80,32	3,04	3,05	+0,01	2,99	−0,05	3,06	+0,02	3,05	+0,01
89,38	3,42	3,66	+0,24	3,29	−0,13	3,43	+0,01	3,40	−0,02
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

lich unzweifelhaft richtig (das Motiv für die Θ-Wahl wird später klar werden) — ersteres nicht. Die Einsteinsche Funktion vermag keinem einzigen bis zu genügend kleinen Werten verfolgten Verlauf quantitativ gerecht zu werden. Sie liefert bei sehr tiefer Temperatur, wo sie sich nach (21)—(23) wie

$$3ARx^2e^{-x} = 3AR\frac{\Theta^2}{T^2}e^{-\frac{\Theta}{T}} \tag{26}$$

verhält, durchwegs viel zu kleine C_v-Werte. Als numerisches Beispiel führen wir etwa an Messungen von Kamerlingh-Onnes[1]) an Kupfer zwischen 14 und 90⁰ K (Tab. III). Hier liefert $\Theta = 221{,}23$ in der Mitte des Intervalls (bei 50⁰) exakten Anschluß, bei höherer Temperatur wachsende positive, bei tieferer wachsende negative Abweichungen, welch letztere fast 100 Proz. des gemessenen Wertes erreichen! Die Kurven schneiden sich unweigerlich; eine Änderung des Temperaturmaßstabes (d. h. von Θ) könnte nur den Schnittpunkt verschieben.

Daß es sich hier nicht um einen Einzelfall, sondern um eine typische Erscheinung handelt, erkennt man leicht aus Fig. 6. Während in dem oberen Teil der Kurve Spuren eines doch mehr individuellen Verhaltens der einzelnen Stoffe durch größere Abweichungen von der gemeinsamen C_v-Kurve sich kundgeben, ist die Zusammenlegung für kleine Werte von T/Θ vollkommen gelungen: Das Gesetz der übereinstimmenden Zustände gilt gerade hier mit großer Schärfe. Der Theorie erwächst die Aufgabe, dem empirisch festgestellten, vom Einsteinschen erkennbar abweichenden Funktionsverlauf durch Änderung der Annahmen Rechnung zu tragen.

1) Siehe Literatur zu Tabelle II.

Grund des Versagens von (22). Die Nernst-Lindemannsche Formel.

§ 10. Geht man die Überlegungen des § 7, die doch in der Hauptsache zu so befriedigenden Ergebnissen geführt haben, noch einmal durch, so findet man[1]) leicht den Punkt, wo eine durchaus provisorische Annahme den allzu schroffen Abfall der Endformel (22) bei tiefer Temperatur verschuldet haben dürfte. — Auch wenn die Schwingungsweiten der Atome klein genug sind, um ihre Wechselwirkungskräfte als „quasielastisch", d. h. als lineare Funktionen ihrer Verrückungen zu behandeln, so wird doch jedes Atom nicht nach einem im Raum festen Punkt, sondern nach einem Punkt hingezogen, der von der Lage der Nachbaratome abhängt und Ortsveränderungen von derselben Größenordnung erfährt, wie das Atom selbst. Die Bewegung wird also mindestens von dem komplizierten Charakter sein etwa wie beim „Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt" und auch nicht annähernd mit einer bestimmten Frequenz ν stattfinden; dem wird man bei der Übertragung der für den einfach harmonischen Oszillator abgeleiteten Formel (14) Rechnung tragen müssen.

Nun würde tatsächlich der schroffe Abfall bei den tiefsten Temperaturen gemildert, wenn man dem Festkörper etwa den Energieinhalt eines Gemischs von Oszillatoren verschiedener Frequenzen zuschriebe. Denn für die verschiedenen, durch einheitliches ν gekennzeichneten Gruppen würde der Abfall bei verschiedenen Temperaturen stattfinden. Je tiefer die Temperatur sinkt, um so ausschließlicher würden der Energieinhalt und die Atomwärme durch die, wenn auch prozentuell nur schwach vertretenen Gruppen mit niedrigster Frequenz bestimmt

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) 35, 679, 1911.



werden und darum höher bleiben, als die „monochromatischen“ Formeln (21) und (22) vorhersehen lassen.

Wie aber soll man, ohne die krasseste Willkür, die prozentische Zusammensetzung des Oszillatorengemisches „dosieren“? Hat die ganze Vorstellung überhaupt noch Hand und Fuß, da der Bewegungszustand der einzelnen Atome zwar ein recht komplizierter, aber doch wohl im Mittel für alle der nämliche ist[1])?

Da ist zunächst von Interesse eine durch Einfachheit und Erfolg bestechende Dosierung, die Nernst und Lindemann[2]) vorgeschlagen haben. Denkt man sich die Hälfte der Atome mit einer Frequenz ν, die andere Hälfte mit der halben Frequenz schwingen[3]), so führt das auf

$$U = \frac{3RT}{2}\left[\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x/2}{e^{x/2} - 1}\right]; \quad x = \frac{\Theta}{T} = \frac{h\nu}{kT}$$

$$C_v = \frac{3AR}{2}\left[\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{\frac{x^2}{4} e^{\frac{x}{2}}}{(e^{x/2} - 1)^2}\right]. \quad (27)$$

Die C_v-Kurve ist in Fig. 2 (2) gestrichelt. Sie deckt sich mit der Kurve (1), die uns als der Ausdruck der Beobachtungen für die ausgezeichnete Körperklasse gilt, in einem weiten Temperaturbereich fast völlig, nur in den Anfangsstücken (in Fig. 2 in zehnfacher Vergrößerung wiederholt) ist der Sachverhalt qualitativ der nämliche wie früher. Tab. III, 5.—8. Spalte, zeigt den vergeblichen Versuch, die Funktion (27) den früher erwähnten Kupfer-Messungen wirklich exakt anzuschmiegen. Man müßte also offenbar, um den Tatsachen voll gerecht zu werden, Schwingungszahlen in Betracht ziehen, die noch erheblicher unterhalb des „Gros“ der Atomschwingungszahlen liegen.

Das mechanische Spektrum. Näherung von Debye.

§ 11. Ungefähr gleichzeitig haben nun Debye[1]) einerseits, Born und v. Kármán[2]) anderseits folgende neue und ungemein plausible Maxime für die Übertragung der Oszillatorformel auf irgendein System, das „kleine Schwingungen“ ausführt, aufgestellt, die an die bekannte rechnerische Behandlung dieses Problems anknüpft.

Hat man die Differentialgleichungen der Bewegung des Systems zunächst einmal etwa in den $3N$ rechtwinkeligen Koordinaten ξ_1, ξ_2, $\cdots\xi_{3N}$[3]) der N Atome angesetzt, so führe man sogenannte Normalkoordinaten ein: $u_1, u_2, \cdots u_{3N}$, das sind solche, prinzipiell immer angebbare Linearfunktionen mit konstanten Koeffizienten von $\xi_1 \cdots \xi_{3N}$, die eine Trennung der Bewegungsgleichungen nach den Variablen bewirken:

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = -4\pi^2 \nu_i^2 u_i; \quad i = 1, 2, 3 \cdots 3N. \quad (28)^{6)}$$

Jeder von den $3N$ Normalkoordinaten ist dann der Energieinhalt (14) und die entsprechende Wärmekapazität und zwar mit

$$\nu = \nu_i \quad (29)$$

zuzuschreiben.

Die Lösung von (28) ist bekanntlich für jedes u_i der Sinus (oder Kosinus) von $2\pi\nu_i t$, mit willkürlicher Amplitude und Phase (Integrationskonstanten). Geht man auf die ξ_i zurück (durch Auflösung des linearen Gleichungssystems, das zur Transformation gedient hat), so erscheinen die ξ_i als Superposition von $3N$ Sinusschwingungen mit den Frequenzen ν_1, $\nu_2 \cdots \nu_{3N}$. Hat nur ein u_i eine von Null verschiedene Amplitude, so schwingen alle Atome unisono mit der Frequenz ν_i, jedes auf einer unveränderlichen (im allgemeinen elliptischen) Bahn. Das nennt man eine Normalschwingung oder Eigenschwingung des Systems.

1) Diese Behauptung bedarf allerdings vielleicht selbst für Elemente einer Einschränkung; s. u. § 20.
2) Nernst u. Lindemann, Berl. Ber. 1911, S. 494.
3) Die Autoren selbst deuteten die Formel ursprünglich in anderer, übrigens ebenso unzutreffender Weise.

1) P. Debye, Ann. d. Phys. (4) 39, 789, 1912. (Erste Mitt.: Arch. de Genève, März 1912.)
2) M. Born u. Th. v. Kármán, diese Zeitschr. 13, 297, 1912.
3) Allgemein: In solchen Koordinaten, in denen die Differentialgleichungen linear sind.
4) $\frac{du_i}{dt}$ wird in einem konservativen mechanischen System nicht auftreten; die mit $4\pi^2\nu_i^2$ bezeichneten Systemkonstanten müssen offenbar in der Tat positiv sein, wenn die Schwingungen stabil sind.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

H. Bechhold, Die Kolloide in Biologie und Medizin. 2. Auflage. XII und 527 S. mit 69 Abbildungen und 3 Tafeln. Dresden und Leipzig, Th. Steinkopff. 1919. Preis brosch. M. 27.—, geb. M. 31.—

Daß die Erforschung der Welt des Organischen auf Grundlage der exakten Wissenschaften in den letzten Jahrzehnten hervorragend fortgeschritten ist, wird schlagend erwiesen durch den Inhalt, Umfang und buchhändlerischen Erfolg, welchen drei Werke deutscher Autoren zu verzeichnen haben: des zu früh dahingeschiedenen Otto Fischer „Medizinische Physik“ (besprochen diese Zeitschr. 15, 816, 1914) erschien



neulich in neuer Auflage als unveränderter Abdruck, R. Hoebers „Physikalische Chemie der Zelle und der Gewebe" ist in der 4. Auflage 1914 vom anspruchslosen Bändchen zum umfangreichen Lehrbuch angewachsen, und das vorliegende, 1912 zuerst erschienene Buch erscheint jetzt in zweiter, schon vor Kriegsausbruch vorbereitet gewesener Auflage mit ganz bedeutend bereichertem Inhalt. Es soll einen ganz allgemeinen Überblick geben über die Kolloidforschung, ihre Probleme, Methoden und derzeitigen Ergebnisse auf demjenigen Gebiete, auf dem sie berufen sein wird, tiefer in die wesentlichen Vorgänge hineinzuleuchten, als es der reinen Physik der von Fischer behandelten Teilgebiete, der deskriptiven und analytischen Biochemie und selbst der physikalischen Chemie der Kristalloide gegeben sein kann. Wie der Verfasser aber selbst betont, kann jetzt nur eine Sammlung von Bruchstücken gegeben werden, zwischen denen der vortreffliche Geist der Darstellung und Scharfblick für die Wahrscheinlichkeit noch nicht erforschter Zusammenhänge vorläufig vermittelt. Dieser Scharfblick und die langjährige Erfahrung hat ihn bei der Sichtung des Materials neuer Veröffentlichungen und bei der Beurteilung streitiger Deutungen glücklich geleitet. Schon die einführenden Abschnitte über die allgemeinen Eigenschaften der Kolloide sind durch Klarheit und Verständlichkeit auch für den weiteren Kreis der Interessenten des Buches ausgezeichnet. Bei der Besprechung der Methoden wird z. T. auf technische Einzelheiten genauer eingegangen, z. B. bei der Ultrafiltration; indessen kann wohl über den Nutzen gestritten werden, da der Raum den Grad der Ausführlichkeit verbot, daß man wirklich danach arbeiten könnte. Der zweite Teil behandelt die biologisch wichtigen Kolloide, besonders die Eiweißkörper, im Anschluß daran auch ihre zukunftswichtige Rolle in der Theorie der Herstellung der Nahrungs- und Genußmittel, ferner die Ferment- und die Immunitätslehre vom Kolloidgesichtspunkt aus, beides etwas kurz. Der dritte Teil, vom Organismus als kolloidalem System, behandelt die Bedeutung der Kolloide im organischen Stoff-, Kraft- und Formwechsel und in einzelnen physiologischen Funktionen. Hier tritt die persönliche Überzeugung des Verfassers mehrfach, unter Beschränkung auf kurze Andeutung abweichender Vorstellungen, stark hervor: so bei der Betonung der Quellung und Entquellung als Grundlage organischer Beugungsvorgänge (gegenüber der Heranziehung osmotischer und Oberflächenkräfte), und bei der Rolle der Filtration bzw. Ultrafiltration für die Funktion der Niere.

Praktisch ganz außerordentlich wichtige Anwendungsgebiete der Kolloidforschung sind in einem vierten Teil zusammengestellt, so die Bedeutung der Kolloideigenschaften für Arznei- und Giftwirkung, insbesondere auch Theorie der Desinfektion, und die Bedeutung für die Vorbereitung und Färbung mikroskopischer Präparate. Hier, wie sonst, hat der Verfasser selbst hervorragendsten Anteil an der Forschung, und er hat, wie an anderen Stellen des Werkes, manches noch unveröffentlichte Ergebnis hineingeflochten.

Dem Nichtbiologen wird dieses ausgezeichnete Werk sicher nicht weniger Anregung bieten als dem Biologen und Mediziner, dem Kolloidforscher wegen der Wichtigkeit der Probleme, dem Physiker und Chemiker zur Orientierung hinsichtlich der überragenden Bedeutung, die der Phasendispersion im molekularen Mechanismus des Lebendigen zukommt.

H. Boruttau.

Personalien.

Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, er Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Wien Dr. Robert Strebinger für analytische Chemie.

Ernannt: Der Dozent an der Technischen Hochschule Wien Dr. Richard Suppantschitsch und der ord. Prof. an der Universität Czernowitz Dr. Josef Plemelj zu ord. Professoren der Mathematik an der Universität Laibach, Forsyth J. Wilson zum Professor für anorganische und analytische Chemie am Royal Technical College in Glasgow, der a. o. Professor für pharmazeutische Chemie an der Universität Münster Geh. Regierungsrat Dr. Georg Kassner zum ord. Professor ebenda, der a. o. Honorarprofessor für angewandte Chemie in Industrie, Handel und Gewerbe an der Universität Frankfurt Dr. Heinrich Becker zum ord. Honorarprofessor ebenda, Dr. Harry Siedentopf von der Firma Carl Zeiß in Jena zum a. o. Professor für Mikroskopie an der Universität Jena.

Berufen: Der a. o. Professor an der Universität Tübingen Dr. Robert König zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Rostock, der Privatdozent an der Universität Berlin Professor Dr. Leonor Michaelis zum ord. Professor der physiologischen Chemie an der Universität Lund.

Verliehen: Dem Privatdozenten der Physik an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Richard Schachenmeier der Titel Professor.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und H. Th. Simon



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 50 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 55 Mark, im Ausland 62 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstraße 2.

No. 20. 15. Oktober 1919. No. 552. 20. Jahrgang.

Mit einer Beilage vom Verlag Gebrüder Borntraeger in Berlin betreffend:
Niggli, Geometrische Kristallographie des Diskontinuums.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen, B. = Besprechung.)

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 20. 15. Oktober 1919. 20. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 22 am 30. Oktober 1919.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Theorie der Gravitation und der Elektrizität von Hermann Weyl.

Von Wolfgang Pauli jun.

Im Sommer 1918 wurde von H. Weyl eine Arbeit veröffentlicht[1]), die einen Weiterbau der allgemeinen Relativitätstheorie auf Grund einer Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie von großer prinzipieller Tragweite enthält. So wie sich die nichteuklidische Geometrie von der euklidischen durch die Abhängigkeit der Richtungsübertragung vom Zwischenwege unterscheidet, so unterscheidet sich die allgemeine Geometrie Weyls von der Riemannschen durch die entsprechende Abhängigkeit der Längenübertragung. Physikalisch bedeutet das die Abhängigkeit der Länge eines Maßstabes und der Frequenz eines periodischen Vorganges (einer Uhr) von seiner Vorgeschichte. Das hat zur Folge, daß nur die Verhältnisse der g_{ik} zueinander durch Messungen ermittelbar sind. Hat man aber die Absolutwerte der g_{ik} in jedem Punkte willkürlich festgesetzt, so ist die Länge eines (kleinen) Maßstabes in einem Punkt P durch $g_{ik}\xi^i\xi^k$ gegeben, wenn ξ^i die (unendlich kleinen) Koordinatendifferenzen seiner Enden sind. Verschieben wir einen Maßstab vom Punkt $P(x_i)$ zum Punkt $P'(x_i+dx_i)$, so wird sein ursprüngliches Längenquadrat ds^2 in $ds^2(1+d\varphi)$ übergehen. Unter Voraussetzung sehr plausibler Axiome wird a. a. O. gezeigt, daß $d\varphi$ eine Linearform der Verschiebungskomponenten ist:

$$d\varphi=\varphi_i\,dx_i.$$

Hätte man für den Fundamentaltensor statt g_{ik} das ebenso berechtigte Wertesystem $\bar g_{ik}=\lambda g_{ik}$ gewählt, so hätte man statt φ_i

$$\bar\varphi_i=\varphi_i+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}$$

gefunden. Wir sehen also: Die Maßverhältnisse einer gegebenen metrischen Mannigfaltigkeit werden durch das Feld des metrischen Fundamentaltensors g_{ik} und des Maßstabvektors φ_i vollständig beschrieben und zwei derartigen Feldern, welche durch eine Transformation von der Form

$$\bar g_{ik}=\lambda g_{ik},\quad \bar\varphi_i=\varphi_i+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i} \qquad (\lambda)$$

auseinander hervorgehen, entspricht dieselbe Geometrie der Welt. Wir müssen deshalb postulieren, daß die Naturgesetze nicht nur gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen, sondern auch gegenüber den Transformationen (λ) kovariant sein sollen. Dementsprechend muß auch der Tensorbegriff modifiziert werden: Von den Tensorkomponenten ist nicht nur zu verlangen, daß sie sich bei Koordinatentransformationen in bekannter Weise verhalten, sondern auch, daß sie sich bei der Transformation (λ) bloß mit einer Potenz von λ multiplizieren; der Exponent e dieser Potenz heißt das Gewicht des Tensors. Aus φ_i erhält man mittels der Operation Rot einen Tensor

$$F_{ik}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}-\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}$$

vom Gewicht Null, der also eine objektive, von jeder Konvention unabhängige Bedeutung hat und (prinzipiell) durch rein geometrische Messungen gefunden werden kann. Das gibt die Möglichkeit, den Maßstabvektor φ_i mit dem elektromagnetischen Viererpotential und demgemäß F_{ik} mit der elektromagnetischen Feldstärke zu identifizieren; das erste System der Maxwellschen Gleichungen folgt dann unmittelbar aus der Definition von F_{ik}. Dies sind, kurz skizziert, die Grundgedanken der

1) Gravitation und Elektrizität, Berl. Ber. 1918, S. 465.

Theorie Weyls. Während sie aber nach ihrer geometrischen und ihrer formalen Seite hin namentlich in der zweiten Arbeit ihres Schöpfers[1]) ziemlich vollständig ausgebaut ist, liegen ihre physikalischen Konsequenzen noch sehr im Dunkeln[2]). Über diese ist nicht viel mehr bekannt, als daß die Naturgesetze sich aus einem Wirkungsprinzip

$$\delta \int W\, d\omega = 0$$

herleiten lassen müssen und daß dann zwischen ihnen die notwendigen fünf Identitäten tatsächlich bestehen[3]). Der Verfasser hat es sich deshalb in dieser Arbeit zur Aufgabe gemacht, die Theorie von Weyl in dieser Richtung genauer zu untersuchen.

Wir stellen zunächst die für die eigentliche Untersuchung nötigen Hilfsformeln zusammen (§ 1), hierauf diskutieren wir die naheliegendsten Ansätze für die Wirkungsfunktion und die unmittelbaren Folgerungen aus den elektromagnetischen Grundgleichungen (§ 2). Sodann werden die Feldgleichungen der Gravitation ermittelt (§ 3) und schließlich behandeln wir das Elektronproblem für eine spezielle Wirkungsfunktion (§ 4).

§ 1. Mathematische Hilfsbetrachtungen.

Um den Gang der Entwicklungen später nicht zu unterbrechen, schicken wir einige mathematische Hilfssätze und Hilfsformeln voraus. Dabei gehen wir aus von der bekannten[4]) Relation

$$\Gamma^r_{ik} = \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} - \tfrac{1}{2}(\delta^r_i \varphi_k + \delta^r_k \varphi_i - g_{ik}\varphi^r), \quad (1)$$

aus der durch Verjüngung noch folgt

$$\Gamma^r_{ir} = \begin{Bmatrix} i\,r \\ r \end{Bmatrix} - 2\varphi_i. \quad (1a)$$

In dem Umstand, daß in der Theorie von Weyl überall statt der Christoffelschen Klammerausdrücke $\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}$ die Größen Γ^r_{ik} auftreten, welche auch die φ_i enthalten, kommt die innige Verknüpfung der Gravitation mit der Elektrizität zum Ausdruck, die eine Folge der Kovarianz aller Tensoren gegenüber der Substitution (λ) (Seite 457) ist. Der Krümmungstensor R_{iklm} ist definiert durch:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial}{\partial x_m}\Gamma^i_{kl} - \frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^i_{km} + \Gamma^i_{rm}\Gamma^r_{kl} - \\ - \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{km}\,{}^{1}). \quad (2)$$

Er zerfällt in den Tensor der „Richtungskrümmung" $\overline{R}_{iklm}$ und den Tensor der „Längenkrümmung" $-\frac{1}{2} g_{km} F_{lm}$:

$$R^i_{klm} = \overline{R}^i_{klm} - \tfrac{1}{2}\delta^i_k F_{lm}\,{}^{2})$$
$$\left(F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right). \quad (3)$$

Ordnen wir jedem Größensystem a_{ik} durch die Beziehung

$$\tilde{a}_{iklm} = \tfrac{1}{2}(g_{il}a_{km} + g_{km}a_{il} - \\ - g_{im}a_{kl} - g_{kl}a_{im}) \quad (4)$$

das Größensystem $\tilde{a}_{iklm}$ zu, so ist[3])

$$\overline{R}_{iklm} = R^*_{iklm} - \tilde{\Phi}_{iklm} - \tfrac{1}{2}\tilde{\varphi}_{iklm}, \quad (5)$$

wenn man setzt

$$\Phi_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\varphi_r \quad (6)$$

$$\varphi_{ik} = \varphi_i\varphi_k - \tfrac{1}{2} g_{ik}(\varphi_r\varphi^r) \quad (7)$$

und R^*_{iklm} den Riemann-Christoffelschen Tensor bedeutet. In vielen Fällen ist es jedoch zweckmäßig, den Krümmungstensor in anderer Weise zu zerlegen:

$$R_{iklm} = \hat{R}_{iklm} - \tfrac{1}{2}\tilde{F}_{iklm} - \tfrac{1}{2} g_{ik} F_{lm}, \\ (\overline{R}_{iklm} = \hat{R}_{iklm} - \tfrac{1}{2}\tilde{F}_{iklm}), \quad (8)$$

weil $\hat{R}_{iklm}$ zum Unterschied von R_{iklm} und $\overline{R}_{iklm}$ ganz dieselben Symmetrieverhältnisse aufweist wie R^*_{iklm}. Man erhält nämlich den Ausdruck für $\hat{R}_{iklm}$, indem man in (5) Φ_{ik} durch das in i und k symmetrische

$$\hat{\Phi}_{ik} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right) - \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\varphi_r \quad (9)$$

ersetzt, und es ist

$$\Phi_{ik} = \hat{\Phi}_{ik} + \tfrac{1}{2}F_{ik}. \quad (9a)$$

Aus (4) folgt allgemein

$$\tilde{a}_{km} = g^{il}\tilde{a}_{iklm} = g^{il}\tilde{a}_{kiml} = a_{km} + \\ + \tfrac{1}{2} g_{km}\, a \quad (a = g^{il}a_{il}) \quad (10)$$

$$\tilde{a} = g^{km}\tilde{a}_{km} = 3a \quad (11)$$

$$\tilde{a}_{iklm}\tilde{a}^{iklm} = 2\tilde{a}^{ik}a_{ik} = 2a^{ik}a_{ik} + a^2. \quad (12)$$

1) Reine Infinitesimalgeometrie, Zeitschr. f. Math. **2**, 384, 1918. Die beiden genannten Arbeiten werden im Folgenden als I und II, das Buch Raum-Zeit-Materie, Berlin, Springer 1918, desselben Autors als R.Z.M. zitiert.

2) Herr Prof. Weyl hatte die Freundlichkeit mir mitzuteilen, daß er bereits seit längerer Zeit an die Ann. d. Phys. eine Arbeit eingesendet habe, welche sich ebenfalls mit den physikalischen Konsequenzen seiner Theorie beschäftigt und demnächst erscheinen wird. (Anm. bei der Korrektur. Sie ist inzwischen erschienen: Ann. d. Phys. **59**, 1919, S. 101.)

3) Näheres darüber im § 2.

4) II, S. 400, Gl. (11). Bezüglich der Vorzeichen ist für hier und das Folgende zu bemerken, daß φ_i in II definitionsgemäß das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie in I. Wir definieren φ so wie es in I geschehen ist.

1) II, S. 394, Gl. (5). Auch der Krümmungstensor hat dort definitionsgemäß das entgegengesetzte Vorzeichen wie der hier verwendete. Dieser hat den Vorzug, daß er bei Verschwinden der φ_i ohne Vorzeichenänderung in den gewöhnlichen Riemann-Christoffelschen übergeht. Dieser Unterschied im Vorzeichen ist auch für die folgenden Relationen von Bedeutung.

2) II, S. 403, Gl. (15).

3) II, S. 404.

Ferner ist

$$\Phi_i^k = \frac{\partial \varphi^k}{\partial x_i} + \left\{ \begin{matrix} i\,r \\ k \end{matrix} \right\} \varphi^r \qquad (6a)$$

$$\Phi = \Phi_i^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\,\varphi^i}{\partial x_i} \qquad (6b)$$

$$\varphi = g^{ik}\varphi_{ik} = -(\varphi_r \varphi^r), \qquad (7a)$$

infolgedessen ist

$$\overline{R}^r_{irk} = \overline{R}_{ik} = R^*_{ik} - \Phi_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik}\Phi - - \tfrac{1}{2}\varphi_i\varphi_k + \tfrac{1}{2} g_{ik}(\varphi_r\varphi^r)^{1)} \qquad (13)$$

$$\hat{R}^r_{irk} = \hat{R}_{ik} = R^*_{ik} - \hat{\Phi}_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik}\Phi^{2)} - - \tfrac{1}{2}\varphi_i\varphi_k + \tfrac{1}{2} g_{ik}(\varphi_r\varphi^r), \qquad (14)$$

also zufolge (9a)

$$\overline{R}_{ik} = R_{ik} - \tfrac{1}{2} F_{ik}, \qquad (15)$$

was sich auch direkt aus (8) ergibt. Endlich folgt aus (3)

$$R_{ik} = \overline{R}_{ik} - \tfrac{1}{2} F_{ik} \qquad (16)$$

und

$$R_{ik} = \hat{R}_{ik} - F_{ik}. \qquad (16a)$$

Der Tensor $\hat{R}_{ik}$ ist symmetrisch, nicht aber $\overline{R}_{ik}$ und R_{ik}. Weiter ergibt sich nach (11)

$$g^{ik}R_{ik} = g^{ik}\overline{R}_{ik} = g^{ik}\hat{R}_{ik} = R = R^* - 3\Phi + \tfrac{3}{2}(\varphi_r\varphi^r)^{3)} \qquad (17)$$

und nach (8), (12), (15), (16) wegen

$$\hat{R}^{iklm}\overline{F}_{iklm} = \hat{R}^{iklm} g_{ik} F_{lm} = \overline{F}^{iklm} g_{ik} F_{lm} = = \hat{R}_{ik} F^{ik} = 0: \qquad (18)$$

$$R_{iklm}R^{iklm} = \hat{R}_{iklm}\hat{R}^{iklm} + \tfrac{3}{2} F_{ik}F^{ik} \qquad (19a)$$

$$\overline{R}_{iklm}\overline{R}^{iklm} = \hat{R}_{iklm}\hat{R}^{iklm} + \tfrac{1}{2} F_{ik}F^{ik} \qquad (19b)$$

$$R_{iklm}R^{iklm} = \overline{R}_{iklm}\overline{R}^{iklm} + F_{ik}F^{ik} \qquad (19c)$$

$$R_{ik}R^{ik} = \hat{R}_{ik}\hat{R}^{ik} + F_{ik}F^{ik} \qquad (20a)$$

$$\overline{R}_{ik}\overline{R}^{ik} = \hat{R}_{ik}\hat{R}^{ik} + \tfrac{1}{4} F_{ik}F^{ik} \qquad (20b)$$

$$R_{ik}R^{ik} = \overline{R}_{ik}\overline{R}^{ik} + \tfrac{3}{4} F_{ik}F^{ik}. \qquad (20c)$$

Wir wollen nunmehr unsere rein formalen Vorbetrachtungen mit der Beantwortung der Frage beenden, ob es in der Weylschen Tensoranalysis Identitäten gibt, welche zu den bekannten Identitäten

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_r} + g^{is}\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ k \end{matrix} \right\} + g^{sk}\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ i \end{matrix} \right\} = 0 \qquad (\alpha)$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,R^{*ik}}{\partial x_k} + \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ i \end{matrix} \right\} R^{*rs} = \tfrac{1}{2} g^{ir}\frac{\partial R^*}{\partial x_r} \qquad (\beta)$$

der gewöhnlichen Tensoranalysis analog sind. Für die spätere Anwendung empfiehlt es sich, in der ersten Identität

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,g^{ik}}{\partial x_r} - g^{ik}\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ s \end{matrix} \right\} \text{ statt } \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_r}$$

zu schreiben. Der nächste Schritt ist naturgemäß der, daß man überall statt der Klammerausdrücke die Γ einführt und den Wert der so modifizierten linken Seite von (α) mittels der Beziehungen (1), (1a) ausrechnet. Auf diese Weise erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,g^{ik}}{\partial x_r} + g^{is}\Gamma^k_{rs} + g^{ks}\Gamma^i_{rs} - - g^{ik}\Gamma^s_{rs} - g^{ik}\varphi_r = 0. \qquad (A)$$

Die linke Seite von (A) ist ein Tensor vom Gewicht -2; denn man überzeugt sich leicht davon, daß (A) gegenüber der Substitution

$$g_{ik} \,|\, \lambda g_{ik}, \quad \varphi_i \,|\, \varphi_i + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}{}^{1)} \qquad (\lambda)$$

sich konvariant verhält. Schwieriger ist die zweite Identität zu behandeln. Auch hier wird man zunächst

$$R^{*ik},\ R^*,\ \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ i \end{matrix} \right\}$$

durch

$$R^{ik},\ R,\ \Gamma^i_{rs}$$

ersetzen. Die linke Seite von (β) liefert dann unmittelbar einen Tensor, nicht so die rechte; doch kann man letztere mittels der Substitution (λ) durch Hinzufügung von $R\varphi_i$ unschwer zu einem Tensor ergänzen. Wir haben also

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}R^{ik}}{\partial x_R} + \Gamma^i_{rs}R^{rs}$$

und

$$\tfrac{1}{2}\left(g^{ir}\frac{\partial R}{\partial x_r} + R\varphi^i\right)$$

miteinander zu vergleichen. Man könnte nun beide Ausdrücke explizite berechnen. Dies wäre aber langwierig und mühsam. Hier führt ein Prinzip rasch zum Ziel, das wir auch später noch öfters anwenden werden. Sind beide Seiten einer Gleichung Tensoren derselben Art und ist die Gleichung in einem geodätischen Bezugssystem richtig, so besteht sie allgemein zu Recht. Wir unterscheiden hier mit Weyl[2]) zwischen Koordinatensystem und Bezugssystem. Ein geodätisches Bezugssystem ist ein solches, für das im Punkt P, den wir gerade ins Auge fassen, sowohl die ersten Ableitungen der g^{ik} als auch die φ_i (nicht aber deren Ableitungen) verschwinden. Die Anwendung dieses Prinzips auf unseren Fall lehrt nun, daß nicht die obengenannten Tensoren, sondern

---

1) II, S. 404.

2) Aus (9a) ergibt sich
$$g^{ik}\hat{\Phi}_{ik} = g^{ik}\Phi_{ik} = \Phi.$$

3) II, S. 404 und I, S. 477.

1) I, S. 470, Gl. (9).

2) II, S. 396.

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,\bar{R}^{ik}}{\partial x_k}+\Gamma^i_{rs}\bar{R}^{rs}=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(g^{ir}\frac{\partial R}{\partial x_r}+R\varphi^i\right) \quad \text{(B)}$$

einander gleich sind. Denn die von den φ_i freien Glieder stimmen zufolge (β) überein und die Glieder, welche bloß die Ableitungen der φ_i enthalten sind zufolge (13), (6a) und (17) auf beiden Seiten von (B) gleich

$$-\tfrac{3}{2}g^{ir}\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x_r \partial x_k},$$

also identisch, w. z. b. w.

Wenn diese formalen Entwicklungen einen etwas breiten Raum einnehmen, so möge das damit entschuldigt werden, daß bei einer so jungen Theorie wie der von Weyl eben erst die Werkzeuge geschmiedet werden müssen, mit denen die Lösung ihrer Probleme in Angriff genommen werden kann.

§ 2. Weltfunktion und Viererstrom.

Nach Weyl läßt sich alles physikalische Geschehen aus einem Wirkungsprinzip

$$\delta\int W\,d\omega=0 \quad \text{(I)}$$

ableiten. Die Wirkungsfunktion W ist eine Invariante vom Gewicht -2, so daß das Integral

$$\int W\,d\omega$$

eine absolute Invariante ist. Von fundamentaler Bedeutung sind dabei die fünf Identitäten[1]), die zwischen den Gleichungen bestehen, welche die Naturgesetze ausdrücken:

Ist für Variationen, die an der Grenzfläche des Integrationsgebietes verschwinden,

$$\delta\int W\,d\omega=\int(W_{ik}\,\delta g^{ik}+w_i\,\delta\varphi^i)\,d\omega, \quad (21)$$

so gilt für jede Invariante W der genannten Art

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,w^i}{\partial x_i}&=W_i^i\\ \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,W_k^i}{\partial x_i}-\Gamma^s_{kr}W^r_s&=\tfrac{1}{2}F_{ik}w^i,\end{aligned}\right| \quad \text{(II)}$$

während

$$W_{ik}=0, \quad w_i=0 \quad (22)$$

die aus der Wirkungsfunktion W sich ergebenden Naturgesetze darstellen. Wenn man nun physikalische Konsequenzen aus der Theorie von Weyl ziehen will, muß man vor allem die Frage beantworten, welche Invariante man als Wirkungsfunktion wählen soll. Damit man die Maxwellschen elektromagnetischen Gleichungen erhält, muß sie jedenfalls additiv den Term $\frac{1}{4}F_{ik}F^{ik}$ enthalten. Was aber ist der zweite Teil der Wirkungsfunktion? Weyl wählt die Invariante $R_{iklm}R^{iklm}$. Merkwürdigerweise resultieren aber daraus auch für den Fall der Abwesenheit eines elektromagnetischen Feldes nicht die Einsteinschen Gravitationsgleichungen. Man hat also in diesem Falle gar keine Sicherheit, ob die Perihelbewegung des Merkur richtig aus der Theorie folgt. Dies ist aber sicher der Fall, wenn man eine der Invarianten $R_{ik}R^{ik}$, R^2 (oder eine lineare Kombination beider) als Wirkungsfunktion wählt[1]). Denn man sieht sofort, daß dann (I) immer erfüllt ist, sobald $\varphi_i=0$ und $R^*_{ik}=0$ ist. (Freilich ist $R^*_{ik}=0$ nicht die einzige Lösung der Feldgleichungen bei Abwesenheit eines elektromagnetischen Feldes.) Wenn wir aus diesem Grunde auch geneigt sind, den beiden letztgenannten Invarianten vor der ersteren den Vorzug zu geben, wollen wir dennoch zunächst auch diese unseren Betrachtungen zugrunde legen. Wir haben also (abgesehen vom Term $\frac{1}{4}F_{ik}F^{ik}$) für die Weltfunktion folgende Möglichkeiten:

$$W=R_{iklm}R^{iklm},\ R_{ik}R^{ik},\ R^2 \text{ [2]}). \quad (23)$$

Natürlich ist auch irgendeine lineare Kombination dieser drei Ansätze denkbar. Man überzeugt sich übrigens leicht davon, daß jede Invariante $R_{iklm}R^{i'k'l'm'}$, wo $i'k'l'm'$ irgendeine bestimmte Permutation von $iklm$ bedeutet, infolge der schiefen und zyklischen Symmetrie von R_{iklm} sich linear durch die drei erwähnten und durch $F_{ik}F^{ik}$ ausdrücken läßt. So ist z. B.

$$\begin{aligned}R_{iklm}R^{ilmk}&=\tfrac{1}{2}R_{iklm}(R^{ilmk}-R^{imlk})\\&=\tfrac{1}{2}R_{iklm}(R^{ilmk}+R^{imkl})\\&=-\tfrac{1}{2}R_{iklm}R^{iklm}.\end{aligned}$$

Schreiben wir nun das Wirkungsprinzip in der Form

$$\delta\int(W+\tfrac{1}{4}F_{ik}F^{ik})\,d\omega=0 \quad (24)$$

und definieren W_{ik} und s_i durch

$$\delta\int W\,d\omega=\int(W_{ik}\,\delta g^{ik}+s_i\,\delta\varphi^i)\,d\omega, \quad (25)$$

so folgt aus (24):

$$s^i=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,F^{ik}}{\partial x_k} \quad (26)$$

$$W_{ik}+\tfrac{1}{2}S_{ik}=0. \quad (27)$$

Hierin bedeutet

$$S_{ik}=F_{ri}F_{sk}g^{rs}-\tfrac{1}{4}F_{rs}F^{rs}g_{ik} \quad (28)$$

den Maxwellschen Spannungstensor. (26) ist nichts anderes als das zweite System der Maxwellschen Gleichungen, s^i ist deshalb der Viererstrom. Zufolge von (25) ist also der

1) I, S. 475, Gl. (17), (18) und II, S. 408–410.

1) In der genannten, demnächst in den Ann. d. Phys. erscheinenden Arbeit werden auch diese Invarianten von Weyl diskutiert.

2) Es ist nicht möglich, aber, wie wir sehen werden, auch nicht nötig, hier noch eine kosmologische Konstante hinzuzufügen.

Viererstrom eine universelle Funktion der Feldkomponenten der Gravitation und der Elektrizität, und zwar ist diese unabhängig von den Maxwellschen Gleichungen. Zum zweitenmal[1]) scheint also die Möglichkeit vorhanden zu sein, die Existenz des Elektrons zu erklären und aus tieferen Gründen zu verstehen.

Wir gehen jetzt unter Zugrundelegung des allgemeinen Ansatzes

$$2\,W = c_1\,\overline{R}_{iklm}\,\overline{R}^{iklm} + c_2\,\overline{R}_{ik}\,\overline{R}^{ik} + c_3\,R^2 \quad (23a)$$

für die Weltfunktion zur expliziten Berechnung des Viererstromes über. Bezeichne δ_0 eine Variation, in der bloß φ_i variiert wird, die g_{ik} also unverändert bleiben, so wird zufolge (5), (13) und (17)

$$\begin{aligned}\delta_0 \int W\,d\omega = \int \Big\{ &- c_1\,\overline{R}^{iklm}\,\delta_0\,\tilde{\Phi}_{iklm} - \\ &- \tfrac{1}{2}\,c_1\,\overline{R}^{iklm}\,\delta_0\,\tilde{\varphi}_{iklm} - c_2\,R^{ik}\,\delta_0\,\Phi_{ik} - \\ &- \frac{c_2}{2}\,R\,\delta_0\,\Phi - c_2\,\hat{R}^{ir}\,\varphi_r\,\delta\varphi_i + c_2\,R\,\varphi^i\,\delta\varphi_i - \\ &- 3\,c_3\,R\,\delta_0\,\Phi + 3\,c_3\,R\,\varphi^i\,\delta\varphi_i \Big\}\,d\omega = \\ = \int \Big\{ &- (2\,c_1 + c_2)\,(\overline{R}^{ik}\,\delta_0\,\Phi_{ik} + \hat{R}^{ir}\,\varphi_r\,\delta\varphi_i) - \\ &- \left(\frac{c_2}{2} + 3\,c_3\right) R\,\delta_0\,\Phi + (c_1 + c_2 + 3\,c_3) \\ &R\,\varphi^i\,\delta\varphi_i \Big\}\,d\omega.\end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}-\int (\overline{R}^{ik}\,\delta_0\,\Phi_{ik} + \hat{R}^{ir}\,\varphi_r\,\delta\varphi_i)\,d\omega = \\ = \int \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial \sqrt{g}\,\overline{R}^{ik}}{\partial x_k} + \left\{ {r\,s \atop i} \right\} \hat{R}^{rs} - \hat{R}^{ir}\,\varphi_r\right) \cdot \\ \cdot\,\delta\varphi_i\,d\omega = \int \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial \sqrt{g}\,\overline{R}^{ik}}{\partial x_k} + \right. \\ \left. + \Gamma^i_{rs}\,\hat{R}^{rs} - \tfrac{1}{2}\,R\,\varphi^i\right) \delta\varphi_i\,d\omega\end{aligned}$$

und

$$-\int R\,\delta_0\,\Phi\,d\omega = \int g^{ir}\,\frac{\partial R}{\partial x_r}\,\delta\varphi_i\,d\omega,$$

also wird endlich mit Rücksicht auf (B):

$$\begin{aligned}\delta_0 \int W\,d\omega = \\ = \int (c_1 + c_2 + 3\,c_3) \left(g^{ir}\,\frac{\partial R}{\partial x_r} + R\,\varphi^i\right) \delta\varphi_i\,d\omega.\end{aligned}$$

Setzen wir noch

$$s^i = (c_1 + c_2 + 3\,c_3)\,\overline{s}^i, \quad (29)$$

so erhalten wir als Endresultat

$$\overline{s}^i = g^{ir}\,\frac{\partial R}{\partial x_r} + R\,\varphi^i, \quad \overline{s}_i = \frac{\partial R}{\partial x_i} + R\,\varphi_i{}^{1)}. \quad (30)$$

Aus diesen Ergebnissen lassen sich sehr wichtige Folgerungen für statische Felder ziehen. Hier sind alle Feldgrößen von der Zeit unabhängig und außerdem ist

$$\varphi_i = 0, \quad g_{i0} = 0\,^{2)}.$$

Durch diese Bedingungen ist der Maßstab eindeutig festgelegt. Denn ist $\overline{g}_{ik}$, $\overline{\varphi}_i$ ein zweites statisches Feld, daß aus dem ursprünglich gegebenen durch eine Substitution (λ) hervorgeht, so folgt zunächst aus

$$\overline{g}_{ik} = \lambda\,g_{ik},$$

daß λ von der Zeit unabhängig sein muß, und dann aus

$$\overline{\varphi}_i = \varphi_i + \frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$$

wegen

$$\varphi_i = \overline{\varphi}_i = 0,$$

daß

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = 0, \quad \lambda = \text{konst.}$$

ist. Aus (26) ergibt sich sofort, daß auch $s_i = 0$ und bloß s_0 im statischen Feld von null verschieden ist. Das ist aber nach (30) nur möglich, wenn

$$R = \text{konst.}\,^{1)} \quad (31)$$

ist. (31) stellt eine fundamentale Bedingung für ein statisches Feld dar. Sie gilt unabhängig davon, ob ein elektrisches Feld vorhanden ist oder nicht und ist nicht durch geeignete Wahl des Maßstabes erfüllbar, da ja dieser bereits festgelegt ist. Wenn irgendwo auf der Welt Materie, also auch eine elektrische Ladung vorhanden ist, so kann R nicht null sein, denn daraus würde nach (30) $s_0 = 0$ folgen. Man wird wohl erwartet haben, daß in hinreichend großer Entfernung von aller Materie die euklidische Geometrie gilt. Wir sehen aber, daß dies nicht der Fall ist; denn R verschwindet auch dort nicht, was nur dann einen physikalischen Sinn hat, wenn die Welt geschlossen ist. So werden wir hier auf die natürlichste

---

1) Der erste Versuch in dieser Richtung ist die Theorie von Mie. Die Theorie von Weyl unterscheidet sich von dieser außer durch viele andere Umstände dadurch, daß hier das Viererpotential keine absolute Bedeutung hat (Maßstabinvarianz!) und daß in dem Ausdruck für den Viererstrom nicht nur die g_{ik}, sondern auch deren erste und zweite Ableitungen eingehen, was im vollen Einklang steht mit der postulierten Union zwischen Gravitation und Elektrizität.

1) Für den speziellen Fall $c_2 = c_3 = 0$, sind die Beziehungen (30) und (31) schon in I, S. 477 angegeben, allerdings ohne Herleitung.

2) Wenn von statischen Feldern die Rede ist, sollen die Indizes immer nur die Ziffern 1, 2, 3 durchlaufen. Die Zeitkomponenten bezeichnen wir wie üblich mit dem Index 0. Zuweilen werden wir auch einfach φ statt φ_0 schreiben. Die Bedingung $\varphi_i = 0$ bedeutet, daß kein magnetisches, sondern nur ein elektrostatisches Feld vorhanden ist, während $s_i = 0$ bedeutet, daß die Stromstärke gleich null ist, also alle Ladungen ruhen.

Weise zu derselben Forderung gedrängt, die schon **Einstein** aus der Tatsache erschlossen hat, daß die Fixsterne nicht ins Unendliche auseinander fliehen, sondern einen endlichen Raum erfüllend im statistischen Gleichgewichtszustand verharren. Während aber die **Einstein**sche Gravitationstheorie, um das zu erklären, zu einer neuen Hypothese, dem kosmologischen λ-Glied, Zuflucht nehmen muß, ergibt sich hier dasselbe ganz ungezwungen und von selbst[1]).

Infolge von (30) und (31) wird die Ladungsdichte im statischen Feld einfach proportional zu φ, was immerhin sehr auffallend ist. Jedoch spricht das nicht gegen den zugrunde gelegten Ansatz für die Wirkungsfunktion. Infolge des jedenfalls sehr kleinen Proportionalitätsfaktors R wird nämlich s_0 nur dort merklich, wo das Potential sehr groß ist, das ist in unmittelbarer Umgebung des Zentrums, und hier nimmt auch das Potential viel rascher mit der Distanz vom Zentrum ab als $\frac{1}{r}$.

Von entscheidender Bedeutung für die Theorie von **Weyl** scheint mir aber der folgende Umstand zu sein: **Die Differentialgleichungen für das statische Feld sind symmetrisch in bezug auf positive und negative Elektrizität.** Mit anderen Worten: Ist φ, g_{ik}, g_{00} eine Lösung, so ist $-\varphi$, g_{ik}, g_{00} ebenfalls eine Lösung. Der Beweis dieser Behauptung gründet sich einfach auf den Umstand, daß die Feldgleichungen gegenüber der Koordinatentransformation $x_0' = -x_0$ kovariant sein müssen[2]) und daß in statischen Feldern dabei φ in $-\varphi$ übergeht, während g_{ik} und g_{00} unverändert bleiben. Der eben bewiesene Satz ist für jede invariante Weltfunktion richtig, z. B. auch dann, wenn sie keine **rationale** Funktion der Feldgrößen φ_i und g_{ik} ist, falls sie nur invariant ist gegenüber der Koordinatentransformation $x_0' = -x_0$. Solange also kein ganz neues Prinzip in die Theorie Eingang findet, kann man niemals hoffen, eine Erklärung für die große Verschiedenheit der Massen der Atomkerne und des Elektrons zu finden.

Auf das Problem des Elektrons soll in einem späteren Abschnitt näher eingegangen werden. Vorerst müssen wir noch die Feldgleichungen der Gravitation ermitteln.

§ 3. Die Feldgleichungen der Gravitation.

Zunächst können wir statt

$$\delta\int\left\{\tfrac{1}{2}(c_1\overline{R}_{iklm}\overline{R}^{iklm} + c_2\overline{R}_{ik}\overline{R}^{ik} + c_3 R^2) + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{4}F_{ik}F^{ik}\right\} d\omega = 0$$

mit Rücksicht auf (19b) und (20b) auch schreiben

$$\delta\int\left\{k_1\hat{R}_{iklm}\hat{R}^{iklm} + k_2\hat{R}_{ik}\hat{R}^{ik} + k_3\cdot\tfrac{1}{2}R^2 + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{4}F_{ik}F^{ik}\right\} d\omega = 0,$$

wenn

$$k_1 = \frac{c_1}{2\left(c_1 + \frac{c_2}{2} + 1\right)},\quad k_2 = \frac{c_2}{2\left(c_1 + \frac{c_2}{2} + 1\right)}$$
$$k_3 = \frac{c_3}{c_1 + \frac{c_2}{2} + 1} \tag{32}$$

gesetzt wird. In (24) ist also für W

$$W = k_1\hat{R}_{iklm}\hat{R}^{iklm} + k_2\hat{R}_{ik}\hat{R}^{ik} + k_3\cdot\tfrac{1}{2}R^2 \tag{33}$$

einzusetzen, die Gravitationsgleichungen sind durch (27) gegeben und wir haben W_{ik} zu berechnen. δ_1 bezeichne eine Variation, bei der nur die g_{ik}, nicht die φ_i variiert werden. Dann ist

$$\delta_1\int W\,d\omega = \int\left\{k_1(\hat{R}_i{}^{klm}\delta_1\hat{R}^i{}_{klm} + \right.$$
$$+ \hat{R}^i{}_{klm}\delta_1\hat{R}_i{}^{klm}) + k_2(\hat{R}^{ik}\delta_1\hat{R}_{ik} +$$
$$\left. + R_{ik}\delta_1\hat{R}^{ik}) + k_3 R\delta R - \tfrac{1}{2}Wg_{ik}\delta g^{ik}\right\} d\omega \tag{34}$$

$$\hat{R}^i{}_{klm}\delta_1\dot{R}_i{}^{klm} = \hat{R}^i{}_{klm}\delta_1(\hat{R}^{\varrho}_{\mu\sigma\nu}g_{\varrho i}g^{\mu k}g^{\sigma l}g^{\nu m}) =$$
$$= \dot{R}_{\varrho}^{\mu\sigma\nu}\delta_1\dot{R}^{\varrho}_{\mu\sigma\nu} + \dot{R}^i{}_{klm}(-g_{i\sigma}\hat{R}_{\varrho}^{klm}\delta g^{\varrho\sigma} +$$
$$+ \dot{R}_i^{\nu lm}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu k} + \hat{R}^{k\nu m}g_{\nu\sigma}\delta g^{\sigma l} +$$
$$+ \dot{R}_i^{kl\mu}g_{\mu\nu}\delta g^{\nu m}) = \dot{R}_{\varrho}^{\mu\sigma\nu}\delta_1(\dot{R}^{\varrho}_{\mu\sigma\nu} +$$
$$+ g_{i\sigma}(-\dot{R}^{\sigma}_{\varrho lm}\dot{R}_k^{\varrho lm} + \dot{R}^{\mu}_{klm}\dot{R}_{\mu}^{\sigma lm} + \dot{R}^{\nu}_{lkm}\dot{R}_{\nu}^{l\sigma m} +$$
$$+ \dot{R}^{\nu}_{mlk}\dot{R}_{\nu}^{ml\sigma})\delta g^{ik}.$$

Nun ist

$$g_{i\sigma}\dot{R}^{\sigma}_{\varrho lm}\dot{R}_k^{\varrho lm}\delta g^{ik} = R_{k\varrho lm}\dot{R}_i^{\varrho lm}\delta g^{ik} =$$
$$= g_{i\sigma}\dot{R}_{k\varrho lm}\dot{R}^{\sigma\varrho lm}\delta g^{ik},$$

also wird schließlich infolge der Symmetrieeigenschaften von R_{iklm}:

$$R^i_{klm}\delta_1\dot{R}_i^{klm} = \dot{R}_{\varrho}^{\mu\sigma\nu}\delta_1\dot{R}^{\varrho}_{\mu\sigma\nu} +$$
$$+ 2g_{i\varrho}\dot{R}^{\varrho\mu\sigma\nu}\dot{R}_{k\mu\sigma\nu}\delta g^{ik}$$

oder

---

1) Anmerkung bei der Korrektur. In einer kürzlich erschienenen Arbeit **Einsteins** („Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle?" Berl. Ber. 1919, S. 349) ist diese Schwierigkeit auf ähnliche Weise aus dem Wege geräumt wie in der Theorie von **Weyl**. Auch die dort aufgestellten Gravitationsgleichungen haben einen ähnlichen Bau wie diejenigen, welche sich auf Grund einer speziellen Wahl der Weltfunktion aus der Theorie von **Weyl** ergeben (§ 4). Nur fehlt bei **Einstein** der Ausdruck für den Viererstrom, so daß er im statischen Feld eine Gleichung zu wenig erhält.

2) Auf den Zusammenhang zwischen der Symmetrie der Feldgleichungen in bezug auf beide Elektrizitätsarten im statischen Fall mit der Umkehrbarkeit der Zeit wurde ich durch Herrn Prof. **Weyl** brieflich aufmerksam gemacht.

$$\hat{R}^i_{klm}\delta_1\hat{R}^{klm}_i = \hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho\,\delta_1\hat{R}^\varrho_{\mu\sigma\nu} + \\ + 2\,\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_i\,\hat{R}_{k\mu\sigma\nu}\,\delta g^{ik}$$

und ebenso erhält man

$$\hat{R}_{ik}\,\delta_1\,\hat{R}^{ik} = \hat{R}_{ik}\,\delta_1\,(g^{\mu i}g^{\nu k}\hat{R}_{\mu\nu}) = \\ = \hat{R}^{\mu\nu}\,\delta_1\,\hat{R}_{\mu\nu} + 2\hat{R}^r_i\hat{R}_{rk}\,\delta g_{ik},$$

so daß sich schließlich ergibt

$$\delta_1\int W\,d\omega = \int\{k_1\,[2\,\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho\delta_1\hat{R}^\varrho_{\mu\sigma\nu} + \\ + (2\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_i\,\hat{R}_{k\mu\sigma\nu} - \tfrac{1}{2}\hat{R}_{\varrho\mu\sigma\nu}\hat{R}^{\varrho\mu\sigma\nu}\,g_{ik})\,\delta g^{ik}] + \\ + k_2\,[2\,\hat{R}^{\mu\nu}\delta_1\hat{R}_{\mu\nu} + (2\,\hat{R}^r_i\hat{R}_{rk} - \\ - \tfrac{1}{2}\hat{R}^{\mu\nu}\hat{R}_{\mu\nu}\,g_{ik})\,\delta g^{ik}] + k_3\,[R\,g^{\mu\nu}\,\delta_1\,\hat{R}_{\mu\nu} + \\ + R(\hat{R}_{ik} - \tfrac{1}{4}\,R g_{ik})\,\delta g^{ik}]\}\,d\omega. \tag{35}$$

Nach (8) ist aber

$$\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho\delta_1\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho = \hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho\,\delta_1\,R^\varrho_{\mu\sigma\nu} + \\ + \tfrac{1}{2}\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho\,\delta_1\,\bar{F}^\varrho_{\mu\sigma\nu}$$

und es ist

$$\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho\,\delta_1\,\bar{F}^\varrho_{\mu\sigma\nu} = \hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho\,\delta_1(g_{\mu\nu}F^\varrho_\sigma) = \\ = F_{\sigma\tau}\,\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho\,\delta(g_{\mu\nu}g^{\varrho\tau}) = F_{\sigma\tau}\,\hat{R}^{\tau\mu\sigma\nu}\,\delta g_{\mu\nu} + \\ + F_{\sigma\tau}\,\hat{R}^\sigma_\varrho\,\delta g^{\varrho\tau};$$

der erste Term verschwindet aber, weil

$$\hat{R}^{\tau\mu\sigma\nu}\,\delta g_{\mu\nu} = \hat{R}^{\sigma\nu\tau\mu}\,\delta g_{\mu\nu} = \hat{R}^{\sigma\mu\tau\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$$

in σ und τ symmetrisch ist, so daß wird

$$\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho\delta_1\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho = \hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho\,\delta_1\,R^\varrho_{\mu\sigma\nu} + \tfrac{1}{4}\,(F_{ri}\hat{R}^r_k + \\ + F_{rk}\,\hat{R}^r_i)\,\delta g^{ik}. \tag{35a}$$

Weiter haben wir

$$\int 2\,\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho\,\delta_1 R^\varrho_{\mu\sigma\nu}\,d\omega = \int 2\,\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho\,\cdot \\ \cdot\delta_1\left\{\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Gamma^\varrho_{\mu\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Gamma^\varrho_{\mu\nu} + \Gamma^\varrho_{\tau\nu}\Gamma^\tau_{\mu\sigma} - \Gamma^\varrho_{\tau\sigma}\Gamma^\tau_{\mu\nu}\right\}d\omega = \\ = \int 4\left\{\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho}{\partial x_\sigma} + \hat{R}^{\tau\sigma\nu}_\varrho\Gamma^\mu_{\tau\sigma} - \\ - \hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\tau\Gamma^\tau_{\varrho\sigma}\right\}\delta_1\Gamma^\varrho_{\mu\nu}\,d\omega.$$

Man weist leicht nach, daß

$$K^{\mu\nu}_\varrho = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,(\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho + \hat{R}^{\nu\sigma\mu}_\varrho)}{\partial x_\sigma} + \hat{R}^{\tau\sigma\nu}_\varrho\Gamma^\mu_{\tau\sigma} + \\ + \hat{R}^{\tau\sigma\mu}_\varrho\Gamma^\nu_{\tau\sigma} - (\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\tau + \hat{R}^{\nu\sigma\mu}_\tau)\,\Gamma^\tau_{\varrho\sigma} \tag{36}$$

ein Tensor (und zwar vom Gewicht -2) ist. Zur weiteren Behandlung der Beziehung

$$\int 2\,\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_\varrho\,\delta_1\,R^\varrho_{\mu\sigma\nu}\,d\omega = \int K^{\mu\nu}_\varrho\cdot 2\delta_1\Gamma^\varrho_{\mu\nu}\,d\omega \tag{37}$$

führen wir dem in § 1 verwendeten Prinzip gemäß provisorisch ein geodätisches Bezugssystem ein. Dann wird

$$2\delta_1\Gamma^\varrho_{\mu\nu} = 2\delta\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varrho\end{matrix}\right\} = -\,g_{i\mu}\,\delta\,\frac{\partial g^{i\varrho}}{\partial x_\nu} - \\ - g_{i\nu}\,\delta\,\frac{\partial g^{i\varrho}}{\partial x^\mu} + g_{i\mu}\,g_{k\nu}\,\delta\,\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_\sigma}\,g^{\varrho\sigma}$$

und

$$\int K^{\mu\nu}_\varrho\cdot 2\,\delta_1\,\Gamma^\varrho_{\mu\nu} = \int\Big(g_{i\mu}\frac{\partial K^{\mu\nu}_k}{\partial x_\nu} + g_{k\nu}\frac{\partial K^{\mu\nu}_i}{\partial x_\mu} - \\ - g_{i\mu}g_{k\nu}\frac{\partial K^{\mu\nu}_\varrho}{\partial x_\sigma}\,g^{\varrho\sigma}\Big)\,\delta g^{ik}\,d\omega.$$

Beim Übergang zu einem beliebigen Bezugssystem ist $\frac{\partial K^{\mu\nu}_\varrho}{\partial x_\sigma}$ zu ersetzen durch den Tensor (vom Gewicht -2):

$$L^{\mu\nu}_{\varrho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,K^{\mu\nu}_\varrho}{\partial x_\sigma} + K^{\tau\nu}_\varrho\Gamma^\mu_{\sigma\tau} + \\ + K^{\tau\mu}_\varrho\Gamma^\nu_{\sigma\tau} - K^{\mu\nu}_\varrho\Gamma^\tau_{\sigma\tau} \tag{38}$$

und es wird

$$\int K^{\mu\nu}_\varrho\cdot 2\,\delta_1\,\Gamma^\varrho_{\mu\nu} = \int(g_{i\mu}L^{\mu\nu}_{k\nu} + g_{k\mu}L^{\mu\nu}_{i\nu} - \\ - g_{i\mu}\,g_{k\nu}\,L^{\mu\nu}_{\varrho\sigma}g^{\varrho\sigma})\,\delta g^{ik}\,d\omega, \tag{39a}$$

oder wenn wir setzen

$$g_{i\mu}g_{k\nu}L^{\mu\nu}_{\varrho\sigma} = L_{ik,\,\varrho\sigma} \tag{40}$$

$$\int K^{\mu\nu}_\varrho\cdot 2\,\delta_1\,\Gamma^\varrho_{\mu\nu} = \int(L_{i\varrho,\,k\sigma} + L_{k\varrho,\,i\sigma} - \\ - L_{ik,\,\varrho\sigma})\,g^{\varrho\sigma}\,\delta g^{ik}\,d\omega. \tag{39b}$$

Genau analog gestaltet sich die Berechnung von $\int 2\,\hat{R}^{\mu\nu}\delta_1\hat{R}_{\mu\nu}\,d\omega$:

$$\int 2\hat{R}^{\mu\nu}\delta_1\hat{R}_{\mu\nu}\,d\omega = \int 2\hat{R}^{\mu\nu}\delta_1\,R_{\mu\nu}d\omega = \\ = \int 2\hat{R}^{\mu\nu}\delta_1\left\{\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Gamma^\varrho_{\mu\varrho} - \frac{\partial}{\partial x_\varrho}\Gamma^\varrho_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\varrho}\Gamma^\varrho_{\nu\sigma} - \\ - \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\varrho\sigma}\right\}d\omega = \int\Bigg\{\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,\hat{R}^{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} + \hat{R}^{\mu\sigma}\Gamma^\nu_{\varrho\sigma} + \\ + \hat{R}^{\nu\sigma}\Gamma^\mu_{\varrho\sigma} - \hat{R}^{\mu\nu}\,\Gamma^{\sigma\sigma}_\varrho\right]2\,\delta_1\,\Gamma^\varrho_{\mu\nu} \\ - \left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,\hat{R}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + \\ + \hat{R}^{\varrho\sigma}\Gamma^\mu_{\varrho\sigma}\right]2\,\delta_1\,\Gamma^\tau_{\mu\tau}\Bigg\}\,d\omega.$$

Die zweite eckige Klammer ist nach (B) gleich $\frac{1}{2}\bar{s}^\mu$ und

$$\int\bar{s}^\mu\delta_1\,\Gamma^\tau_{\mu\tau}\,d\omega = \int\bar{s}^\mu\,\delta\left\{\begin{matrix}\mu\tau\\ \tau\end{matrix}\right\}d\omega = \\ = \int\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,\bar{s}^\mu}{\partial x_\mu}\,\tfrac{1}{2}\,g_{ik}\,\delta g^{ik}\,d\omega.$$

Infolge der ersten Identität (II) muß aber

$$\frac{1}{g}\frac{\partial\sqrt{g}\,\bar{s}^\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

eine direkte Folge der Gravitationsgleichungen sein, so daß man diesen Term streichen kann.

Definieren wir wieder

$$M_\varrho^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} \hat{R}^{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} + \hat{R}^{\mu\sigma} \Gamma^\nu_{\varrho\sigma} + \\ + R^{\nu\varrho} \Gamma^\mu_{\varrho\sigma} - \hat{R}^{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\varrho\sigma}, \tag{41}$$

so wird also

$$\int 2\, R^{\mu\nu} \delta_1 R_{\mu\nu} d\omega = \int M_\varrho^{\mu\nu} 2 \delta_1 \Gamma^\varrho_{\mu\nu} d\omega. \tag{42}$$

Daraus folgt wie früher, wenn wir setzen

$$N^{\mu\nu}_{\varrho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} M_\varrho^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + M_\varrho^{\nu\tau} \Gamma^\mu_{\sigma\tau} + \\ + M_\varrho^{\mu\tau} \Gamma^\nu_{\sigma\tau} - M_\sigma^{\mu\nu} \Gamma^\tau_{\sigma\tau}, \tag{43}$$

$$\int M_\varrho^{\mu\nu} \cdot 2 \delta_1 \Gamma^\varrho_{\mu\nu} d\omega = \int (g_{i\mu} N^{\mu\nu}_{k\nu} + g_{k\mu} N^{\mu\nu}_{i\nu} - \\ - g_{i\mu}\, g_{k\nu}\, N^{\mu\nu}_{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma}) \delta g^{ik} d\omega \tag{44a}$$

und wenn wir noch setzen

$$g_{i\mu} g_{k\nu} N^{\mu\nu}_{\varrho\sigma} = N_{ik,\varrho\sigma}, \tag{45}$$

$$\int M_\varrho^{\mu\nu} \cdot 2\, \delta\, \Gamma^\varrho_{\mu\nu} d\omega = \int (N_{i\varrho,k\sigma} + N_{k\varrho,i\sigma} - \\ - N_{ik,\varrho\sigma}) g^{\varrho\sigma} \delta g^{ik} d\omega. \tag{44b}$$

Nunmehr bleibt uns noch

$$\int R g^{\mu\nu} \delta_1 \hat{R}_{\mu\nu} d\omega = \int R g^{\mu\nu} \delta_1 R_{\mu\nu}\, d\omega$$

zu berechnen übrig. Zunächst finden wir

$$\int R g^{\mu\nu} \delta_1 R_{\mu\nu} d\omega = \int \Big\{ \Big[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, R g^{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} + \\ + R g^{\mu\sigma} \Gamma^\nu_{\varrho\sigma} + R g^{\nu\sigma} \Gamma^\mu_{\varrho\sigma} - R g^{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\varrho\sigma} \Big] \delta_1 \Gamma^\varrho_{\mu\nu} - \\ - \Big[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, R g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + R g^{\varrho\sigma} \Gamma^\mu_{\varrho\sigma} \Big] \delta_1 \Gamma^\tau_{\mu\tau} \Big\} d\omega$$

oder mit Benutzung von (A) und der daraus durch Verjüngung folgenden Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, g^{ik}}{\partial x_k} + g^{rs} \Gamma^i_{rs} - \varphi^i = 0$$

$$\int R g^{\mu\nu} \delta_1 R_{\mu\nu} d\omega = \int (g^{\mu\nu}\, \bar{s}_\varrho\, \delta_1 \Gamma^\varrho_{\mu\nu} - \\ - \bar{s}^\mu\, \delta_1\, \Gamma^\tau_{\mu\tau}) d\omega. \tag{46}$$

Der zweite Term kann wieder gestrichen werden. Der erste liefert in einem geodätischen Bezugssystem

$$\int g^{\mu\nu}\, \bar{s}_\varrho \delta_1 \Gamma^\varrho_{\mu\nu} d\omega = -$$

$$\int \frac{\bar{s}_i}{\sqrt{g}} \delta \frac{\partial \sqrt{g} g^{ik}}{\partial x_k} d\omega = \int \frac{\partial \bar{s}_i}{\partial x_k} \delta g^{ik} d\omega = \\ = \int \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial \bar{s}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{s}_k}{\partial x_i} \Big) \delta g^{ik} d\omega.$$

Beim Übergang zu einem beliebigen Bezugssystem ist

$$\frac{1}{2} \Big(\frac{\partial \bar{s}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{s}_k}{\partial x_i} \Big)$$

zu ersetzen durch

$$\bar{s}_{ik} = \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial \bar{s}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{s}_k}{\partial x_i} \Big) - \Gamma^r_{ik} \bar{s}_r + \tfrac{1}{2} (s_i \varphi_k + s_k \varphi_i). \tag{47}$$

(Man beachte, daß $\bar{s}_i$ vom Gewicht -1 ist.) Schließlich erhalten wir also

$$\int R g^{\mu\nu} \delta_1 R_{\mu\nu} d\omega = \int \bar{s}_{ik} \delta g^{ik} d\omega. \tag{48}$$

Fassen wir nun alle unsere Ergebnisse zusammen, so finden wir

$$W_{ik} = k_1 \big[(L_{i\varrho,k\sigma} + L_{k\varrho,i\sigma} - L_{ik,\varrho\sigma}) g^{\varrho\sigma} + \\ + \tfrac{1}{2} (F_{ri} R^r_k + F_{rk} \hat{R}^r_i) + 2 \hat{K}_i^{\mu\sigma\nu} R_{k\mu\sigma\nu} - \\ - \tfrac{1}{4} R_{\varrho\mu\sigma\nu} \hat{R}^{\varrho\mu\sigma\nu} g_{ik} \big] + k_2 \big[(N_{i\varrho,k\sigma} + N_{k\varrho,i\sigma} - \\ - N_{ik,\varrho\sigma}) g^{\varrho\sigma} + 2 \hat{R}^r_i \hat{R}_{rk} - \tfrac{1}{2} \hat{R}_{\mu\nu} R^{\mu\nu} g_{ik} \big] + \\ + k_3 [\bar{s}_{ik} + R(\hat{R}_{ik} - \tfrac{1}{4} R g_{ik})]. \tag{49}$$

$L_{i\varrho,k\sigma}$, $N_{i\varrho,k\sigma}$ und $\bar{s}_{ik}$ sind definiert durch (36), (38), (40), (41), (43), (45) und (47). Die Gravitationsgleichungen sind dann, wie bereits erwähnt

$$W_{ik} + \tfrac{1}{2} S_{ik} = 0. \tag{27}$$

§ 4. Statische, zentrisch-symmetrische Felder.

Das Problem des Elektrons.

Nunmehr können wir die früher (§ 2) bereits gestreifte Frage der statischen Felder etwas eingehender diskutieren. Zwei Arten von statischen Feldern sind es, die ein besonderes physikalisches Interesse haben. Das materie- und elektrizitätsfreie Feld und das Feld des Elektrons. Es wären also erstens diejenigen Lösungen der Feldgleichungen zu ermitteln, für die $\varphi = 0$ ist und zweitens diejenigen partikularen Lösungen, welche nirgends eine Singularität haben, ohne daß φ und R identisch verschwinden. Wir wollen uns hier jedoch fast ausschließlich mit dem zweiten Problem befassen. Bezüglich des ersten bemerken wir nur, daß die vierdimensional-geschlossene Welt von konstanter Krümmung[1]) eine Lösung der Feldgleichungen (49) ist. Denn für diese ist

$$R_{iklm} = k (g_{il} g_{km} - g_{kl} g_{im}), \\ R_{ik} = 3 k g_{ik}, \quad R = 12\, k = \text{konst.}$$

und infolgedessen

$$K_\varrho^{\mu\nu} = M_\varrho^{\mu\nu} = 0, \quad R_i^{\mu\sigma\nu} R_{k\mu\sigma\nu} = \tfrac{1}{4} R_{\varrho\mu\sigma\nu} R^{\varrho\mu\sigma\nu} g_{ik}, \\ R^r_i R_{rk} = \tfrac{1}{4} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} g_{ik},$$

woraus $W_{ik} = 0$ folgt.

Bevor wir die Differentialgleichungen des Elektronproblems aufstellen, müssen wir noch untersuchen, ob nicht infolge des Hinzutretens der Bedingung $R =$ konst. zu den Feldgesetzen mehr Gleichungen zu erfüllen sind als der Zahl der Variablen entspricht. Infolge des Bestehens

1) Die Geometrie einer derartigen Welt, die entweder sphärisch oder elliptisch sein kann, ist eingehend von F. Klein in seiner Arbeit: „Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich geschlossenen Welt", Gött. Nachr. 1918, S. 394 erörtert worden.

der Identitäten (II, S. 460) ist dies jedoch nicht der Fall. Denn aus der ersten dieser Identitäten ergibt sich, daß aus der elektromagnetischen Grundgleichung und aus $R =$ konst.

$$W_i^i = 0$$

folgt und die zweite liefert drei Identitäten ($k = 1, 2, 3$) zwischen den Gravitationsgleichungen, welche den nötigen Spielraum für die Wahl des räumlichen Koordinatensystems verschaffen. Komplizierter werden jedoch die Verhältnisse dadurch, daß W_{i0}[1]) im allgemeinen auch im statischen Fall bei Anwesenheit eines elektrischen Feldes nicht verschwindet. Die Gleichungen $W_{i0} = 0$ sind dann in der Tat überzählig, da (II) (für $k = 0$)[2]) zwischen ihnen bloß die Relation

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} W_0^i}{\partial x_i} = 0$$

liefert.

Es scheint also, daß nur bei solchen Ansätzen für die Wirkungsfunktion ein statisches Feld bei Vorhandensein von Elektrizität möglich ist, bei denen im statischen Fall W_{i0} identisch verschwindet. Beim allgemeinen Ansatz (33) ist diese Bedingung nicht erfüllt, wohl aber im speziellen Fall

$$c_1 = c_2 = 0\text{[3]}).$$

Wir wollen uns auf diesen beschränken, weil hier die Verhältnisse am einfachsten liegen. Nach (32) ist hier auch

$$k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = c_3$$

und wenn wir den Index bei der Konstanten weglassen, nimmt das Wirkungsprinzip (33) in unserem Spezialfall die Form an[4])

1) Über die Indexbezeichnung, vgl. Fußnote 2, S. 461; es ist zu beachten, daß $S_{i0} \equiv 0$ im statischen Feld.

2) Für $k = 1, 2, 3$ fallen die Glieder, welche W_{i0} enthalten, heraus.

3) Nach Weyl (II, S. 404) enthält der Tensor

$$P_{iklm} = \mathring{R}_{iklm} - \frac{1}{2}(g_{il}\mathring{R}_{km} + g_{km}\mathring{R}_{il} - g_{im}\mathring{R}_{kl} - g_{kl}\mathring{R}_{im}) + \frac{1}{6}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}) R$$

die φ_i gar nicht mehr. Daher ist auch für

$$W = k P_{iklm} P^{iklm} + k_3 \frac{1}{2} R^2 \qquad \text{(a)}$$

im statischen Feld $W_{i0} \equiv 0$. Umgekehrt läßt sich jeder in (33) enthaltene, spezielle Ansatz für W, welcher der Bedingung $W_{i0} \equiv 0$ im statischen Feld genügt, auf die Form (*a*) bringen.

4) Anmerkung bei der Korrektur. Um unsere Bezeichnungen mit denen der bereits mehrfach zitierten, nunmehr erschienenen Annalenarbeit Weyls in Einklang zu bringen, hat man R^*_{ik}, R^*, R, c, $\frac{1}{2cR}$, S_{ik} zu ersetzen durch R_{ik}, R, $-F = \alpha$, $\frac{1}{2\beta}$, $-\lambda$, $-S^*_{ik}$. Vgl. auch Fußnote 4, S. 458.

$$\delta \int (c \cdot \tfrac{1}{2} R^2 + \tfrac{1}{4} F_{ik} F^{ik}) d\omega = 0. \qquad (50)$$

Wegen $R =$ konst. ist ferner

$$\bar{S}_{ik} = R[\Phi_{ik} + 2\varphi_i\varphi_k - \tfrac{1}{2} g_{ik}(\varphi_r\varphi^r)], \qquad (51)$$

also wird W_{ik} gemäß (49), wenn wir noch für R_{ik} seinen Wert (14) einsetzen

$$W_{ik} = c R (R^*_{ik} + \tfrac{3}{2}\varphi_i\varphi_k - \tfrac{1}{4} g_{ik} R)\text{[4]}). \qquad (52)$$

W_{i0} verschwindet hier also in der Tat identisch. Nun führen wir die Bedingung der zentrischen Symmetrie ein. Die metrische Fundamentalform läßt sich dann immer auf die Form bringen[1])

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2, \quad d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + l(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2, \qquad (53)$$

worin f und l allein von

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

abhängen. Infolgedessen wird dann

$$g_{i0} = 0, \quad g_{00} = f^2, \quad g^{00} = \frac{1}{f^2}, \qquad g_{ik} = -(\delta_i^k + l x_i x_k). \qquad (54)$$

Oft ist es praktisch, die Werte der Komponenten eines Tensors A_{ik} bloß für den Punkt

$$P (x_1 = r, \; x_2 = x_3 = 0)$$

zu verwenden; wir wollen diese dann mit $[A_{ik}]$ bezeichnen[2]). So ist z. B.

$$[g_{11}] = -h^2, \quad [g_{22}] = [g_{33}] = -1, \qquad (54\text{a})$$

die übrigen

$$[g_{ik}] = 0$$

wenn

$$h^2 = 1 + lr^2 \qquad (55)$$

gesetzt wird. Daraus folgt unmittelbar

$$[g^{11}] = -\frac{1}{h^2}, \quad [g^{22}] = [g^{33}] = -1, \qquad (54\text{b})$$

die übrigen

$$[g^{ik}] = 0.$$

Ferner wird

$$\Delta \equiv \sqrt{-g} = hf, \qquad (56)$$

und

$$F_{0i} = \varphi' \cdot \frac{x_i}{r}, \quad F^{0i} = -\frac{\varphi'}{\Delta^2}\frac{x_i}{r}, \quad S_0^0 = -\frac{1}{2}\frac{\varphi'^2}{\Delta^2},$$

$$[S_1^1] = -\frac{1}{2}\frac{\varphi'^2}{\Delta^2}, \quad [S_2^2] = [S_3^3] = +\frac{1}{2}\frac{\varphi'^2}{\Delta^2}, \qquad (57)$$

1) Vgl. R. Z. M., 1. Aufl., Kap. IV, §§ 29 und 30.

2) Die Werte der A_{ik} in einem beliebigen Punkte ergeben sich daraus nach der Formel

$$A_{ik} = [A_{22}]\,\delta_i^k + ([A_{11}] - [A_{22}])\,\frac{x_i x_k}{r^2},$$

so folgt z. B. aus (54b)

$$g^{ik} = -\left(\delta_i^k - \frac{l}{h^2} x_i x_k\right);$$

man verifiziert unmittelbar die Relationen

$$g^{i\alpha} g_{k\alpha} = \delta^i_k.$$

endlich berechnet man noch auf Grund bekannter Formeln, wenn man die Bezeichnung

$$w = -\frac{lr^3}{h^2} = \left(\frac{1}{h^2} - 1\right) r \tag{58}$$

einführt:

$$R^*{}_0{}^0 = -\frac{1}{r^2 \Delta}\frac{d}{dr}\frac{f r^2}{h},$$

$$[R^*{}_1{}^1] = -\frac{1}{r^2 \Delta}\frac{d}{dr}\frac{f r^2}{h} + \frac{2}{r h^2}\frac{\Delta'}{\Delta},$$

$$[R^*{}_2{}^2] = [R^*{}_3{}^3] = -\frac{\Delta'}{r h^2 \Delta} - \frac{w'}{r^2}. \tag{59}$$

Gemäß (26), (27), (29) und (30) lauten demnach die Feldgleichungen der Gravitation und der Elektrizität (erstere schreiben wir in der gemischten Form

$$\left. W_i^k + \frac{1}{2} S_i^k = 0\right):$$

$$3cR\cdot\frac{\varphi}{f^2} = -\frac{1}{r^2 \Delta}\frac{d}{dr}\frac{r^2\varphi'}{\Delta} \tag{60a}$$

$$-\frac{1}{r^2 \Delta}\frac{d}{dr}\frac{f r^2}{h} + \frac{2}{r h^2}\frac{\Delta'}{\Delta} - \frac{1}{4cR}\frac{\varphi'^2}{\Delta^2} = \frac{R}{4} \tag{60b}$$

$$-\frac{1}{r^2 \Delta}\frac{d}{dr}\frac{f r^2}{h} + \frac{3}{2}\frac{\varphi^2}{f^2} - \frac{1}{4cR}\frac{\varphi'^2}{\Delta^2} = \frac{R}{4} \tag{60c}$$

$$-\frac{\Delta'}{r h^2 \Delta} - \frac{w'}{r^2} + \frac{1}{4cR}\frac{\varphi'^2}{\Delta^2} = \frac{R}{4} \;{}^{1)}. \tag{60d}$$

Diese vier Gleichungen sind nach (II) nicht unabhängig voneinander, vielmehr besteht zwischen ihnen eine Identität, was auch notwendig ist, da bloß drei unabhängige Variable vorhanden sind: φ, Δ, w. Außerdem finden wir die früher allgemein bewiesene Symmetrie in bezug auf die beiden Elektrizitätsarten bestätigt. Wir eliminieren zunächst f und h.

Aus (60b) und (60c) folgt

$$\frac{3}{4}\frac{\varphi^2}{f^2} = \frac{1}{r h^2}\frac{\Delta'}{\Delta}$$

oder

$$\frac{3}{4}\frac{\varphi^2}{f^4} = \frac{1}{r}\frac{\Delta'}{\Delta^3},$$

was mit (60a) kombiniert

$$\frac{1}{12c^2R^2r^3}\left(\frac{d}{dr}\frac{r^2\varphi'}{\Delta}\right)^2 = \frac{\Delta'}{\Delta} \tag{61}$$

und

$$\frac{1}{rh^2}\frac{\Delta'}{\Delta} = -\frac{1}{4cR}\cdot\frac{\varphi}{r^2\Delta}\frac{d}{dr}\frac{r^2\varphi'}{\Delta}$$

gibt. (60d) wird daher mit Rücksicht auf (58):

$$\frac{1}{4cR}\left[\frac{\varphi}{r^2\Delta}\frac{d}{dr}\frac{r^2\varphi'}{\Delta} + \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi}{\Delta'}\frac{d}{dr}\frac{r^2\varphi'}{\Delta}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\varphi'^2}{\Delta^2}\right] + \frac{1}{r^2} = \frac{R}{4}. \tag{62}$$

Man kann aus (61) und (62) eine Differentialgleichung dritter Ordnung mit der einen Unbekannten $u = \frac{r^2\varphi'}{\Delta}$ ableiten. Zunächst erhält man eine Gleichung von der Form

$$\frac{\varphi}{\Delta}\cdot A_1(u, u', u'') + B_1(u, u') = 0,$$

aus der durch Differenzieren mit Rücksicht auf (61) eine weitere Gleichung von der Form

$$\frac{\varphi}{\Delta}\cdot A_2(u, u', u'', u''') + B_2(u, u', u'') = 0$$

und dann durch Elimination von $\frac{\varphi}{\Delta}$ die gesuchte Differentialgleichung für u sich ergibt. Wäre u ermittelt, so würde nach (61) Δ durch eine Quadratur und hernach φ aus dem Ausdruck für $\frac{\varphi}{\Delta}$ folgen. Die so erhaltene Differentialgleichung ist aber so kompliziert, daß wir auf ihre explizite Wiedergabe lieber verzichten. Auf diese Weise dürfte die Integration des Problems überhaupt kaum gelingen. Es gibt aber noch einen anderen Weg, der vielleicht zum Ziel führen wird. Wir haben hier das Koordinatensystem von vornherein so normiert, daß

$$[g_{22}] = -1$$

wird. Man könnte aber auch $d\sigma^2$ zunächst in der allgemeinen Form

$$d\sigma^2 = \mu(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) +$$
$$+ l(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3)^2$$

(μ Funktion von r allein) ansetzen und dann das Koordinatensystem so zu bestimmen suchen, daß die Differentialgleichungen integrabel werden. Zwar ist es dem Verfasser bis jetzt noch nicht gelungen, auf diese Weise die Differentialgleichungen zu vereinfachen, doch möchte er sich vorbehalten, eventuell bei einer anderen Gelegenheit darauf zurückzukommen.

Zusammenfassung.

Für die Wirkungsfunktion wurde der allgemeine Ansatz

$$\tfrac{1}{2}(c_1\,\overline{R}_{iklm}\overline{R}^{iklm} + c_2\,\overline{R}_{ik}\overline{R}^{ik} + c_3 R^2) + \tfrac{1}{4}F_{ik}F^{ik}$$

1) Anmerkung bei der Korrektur. Berücksichtigt man die erwähnte Verschiedenheit der Bezeichnungen, so ergibt sich leicht, daß Weyls Gleichungen (26) (l. c., S. 130) mit unseren Gleichungen (60) äquivalent sind. Die beiden λ enthaltenden Terme treten jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen auf. Da die Nachprüfung der Rechnung Weyls mittels der von ihm verwendeten Methode dasselbe ergab, möchte ich mit allem Vorbehalt die Meinung aussprechen, daß hier bei Weyl ein kleines Versehen unterlaufen ist.

zugrunde gelegt und die zugehörigen elektromagnetischen und Gravitationsgleichungen berechnet. Im Fall $c_1 = 0$ ist man von vornherein sicher, mit der Perihelbewegung des Merkur nicht in Konflikt zu kommen. Die Geschlossenheit der Welt folgt ohne weiteres aus der Theorie; übrigens ist die elektrizitäts- und daher auch materiefreie, vierdimensional-geschlossene Welt von konstanter Krümmung eine Lösung der Feldgleichungen. Eine allgemeine Konsequenz der Theorie, was immer auch für eine Invariante als Wirkungsfunktion gewählt sein mag, ist ferner, daß in einem statischen Feld die Naturgesetze in bezug auf positive und negative Elektrizität symmetrisch sind. Dieser Umstand ist eine sehr große, wenn nicht unüberwindliche Schwierigkeit für Weyls Theorie. Im statischen Fall treten nur dann keine überzähligen Gleichungen auf, wenn hier W_{i0} identisch verschwindet. Das spezielle Wirkungsprinzip

$$\delta \int (c \tfrac{1}{2} R^2 + \tfrac{1}{4} F_{ik} F^{ik}) \, d\omega = 0,$$

für welches diese Bedingung erfüllt ist, wurde weiter verfolgt und die zugehörigen Differentialgleichungen des Elektronfeldes ermittelt. Ihre Integration ließ sich auf die einer — allerdings äußerst kompliziert gebauten — Differentialgleichung dritter Ordnung und auf eine Quadratur zurückführen.

München, Institut für theoretische Physik.

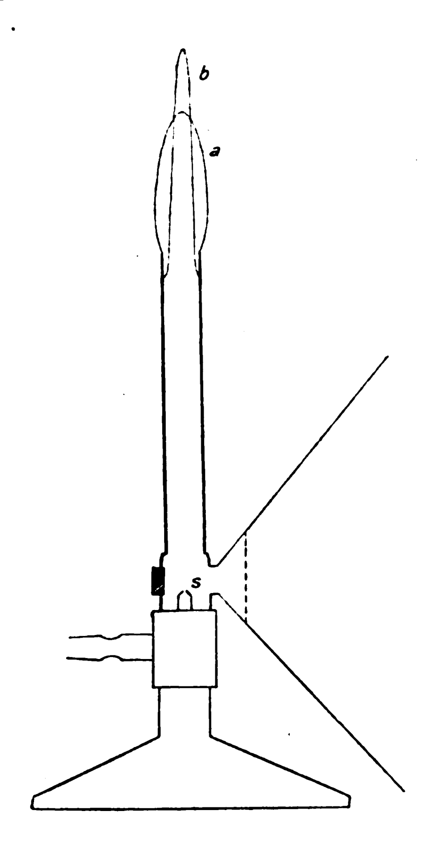
(Eingegangen 4. Juni 1919.)

Eine schallempfindliche Flamme.

Von Heinrich Mache.

Die schallempfindliche Flamme, oder richtiger der schallempfindliche Gasstrahl, — denn die Flamme wirkt nur als Indikator — wird teils nach dem Tyndallschen Verfahren hergestellt, bei dem aber hoher Gasdruck wünschenswert ist, falls die Empfindlichkeit groß sein soll, oder nach der Drahtnetzmethode von Govi[1]), die auch bei niedrigem Gasdruck anwendbar ist. In beiden Fällen brennt die Flamme unruhig und nicht ohne Geräusch, so daß sie oft auf sich selbst anspricht. Eine Flamme, die ruhig brennt wie eine Kerzenflamme und selbst bei niedrigstem Gasdruck den beiden anderen Flammen an Empfindlichkeit nicht nachsteht, läßt sich in der folgenden Weise herstellen.

An einem gewöhnlichen Bunsenschen Brenner wird die Öffnung s, aus der das Leuchtgas einströmt, durch eine ein ganz wenig engere ersetzt und von den beiden Löchern, durch welche sonst die Luft zutritt, das eine geschlossen, während man auf das zweite einen mit einer Membran (gewöhnliches Seidenpapier entspricht vollkommen) versehenen Trichter aufsetzt, so daß auch dort die Luftzufuhr verhindert ist. Man kann dann durch langsames Drosseln des Gasstroms bewirken, daß die Flamme zunächst sehr unruhig wird. Erhöht man die Gaszufuhr, so wird die Flamme auch sofort wieder ruhig und brennt wie gewöhnlich mit helleuchtender Flamme



(Stellung a). Erniedrigt man die Gaszufuhr hingegen noch ein wenig, so tritt der Flammenrand in das Rohr ein (bis über 1 cm Tiefe), während die Mitte als nun sehr steiler Kegel und von der Spitze abgesehen im Blaulicht der bei Luftzumischung entstehenden Flamme leuchtend, wieder vollkommen ruhig brennt (Stellung b). Diese Flammenform ist es, die gegen Geräusche und Töne von einer gewissen Höhe aufwärts außerordentlich empfindlich ist, indem hierdurch während der Dauer des Geräusches oder des Tons die Flamme aus der Stellung b in die Stellung a zurückspringt. Da hierdurch eine sehr bedeutende Erhöhung der Leuchtkraft eintritt, so ist die Erscheinung, zumal im verdunkelten Raum, ungemein auffallend.

1) Vgl. z. B. K. Rosenberg, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterricht **29**, 181, 1916.

Es ist keineswegs nötig, daß der austretende Leuchtgasstrahl sich genau in der Achse des Brennerrohres befindet. Seitliche Lage bewirkt nur, daß der Flammenrand einseitig, also nur teilweise in das Rohr zurücktritt, ohne daß hierdurch die Schallempfindlichkeit merkbar beeinträchtigt wird.

Auffallend ist das selektive Verhalten dieser Flammen gegenüber Vokalen. Vor allem auf das *A*, schon weit weniger auf das *E* spricht die Flamme an und fast gar nicht auf die anderen Vokale, wenn sie nicht überlaut gesprochen werden. Hingegen wird ein mit Gesprächsstärke aus 40 Schritt Entfernung gegen den zugewendeten Trichter gesprochenes *A* voll angezeigt.

Die Erklärung der Erscheinung muß auf die des Tyndallschen Gasstrahls zurückgreifen. Zweifellos handelt es sich zunächst um zwei Gleichgewichtslagen. Das ausströmende Gas kann entweder die Luft aus dem Rohr ganz verdrängen und das ganze Rohr füllend emporsteigen, unter gleichzeitiger äußerer Reibung zwischen Gas und Wand, wobei sich dann die gewöhnliche Flamme *a* bildet, oder aber der aus der engen Öffnung *s* austretende Gasstrahl breitet sich im Rohr nicht bis zur Wand aus, mischt sich vielmehr noch im Rohr mit der infolge der hydrodynamischen Saugwirkung von oben zwischen ihm und der Wand eindringenden Luft, wodurch die Flamme teilweise entleuchtet wird. Zugleich wird sie länger, weil jetzt infolge des Wegfalls der äußeren Reibung an der Wand und des geringeren Querschnitts die Strömungsgeschwindigkeit höher bleibt.

Daß im Falle *b* die Flamme nicht bis auf die Ausströmungsöffnung herabläuft, wie bei einem in der Luft frei brennendem Gasstrahl oder in einem Bunsenbrenner mit offenen Luftlöchern bei zurückgeschlagener Flamme, sondern höher oben an der Rohrwand hängen bleibt, ist leicht zu verstehen. Die Beobachtung zeigt, daß sich im untersten kalten Teile des Rohres Wassertropfen niederschlagen. Es sind eben an der Flamme *b* zwei Teile zu unterscheiden. Der mittlere Teil, in dem Gasüberschuß herrscht, und in dem die Strömung von unten nach oben gerichtet ist und der äußere der Wand benachbarte Teil, der ganz von Wirbeln durchsetzt erscheint, in dem aber im ganzen eine nach abwärts gerichtete Bewegung vorherrscht. Dort ist die Luft weit im Überschuß und Gas nur soweit vorhanden, als es aus der den Gasstrahl umgebenden Wirbelschichte mechanisch und durch Diffusion eindringt. Dieses Gas verbrennt in dem an der Wand haftenden, nicht scharf ausgebildeten Flammenrand. Das noch sehr luftreiche Verbrennungsprodukt dringt aber weiter nach unten, setzt an den kalten Stellen Verbrennungswasser ab, worauf es vom Gasstrahl, mit dem es sich zum Teil mischt, wieder nach oben gerissen wird.

Was die Erklärung der Schallempfindlichkeit anlangt, so ist auch hier der Sitz der Erscheinung in der Ausströmungsöffnung zu suchen. Unter dem Einfluß der dort durch die Membran senkrecht zum austretenden Strahl auftreffenden Schallschwingungen gerät der Strahl in transversale Schwingungen, wodurch Berührung der Wand und Umschlagen aus der Lage *b* in die Lage *a* eintritt. Am offen brennenden Strahl wäre bei den hier herrschenden Druckverhältnissen dieses Mitschwingen, das sich durch Kürzer- und Breiterwerden der Flamme äußert, nicht ohne weiteres wahrzunehmen. Durch das hierdurch veranlaßte Umschlagen der Flamme in die andere Gleichgewichtslage wird die Erscheinung aber sehr auffallend.

Eine in mancher Hinsicht ähnliche Anordnung zur Erzeugung einer schallempfindlichen Flamme wurde von Rayleigh angegeben[1]). Doch handelte es sich dort offenbar nicht um die hier beschriebene Erscheinung des Übergangs zwischen zwei Flammenformen, sondern um eine ganz unmittelbar wahrzunehmende Beeinflussung des Tyndallschen Strahles.

1) Theory of Sound, Bd. II, 2. Aufl. S. 402; Proc. Camb. Phil. Soc. 4, 17, 1883.

(Eingegangen 18. Juni 1919.)

Eine einfache Demonstration zum Huyghensschen Prinzip.

Von Heinrich Mache.

Da es meines Wissens hierzu keinerlei Versuch gibt, dürfte das im folgenden geschilderte Verfahren nicht unwillkommen sein.

Man benötigt ein Zelluloidblatt von etwa $^1/_3$ mm Dicke; aber auch nicht zu dünner photographischer Film, den man von der Gelatine befreit hat, kann Verwendung finden.

Legt man ein Stück von solchem Zelluloidblatt in horizontaler Lage auf eine nur stellenweise berührende Unterlage, etwa einen Dreifuß und zündet mit einer kleinen Flamme an irgendeiner Stelle der Oberfläche, so schreitet die Entzündung von der Zündstelle aus auf einem vollkommenen Kreis weiter; es brennt ein kreisrundes Loch aus, dessen Radius der Zeit proportional anwächst.

Hält man das Blatt vertikal und zündet an

irgendeiner Stelle des oberen Randes, so wird die Erscheinung verwickelter, da sich jetzt die Entzündung nicht nur über die Fläche, sondern auch über den Rand des Blattes und zwar dort mit weit größerer als der Flächengeschwindigkeit ausbreitet. Es rührt dies davon her, daß am Rand der zur Fortleitung der Entzündung nötige Sauerstoff in reichlicherer Menge zur Verfügung steht als in der Fläche. In der Fläche ist jedes Element der Brennlinie auf den Sauerstoff beschränkt, den es senkrecht zu seiner Richtung vorfindet, seitwärts wird der Sauerstoff von den benachbarten Brennlinienelementen verbraucht. Am Rande findet sich hingegen Sauerstoff ringsherum.

„Es habe das Blatt ursprünglich die beliebige, gestrichelt gezeichnete obere Begrenzung und es werde bei z gezündet[1]). Gäbe es keine Ausbreitung der Entzündung über den Rand, so wäre nach einer Sekunde die Brennlinie einfach der mit der Flächengeschwindigkeit der Entzündung c als Halbmesser geschlagene Kreis. Tatsächlich hat sich aber während dieser Sekunde die Entzündung auch über den

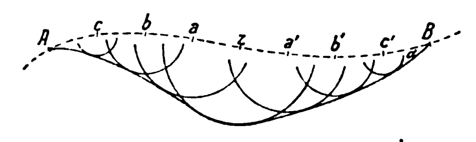


Fig. 1.

Rand nach links und rechts so weit ausgebreitet, als der Randgeschwindigkeit C entspricht: nach links bis A, nach rechts ebensoweit bis B. Alle Punkte zwischen z und A sind während der Sekunde nacheinander von der Entzündung ergriffen worden und von jedem dieser Punkte hat sich sofort die Entzündung auch über die Fläche kreisförmig ausgebreitet. Diese Kreise haben am Ende der Sekunde Radien erreicht, proportional den Zeiten, welche seit der Zündung des zugehörigen Zentrums verflossen sind. Die Umhüllende aller dieser Kreise gibt offenbar die neue Brennlinie". Der Randwinkel α bei A und B ist, wie immer die Begrenzung des Blattes verlaufen mag, ein für eine bestimmte Blattdicke ganz bestimmter und durch die Beziehung $\sin\alpha = \frac{c}{C}$ festgelegt.

Ist die Begrenzungslinie eine Gerade, so entsteht unter z ein Kreisbogen, an den von A und B aus unter dem Winkel α Tangenten gehen. Wird ein längerer, rechteckiger Streifen in der Mitte der oberen Kante gezündet, so bildet sich nach einiger Zeit über Formen, die aus obiger Darlegung gegeben sind, eine Spitze aus, die dann weiterhin unverändert mit der Geschwindigkeit C herunterbrennt und deren halber Öffnungswinkel gleich α ist. Löscht man aus und zündet die Spitze neuerdings, so bildet sich auf ihr zunächst eine zweite mit dem doppelten Öffnungswinkel usw.

Es ist bemerkenswert, mit welcher Regelmäßigkeit sich die Brennlinien bilden und es ist auch durchaus nicht nötig, die Blätter oder Streifen genau senkrecht zu halten. Selbst bei horizontaler Lage sind die Brennlinien die gleichen, wenn auch der Randwinkel nicht mehr so konstant ist. Nur umdrehen darf man das brennende Blatt natürlich nicht, da dann die Ausbreitung der Entzündung durch die aufsteigenden Flammengase ganz regellos erfolgt.

Hier soll nur noch ein Versuch beschrieben werden, der die vollkommene Analogie mit der Brechung einer ebenen Welle bietet:

Man schneidet hierzu aus dem Zelluloid einen längeren Streifen, etwa 4 cm breit und kittet auf ihn in der unteren Hälfte einen zweiten, dessen oberer Rand EF schräg zugeschnitten wird. Das Aufeinanderkitten der beiden Streifen läßt sich mittels eines Ätheralkoholgemisches, in dem sich Zelluloid löst, ohne weiteres bewerkstelligen. Im doppelt dicken unteren Teil des Streifens, wo bei glei-

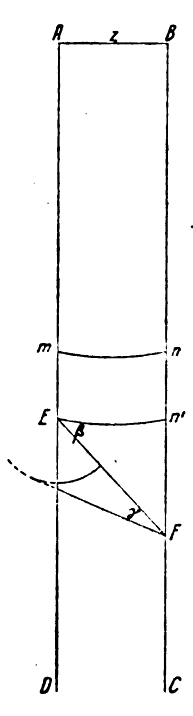


Fig. 2.

1) „Physik der Verbrennungserscheinungen", Veit & Co., Leipzig 1918, S. 82.

cher verfügbarer Sauerstoffmenge mehr brennbare Gase entwickelt werden, ist die Flächengeschwindigkeit der Entzündung beträchtlich herabgesetzt. An den Rändern AD und BC muß man bei diesem Versuch die Randentzündung verhindern, was durch Überkleben mit ganz schmalen Streifen Seidenpapier oder Eintauchen der beiden Ränder in einen Lack (Zellonlack) geschieht. Wird dann bei z gezündet, so entsteht unter z ein Kreisbogen, der mit fortschreitender Verbrennung immer mehr die Form einer zur Streifenrichtung senkrechten Linie (mn) annimmt. Trifft m bei E ein, so bildet sich um E ein Kreis aus und während n' bis F fortschreitet, ist der Halbmesser dieses Kreises auf $\frac{c'}{c}\,n'F$ gewachsen, wenn c' die Flächengeschwindigkeit der Entzündung im dicken Teil des Streifens bezeichnet. Die von F an diesen Kreis gezogene Tangente gibt die Richtung der neuen Brennlinie, die nun mit weiterhin unveränderter Neigung im dicken Teil des Streifens herabbrennt. Es hat „Brechung zum Lot" stattgefunden und es ist

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{c}{c'}.$$

Man kann das regelmäßige Abbrennen der Blätter und Streifen in den beschriebenen Versuchen weithin sichtbar machen, wenn man es vor der Projektionslampe vornimmt und das Bild mittels einer großen Linse (Kondensorlinse) auf dem Schirm entwirft.

Wien, Technische Hochschule, Juli 1919.

(Eingegangen 14. Juli 1919.)

Über den Sehraum.

Von Hans Witte.

Achte Mitteilung: Höchstraum und Mindestraum.

1.

Im sechsten Aufsatz[1]) ist für die Sehgrößen y das Gesetz hergeleitet worden

$$y=\frac{B\cdot E}{E+X},\tag{1}$$

in siebenten Aufsatz[2]) für die Sehfernen x

$$x=\frac{w\cdot X}{E+X}.\tag{2}$$

Die Gesetze waren gewonnen aus der Betrachtung eines Parallelstreifens $C\infty\ D\infty$, der sich vom Beobachter geradlinig ins Unendliche erstreckt, z. B. eines Weges (Fig. 1 und 3). Der Beobachter steht nächst dem Punkte C und blickt in der Richtung $C\infty$. Die Abszisse X bezeichnet die wahre Entfernung eines Punktes des Streifens vom Beobachter, die Ordinate B die feste Breite des Streifens, also die wahre Größe an der Stelle X.

1) Diese Zeitschr. **20**, 389, 1919.
2) Diese Zeitschr. **20**, 439, 1919.

2.

Die Konstante E bezieht sich vornehmlich und ursprünglich auf die Sehgröße y. Sie ist die Konstante des Laqueurschen Größensehraums und bildet ein Maß für die Schnelligkeit, mit der die Sehgröße y abnimmt, wenn die wahre Entfernung X wächst (Fig. 2). Wäre $E=\infty$, so sähe der Weg an jeder

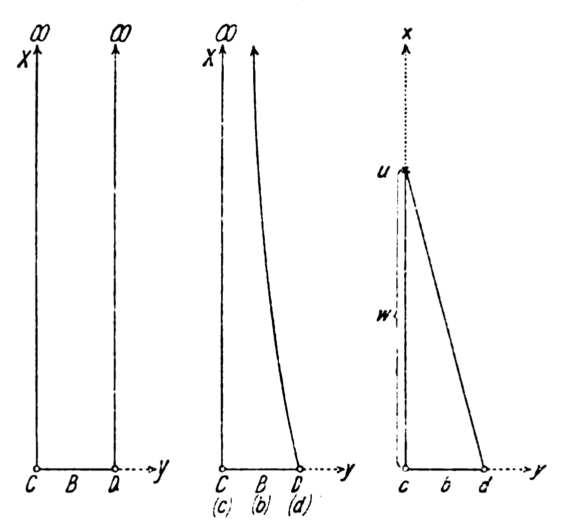


Fig. 1. Parallelstreifen, wie er wirklich ist ($C\infty$, $D\infty$).

Fig. 2. Sehgröße y allein als Funktion der wahren Entfernung X.

Fig. 3. Parallelstreifen, wie er aussieht (cu, du).

Stelle X so breit (B) aus wie im Anfang. Da er dies nicht tut, hat E einen endlichen Wert, der für das Folgende als bestimmt gedacht werden soll.

3.

Die Konstante w bezieht sich nur auf die Sehferne x. Sie mißt den Abstand $(x)_{X=\infty}$ des Seh-Unendlichkeits-Punktes vom Beobachter $C=c$ (Fig. 3). Sie ist schwer zu bestimmen, denn wir besitzen für Sehfernen kein treffsicheres Maß. Immerhin bestehen, wie im fünften[1]) und siebenten[2]) Aufsatz gezeigt, für w zwei Grenzen.

1) Diese Zeitschr. **20**, 368, 1919.
2) a. a. O.



4.

Die Sehferne x muß in jedem Falle kleiner sein als die wahre Entfernung X. Dem kann nach Gleichung (2) nur entsprochen werden, wenn $w < E$ ist. Der noch zu bestimmende Wert der Laqueurschen Konstante E sei z. B. 2 km, dann dürfte die scheinbare Sehraumgrenze w unter keinen Umständen den Wert 2 km übersteigen. Die Entfernungen unendlich ferner Gegenstände müßten mindestens auf 2 km, vielleicht noch stärker verkürzt erscheinen.

Dieser Höchstsehraum folgt aus den Sehraumgleichungen selber, daher ist über ihn nichts weiter zu sagen.

5.

Auf der anderen Seite hat man bisher als selbstverständlich gefordert, daß die Sehfernen nicht unvernünftig kleine Werte annehmen. Würde einem eingeredet, er sähe die weitesten Entfernungen bis zum Horizont in einer Scheinentfernung von 200 oder gar 100 m, so würde er das leugnen. Vollends würde er denjenigen Wert von sich weisen, welchen die „Raumbedingung“ angibt; d. h. den man fordern müßte, wenn die Sehfernen zu den beobachteten winzigen Sehgrößen der Himmelskörper („Tellermond“ usw.) zahlenmäßig passen sollten. Wie früher aus der Raumbedingung[1])

$$\frac{\text{Sehferne}}{\text{Sehgröße}} = \frac{\text{Wahre Entfernung}}{\text{Wahre Größe}} \tag{3}$$

sowie dem Tellermond[2]) berechnet, ist das der Wert ca. 44 m. Dieser Wert kann als untere Grenze angesehen werden, in dem Sinne, daß man den Mindestsehraum von ca. 44 m Ausdehnung für viel zu klein, den tatsächlich bestehenden Sehraum für sehr viel weiter hält.

6.

Die Ansicht, daß die Sehfernen notwendigerweise diesen Mindestsehraum überschreiten müßten, fußt bis jetzt nur auf denjenigen rohen Zahlen, die man bei dem unvollkommenen Messen von Sehfernen im Gelände erhält, auf der allgemeinen, ausgesprochenen oder unausgesprochenen, Zustimmung der Fachgelehrten, und schließlich gewissermaßen auf dem natürlichen Empfinden. Wir wollen jetzt den Mindestsehraum mit den Sehraumgesetzen (1) und (2) in Beziehung bringen und prüfen, was die Gesetze fordern.

7.

Es handelt sich darum, daß die Raumbedingung

1) Fünfte Mitteilung, diese Zeitschr. **20**, 368, 1919.
2) Dritte Mitteilung, diese Zeitschr. **20**, 114, 1919.

$$\frac{x}{y} = \frac{X}{Y} \tag{4}$$

überschritten werden soll. Die Sehfernen x sollten erheblich größer sein, als sie die Raumbedingung mit ihren 44 m Höchstwert gestattet. Wieviel größer muß in den Gesetzen (1) und (2) durch den Betrag der Unendlichkeitskonstante w zum Ausdruck kommen. Wir bilden aus (1) und (2) das Verhältnis von Sehferne x zu Sehgröße y und erhalten

$$\frac{x}{y} = \frac{w}{E} \cdot \frac{X}{B}. \tag{5}$$

B ist die Breite des Parallelstreifens (Fig. 1 und 3), d. h. die wahre Größe Y. Rechts steht also das Verhältnis von wahrer Entfernung X zu wahrer Größe Y, malgenommen mit dem Bruch w/E, infolgedessen ist dieser Bruch w/E das gesuchte Maß für die Überschreitung der Raumbedingung (4) durch die Sehferne x.

8.

Nun ergibt sich folgender einfacher Schluß: Die Raumbedingung soll überschritten werden, also muß $w > E$ sein. Oben ist bewiesen worden (vgl. § 4), daß $w < E$ sein muß. Folglich ist $w = E$.

9.

Das heißt: Der Sehraum liegt auch bezüglich der Entfernungserstreckung eindeutig fest. Und zwar deckt er sich mit demjenigen Raum, der oben als „Höchstsehraum“ bezeichnet wurde, dessen Unendlichkeitsgrenze die Laqueursche Konstante E mißt.

Dieser Höchstsehraum hat jedoch nicht die vermutete erhebliche Ausdehnung von vielen Kilometern, sondern deckt sich seinerseits mit demjenigen „Mindestsehraum“, der die Raumbedingung erfüllt, $x/y = X/Y$.

10.

Das Ergebnis befremdet. Um es verständlicher zu machen, wollen wir die drei Schulbeispiele des sechsten Aufsatzes heranziehen[1]).

Fig. 4 entspricht dem Beispiel 1. Die auseinanderlaufenden Linien $C\infty$ und $D\infty$ erscheinen als Parallelstreifen cu, dv. Die Entfernung des rückwärtigen Schnittpunkts A' der Geraden $C\infty$ und $D\infty$ vom Beobachter C ist die Laqueursche Konstante E. Die Strecke $cu = dv = w$ mißt die Scheingrenze des Sehraums. Daß sie $= E$ ist, bedeutet, der Bildpunkt v des Punktes ∞ der rechten Geraden $D\infty$ liegt vom Beobachter C aus in derselben Richtung wie der abgebildete Punkt ∞ selbst,

1) a. a. O.



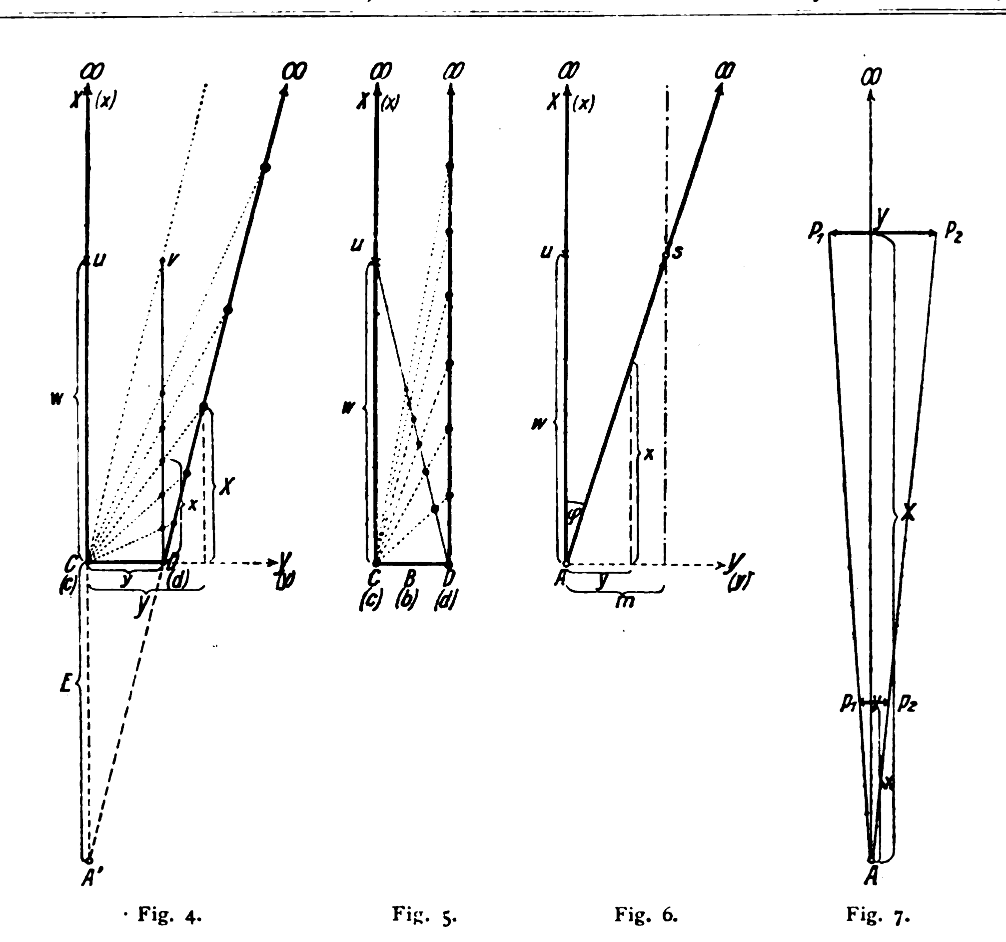


Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7.

cv läuft zu $A'D\infty$ parallel. Darin liegt zugleich, daß dies Punktpaar die Raumbedingung $x/y = X/Y$ erfüllt. In entsprechender Weise und Bedeutung genügen ihr alle näher gelegenen Punkte (vgl. Fig. 4). Sie liefert das einfache Mittel, zu gegebenen wahren Punkten Bildpunkte zu zeichnen, oder auch umgekehrt die Ursprungspunkte festzulegen, welche gewünschte Scheinpunkte erzeugen[1]).

Fig. 5 führt das Beispiel 2 weiter, das diesmal bereits in Fig. 1—3 benutzt worden ist. Der wahre Parallelstreifen $C\infty D\infty$ scheint in den Punkt u zusammenzulaufen. Wieder erlaubt die Raumbedingung, die Scheinpunkte einfach zu zeichnen, usw.

Fig. 6 erneut das Beispiel 3. Der Sehwinkel φ oder das Netzhautbild bleibt gleich. Gefragt wird nach der Sehgröße y und jetzt auch der Sehferne x von Gegenständen, die gleichen Sehwinkel haben; am einfachsten wird ein Nachbild von Handnähe bis ins Unendliche verfolgt. Das Nachbild wächst dann asymptotisch bis zu einer äußersten Sehgröße m, die für $X = \infty$ erreicht wird und den Wert $E \cdot \operatorname{tang} \varphi$ besitzt. Daß die äußerste Scheinferne w gleich E sein soll, bedeutet, im Scheinraum wird der Größengrenzwert m da erreicht, wo der Sehstrahl $As\infty$ die Asymptote schneidet. Den Weg bis dahin legt die rechte Bildkante als Scheingerade As zurück, die Raumbedingung heißt hier einfach $y/x = \operatorname{tang} \varphi$ und sagt, daß die Sehferne in demselben Maße wächst, wie das gesehene Bild größer ausgewertet wird[1]).

II.

Die Formeln lassen sich, wie leicht ersichtlich, in allen Fällen auf die gemeinsame Gestalt bringen

$$x = \frac{E \cdot X}{E + X} \tag{6}$$

$$y = \frac{E \cdot Y}{E + X}. \tag{7}$$

1) Wobei erinnert werden mag, daß die Gesetze nur unter der früher besprochenen Vernachlässigung gelten. Sechste Mitteilung, diese Zeitschr. 20, 390, 1919.

1) Die (nicht bewußt erlebte) Sehferne wächst im selben Verhältnis wie die (bewußt erlebte) Sehgröße. Oder umgekehrt: Die erlebte Sehgröße wie die nichterlebte Sehferne. Welches von beiden im psychophysischen Zusammenhang das Ursprüngliche ist, soll in einem späteren Aufsatz erörtert werden.

Sie gelten (Fig. 7) für einen beliebigen, der Blickrichtung $A\infty$ einigermaßen nahen Gegenstand P_1P_2, bestimmen die Sehferne x und die Sehgröße y aus der wahren Entfernung X und der wahren Größe Y, und enthalten nur die einzige Konstante E. Diese, die Laqueursche Konstante, hat die verschiedenen oben angegebenen Bedeutungen, darunter als anschaulichste, wiewohl nicht zur Messung geeignetste, das Seh-Unendlich, die Scheingrenze des Sehraums. Die Konstante E zu messen, durch mehrfache Messungen die Gesetze (6) und (7) zu bestätigen, ist die nächste Aufgabe.

Wolfenbüttel (Technische Hochschule Braunschweig), im Mai 1919.

(Eingegangen 20. Mai 1919.)

Bemerkung zu der Notiz von H. v. Dechend und W. Hammer: „Szintillation bei Kanalstrahlen"[1]).

Von Eduard Rüchardt.

In der genannten Notiz wenden sich die Verfasser gegen eine Bemerkung von W. Wien im „Handbuch der Radiologie", in der die in den Verh. der Deutsch. Phys. Ges. 1910, S. 531 beschriebene Beobachtung der Verfasser von Szintillation bei Kanalstrahlen aus energetischen Gründen bestritten wird. Da diese Bemerkung sich auf eine Arbeit von mir[2]) stützte, seien mir einige Worte hierzu gestattet.

In der Notiz in den Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. sind keine bestimmten Angaben über die Geschwindigkeit der Strahlen gemacht, infolgedessen habe ich die Geschwindigkeit zu niedrig eingeschätzt. Aber auch bei der Verwendung von Strahlen einer Geschwindigkeit größer als $3 \cdot 10^8$ cm/sec erscheint die Beobachtung aus folgenden Gründen merkwürdig. Ich hatte meiner Berechnung des Wirkungsgrades für Sidot-Blende eine Zahl von H. Baerwald[3]) zugrunde gelegt, wonach ZnS ungefähr 3,5 mal heller leuchet als der von mir untersuchte grüne Sr-Bi-Na-Phosphor. Nun sind aber, wie ich in einer späteren Untersuchung[4]) gezeigt habe, die Angaben von Baerwald infolge nicht genügender Beachtung der Zerstörung der Phosphore durch Kanalstrahlen nicht einwandfrei, und eine allgemeine einfache Betrachtung lehrt, daß ein so großer Wirkungsgrad für ZnS nicht wahrscheinlich ist. Nimmt man nämlich an, daß der Wirkungsgrad gegeben ist durch den Bruchteil der Energie, den ein Wasserstoffatom bei einem elastischen Zusammenstoß mit einem Elektron des Phosphormoleküls auf das Elektron überträgt, derart, daß diese Energie ganz als Phosphoreszenzlicht zum Vorschein kommt, so berechnet sich der Wirkungsgrad durch Anwendung des Impuls- und Energiesatzes zu 0,002. Natürlich kann er auch kleiner sein, wenn nämlich ein Teil der übertragenen Energie, z. B. als Austrittsarbeit des Elektrons aus dem Phosphormolekül, verloren geht. Auf diese Möglichkeit, den Wirkungsgrad zu schätzen, hat mich gesprächsweise Herr Gerlach aufmerksam gemacht. Das Resultat stimmt gut mit meinen Messungen am Sr-Bi-Na-Phosphor. Es ist danach aber nicht leicht einzusehen, wie der Wirkungsgrad bei einzelnen Phosphoren größer sein sollte als 0,002. Mit dieser Zahl findet man für die bei einer Szintillation ausgesandte Energie bei Erregung mit Wasserstoffatomstrahlen von $3 \cdot 10^8$ cm/sec Geschwindigkeit $1,44 \cdot 10^{-10}$ Erg., also weniger als die Reizschwelle des Auges beträgt. Aber selbst angenommen, der Wirkungsgrad für ZnS wäre 0,005 und demnach die bei einer Szintillation ausgesandte Energie $3,6 \cdot 10^{-10}$ Erg., so ist zu bedenken, daß auch bei Verwendung eines Mikroskops nur ein kleiner Bruchteil dieser Energie ins Auge gelangen kann. Selbst im äußerst günstigen Falle bei einer numerischen Apertur von 0,9 und ohne Berücksichtigung der Reflexionsverluste beträgt dieser Bruchteil weniger als $^1/_3$. In der Arbeit von H. v. Dechend und W. Hammer finden sich leider keine Angaben über das benutzte Mikroskop. Man sieht aber, daß man selbst im günstigsten Falle nicht an die Reizschwelle des Auges herankommt, es sei denn, daß die Geschwindigkeit der Strahlen noch wesentlich größer war als vermutet. Jedenfalls erscheint es bei diesem Tatbestand wünschenswert, den Versuch zu wiederholen. Ob der Wirkungsgrad für Sidot-Blende genügend gut bekannt ist, um im Falle der Realität des Effekts auf dieser Methode eine Neubestimmung der Reizschwelle vorzunehmen, ist nach dem Obigen zweifelhaft. Wohl aber kann der Wirkungsgrad für den Sr-Bi-Na-Phosphor als genügend sicher angesehen werden, zumal er sich bei der quantitativen Erklärung der Grenze des Phosphoreszenzleuchtens bei einer bestimmten kleinsten Kanalstrahlenergie („Geschwindigkeit") gut bewährt hat[1]).

1) Diese Zeitschr. **20**, 234, 1919.
2) Ann. d. Phys. **45**, 1063—1087, 1914.
3) Ann. d. Phys. **39**, 849—886, 1912.
4) Ann. d. Phys. **48**, 838—875, 1915.

1) Vgl. letzte Anmerkung.

Würzburg, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 30. Juni 1919.)



Notiz zu dem Aufsatze von Herrn Jentzsch-Gräfe über die Mechanik des Freiballons [1]).

Von R. Seeliger.

Zu dem genannten Aufsatz von Hrn. Jentzsch-Gräfe sei mir die Bemerkung erlaubt, daß ich vor längerer Zeit in dieser Zeitschrift (**17**, 419, 1916) das Luftwiderstandsgesetz für Freiballons bereits an Hand von Beobachtungen an Pilotaufstiegen durchdiskutiert habe. Ohne auf Sachliches hier einzugehen, möchte ich nur hierauf hinweisen, da meine Arbeit — die sich zum Teil also mit ganz ähnlichen Fragen beschäftigt wie die von Hrn. Jentzsch behandelten — Hrn. Jentzsch vollständig entgangen zu sein scheint.

1) Diese Zeitschr. **20**, 320, 1919.

(Eingegangen 15. August 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Der Energieinhalt der Festkörper im Lichte der neueren Forschung.

Von Erwin Schrödinger.

(Fortsetzung.)

§ 12. Wenden wir dies auf einen konkreten „Block" des Festkörpers (Gewicht = 1 Grammatom) an[1]), dann ist uns jedenfalls ein Teil der Eigenschwingungen dieses Blocks wohl bekannt und vertraut: Nämlich die gewöhnlichen elastisch-akustischen Eigenschwingungen. Nun hängt allerdings der Grundton und die ersten Obertöne, der Anfang des „akustischen Spektrums", bekanntlich noch stark von der speziellen Gestalt ab, die man dem Block gegeben hat. Schreitet man aber zu immer höheren Obertönen fort, bei denen der Block von immer zahlreicheren Knotenflächen durchschnitten wird, so tritt der Einfluß der Gestalt sehr bald ganz zurück, wenigstens was die Verteilung der ν_i-Werte auf einer ν-Achse anlangt. Die Zahl der Eigenfrequenzen, die in bestimmte Grenzen fallen, wird dem Volumen des Blocks proportional, und zwar ergibt die Rechnung zwischen ν und $\nu + d\nu$

$$12\pi V \cdot \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3}\right)\nu^2\, d\nu \qquad (30)$$

Eigenschwingungen, wenn V das Atomvolum[2]), c_l und c_t die Schallgeschwindigkeit für longitudinale bzw. transversale elastische Wellen bezeichnen[3]).

Es ist zu erwarten, daß der Ausdruck (30) — als Ergebnis der klassischen Elastizitätstheorie kontinuierlicher Medien — um so unrichtiger wird, je größer die Frequenz ν, je kürzer und mit dem Atomabstand vergleichbarer daher die zugehörige Wellenlänge ($\sim$ Abstand benachbarter Knotenflächen) wird. In der Tat kann man nach der Kontinuumsvorstellung die Berechnung höherer und höherer Obertöne soweit treiben als man will, während nach unserem — vorläufig nach ganz allgemeinem — Strukturbild schon die Berechnung der $3N + 1^{\text{ten}}$ Eigenfrequenz eine vollkommene Utopie ist! Nach Debye darf man aber das durch (30) gegebene Spektrum des mit den gleichen elastischen Eigenschaften ausgestatteten Kontinuums als eine zur Berechnung des Energieinhalts ausreichende Annäherung an das wahre Schwingungsspektrum ansehen, wenn man der atomaren Struktur nur dadurch Rechnung trägt, daß man (30) nicht weiter als bis zur $3N^{\text{ten}}$ Eigenschwingung gelten läßt und das Spektrum dort schroff abbricht. Dieses beispiellos kühne Verfahren liefert uns ohne irgendein detaillierteres atomistisches Strukturbild den Energieinhalt U unmittelbar als Funktion der meßbaren Schallgeschwindigkeiten und des Atomvolums.

Um U zu finden, hat man einfach die durch (30) gegebene Zahl der Eigenschwingungen zwischen ν und $\nu + d\nu$ mit dem jeder einzelnen durchschnittlich zukommenden Energiewert $E(\nu, T)$, nach (14), zu multiplizieren und das Produkt über den ganzen Frequenzbereich zu integrieren:

$$U = 12\pi V \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3}\right)\int_0^{\nu_m} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\, d\nu, \qquad (31)$$

wobei ν_m („ν-maximal") gegeben ist durch

$$12\pi V \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3}\right)\int_0^{\nu_m} \nu^2 d\nu = 3N. \qquad (32)$$

Daß wir dabei den Ausdruck (30) bis $\nu = 0$ herab gelten lassen und auch die Integrale (31) und (32) von $\nu = 0$ angefangen erstrecken (statt von der Frequenz des Grundtons), ist eine durch den äußerst geringfügigen Beitrag der niedrig-

1) P. Debye l. c.
2) Quotient aus chemischem Atomgewicht und Dichte.
3) Debye leitet (30) ursprünglich für ein kugelförmiges Grammatom ab. Eine allgemeine Ableitung gibt M. v. Laue, Ann. d. Phys. (4) 44, 1210, 1914.

sten Eigenschwingungen und in Anbetracht des außerordentlich hohen Wertes von ν_m vollauf gerechtfertigte Vereinfachung.

Zur Berechnung von C_v ist (31) nach T zu differenzieren. Dabei wäre eigentlich zu berücksichtigen, daß c_l und c_t (daher nach (32) auch ν_m) — auch bei konstantem V — Temperaturfunktionen sein können. Hält man die Variabilität für geringfügig genug, um sie zu vernachlässigen gegenüber dem expliziten durch die Quantenformel bedingten Auftreten von T, so ergibt sich

$$C_v = A\frac{\partial U}{\partial T} = 12\pi VA \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3}\right) \cdot \int_0^{\nu_m} \frac{\frac{h^2\nu^4}{kT^2} e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2} d\nu. \tag{33}$$

Den Ausdrücken (31) und (33) läßt sich eine viel durchsichtigere Gestalt geben. Führt man in (32) die Abkürzung ein

$$\frac{1}{\bar{c}^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3}\right), \qquad (34)^{1)}$$

so wird

$$\nu_m = \bar{c}\sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi V}}. \tag{35}$$

Der Koeffizient vor den Integralen (31) und (33) wird $9N/\nu_m^3$ bzw. $9AN/\nu_m^3$. Führt man ferner, in Analogie mit (21), in den Integralen die Integrationsvariable

$$\xi = \frac{h\nu}{kT}, \text{ ferner die Abkürzung } x = \frac{h\nu_m}{kT} \tag{36}$$

ein, so ergibt sich leicht

$$\begin{aligned} U &= 3RT \cdot \frac{3}{x^3}\int_0^x \frac{\xi^3}{e^\xi - 1} d\xi \\ C_v &= 3AR\left[\frac{12}{x^3}\int_0^x \frac{\xi^3}{e^\xi - 1} d\xi - \frac{3x}{e^x - 1}\right] \end{aligned} \tag{37}$$

(letzteres nach Ausführung einer naheliegenden partiellen Integration). — Setzt man noch, analog mit (23),

$$\Theta_{\text{Deb.}} = \frac{h\nu_m}{k} \tag{38}$$

daher

$$x = \frac{\Theta_{\text{Deb.}}}{T}, \tag{39}$$

so erkennt man:

1) $\bar{c}$ ist also ein in eigentümlicher Weise gebildetes Mittel aus den beiden Schallgeschwindigkeiten.

Auch nach der jetzt behandelten Auffassung Debyes sollen die C-Verläufe verschiedener Stoffe zur Deckung gebracht werden können, lediglich durch individuelle Wahl des Temperaturmaßstabes. Denn nach (37^2) hängt C_v nur von $T/\Theta_{\text{Deb.}}$ ab; $\Theta_{\text{Deb.}}$ ist eine Materialkonstante, die sich nach (38), (35) und (34) aus beobachtbaren nicht-thermischen Materialkonstanten soll berechnen lassen. — Für kleine Werte von x, d. i. (gegen $\Theta_{\text{Deb.}}$) große Werte von T konvergiert natürlich (37^2) ebenso wie (27^2) und (22) gegen den Dulong-Petitschen Wert $3AR$.

Prüfung der Debyeschen Theorie an der Erfahrung.

§ 13. Die Prüfung der Theorie an der Erfahrung zerfällt naturgemäß in 3 Teile

a) Gibt es eine Körperklasse, für die das Theorem der thermisch übereinstimmenden Zustände gilt?

b) Ist die Funktionsform durch (37^2) richtig wiedergegeben?

c) Liefern (34), (35) und (38) den richtigen Wert für ν_m bzw. für $\Theta_{\text{Deb.}}$?

Bezüglich a) und b) ist dem früher Gesagten zunächst nur noch hinzuzufügen, daß die (mehrfach gezeichnete) Kurve der Fig. 6 und die Kurve (1) Fig. 2, die uns bisher als zusammenfassender Ausdruck der Beobachtungen galten, in Wahrheit die Debyesche Funktion (37^2) darstellen[1]. Ferner zeigen die Spalten 9 und 10 der Tab. III den ausgezeichneten Anschluß der Debyeschen Funktion an die mehrfach als Zahlenbeispiel herangezogenen Cu-Messungen, und zwar bis zu den tiefsten Temperaturen. (Näheres über das Verhalten bei tiefster Temperatur s. u. § 16.)

Der Vergleich der thermischen [d. h. zur bestmöglichen Anpassung des C_v-Verlaufs an (37^2) ausgewählten] Θ-Werte der Tab. II mit den aus den Schallgeschwindigkeiten zu berechnenden, ist nicht in demselben Umfang durchführbar, da er die Kenntnis des gesamten elastischen Verhaltens, bei isotropen Körpern etwa der Kompressibilität $\varkappa$ und der Poissonschen Zahl[2] σ erfordert. Wenn ϱ die Dichte, so ist bekanntlich[3])

$$c_l = \sqrt{\frac{3(1-\sigma)}{(1+\sigma)\varkappa\varrho}}; \qquad c_t = \sqrt{\frac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)\varkappa\varrho}} \tag{40}$$

und nach (34)

1) Eine Tabelle für diese wichtige Funktion findet man bei W. Nernst, Berl. Ber. 1912, S. 1175.
2) Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdehnung.
3) Siehe z. B. Love, Lehrbuch der Elastizität (Teubner 1907), S. 121f. und 345.

$$\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa\varrho}}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{2(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)}\right)^{3/2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\right)^{3/2}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\psi(\sigma)}{\sqrt{\varkappa\varrho}}, \tag{41}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$\psi(\sigma) = \left[\frac{2}{3}\left(\frac{2(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)}\right)^{3/2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\right)^{3/2}\right]^{-\frac{1}{3}}. \tag{42}$$

In (35) eingesetzt

$$\nu_m = \sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi}}\,\frac{\psi(\sigma)}{a^{1/3}\varrho^{1/6}\varkappa^{1/2}}$$

$$= 5{,}28\cdot 10^7\,\frac{\psi(\sigma)}{a^{1/3}\varrho^{1/6}\varkappa^{1/2}}. \tag{43}$$

a ist das Atomgewicht und es wurde $V = a/\varrho$ benutzt. Nach (38) ist endlich

$$\Theta_{\text{Deb.}} = \frac{h}{k}\sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi}}\,\frac{\psi(\sigma)}{a^{1/3}\varrho^{1/6}\varkappa^{1/2}}$$

$$= 2{,}57\cdot 10^{-3}\,\frac{\psi(\sigma)}{a^{1/3}\varrho^{1/6}\varkappa^{1/2}}. \tag{44}$$

Tabelle IV.

Vergleich der thermisch angepaßten Θ-Werte mit den auf andere Weise berechneten.

1	2	3	4	5	6
Berechn.-Art:	thermisch	elastisch[1]	a. Schm.-P.	optisch	therm. Ausd.
Glng. i. Text:	(37[2])	(35); (38) u. (44)	(47)	(49) u. (50)	(48)
Pb	88	75	89	—	105
Tl	96	—	89	—	—
Hg	97	—	61	—	—
J	106	—	60	—	—
Cd	168	174	133	—	—
Na	172	—	191	—	—
KBr	177	—	216	*R*: 177	—
Ag	215	220	211	—	210
Ca	226	—	238	—	—
KCl	230	227[2])	271	*R*: 230 *D*: 217	—
Zn	235	—	211	—	—
NaCl	281	305[2])	355	*R*: 281 *D*: 260	—
Cu	315	341	326	—	325
Al	398	413	369	—	374
Fe	453	484	399	—	413
CaF_2	474	510[2])	567	*R*: {442, 635 *D*: 412	—
FeS_2	645	696[2])	—	—	—
C (reg.)	1860	—	1564	—	1860

1) Die Zahlen Debyes (l. c.) sind entsprechend der etwas geänderten Wahl der universellen Konstanten (45) mit 1,036 multipliziert.

2) Nach G. Hopf u. L. Lechner, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 643, 1914. — S. u. Gl. (54).

Die verwendeten Zahlenwerte sind

$$h = 6{,}55 \times 10^{-27}\,\text{erg sec};\; k = 1{,}347 \times 10^{-16}\,\frac{\text{erg}}{{}^0C};$$

$$\frac{h}{k} = 4{,}863 \times 10^{-11}\,\text{sec}\,{}^0C;\; N = 6{,}17 \times 10^{23}.[1] \tag{45}$$

Tab. IV, Spalte 2 und 3 gibt eine Gegenüberstellung der so gefundenen Θ-Werte mit den früher benutzten (über die Durchführung der Berechnung für die anisotropen $NaCl$, KCl, CaF_2, FeS_2 s. u. § 17). Die Übereinstimmung ist im großen und ganzen sicherlich hinreichend, um die tatsächliche Wesensgleichheit der Wärmebewegung und der makroskopischen elastischen Schwingungen zu erhärten.

Andere Formeln für die Eigenfrequenz.

§ 14. Debyes Auffassung und Berechnung der Wärmeschwingungen als Überlagerung akustischer Schwingungen aller möglicher Frequenzen erscheint als die konsequente dynamische Weiterbildung des Einsteinschen Gedankens, daß ν von der Atommasse und vom statisch-elastischen Verhalten des Körpers abhängen muß (s. o. § 7). Und obwohl es gerade das Wesentlichste an der Debyeschen Theorie ist, daß sie mit dem Begriff: „die Eigenfrequenz" aufräumt, übernimmt die obere Grenzfrequenz ν_m doch in mancher Hinsicht die Rolle, die jener Begriff in der älteren Auffassung gespielt hatte[2]).

Schon Einstein hatte aus sehr einfachen Überlegungen[3]) (oder am besten aus einfachen „Dimensionsbetrachtungen"[4])) die von uns früher mit Stillschweigen übergangene Beziehung abgeleitet

$$\nu \simeq \frac{3\cdot 10^7}{a^{1/3}\varrho^{1/6}\varkappa^{1/2}}, \tag{46}$$

von der sich (43) nur durch genauere Angabe des Zahlenfaktors und durch den (dimensionslosen) Faktor $\psi(\sigma)$ unterscheidet. In dem Erfolg Debyes spiegelt sich also auch die tiefe Berechtigung jener älteren, mehr qualitativen und die Größenordnung von ν betreffenden Überlegungen[5]).

Von den Versuchen, ν bzw. Θ mit anderen,

1) Nach Nernsts Monografie über den neuen Wärmesatz, S. 199. (Halle a. S., bei Knapp, 1918.)

2) Wegen des Faktors ν^2 in (30) liegt das Gros der Eigenschwingungen nicht sehr weit von ν_m. Zwischen ν_m und $\nu_m/2$ liegt z. B. schon $1-\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 7/8$ aller!

3) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) **34**, 170 u. 590, 1911.

4) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) **35**, 679, 1911.

5) Dasselbe gilt von einer ähnlichen Frequenzformel Madelungs, der den Zusammenhang zwischen elastischer und optischer Frequenz (s. u.) zuerst entdeckte. Madelung, Gött. Nachr. 1909, S. 100; 1910, S. 43. S. a. Sutherland, Phil. Mag. (4) **20**, 657, 1910.

insbesondere mit leichter zugänglichen Materialkonstanten in Zusammenhang zu bringen[1]), war der Lindemannsche[2]) von ziemlich gutem Erfolg. Aus der einfachen Vorstellung, das Schmelzen trete dann ein, wenn die Atomamplituden so groß geworden sind, daß Nachbaratome miteinander kollidieren, leitete er die Beziehung ab

$$\nu = 2{,}80 \cdot 10^{12} \sqrt{\frac{T_s}{a V^{2/3}}}, \quad \Theta = \frac{h\nu}{k} = 136{,}1 \sqrt{\frac{T_s}{a V^{2/3}}}. \qquad (47)$$

[T_s = Schmelztemperatur, alle Zahlen in cm — g — sec — °C].

Den Zahlenfaktor liefert die Theorie allerdings nur der ungefähren Größenordnung nach. Die mit obigem Faktor[3]) berechneten Θ-Werte sind in Sp. 4 der Tab. IV den thermischen (Sp. 2) gegenübergestellt. Bei Verbindungen wurde für a nach dem Vorgang von Rubens[4]) das reziproke Mittel aus den Reziprokwerten der Komponenten gesetzt[5]). — So mäßig zum Teil die Übereinstimmung im einzelnen ist, so wird doch der Gang im großen zweifellos richtig wiedergegeben. —

Aus der Grüneisenschen Theorie[6]) des festen Körpers ergibt sich für die Atomfrequenz

$$\nu_0 = 2{,}91 \times 10^{11} \sqrt{\frac{1}{a V_0^{2/3}} \left(\frac{C_v}{\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial T}} \right)_0}. \qquad (48)$$

Der Index „0" soll andeuten, daß theoretisch der Grenzwert für den absoluten Nullpunkt zu nehmen ist, bzw. resultiert. Der Zahlenfaktor ergibt sich wieder nicht ganz präzise, aber der Größenordnung nach aus der Theorie. Spalte 6 der Tab. IV enthält einige nach (48) berechnete Werte von Θ (d. i. von $\frac{h\nu_0}{k}$). —

Von ganz besonderem Interesse aber ist die nahe Beziehung zwischen dem thermischen und optischen Verhalten bei den durchsichtigen Verbindungen KCl, $NaCl$, KBr und CaF_2. Diese Körper besitzen bekanntlich[1]) an einer (Flußspat an zwei) Stelle im Ultrarot ein ausgezeichnetes selektives Reflexionsvermögen („Reststrahlen"). Rechnet man nun aus der betreffenden Reststrahlwellenlänge λ_R die Frequenz

$$\nu_R = \frac{c}{\lambda_R} = \frac{3 \times 10^{10}\,\text{cm sec}^{-1}}{\lambda_R} \qquad (49)$$

und daraus eine Größe Θ_R

$$\Theta_R = \frac{h\nu_R}{k} = \frac{1{,}459}{\lambda_R}, \qquad (50)$$

so fällt diese (s. Spalte 5 Tab, IV) mit $\Theta_{\text{therm.}}$, wenigstens für die binären Verbindungen praktisch zusammen. Die Grenzfrequenz ν_m ist also in diesen Fällen mit der Reststrahlenfrequenz identisch.

In Spalte 5 sind auch noch einige Θ-Werte eingetragen, die in derselben Weise aus den Eigenwellenlängen der optischen und ultraroten Dispersionsformeln berechnet wurden (durch D gekennzeichnet)[2]). Sie stimmen mit dem thermischen Wert weniger gut, aber doch auch noch einigermaßen überein. —

Nach der älteren „monochromatischen" Auffassung war die optische Wirksamkeit der thermischen Frequenz leicht durch elektrische Ladungen der schwingenden Atome zu erklären[3]). Sie bietet sich dem Verständnis nicht mehr so unmittelbar dar, sobald wir ν_m mit Debye nur als obere Grenzfrequenz aufzufassen gezwungen sind. Die beiden Auffassungen werden sich einigermaßen vereinigen lassen in einem detaillierteren atomistischen Strukturbild, dessen wir, wie sich gleich zeigen wird, auf die Dauer ohnedies nicht entraten können.

Diskussion der Debyeschen Theorie fortgesetzt.

§ 15. Bisher hatten wir unser Augenmerk ausschließlich auf jene „thermisch einfache" Körperklasse gerichtet, die dem Gesetz der übereinstimmenden Zustände folgt. Sehr viele Stoffe — vermutlich wohl die überwiegende Mehrzahl — folgen ihm nicht, sondern zeigen einen individuellen, durch eine Debye-Funktion nicht quantitativ darstellbaren C_v-Verlauf.

---

1) Eine dankenswerte vergleichende Zusammenstellung gibt C. E. Blom, Ann. d. Phys. (4) **42**, 1397, 1913. — S. a. noch H. Alterthum, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 68, 1913; C. Benedicks, Ann. (4) **42**, 154, 1913; S. Pagliani, Cim. (6) **10**, 5, 1915; Lincei Rend. (5) **24**, [1], 835 u. 948, 1915; Gazz. chim. ital. **45**, 66, 1915.

2) F. A. Lindemann, diese Zeitsch. **11**, 609, 1910. — Zur theoretischen Begründung s. a. A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) **35**, 689, 1911; E. Grüneisen, Verh. d. D. Phys. Ges. **13**, 845, 1911.

3) Nernst (l. c. „Gött. Vorträge" S. 76) und Blom (l. c. Ann. d. Phys. **42**, S. 1397) verwenden einen um 10 Proz. größeren Faktor.

4) Rubens u. Wartenberg, Berl. Ber. 1914, S. 169.

5) Die Korefsche Übertragung der Formel auf Verbindungen (diese Zeitschr. **13**, 183, 1912) muß mit dem Verlassen der „monochromatischen" Theorie als überholt gelten.

6) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. (4) **39**, 291 ff., 1912.

1) Rubens u. H. v. Wartenberg, Berl. Ber. 1913, S. 513; 1914, S. 169; Rubens, Berl. Ber. 1915, S. 4.

2) P. Drude, Lehrbuch der Optik, 2. Aufl. (1906) S. 374.

3) Für Diamant hat schon Einstein — allerdings nur vorübergehend — eine optische Eigenwellenlänge bei $\lambda = 11\,\mu$ gefordert. W. W. Coblentz [Carnegie Institut, Washington 1908] will sie bei $\lambda = 12\,\mu$ gefunden haben, nach Reinkober (Diss. Berlin 1910) ist sie nicht vorhanden.

Tabelle V gibt einen Überblick über das bis jetzt vorliegende Beobachtungsmaterial. Soweit Formeldarstellungen von den Autoren versucht wurden, sind sie in der 5. Spalte angegeben. Und zwar wurden sie auch für Verbindungen einheitlich auf das durchschnittliche Grammatom (nicht Mol) bezogen und auf konstanten Druck, d. h. eine etwa angebrachte $(C_p - C_v)$-Korrektion

Tabelle V.

1	2	3	4	5	6
Stoff	Formel[1])	Kristall-system	Temp.-interv.[2])	(durchschn.) Atomwärme Cp	Neuere Literaturstellen
Graphit	C	hexag.	29—1250	$\frac{1}{10}L(350) + \frac{9}{10}L(1850)$	Nernst 1, Koref, Weber.
Schwefel	S	rhomb.	23—297	$\frac{1}{4}L(74) + \frac{3}{4}L(510)$	Nernst 1, Koref, Lindemann
Jodsilber	AgJ	hexag. u. quadr.	18—330	$\frac{1}{2}L(70) + \frac{1}{2}L(220) + 10 \cdot 10^{-5} T^{3/2}$	Nernst 1, 7; Dewar, Koref, Magnus, Ewald.
Chlorsilber	$AgCl$	reg.	22—430	$\frac{1}{2}L(110) + \frac{1}{2}L(250) + 11 \cdot 10^{-5} T^{3/2}$ $\frac{1}{2}D(102) + \frac{1}{2}E(179) + A'Cp^2T$	Nernst 1, 7; Eucken 1; Magnus, Ewald. Nernst 8.
Chlorblei	$PbCl_2$	rhomb.	16—430	$\frac{1}{3}L(85) + \frac{2}{3}L(270) + 6 \cdot 10^{-5} T^{3/2}$ $\frac{1}{3}D(\Theta) + \frac{1}{3}E(\Theta') + \frac{1}{3}E(\Theta'') + A'Cp^2T$	Nernst 1; Eucken 1; Magnus, Schottky. Nernst 8.
Quarz	SiO_2	hexag. am.	26—556 26—556	$\frac{1}{9}L(186) + \frac{8}{27}L(570) + \frac{16}{27}L(1450)$ $\frac{1}{9}L(160) + \frac{8}{27}L(550) + \frac{16}{27}L(1500)$	Nernst 1, Koref, Magnus.
Benzol	C_6H_6	rhomb.	24—263	$\frac{1}{6}L(155) + \frac{5}{6}L(1640)$	Nernst 1, Bogojawlensky.
Kalomel	$HgCl$	tetrag.	93—331	$\frac{1}{2}L(93) + \frac{1}{2}L(324) + 6 \cdot 10^{-5} A T^{3/2}$	Pollitzer, Magnus, Eucken 1; Nernst 8.
Mercurosulfat	Hg_2SO_4	monokl.	24—290	$\frac{2}{7}L(100) + \frac{1}{7}L(200) + \frac{4}{7}L(1050)$	Pollitzer, Schottky.
Thalliumchlorür	$TlCl$	reg.	23—297	$\frac{1}{2}L(96) + \frac{1}{2}L(192) + 8 \cdot 10^{-5} T^{3/2}$	Pollitzer, Russell.
Eis	H_2O	hexag.	23—273	$\frac{1}{6}L(166) + \frac{1}{3}L(725) + \frac{2}{3}L(2500) + 0{,}015 \cdot e^{\frac{T-280}{18}}$ [3]) $\frac{1}{6}D(155) + \frac{1}{6}E(355) + \frac{2}{3}E(1130)$	Pollitzer, Nernst 1; Koref. Nernst 8.
Zinksulfat	$ZnSO_4 \cdot 7H_2O$	rhomb.	27—293	$\frac{4}{27}L(184) + \frac{12}{27}L(675) + 0{,}041\, e^{\frac{T-250}{15}}$ [3])	Pollitzer, Schottky.
Schwefel	S	monokl.	83—294	—	Nernst 1; Koref.
Ferrocyankalium	$K_4FeCy_6 \cdot 3H_2O$	monokl.	83—292	—	Nernst 1; Koref, Lindemann, Schottky.
Oxalsäure	$(COOH)_2 \cdot 2H_2O$	?	84—298	—	Nernst 1; Koref, Lindemann.
Na-phosphat	$Na_2HPO_4 \cdot 5H_2O$ u. $12H_2O$	monokl.	82—291	—	Nernst 1; Koref, Lindemann.
Carborundum	CSi	rhomb?	22—96	$\frac{1}{2}D(913) + \frac{1}{2}E(593)$	Nernst 7; Günther, Russell, Weigel.
Ca-Oxyd	CaO	regul.	28—661	—	Nernst 7; Magnus, Ewald, Lindemann.
Ca-Hydroxyd	$Ca(OH)_2$	hexag.	21—245	—	Nernst 7; Koref, Ewald.
Ca-Karbonat	$CaCO_3$	hexag.	22—659	—	Nernst 7; Magnus, Lindemann.
Alaun	$Al_2(SO_4)_3 \cdot K_2SO_4 \cdot 24H_2O$	reg.	26—91	—	Nernst 7.
Magnesium	Mg	?	27—773	—	Nernst 7; Ewald, Schübel.
Silizium	Si	reg.	20—297	—	Nernst 7; Russell, Weber.
Bleioxyd	PbO	rhomb. tetrag.	21—417	—	Nernst 7; Magnus, Russell.
Bleijodid	PbJ_2	hexag.	22—402	—	Nernst 7; Magnus, Koref, Schottky.

1) Ohne Rücksicht auf die Vielfachheit.
2) das die Messungen umspannen, eventuell jenes (engere), für das die Formeldarstellung gemeint ist.
3) Die e-Potenz soll dem abnormalen Anstieg bei Annäherung an den Schmelzpunkt Rechnung tragen.

Tabelle V (Fortsetzung).

1	2	3	4	5	6
Stoff	Formel[1])	Kristall-system	Temp.-interv.[2])	(durchschn.) Atomwärme C_p	Neuere Literaturstellen
Ca-hydrid	CaH_2	?	70—81	$^1/_2 D(391)$ [1])	Günther.
Zinkblende	ZnS	reg.	22—59	$^1/_2 D(175)$ [1])	Günther.
Magnesia	MgO	?	39—83	$^1/_2 D(768) + {}^1/_2 E(552)$	Günther, Magnus, Russell.
Aragonit	$CaCO_3$	rhomb.	23—56	$^1/_5 D(317) + {}^1/_5 E(280)$	Günther.
Hg-Oxyd	HgO	rhomb. u. klinorh.	25—75	$^1/_2 D(134) + {}^1/_2 E(417)$	Günther, Russell.
Berylloxyd	BeO	hexag.	77—85	$^1/_2 D(1010)$ [1])	Günther.
Kohlendioxyd	CO_2	?	19—200	$^1/_3 D(137,7) + {}^1/_3 E(195) + {}^1/_3 E(750) + ?$	Eucken 2; v. Kohner, Diss. Berlin 1914.
Argon	Ar	?	18—78	$D(85) + 45 \cdot 10^{-5} C_p^2 T$ [2])	Eucken 2.
Stickstoff	N	?	17—61	$D(98) + 16,2 \cdot 10^{-5} C_p^2 T$ [2])	Eucken 2; K.-Onnes 4.
Sauerstoff	O	?	17—40	$D(113) + 64 \cdot 10^{-5} C_p^2 T$ [2])	Eucken 2.
Kohlenoxyd	CO	?	18—57	$D(119) + 66 \cdot 10^{-5} C_p^2 T$ [2])	Eucken 2.

1) Man beachte, daß dies nicht gewöhnliche Debye-Darstellungen sind, wie in Tab. II u. Fig. 6, da der Faktor von $D(\Theta)$ kleiner als 1 ist.

2) Diese vier Stoffe wären formal zu den „thermisch einfachen" zu rechnen; doch sind die abnorm großen Korrektionsglieder ($A' C_p^2 T$) unsicher und die Übereinstimmung zum Teil recht mangelhaft; bei N und O liegt je ein Umwandlungspunkt in dem umspannten Intervall.

Literatur zu Tabelle V. (s. a. Literatur zu Tabelle II); Bogojawlensky: G. Tammann, Kristallisieren und Schmelzen, S. 45. — Eucken 1, diese Zeitschr. 10, 586, 1909; Eucken 2: Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 4 1916. — Nernst 8, Vorträge über die kinetische Theorie usw., bei Teubner 1914, S. 63ff. — K.-Onnes 4, W. H. Keesom und H. K.-O., Amst. Proc. 18, 1247, 1916 [Leiden Comm. 149a]. — H. Schottky, diese Zeitschr. 10, 634, 1909. — O. Weigel, Gött. Nachr. 1915, S. 299.

ist in Evidenz gesetzt. $E(\Theta)$, $L(\Theta)$, $D(\Theta)$ bedeuten bzw. die Einsteinsche Funktion (22), die Nernst-Lindemannsche Funktion (27²) und die Debyesche Funktion (37²). Die Darstellungen beruhen zum Teil auf der älteren „monochromatischen" Auffassung, in deren folgerichtiger Erweiterung den Verbindungen zwei oder mehrere scharfe Eigenfrequenzen zugeschrieben wurden[1]). Vielfach haben sie — schon wegen der Unsicherheit oder Nichtberücksichtigung der C_p-Korrektion — lediglich interpolatorischen Charakter. Eine theoretische Wertung der Formelbildungen wird sich z. T. in den folgenden Abschnitten ergeben.

Erinnert man sich der sehr allgemeinen Grundlagen unserer Rechnung, die keinerlei spezielle Vorstellung über den Aufbau der Materie aus den Atomen, sondern lediglich die makroskopischen Körpereigenschaften benutzt, so ist es überraschend und unerfreulich, daß sie — wenn überhaupt — nicht allgemein gilt. Eine kritische Revision zeigt aber, daß ersteres — die Gültigkeit überhaupt — überraschend genug ist. Gl. (35), welche ν_m bestimmt, spricht nämlich unmittelbar aus, daß die zur Grenzfrequenz ν_m gehörige Länge elastischer Wellen im Körper:

$$\frac{c_l}{\nu_m} \sim \frac{c_t}{\nu_m} \sim \frac{\bar{c}}{\nu_m} \tag{50}$$

von derselben Größenordnung ist, wie der mittlere Atomabstand:

$$\sqrt[3]{\frac{V}{N}}. \tag{51}$$

Daß ein aus Atomen aufgebautes Medium sich bei so kurzen Wellen noch wie ein Kontinuum verhalte, ist nicht zu erwarten und die Verwendung von (30) für dieses Frequenzgebiet erscheint höchst bedenklich[1]).

Von diesem Einwand bleibt unberührt das Gebiet tiefster Temperatur. Denn die Art, wie die Energie jeder Eigenschwingung [Gl. (14)] von ν und T abhängt[2]), bringt es mit sich, daß bei genügender Abkühlung die Schwingungen von der Größenordnung ν_m als erste jeden Einfluß auf die Atomwärme verlieren. Und für die

1) Vgl. bes. A. S. Russell, diese Zeitschr. 13, 59, 1912; Koref ebend. S. 183, 1912. — Demgemäß hat Nernst anfänglich auch $NaCl$ und KCl durch zwei Eigenfrequenzen dargestellt.

1) Vgl. W. Nernst und F. A. Lindemann, Berl. Ber. 1912, S. 1166.

2) $\frac{\partial E(\nu, T)}{\partial T}$ ist (ebenso wie C_v nach (22)) nur Funktion von $\frac{T}{\nu}$ und verschwindet für kleine Werte dieses Arguments.

niedrigeren, deren zugehörige Wellenlänge groß gegen den Atomabstand, gibt (30) wohl sicher die richtige Verteilung.

Zu dieser Kritik stimmt es nun ausgezeichnet, daß, wie schon oben betont, die Koinzidenz der C_v-Verläufe (Fig. 6) untereinander und mit der Debyeschen Funktion gerade bei tiefer Temperatur besonders scharf ist, während die Abweichungen später erheblicher werden und einzelne Stoffe (Fe, FeS_2) überhaupt nur in einem nach oben beschränkten Temperaturbereich zu den thermisch einfachen gezählt werden dürfen. Unsere jetzige Überlegung verlangt darüber hinaus, daß das Grenzgesetz, welches aus (37[2]) für $\lim T = 0$, d. i. $\lim x = \infty$, folgt, überhaupt für alle Stoffe Gültigkeit besitze[1]).

1) P. Debye l. c., Ann. d. Phys. **39**, 801.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

M. Abraham, Theorie der Elektrizität. Erster Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitt über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik von Dr. A. Föppl. Fünfte, umgearbeitete Auflage, herausgegeben von Dr. M. Abraham. Mit 11 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1918. Geh. M. 13.—, geb. M. 14.—.

Das Abrahamsche Lehrbuch ist so bekannt, daß eine Inhaltsangabe hier unnötig ist. Die 2. Auflage ist in dieser Zeitschrift **6**, 527, 1905 besprochen. Die hier vorliegende 5. Auflage weicht nur wenig von der 4., diese aber erheblich von den vorhergehenden, insbesondere der 2. Auflage ab. Die Vektoreneinleitung ist knapper und in mehrfacher Hinsicht dem speziellen Zwecke angepaßter und klarer abgefaßt als früher. Ferner ist das Kapitel über die „Spannungen" des elektromagnetischen Feldes umgearbeitet und weit eingehender gehalten worden. Erwähnung verdient die Behandlung des „Hertzschen Vektors" (S. 79). Die Elektrodynamik bewegter Körper findet man etwas reduziert, und der hierher gehörende Stoff ist zum Teil in den zweiten Band verlegt worden. Ein Parallellesen beider Auflagen dürfte dem Studierenden von Vorteil sein. Im übrigen bedarf das Werk keiner weiteren Empfehlung. Zu wünschen wäre es, daß auch der zweite Band möglichst bald eine dem jetzigen Stande der Dinge entsprechende Neuauflage erleben würde.

H. Hörig.

W. Donle, Lehrbuch der Experimentalphysik für höhere Lehranstalten. 9. u. 10. verbesserte Aufl. 8. VIII u. 393 S. mit 464 Abb., 1 Spektraltafel, 620 Aufgaben und zahlreichen Übungen für das Schülerpraktikum. Stuttgart, Fr. Grub. 1918. Geb. M. 4,80 einschl. T.-Z.

Die neue Doppelauflage des in dieser Zeitschr. **17**, 163, 1916 besprochenen Lehrbuches ist gegen die vorige nach Inhalt, Anordnung und Darstellung des Stoffes im wesentlichen unverändert geblieben. Nur kleinere Abschnitte, z. B. über Kreiselbewegung, Luftfahrzeuge, elektrische Wellen, Prismenfernrohre, Beugungs- und Polarisationsapparate sind eingefügt, um die Schüler mit den wichtigsten neueren Anwendungen der Physik bekannt zu machen.

Götting.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Hamburg der a. o. Professor an der Universität Marburg Dr. Alfred Wegener für Meteorologie, an der Universität Leipzig Dr. W. Möbius für Physik, an der Technischen Hochschule Berlin der Realgymnasial-Oberlehrer Dr. Alfred Baruch für Mathematik, an der Universität Rostock Dr. Günter Falckenberg für angewandte Physik.

Ernannt: Der Direktor des Instituts für Kohlenforschung in Breslau Professor Dr. Fritz Hofmann zum ord. Honorarprofessor für Chemie und Hüttenkunde an der Technischen Hochschule daselbst, der Professor der Chemie an der Columbia Universität in New York Dr. Samuel Tucker zum Chefchemiker an der Chemical Foundation Inc., der Privatdozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Otto Haupt zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Rostock.

Gestorben: Der a. o. Professor der Physik und Honorardozent für Meteorologie und Klimatologie an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn Dr. Arthur Szarvassi, der ord. Professor der Astronomie und Mathematik an der Universität Leipzig Geh. Hofrat Dr. Heinrich Bruns, der ord. Professor der Astrophysik an der Universität Catania und Leiter des Observatoriums auf dem Ätna Dr. Annibale Ricco, der frühere Privatdozent der Physik an der Universität Berlin Dr. Leo Arons.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig. Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und **H. Th. Simon**



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 50 Mark jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 55 Mark, im Ausland 62 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 21. 1. November 1919. No. 553. **20. Jahrgang.**

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen, B. = Besprechung.)

Die um das sieben- bis achtfache gestiegenen Druck- und Papierpreise zwingen mich, den Bezugspreis für die Physikalische Zeitschrift auf 50 Mark für das Inland und 64 Mark für das Ausland zu erhöhen. Für Bezug unter Kreuzband werden 8 Mark fürs Inland und 16 Mark fürs Ausland besonders berechnet. Diese Erhöhung gilt auch für die früheren Jahrgänge, soweit sie noch vorhanden sind.

Leipzig, im November 1919. S. Hirzel.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 21. | 1. November 1919. Redaktionsschluß für No. 23 am 15. November 1919. | 20. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Ionisierungsspannungen des Heliums.

Von J. Franck und P. Knipping.

Durch neuere Untersuchungen[1]) über Zusammenstöße langsamer Elektronen mit Gasmolekülen und über die Ionisierungsspannungen in den Dämpfen einer großen Reihe von Metallen ist sichergestellt, daß der nach der Bohrschen Theorie geforderte Zusammenhang zwischen der Absorptionsserie der unerregten Atome und den Ionisierungsspannungen vollkommen den Tatsachen entspricht. Kurz zusammengefaßt lautet das Resultat dieser Untersuchungen: Die Elektronen stoßen in Metalldämpfen (und auch in Edelgasen) elastisch mit den Gasmolekülen zusammen, solange ihre Energie kleiner ist als $h\nu_r$, wobei mit ν_r die Frequenz des langwelligen Anfangsgliedes der Absorptionsserie bezeichnet wird. Ist die Energie $h\nu_r$ erreicht oder größer als $h\nu_r$ geworden, so verliert das Elektron beim Zusammenstoß diesen Energiebetrag, und es tritt die Emission von Licht der Frequenz ν_r auf. Da diese Linie in einer Zahl von Fällen als Resonanzlinie erkannt worden ist, so wird das Potential, das ein Elektron durchlaufen haben muß, um die Energie $h\nu_r$ zu besitzen, oft als Resonanzpotential bezeichnet[2]). Von den weiteren Gliedern der Absorptionsserie läßt sich nach dem Prinzip des unelastischen Elektronenstoßes bisher nur die ultraviolette Grenzfrequenz der Absorptionsserie nachweisen. Hier wird der Betrag $h\nu_\infty$ verbraucht, und es tritt Ionisation des Gases ein; das Elektron hat, um diesen Energiebetrag zu besitzen, die Ionisierungsspannung durchlaufen. Bestimmungen der Resonanzpotentiale und der Ionisierungsspannungen können somit zur Kontrolle der Theorien verwandt werden, die über die Konstitution der Atome aufgestellt sind. Genaue und durch Spektralbeobachtungen mit größter Präzision bestätigte Aussagen über die Atomkonstitution liegen bisher nur vor in Fällen, in denen es sich um Atome handelt, die nur ein Elektron besitzen, d. h. um das Wasserstoffatom und das einfach geladene positive Heliumatom. Nach den glänzenden Bestätigungen der Bohr-Sommerfeldschen Berechnungen dieser Fälle, vor allem der Feinstruktur der Fowler-Serie, die von Paschen[1]) untersucht wurde, kann man mit Sicherheit als die Ionisierungsspannung des H-Atoms $= 13,52$ Volt ansetzen und für das positive Heliumatomion den vierfachen Betrag davon $= 54,08$ Volt, obgleich diese Größen naturgemäß nicht der direkten Messung zugänglich sind. Für den Fall, daß zwei Elektronen sich am Aufbau beteiligen, sind die Verhältnisse schon unsicherer, so liegen beim Wasserstoffmolekül zwar ganz bestimmte Ansätze vor, jedoch wird man wohl nicht sagen dürfen, daß trotz aller bemerkenswerten Erfolge z. B. das Bohr-Debyesche Wasserstoffmolekül mit Sicherheit richtig wäre. Geradeso liegt es bei dem Modell des normalen Heliumatoms. Hier liegen zwei Ansätze vor, der von Bohr und neuerdings die Berechnung von Landé[2]). Bohr nimmt an, daß im unerregten Zustand

1) Literatur siehe bei J. Franck und G. Hertz, diese Zeitschr. **20**, 132—143, 1919.

2) Der Name Resonanzpotential scheint uns prinzipiell berechtigt, denn unseres Ermessens folgt aus den Bohrschen Anschauungen, daß in jedem Falle die langwellige Grenzlinie der Absorptionsserie eine Resonanzlinie ist. Wenn ein Elektron aus seiner stabilen Ruhebahn durch Lichtabsorption in die nächstfolgende Bahn gehoben wird, so kann bei seiner Rückkehr in den Normalzustand nur derselbe Sprung des Elektrons rückwärts wieder erfolgen, d. h. es muß Licht derselben Wellenlänge, das absorbiert wurde, remittiert werden. Diese Tatsache wird es ermöglichen, auch bei Metallen mit sehr hohem Siedepunkt die Ionisierungsspannung zu berechnen, wenn man die Lage der Resonanzlinie feststellt, die sich nach Wood schon bei äußerst tiefen Dampfdrucken nachweisen läßt.

1) Paschen, Ann. d. Phys. **50**, 901, 1916.

2) Landé, diese Zeitschr. **20**, 228, 1919.

beide Elektronen auf einer gemeinschaftlichen einquantigen Bahn kreisen. Wird ein Elektron weggenommen, so ergibt sich, daß dazu ein Energiebetrag aufzuwenden ist, der das $2^1/_8$ fache der Ionisierungsspannung des Wasserstoffatoms beträgt; also eine Ionisierungsspannung von 28,73 Volt. Der erste Sprung des Elektrons von der ein- auf die zweiquantige Bahn würde bei strenger Wasserstoffähnlichkeit des Heliums $^3/_4$ dieses Betrages, also eine Resonanzspannung von 21,55 Volt ergeben. Da strenge Wasserstoffähnlichkeit wegen des Vorhandenseins des zweiten Elektrons naturgemäß nicht vorliegt, wird man aus diesem Wert nur einen Anhaltspunkt für die Größe des Resonanzpotentials entnehmen dürfen. Landé ist es neuerdings gelungen, indem er die gegenseitige Störung der Elektronenbahnen berücksichtigt, und die verschiedenen Ellipsenbahnen berechnet, die bei azimutaler, radialer uud räumlicher Quantelung auftreten, den allgemeinen Verlauf der bekannten Heliumserien wiederzugeben, wobei angenommen wird, daß die Hauptserien von zweiquantigen Bahnen als Ruhebahnen ausgehen; das unerregte Helium enthält hier zwei einquantige Bahnen mit verschiedenen Radien und Lagen im Raum. Auf seinen Energiegehalt wird rückwärts aus den mehrquantigen Bahnen extrapoliert mit dem Resultat, daß die Ionisierungsspannung des normalen Heliums etwas größer sein sollte, als die nach Bohr berechnete. Auf dieses Resultat der größeren Ionisierungsarbeit wird besonderer Wert gelegt, da bei allen Atommodellen angenommen wird, daß das stabilste Modell der Wirklichkeit entspricht.

Experimentell liegen über die Ionisierungsspannung des Heliums eine Reihe von Arbeiten vor, die alle zu dem Resultat kamen, daß die Ionisierungsspannung zwischen 20 und 21 Volt läge[1]). Dieser Wert stimmt angenähert mit dem überein, der sich nach Bohr als die Resonanzspannung ergeben sollte. Bohr und van der Bijl haben infolgedessen der Vermutung Ausdruck gegeben, daß die bei 20,5 Volt beobachtete Ionisation sekundär durch einen lichtelektrischen Effekt an den Elektroden bedingt sei.

Der eine von uns hat in Gemeinschaft mit Hertz darauf hingewiesen, daß man sich der Bohr-van der Bijlschen Anschauung nur anschließen könnte, wenn man auch noch einen Photoeffekt an Verunreinigungen im Gas mit zur Deutung der Resultate heranzieht, da bei einer Resonanzspannung von 20,5 Volt eine so kurzwellige Strahlung entsteht, daß alle in Frage kommenden gasförmigen Verunreinigungen schon hierdurch ionisiert werden können. Indirekte Schlüsse auf die Ionisierungsspannung des Heliums liegen ferner vor von Richardson und Bazzoni, die die ultraviolette Grenze der Heliumspektren untersuchten durch Feststellung der Geschwindigkeit von lichtelektrisch ausgelösten Elektronen. Sie finden, daß die ultraviolette Grenze zwischen 470 Å und 420 Å liegen würde, was einer Ionisierungsspannung von 26 bis 29 Volt entspricht. Aston[1]) schließt aus Untersuchungen über die Verhältnisse im Kathodendunkelraum der Heliumentladung auf eine Ionisierungsspannung zwischen 25 und 30 Volt. Aus Cuthbertsons[2]) Untersuchungen über die Dispersion des Heliums ergibt sich eine Elektronenfrequenz, deren Umrechnung auf die Ionisierungsspannung durch die Quantenbeziehung 24,4 Volt ergeben würde. Eine interessante und wichtige Untersuchung von Rau[3]) über Lichterregung im Helium durch Kathodenstrahlen ergibt eine fernere indirekte Möglichkeit der Berechnung der Ionisierungsspannung. Rau beobachtete bei Anregung durch Kathodenstrahlen bei 75 bis 80 Volt das Auftreten der ersten Linie der Fowler-Serie, die dem Sprung eines Elektrons eines einfach positiv geladenen Heliumatoms aus einer dreiquantigen Bahn auf eine vierquantige entspricht. Es muß also durch Elektronenstöße von 75 bis 80 Voltstrahlen die Energie übertragen werden können, die genügt um ein Elektron ganz fortzunehmen und das zurückbleibende zweite Elektron auf eine vierquantige Bahn zu heben. Diesen letzteren Betrag kennt man wegen der Wasserstoffähnlichkeit des Heliumions, er beträgt 50,7 Volt, daher bleibt für die Ionisierungsspannung des Heliumatoms ein Betrag von 25 bis 30 Volt. Somit liefern alle bisher vorliegenden indirekten Methoden Werte, die zwar angenähert mit den theoretischen übereinstimmen; aber ihre Genauigkeit genügt nicht zu einer scharfen Prüfung der vorgeschlagenen Atommodelle, während die direkten Bestimmungen zwar genauer sind, aber offenbar nicht das Ionisationspotential, sondern das Resonanzpotential des Heliumatoms darstellen. Bei dieser Sachlage schien es uns wünschenswert, eine genaue Bestimmung des Resonanzpotentials und des Ionisationspotentials zur Abtrennung eines und beider Elektronen des Heliums vorzunehmen, um so den Energieaufwand kennen zu lernen, der zur vollständigen Zerlegung des Atoms in seine Bestandteile aufzuwenden ist. Nach Vor-

1) Wo keine weiteren Angaben gemacht sind, finden sich ausführliche Literaturangaben bei Franck und Hertz loc. cit.

1) Aston, Proc. Roy. Soc. **80**, 45, 1908.
2) C. und M. Cuthbertson, Proc. Roy. Soc. 84. 13, 1910.
3) H. Rau, Sitz-Ber. der Phys. Med. Ges. Würzburg, 26. Februar 1914.

liegen unserer Hauptresultate ist eine Arbeit von Frank Horton und Ann. Davies[1]) über die Ionisierungsspannung des Heliums erschienen, die uns erst nach Abschluß der Arbeit zugänglich wurde. Unsere Resultate sind mit denen

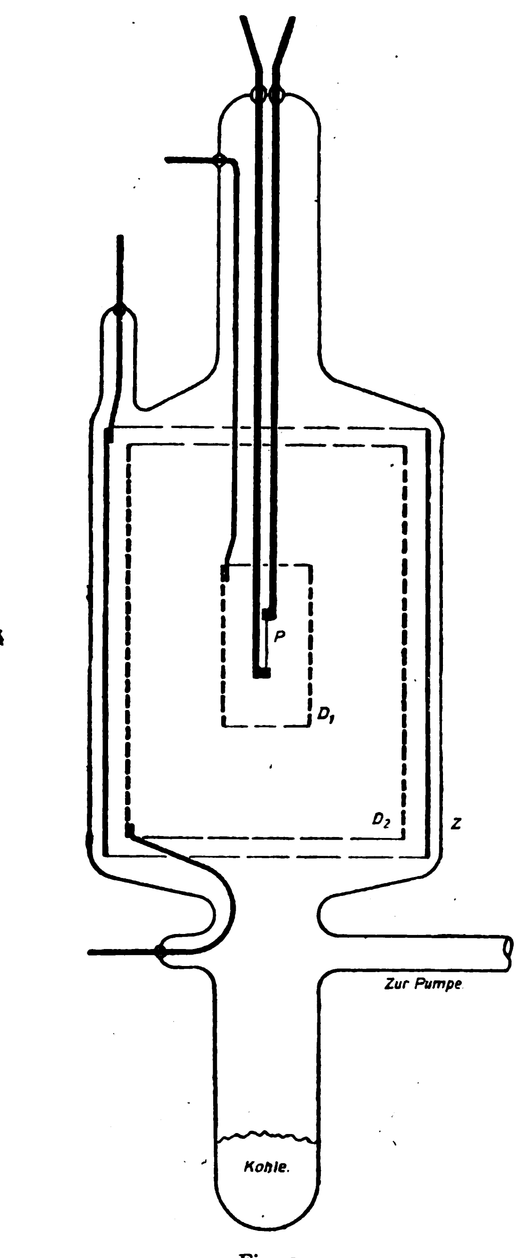


Fig. 1.

der genannten Verfasser in allen den Punkten, die sie untersucht haben, in guter Übereinstimmung, worauf weiter unten eingegangen wird.

Die Ausführung der Versuche wurde mit einer Anordnung durchgeführt, die in der Fig. 1 schematisch dargestellt ist.

Ein dünner Platindraht P wurde durch einen elektrischen Strom geglüht und diente als Elektronenquelle. Er war umgeben von zwei konaxial angeordneten Platindrahtnetzen D_1, D_2, die ihrerseits von einem Platinzylinder Z umschlossen wurden. Die Anordnung gleicht der früher von Franck und Hertz benutzten bis auf das zweite Drahtnetz, dessen Einführung nach dem Vorbild von Goucher und Davies geschah. Die Verwendung eines zweiten Netzes ergab für uns die Möglichkeit einer Benutzung einer größeren Zahl von neuen Schaltungen, so daß für jeden Elektronensprung die günstigsten Bedingungen erprobt werden konnten. Wir verzichten auf die Beschreibung unseres gesamten sehr großen Materials und geben hier nur die Methoden an, die uns als die besten erschienen sind.

Bestimmung der Resonanzspannung.

Bei der Bestimmung der Resonanzspannung konnten wir davon ausgehen, daß sie nahe bei dem von Franck und Hertz zuerst beobachteten Wert von 20,5 Volt liegen müsse. Eine möglichst genaue Bestimmung dieser Konstanten erschien uns deshalb besonders notwendig, da wir schon vor Erscheinen der Landéschen Arbeit von der Vermutung ausgingen, daß die bekannten Hauptserien des Heliums von zweiquantigen Bahnen ausgehen. Ist diese Anschauung richtig, so kann man aus der Resonanzspannung und der Grenze derjenigen Serie, die von dem durch die Resonanzspannung angeregten Helium ausgeht, die Ionisierungsspannung berechnen. Nun gibt es, wie hauptsächlich Paschen und Runge sowie Paschens Schüler gezeigt haben, zwei Seriensysteme des Heliums, die neuerdings noch von Stark[1]) ergänzt worden sind. Die Grenze der beobachteten Hauptserien dieser Systeme haben die Wellenlänge $\lambda = 2600$ Å und $\lambda = 3122$ Å, d. h. es müssen zwei Anfangsbahnen existieren, von denen das Elektron zum Sprung ins Unendliche, die Ionisierungsarbeit von 4,78, bzw. 3,98 Volt (aus der $h\nu$ Beziehung berechnet) benötigt. Folglich sollten auch 2 Resonanzspannungen existieren, die sich um 0,8 Volt unterscheiden sollten. Man muß also ein Verfahren zur Messung anwenden, bei dem man sicher ist, welche von den beiden möglichen Resonanzspannungen bei der Messung beobachtet wird. Die früheren Erfahrungen haben nun gezeigt, daß man bei relativ hohem Druck und kleinen Potentialgradienten in Edelgasen und Metalldämpfen immer den mit der

1) F. Horton und A. C. Davies, Proc. Roy. Soc. 95, 408—429, 1919.

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 56, 577, 1918.

kleinsten Energie auftretenden Elektronensprung durch das Einsetzen von unelastischen Elektronenstößen und Auftreten von Lichtemission nachweisen kann[1]). Mißt man also mit einem solchen Verfahren, dann muß man aus dem erhaltenen Wert durch Hinzuaddieren des aus der größeren Seriengrenze sich berechnenden Wertes von 4,78 Volt die Ionisierungsspannung erhalten. Zu den hier angegebenen Messungen wählten wir folgendes Schaltschema. Die Elektronen wurden zwischen dem Glühdraht, der die Elektronenquelle darstellt, und dem ersten Drahtnetz (D_1 der Figur) mit Spannungen beschleunigt, die durch Abzweigen von einem großen Widerstand in ganz kleinen Stufen variiert werden konnten. Zwischen das Drahtnetz D_1 und das Drahtnetz D_2 wurde ein schwaches (die Elektronen bremsendes) Gegenfeld gelegt, das durch Anlegen einer Potentialdifferenz von höchstens einigen Zehntel Volt erzeugt wurde. Zwischen das Drahtnetz D_2 und dem über ein Galvanometer zur Erde geleiteten Auffangezylinder Z wurde ein starkes Gegenfeld gelegt, das genügte, um alle Elektronen zur Umkehr zu bringen. (Das Verfahren gleicht dem Lenardschen zur Messung der Ionisierungsspannung mit dem Unterschied, daß die Elektronen auf einer langen Wegstrecke, wo sie sehr oft mit den Heliumatomen zusammenstoßen, nicht oder nur sehr wenig durch elektrische Felder abgebremst werden.) Evakuiert wurde bis zum Klebenbleiben des Quecksilbers an der Kappe der Kapillare des Mac Leod's mit der kombinierten Dampfstrahl-Diffusions-Quecksilberpumpe von Vollmer[2]), die sich sehr gut bewährte. Das Helium stand tagelang über gut ausgeglühter Kokosnußkohle in flüssiger Luft. Der Druck betrug bei diesen Messungen nie unter 1,5 mm Quecksilber. Die Messungen ergaben dann folgendes: Bei Vergrößerung der die Elektronen zwischen dem Glühdraht und dem Drahtnetz D_1 beschleunigten Spannung bis ca. 21 Volt gibt das Galvanometer keinen Ausschlag. Die Elektronen treten durch D_1 in den Raum zwischen den Drahtnetzen und dem Zylinder ein, stoßen elastisch mit den Heliumatomen zusammen und kehren durch das starke Gegenfeld wieder um. Bei ungefähr 21 Volt, je nach der Anfangsgeschwindigkeit der am Glühdraht ausgelösten Elektronen, sowie der Richtung des Potentialgefälles des den Glühdraht durchfließenden Heizstromes, setzt dann plötzlich ein Galvanometerausschlag ein, der bei einer Steigerung um wenige Hundertstel Volt vom Werte 0 bis zur Größe von ca. 10 cm anwächst. Er ist hervorgerufen durch das plötzliche Einsetzen der äußerst kurzwelligen Lichtstrahlung, die einerseits die Spuren der verunreinigenden Gase weitgehend ionisiert und das Wandern positiver Ionen zum Zylinder veranlaßt, andererseits durch einen starken lichtelektrischen Effekt am Platinzylinder, bei dem die gebildeten Elektronen von der Elektrode fortgezogen werden. Dieses Einsetzen des Stromes ist, wie erwähnt, äußerst scharf. Die Bestimmung des dazu nötigen Potentials genügt jedoch, wegen der Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen, Polarisationsschichten usw., noch nicht zur Bestimmung des Resonanzpotentials, vielmehr braucht man dazu — wie früher gezeigt — den Abstand von den Spannungen, die den Vorgang ein zweites, bzw. ein drittes Mal erzeugen.

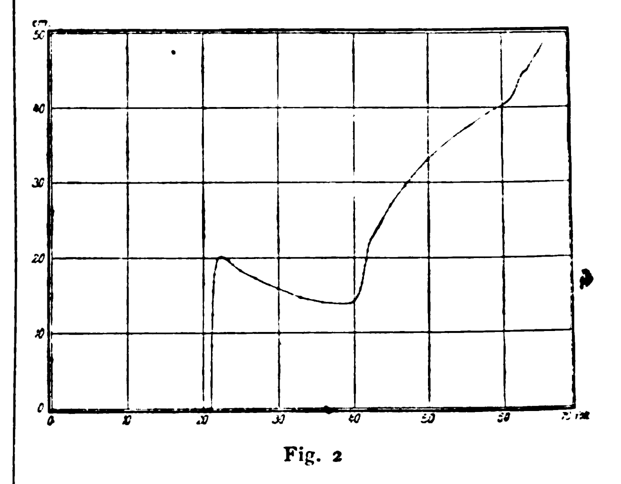


Fig. 2

Fig. 2 enthält eine derartige typische Kurve; sie beginnt bei 21 Volt, hat ihren steilsten Anstieg bei 21,2, der zweite steile Anstieg liegt bei 41,5, der dritte bei 62,2 Volt. Die Differenzen sind 20,3 und 20,7 Volt, mit einem Mittelwert von 20,5 Volt. Die Kurve ist wie alle, bei denen die Messungen über den ganzen Kurvenbereich ausgedehnt wurden, nicht sehr gut, da durch das lange Glühen des Drahtes das Gas verunreinigt wurde. Wir haben uns deshalb meistens darauf beschränkt, nur an den drei in Frage kommenden Stellen zu messen. Als Gesamtmittel ergibt sich für die Resonanzspannung der Wert 20,5 ± 0,25 Volt. Aus diesem Wert berechnet sich die die Ionisierungsspannung zur Wegnahme eines Elektrons unter den oben ausgeführten Voraussetzungen zu 25,3 ± 0,25 Volt. Es war noch zu beweisen, daß bei 20,5 Volt eine Lichtemission einsetzt. Dies wurde gezeigt durch die von Goucher und Davies angegebene Schaltweise, bei der sowohl die aus dem Gase kommenden Elek-

1) Die Erklärung hiervon siehe bei Franck und Hertz, loc. cit.

2) Die Pumpe wird in ausgezeichneter Ausführung von dem Glasbläser Hanff, Berlin NW., Luisenstraße 67 geliefert.

tronen wie auch die positiven Ionen durch Gegenfelder gehindert wurden, die Auffangeelektroden zu erreichen. Dann gelangt die lichtelektrische Emission allein zur Beobachtung. Es ergaben sich Kurven mit Knicken im richtigen Abstand von ca. 20,5 Volt, aber die Genauigkeit der Bestimmung ist der oben ausführlich beschriebenen unterlegen. Wir haben weitere Versuche ausgeführt über die Frage, ob noch eine zweite Resonanzspannung, die, wie oben angeführt wurde, um 0,8 Volt höher liegen müßte, vorliegt. In der Tat haben wir öfter in möglichst reinem Gas Andeutungen eines zweiten Maximums in erwartetem Abstand erhalten, wie z. B. aus den Kurven der Fig. 3 hervorgeht, welche die graphische Differentiation dreier Kurvenstücke in den betr. Bereichen darstellt. Das zweite Maximum ist bei 20 Volt ganz schwach sichtbar, bei 40 Volt schon deutlich und bei 60 Volt übersteigt es das erste.

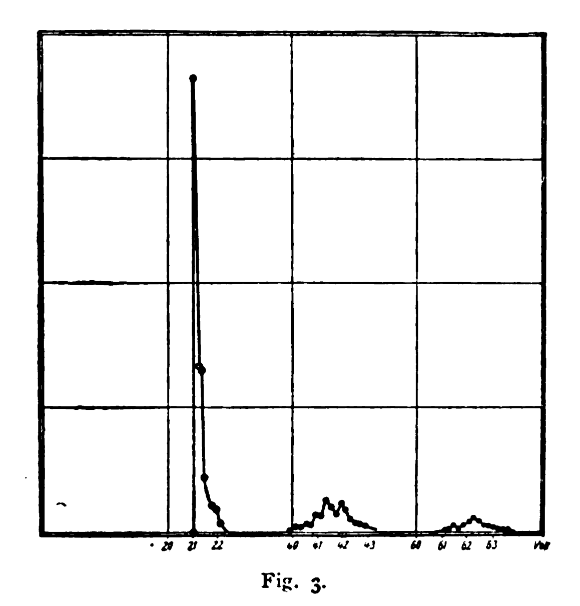


Fig. 3.

Gerade dies Verhalten spricht für die Realität der Erscheinung, da der mehr Energie verbrauchende Stoß bei den höheren Spannungen, die bei 40 und 60 Volt auf einem freien Wege durchlaufen werden, mit wachsender Wahrscheinlichkeit eintreten muß. In weniger reinem Gas laufen die Maxima ineinander und das ist auch der Grund, der die Genauigkeit unserer Messung auf den angegebenen Betrag beschränkte. Durch andere Schaltweise, bei der das auf einer freien Weglänge durchlaufene Potential größer ist und bei der zur Beobachtung die Zahl der Elektronen kam, die bestimmte Energieverluste beim Zusammenstoß erlitten hatten, gelang es uns manchmal das zweite Maximum deutlicher zu erhalten und sogar Anhaltspunkte für ein drittes Maximum, das auch theoretisch zu erwarten ist, zu finden. Das erste Glied der von der weiter innen gelegenen zweiquantigen Bahn ausgehenden Serie ist nämlich nach Paschen eine Resonanzlinie mit der Wellenlänge 1,08 μ, entsprechend 1,2 Volt, so daß ein dritter unelastischer Elektronenstoß bei einem um diesen Betrag höheren Potential zu erwarten ist. Wir hoffen, sobald wir flüssigen Wasserstoff zur Verfügung haben, die Beobachtung dieser Resonanzpotentiale sicherstellen zu können und wollen hier nur mit aller Reserve auf diesen Punkt hinweisen[1]). Die Klärung dieser Frage wird auch eine Heraufsetzung der Genauigkeit der Messungen der Ionisierungsspannungen erbringen.

Messung der Ionisierungsspannung zur Abspaltung eines Elektrons.

Bei der Messung der Ionisierungsspannung muß man, um den Beginn der Ionisation scharf nachweisen zu können, das Prinzip anwenden, dem Elektron auf einer oder wenigen freien Weglängen die Geschwindigkeit zu geben, die der angelegten Spannung entspricht und nachdem sie die Geschwindigkeit erreicht haben, muß man den Elektronen möglichst viel Gelegenheit zum Zusammenstoß mit Atomen geben, ehe sie durch elektrische Gegenfelder abgebremst werden. Wir erreichten das anfangs dadurch, daß wir bei hohem Druck (2 bis 3 mm) arbeiteten und dabei die Elektronenquelle, d. h. den Glühdraht so nahe wie möglich, bis auf ca. 1 mm Abstand, an das Netz heranbrachten. Dann erhalten bei $p = \sim 1$ mm die Elektronen ihre Geschwindigkeit auf zwei bis drei Weglängen, treten durch das Netz D_1 hindurch und können im Raum zwischen den Netzen mit Heliumatomen zusammenstoßen, die sie bei Überschreitung der Ionisierungsspannung zu ionisieren vermögen. Das Netz D_2 wurde mit dem Zylinder Z verbunden und gemeinschaftlich über das Galvanometer geerdet. Zwischen D_1 und D_2 lag ein so starkes Feld, daß die Elektronen nicht

1) Dieser Punkt, sowie überhaupt die interessante Tatsache, daß das erregte Helium, also das Helium im alkaliähnlichen Zustande, nach Paschen (Ann. d. Phys. **45**, 625, 1914) eine Resonanzemission zeigt, scheint uns einen Anhalt dafür zu bieten, daß der alkaliähnliche Zustand des Heliums gewissermaßen metastabil ist. Ein Elektron, das aus dieser Bahn in die nächste gehoben wird, kehrt immer wieder in diese zweiquantige Bahn zurück und springt niemals direkt in die einquantige stabile Bahn. Vielleicht hängt damit die merkwürdige Tatsache der starken Absorption von Helium (und auch den anderen Edelgasen) an zerstäubendem Metall in Geißler-Röhren zusammen. Man würde danach annehmen können, daß es im erregten Zustand absorbiert wird, und ehe es in den unerregten Zustand zurückkehrt, in welchem es vom Metall wieder freigegeben werden müßte, durch Fortschreiten der Zerstäubung von neuen Metallschichten bedeckt wird. Auch hierauf hoffen wir zurückkommen zu können.

bis zum Netz D_2 vordringen konnten. Man erhält dann Kurven, die von 20 Volt an einen sehr schwachen Strom anzeigen und bei ca. 25 Volt jäh in die Höhe gehen. Wir verließen dieses Verfahren, da bei ihm die Lage des Resonanzpotentials nicht genau genug ablesbar war und somit die Ionisierungsspannung selbst nur auf 1 Volt genau feststellbar war. Wesentlich genauere Resultate ergab das Schaltschema, das wir oben als das günstigste zur Messung des Resonanzpotentials beschrieben haben. Nur mußte man selbstverständlich wesentlich niedrigere Drucke anwenden, damit ein Teil der Elektronen bei der Resonanzspannung und ein Teil erst bei der Ionisierungsspannung unelastische Zusammenstöße erleiden konnte. Bei den benutzten Apparatdimensionen erreicht man diesen Zustand bei einem Druck von ca. 0,2 mm. Eine weitere Änderung der Schaltung gegen oben bestand darin, daß das zwischen den Drahtnetzen bestehende kleine Potentialgefälle eine Richtung erhielt, bei der die Elektronen zwischen den Netzen schwach weiter beschleunigt wurden. Zwischen D_2 und den Auffangezylinder wurde das starke Gegenfeld gelegt. Als Beispiel einer typischen Kurve dient Fig. 4.

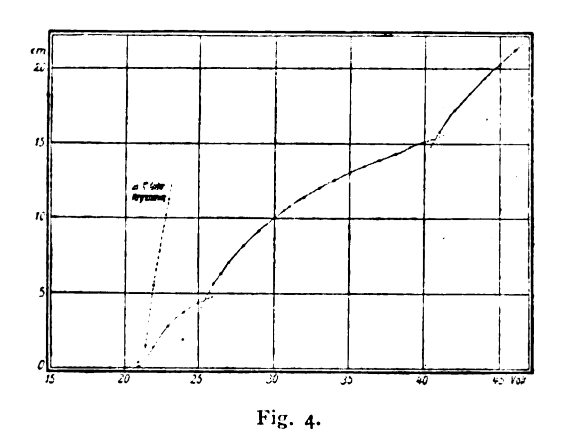


Fig. 4.

Der erste Galvanometerausschlag setzt bei 20,5 Volt ein; ein deutlicher Knick liegt bei 25,4 Volt und bei 41 Volt liegt der Knick, der dem doppelten Wert des Resonanzpotentials entspricht. Als Mittelwert der Beobachtungen ergibt sich für die Ionisierungsspannung

$$25{,}4 \text{ Volt} \pm 0{,}25 \text{ Volt};$$

und für die Resonanzspannung wieder der Wert 20,5 Volt. (Hier müssen wir zur Bestimmung des Resonanzpotentials den Beginn der Anstiege nehmen, weil wir bei so kleinen Drucken arbeiten, daß nicht nur der erste, sondern alle Sprünge auftreten können.) Eine weitere Bestimmung der Ionisierungsspannung führten wir aus durch Nachweis des unelastischen Stoßes der Elektronen bei ca. 25 Volt. Sie wurde gewonnen durch Untersuchung der Zahl von Elektronen, die nach dem Zusammenstoß mit *He*-Atomen noch gegen ein Gegenfeld von einigen Volt anlaufen können. In diesen Kurven muß sich der unelastische Stoß sowohl beim Resonanzpotential wie beim Ionisierungspotential durch eine Abnahme der die Elektrode erreichenden Elektronen bei der betreffenden Spannung dokumentieren.

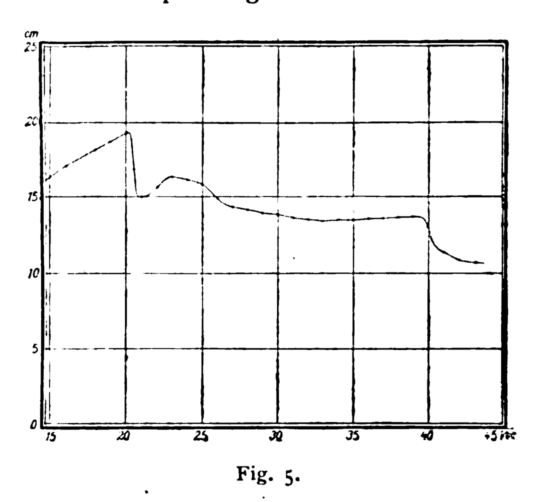


Fig. 5.

Fig. 5 zeigt ein Beispiel solcher Kurven. Bei ihnen ist nur Wert zu legen auf die nach abwärts zeigenden Knicke, sie liegen wie erwartet in der Gegend von 20, 25 und 40 Volt. Die übrigen Singularitäten erklären sich auch aus dem angewandten Schaltverfahren, worauf hier ausführlich einzugehen nicht nötig ist, da das Verfahren nicht zu quantitativen Messungen benutzt wurde. Interessant ist der verschiedene Charakter der Knicke beim Resonanz- und beim Ionisationspotential, er ist wohl dadurch bedingt, daß bei ersterem nur Energieverluste von $h\nu_r$ auftreten, bei der Ionisation aber der Energieverlust $h\nu_\infty$ oder größere Energieverluste, in Analogie an das kontinuierliche Absorptionspektrum, das sich dem Serienende anschließt. Der somit erhaltene Wert für die Ionisierungsspannung spricht eindeutig für die Berechtigung der oben gemachten Annahme; die Differenz zwischen Messung und Berechnung von 0,1 Volt liegt durchaus innerhalb der Fehlergrenze, dagegen stimmt der erhaltene Wert nicht mit dem von Bohr und dem von Landé berechneten überein, von denen er um 3 bis 4 Volt abweicht. Man könnte nun meinen, daß trotz der vorher ausgeführten Übereinstimmung mit dem aus den Serienenden und dem Resonanzpotential berechneten Wert bei 25,4 Volt nicht die wirkliche Ionisation, sondern ein anderer Elektronensprung, etwa zu einer dreiquantigen Bahn,

einsetzt und an diesen erst die bekannten Heliumserien anschließen, so daß die wahre Ionisierungsspannung oberhalb 29 Volt liegen würde. Das ist nach dem oben angeführten äußerst unwahrscheinlich und es wird es noch mehr, wenn man bedenkt, daß man sonst sicher bei dem spektral gut durchforschten Helium irgendwelche Linien der Serie mit der Grenze von ca. 9 Volt, deren Anfangslinien in der Gegend von 1800 Å bis 2500 Å liegen müßten, hätte finden müssen. Hinzu kommt, daß wir eine Lichtemission durch den Photoeffekt in dieser Gegend nicht gefunden haben. Wir glaubten jedoch möglichst jeden Zweifel ausschließen zu sollen, indem wir noch die Ionisierungsspannung bestimmten, die gebraucht wird, um dem Heliumatom beide Elektronen auf einmal fortzunehmen, woraus man dann, wie bei der Diskussion des Rauschen Wertes ausgeführt wurde, durch Abziehen der Ionisierungsarbeit für das wasserstoffähnliche einfach geladene Heliumatom, die 54,08 Volt beträgt, wieder auf die Ionisierungsarbeit des normalen Heliumatoms kommen muß.

Bestimmung der Ionisierungsspannung zur Fortnahme beider Elektronen.

Bei der Bestimmung dieser Größe muß man, wenn man nach dem gewöhnlichen Verfahren arbeitet, sehr sauberes Gas verwenden, da bei der hohen Elektronengeschwindigkeit alle Verunreinigungen so weit ionisiert werden, daß der gesuchte Effekt überdeckt wird. Aus dem gleichen Grunde muß der Druck niedrig gewählt werden. Die besten Resultate ergab ein Druck von 0,1 mm Quecksilber. Die Schaltung war die des ersten oben geschilderten Verfahrens zur Messung der gewöhnlichen Ionisierungsspannung, nur war der Glühdraht zentrisch angebracht. Zur Ausschaltung der durch Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen bedingten Ungenauigkeiten mußte in der Kurve wieder der Sprung des Resonanzpotentials erscheinen. Da das Gas sauber gehalten werden mußte, überzeugten wir uns nur durch Kontrollmessungen der ganzen Kurve, daß keine weiteren Knicke als die gesuchten auftraten, beschränkten uns jedoch bei den genauen Messungen nur auf die Untersuchung der beiden uns hier interessierenden Knicke.

Fig. 6 stellt die Kurven dar, aus denen man die Art der Stromänderung in der Gegend der gesuchten Ionisierungsspannung ersehen kann. Die erhaltenen Werte liegen bei 79,5 Volt. Naturgemäß sind die hier auftretenden Knicke nicht sehr intensiv, da bei der hohen Spannung das Helium selbst, besonders aber jede Verunreinigung schon stark ionisiert wird. Um so wichtiger war es, festzustellen, daß der Knick nicht die vierte

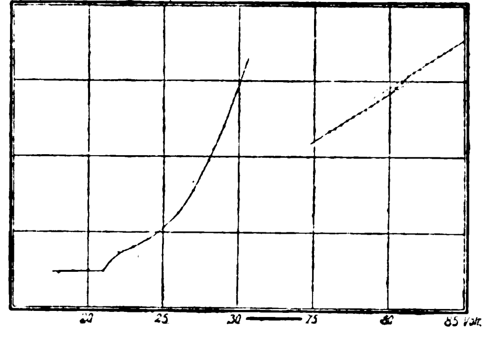


Fig. 6.

Wiederholung des Resonanzpotentials, die bei angenähert gleichen Werten der Spannung liegt, darstellt. Wir überzeugten uns davon dadurch, daß wir zeigen konnten, daß die dritte Wiederholung des Resonanzpotentials in der Gegend von 60 Volt bei den vorliegenden Verhältnissen überhaupt nicht mehr in Erscheinung trat, um so weniger konnte es natürlich die vierte Wiederholung der Resonanzspannung tun. Bei etwas unsauberem Gas, wie es durch längeres Glühen des Platindrahtes entsteht, wird der Knick undeutlicher, ohne seine Lage relativ zum Resonanzpotential zu verändern. Manchmal gelingt es bei einem gewissen Grad der Verunreinigung, ihn als Knick der Kurve nach unten hin zu erhalten. Ein Beispiel dafür gibt Fig. 7.

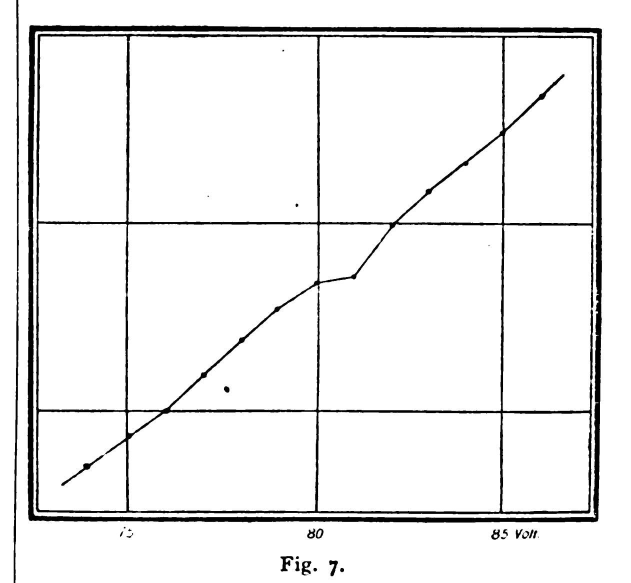


Fig. 7.

Die Deutung der Erscheinung liegt darin, daß der Elektronenstoß bei 80 Volt schon eine Reihe von Ionenpaaren aus den Verunreinigungen liefern kann, während beim Helium die ganze Energie eines 80 Voltstrahls für einen Atomprozeß verbraucht wird. Hierdurch wird der reguläre Anstieg der

Kurve beim Einsetzen dieses Ionisierungsprozesses unterbrochen. Der Mittelwert der ausgeführten Messungen ergab 79,5 ± 0,3 Volt. Nach Obigem ergibt sich daraus durch Subtraktion von 54,08 die Ionisierungsspannung zum einfach geladenen Heliumatom in Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert zu 25,4 Volt, wobei die genaue Übereinstimmung natürlich Zufall ist.

Nach Abschluß der Messungen wurde uns die anfangs erwähnte neue Arbeit von Frank Horton und Ann. Davies zugänglich. Die Verfasser arbeiteten z. T. nach ganz ähnlichen Methoden wie wir. Sie erhalten als Resonanzspannung 20,4 und als Ionisierungsspannung 25,7 Volt, was mit unseren Messungen in erfreulicher Übereinstimmung ist. Als Gesamtresultat folgt, daß das Helium merklich weniger stabil ist, als nach den Atommodellen von Bohr und Landé zu erwarten war.

Ein Teil der verwandten Apparate war aus Mitteln der Jagorstiftung angeschafft, welche einem von uns vor dem Kriege freundlichst zur Verfügung gestellt waren. Wir haben dafür bestens zu danken.

Berlin-Dahlem, Juni 1919. Physikalische Abteilung des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Physik. Chemie und Elektrochemie.

(Eingegangen 26. Juni 1919.)

Über den Empfang ungedämpfter Wellenzüge durch Überlagerung.

(Mitteilung aus dem Telegraphen-Versuchsamt.)

Von H. Salinger.

1. Mit der immer weiter greifenden Verwendung ungedämpfter Wellen in der Telegraphie ohne Draht findet auch das an Einfachheit und Empfindlichkeit kaum zu übertreffende Empfangsverfahren durch Überlagerung immer mehr Verbreitung. Hierbei werden, wie bekannt, Schwingungen eines Hilfssenders erzeugt, deren Periode nur wenig von der der ankommenden Wellen abweicht, so daß der „Überlagerungston“, der durch das Zusammenwirken der beiden Schwingungen im Empfänger entsteht, akustisch hörbar ist.

Dagegen ist dieses Verfahren, wie hier auseinandergesetzt werden soll, nicht dazu geeignet, in einer auftreffenden Welle von zusammengesetzter Schwingungsform die einzelnen Oberschwingungen nachzuweisen; es kann nämlich ein hörbarer Überlagerungston auch dann zustandekommen, wenn die Welle des Hilfssenders wesentlich von der aufzunehmenden Welle abweicht. Die im folgenden dargelegten Beobachtungen und Überlegungen ergaben sich bei den hier ausgeführten Versuchen über Mehrfachtelephonie auf Leitungen mittels Hochfrequenz[1]); es ist klar, daß in diesem Falle, wo mehrere Sender auf eine Leitung, also auf die gleiche Antenne, arbeiten, die Überlagerungseffekte sich besonders stark bemerkbar machen, und zwar in störendem Sinne.

2. Die häufig gebrauchten Bezeichnungen „Schwebungs“- oder „Interferenzempfang“ dürfen nicht darüber hinwegtäuschen, daß das eigentliche akustische Analogon dieses Vorganges in den Kombinationstönen zu suchen ist, insbesondere in den von Schaefer[2]) und Waetzmann[3]) untersuchten Mikrophontelephontönen, deren Theorie sich völlig auf unseren Fall übertragen läßt.

Sei $i = f(e)$ die Charakteristik des im Empfänger benutzten Detektors, etwa eines Audions. (In diesem Falle bedeutet e die Gitterspannung, i den Anodenstrom.) Wir entwickeln[4]) sie in der Form

$$i = i_0 + i_1 e + i_2 e^2 + i_3 e^3 + \cdots. \qquad (1)$$

Auf den Empfänger treffen die Schwingungen zweier Sender, so daß wir die Spannung am Detektor in der Form

$$e = \sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t \qquad (2)$$

ansetzen können, wobei wir von den Phasen und Amplituden, die uns nicht weiter interessieren, absehen.

Setzen wir nun (2) in (1) ein, so erhalten wir unter anderem die Glieder

$$2 i_2 \sin \omega_1 t \cdot \sin \omega_2 t, \quad 3 i_3 \sin^2 \omega_1 t \cdot \sin \omega_2 t, \cdots$$

$$\binom{n+m}{m} i_{n+m} \sin^m \omega_1 t \cdot \sin^n \omega_2 t.$$

Der erste dieser Ausdrücke gibt umgeformt

$$i_2 [\cos(\omega_1 - \omega_2) t - \cos(\omega_1 + \omega_2) t];$$

das sind also zwei Schwingungen, von denen die erste möglicherweise akustisch hörbar sein wird und dann als Differenzton bezeichnet werden kann.

Das mit i_3 multiplizierte Produkt liefert eine Schwingung von der Kreisfrequenz $2\omega_1 - \omega_2$, und allgemein bekommen wir die Töne $m\omega_1 - n\omega_2$, die wir in Anlehnung an die in in der Akustik übliche Bezeichnung als Kombinationstöne $(m + n - 1)$ ter Ordnung bezeichnen; sie treten nicht auf, wenn die Entwicklung (1) vor dem Glied $i_{m+n} e^{m+n}$ abbricht.

---

1) Vgl. K. W. Wagner, „Vielfachtelephonie und -telegraphie mittels schneller Wechselströme“, Elektrot. Zeitschrift **40**, 383 u. 394, 1919.

2) K. L. Schaefer, Ann. d. Phys. **17**, 572, 1905.

3) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. **42**, 729, 1913.

4) Diese Rechnung findet sich auch bei Liebowitz, Jahrb. f. drahtl. Telegr. u. Teleph. **12**, 451, 1918.

3. Wählt man ω_1 und ω_2 beliebig, so werden sich doch im allgemeinen die ganzen Zahlen m und n so bestimmen lassen, daß der Ton $m\omega_1 - n\omega_2$ in den Bereich akustischer Hörbarkeit fällt; ob er nun wirklich gehört wird, hängt offenbar von der Form der Detektorcharakteristik ab. Bricht diese z. B. mit dem Glied $i_2 e^2$ ab, so kann nur der gewöhnliche Differenzton auftreten; hat diese Kurve andererseits einen plötzlichen Knick, wie gewöhnlich die des Audions, so können sogar die Kombinationstöne recht hoher Ordnungen hörbar sein; natürlich spielt auch die Intensität der ankommenden Wellen eine große Rolle.

Fehlerhaft wäre es dagegen, wenn beispielsweise der Ton $2\omega_1 - \omega_2$ festgestellt wird, daraus auf das Vorhandensein des Obertons $2\omega_1$ in der einen der auf den Detektor wirkenden Schwingungen zu schließen; der Ansatz (2) nimmt vielmehr die beiden auftreffenden Wellen als frei von Oberschwingungen an, und ergibt dennoch Kombinationstöne aller Ordnungen. Die Verwendung des Überlagerers zur Untersuchung der Schwingungsform eines Senders ist daher nur bei Anwendung großer Vorsicht gestattet.

4. Bei der großen Empfindlichkeit des Überlagerungsempfanges spielen nicht nur die allerersten Glieder der Entwicklung (1), sondern oft auch die späteren eine Rolle und geben Anlaß zum Auftreten der entsprechenden Kombinationstöne. Diese sind also hier weit besser zu beobachten als selbst in der Akustik, gerade deshalb, weil die Grundwellen selbst nicht hörbar sind. Es scheint überhaupt, daß die Akustik aus der Beschäftigung mit ungedämpften elektrischen Schwingungen, deren Erzeugung jetzt so sehr bequem geworden ist, Vorteil ziehen könnte. Natürlich erhält man auf dem angegebenen Wege nur die Differenz-, nicht die Summationstöne.

Zur Erläuterung des Gesagten möge ein Versuch mitgeteilt werden. Der Sender 1 wurde an das ferne Ende einer 300 km langen Freileitung angeschlossen, an deren diesseitigem Ende sich ein Audionempfänger mit Verstärker befand; ihm war eine Siebkette[1]) vorgeschaltet, die nur einen schmalen Bereich von Frequenzen in der Nähe der Grundfrequenz des Senders 1 (Wellenlänge $\lambda_1 = 8750$ m) durchließ. 10 m vom Empfänger entfernt stand der Sender 2, der auf eine künstliche Antenne arbeitete und nur durch seine Strahlung, die natürlich nicht frei von Oberwellen war, auf den Empfänger wirkte.

1) K. W. Wagner, Spulen- und Kondensatorleitungen, Archiv f. Elektrotechnik 8, 61, 1919.

Zunächst wurde die Siebkette auf die Grundwelle des Senders 1 eingestellt und darauf dieser Sender verstimmt, so daß er jetzt die Welle 9350 m gab; der Sender 2 wurde auf $\lambda = 9000$ m eingestellt. Dann war im Empfänger kein Überlagerungston hörbar; dieser trat aber sofort wieder auf, wenn einige Glieder der Siebkette ausgeschaltet wurden. Daraus folgt, daß die Siebkette eine um 600 m von ihrer Grundwelle abweichende Schwingung schon so stark abdrosselte, daß sie nicht mehr durch Überlagerung nachweisbar war. A fortiori mußte sie also die Oberwellen des Senders 1 abhalten, und wir können daher die auf den Empfänger auftreffende Schwingung der Frequenz ω_1 als rein sinusförmig voraussetzen.

Nun wurde Sender 1 auf $\lambda_1 = 8675$ m eingestellt und λ_2 zwischen 1200 und 11000 m variiert; dabei fanden sich die in der folgenden Tabelle angegebenen „Interferenzgebiete", in denen ein Überlagerungston $m\omega_1 - n\omega_2$ wahrnehmbar war; die Tabelle enthält auch die Zahlen m und n.

λ_2	m	n
von 1675 bis 1750 m	5	1
„ 2060 „ 2190 „	4	1
„ 2750 „ 3000 „	3	1
„ 3900 „ 4600 „	2	1
„ 7500 „ 10400 „	1	1

In diesem Falle traten also Kombinationstöne bis zur 5. Ordnung auf; gelegentlich sind auch noch höhere Ordnungen wahrgenommen worden[1]).

5. Neue Erscheinungen erhält man, wenn gleichzeitig drei Schwingungen auf den Empfänger wirken. Setzt man an Stelle der Beziehung (2)

$$e = \sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t + \sin\omega_3 t, \qquad (2')$$

so erkennt man leicht das Auftreten der Kombinationstöne $\pm m\omega_1 \pm n\omega_2 \pm p\omega_3$. Der einfachste dieser Töne hat eine Kreisfrequenz der Form $\omega_1 + \omega_2 - \omega_3$, er entsteht aus dem Glied $i_3 e^3$ der Reihe (1). Es kann dann der Fall eintreten, daß die Sender 1 und 2 keinen hörbaren Ton im Empfänger erzeugen, ebensowenig 2 und 3 oder 1 und 3, wohl aber die drei Sender 1, 2 und 3 gemeinschaftlich.

Auch diese Folgerung ließ sich durch den Versuch bestätigen; die entsprechenden Zahlen waren

$$\lambda_1 = 8050 \text{ m}, \ \lambda_2 = 6200 \text{ m}, \ \lambda_3 = 3325 \text{ m}.$$

Die Schwingungen 1 und 2 wurden durch Fernempfang über die Leitung aufgenommen; der

1) Oberwellen des Senders 2 konnten den Versuch nicht gefälscht haben, da stets $n = 1$ war.

Sender 3 stand wieder in der Nähe des Empfängers und wirkte durch Strahlung.

(Eingegangen 18. Juni 1919.)

Zum experimentellen Nachweis der Ampèreschen Molekularströme.

Von Emil Beck.

Nach der Ampèreschen Hypothese über die Natur des Magnetismus werden die magnetischen Erscheinungen hervorgerufen durch elektrische Ströme, welche die Moleküle der magnetisierbaren Körper umkreisen, indem die Anordnung der Ebenen der Strombahnen den Grad der Magnetisierung bestimmt. Ist der Körper in unmagnetischem Zustand, so sind jene Strombahnebenen der einzelnen Moleküle regellos gerichtet, während durch ein magnetisches Feld alle Ebenen mehr oder weniger gleich gerichtet werden. Der Elektronentheorie des Magnetismus liegt dieselbe Anschauung zugrunde; die Molekularströme werden hier gebildet von rotierenden elektrischen Teilchen, die an träge Masse gebunden sind. Dann aber verhält sich ein magnetisches Molekül wie ein Kreisel und muß die bekannten Trägheitserscheinungen der Kreisel zeigen. So ergeben sich aus den Gesetzen der Mechanik die beiden folgenden wichtigen Tatsachen: Jede Bewegungsänderung eines magnetischen Körpers muß eine Magnetisierungsänderung und jede Magnetisierungsänderung eine Bewegungsänderung des Körpers zur Folge haben.

Damit bietet sich aber die Möglichkeit einer experimentellen Prüfung der Ampèreschen bzw. Elektronen-Theorie des Magnetismus, zumal da das einem Molekularmagneten wegen der Rotation der elektrischen Teilchen innewohnende Impulsmoment leicht berechnet werden kann. Bezeichnet man dasselbe mit J, ist ferner e die Ladung, m die Masse jedes der kreisenden elektrischen Teilchen und M das Moment des Molekularmagneten, so ist:

$$\frac{J}{M} = 2\frac{m}{e},$$

also eine konstante, von der Natur der Substanz unabhängige Größe. Unter der Annahme, daß nur negative Teilchen, Elektronen, kreisen, ist:

$$2\frac{m}{e} = 1{,}13 \cdot 10^{-7}$$

elektromagnetische Einheiten. Jede Magnetisierungsänderung eines magnetischen Körpers muß nun, weil sie die Rotationsachsenrichtung der einzelnen Kreisel und damit das Impulsmoment derselben ändert, ein grob mechanisches Impulsmoment am Körper zur Folge haben nach dem Satz von der Erhaltung des Impulsmoments. Das dabei entstehende Drehmoment ist gegeben durch die Vektorgleichung:

$$D = 2\frac{m}{e}\frac{dI}{dt}, \tag{1}$$

wenn I die Magnetisierungsintensität des Körpers bedeutet.

Auf Grund obiger Überlegungen haben 1915 A. Einstein und W. J. de Haas[1]) experimentelle Untersuchungen angestellt, um jenes innere Impulsmoment der magnetischen Moleküle nachzuweisen, indem sie die Bewegungen beobachteten, die ein magnetischer Körper unter Einfluß von Magnetisierungsänderungen annahm. Ein weiches Eisenstäbchen wurde an einem Glasfaden axial in eine Spule gehängt, in der ein starkes Magnetfeld erzeugt werden konnte, wodurch das Stäbchen nahezu gesättigt wurde. Kommutierte man plötzlich den Strom, so mußte nach Gleichung (1) ein axiales Drehmoment auftreten, welches das Stäbchen in Schwingungen versetzte. Um störende Effekte zu vermeiden und den zu beobachtenden Effekt zu multiplizieren, haben die Verfasser ein Wechselfeld von der Frequenz eines gewöhnlichen Wechselstroms angewendet und die Aufhängung des Stäbchens so gewählt, daß die Eigenschwingung des Stäbchens dieselbe Frequenz hatte wie der Wechselstrom. Dadurch konnte Resonanz der Stäbchenschwingungen erzielt werden. Die erwarteten Schwingungen sind nun in der Tat von den Verfassern beobachtet worden, und zwar ergab sich auch quantitativ der Effekt — den ich gerne, nach dem Vorschlag von de Haas, als Einsteineffekt bezeichnen will — in ausgezeichneter Übereinstimmung mit der Theorie. Es wurde nicht nur die Resonanzamplitude beobachtet, sondern die ganze Resonanzkurve aufgenommen; die nach einer relativ einfachen Formel daraus berechnete Größe $2\frac{m}{e}$ ergab sich zu $1{,}11 \cdot 10^{-7}$, also bis auf 2 Proz. genau gleich dem Werte der Elektronenkonstante.

Einstein und de Haas bemerken in ihrer Arbeit, daß sich ihre Methode zu einer genauen Bestimmung der wichtigen Größe $\frac{m}{e}$ werde ausbilden lassen. Dieser Umstand veranlaßte mich nun, die Messungen von mir aus nach derselben Methode zu wiederholen und durch einige Abänderungen und Erweiterungen den Genauigkeitsgrad der Methode zu erhöhen. Diese Änderungen beziehen sich hauptsächlich

1) A. Einstein u. W. J. de Haas, Verh. d. D. Phys. Ges. 17, 152—170, 1915.



auf die Aufnahme der Resonanzkurve, die mit Hilfe eines Frequenzmessers geschah, der speziell zu diesem Zweck konstruiert worden ist und sehr kleine Frequenzdifferenzen zu messen gestattete; ferner auf die Art der Montierung des zu untersuchenden magnetisierten Stäbchens, indem es auch in eingespannter (nicht nur aufgehängter) Lage untersucht wurde. Auch wurde außer zwei Eisenstäbchen noch ein Nickelstäbchen untersucht. Den unvermeidlichen störenden Effekten wurde die größte Aufmerksamkeit geschenkt. Die Methode wurde noch in einer zweiten Form ausgeführt, welche die Aufnahme der Resonanzkurve vermeidet. Es wurde ferner der Nachweis erbracht, daß es wirklich negative Teilchen sind, die die Molekularströme bilden.

Auch meine Messungen haben einwandfrei den Einsteineffekt ergeben, doch in einer Größe, die ganz wesentlich von dem theoretisch zu erwartenden Wert, also dem von Einstein und de Haas gefundenen, abweicht. Die Größe $\frac{m}{e}$ ergab sich nämlich bei Eisen um 47 Proz. zu klein und bei Nickel um 43 Proz. zu klein; um soviel wäre also das Impulsmoment der magnetischen Moleküle kleiner als man erwarten müßte, wenn man annimmt, daß nur Elektronen von den bekannten Größenverhältnissen in den Molekülen kreisen.

Damit ist kurz der Inhalt und das Resultat meiner Arbeit angegeben, die in den Annalen der Physik erscheint; dort sind die von mir ausgeführten Messungen ausführlich beschrieben.

Zürich, Juli 1919.

(Eingegangen 19. Juli 1919.)

Eine mechanische Theorie der Serienspektra.

Von A. Korn.

I.

Die Grundlagen.

Die Kenntnis meiner mechanischen Theorie des elektromagnetischen Feldes[1]) sei hier nicht vorausgesetzt, doch ist zu bemerken, daß erst durch die Hinzunahme derselben die hier auseinanderzusetzende Theorie der Serienspektra zu einer wirklich mechanischen Theorie wird, d. h. zu einer Zurückführung der zu erklärenden Erscheinungen auf ein einheitliches mechanisches Grundgesetz.

Die Grundanschauung der elektromagnetischen Lichttheorie wird adoptiert, daß als Ursache der Lichterscheinungen ein elektromagnetisches Feld angesehen wird, hervorgerufen dureh mechanische Schwingungen elektrischer Teilchen, wobei die Schwingungsdauern in den Grenzen liegen sollen, welche man als die Grenzen des sichtbaren Spektrums bezeichnet. Wer eine wirklich mechanische Theorie wünscht, wird dabei noch die mechanische Natur der elektrischen Teilchen und des durch ihre Bewegung hervorgerufenen elektromagnetischen Feldes zu ergründen haben und kann hierzu meine mechanische Theorie des elektromagnetischen Feldes zu Hilfe nehmen. Wer dies nicht wünscht, möge die hier auseinanderzusetzende Theorie als eine Ergänzung der elektromagnetischen Theorie des Lichtes betrachten.

Die Quantentheorie wird nicht als Hilfsmittel herangezogen, doch ergibt sich, daß viele wichtige Untersuchungen, welche sich an die Quantentheorie der Spektra [ausgehend von den Bohrschen[1]) Ideen] angeschlossen haben, in die hier auseinanderzusetzende Theorie eingeordnet werden können.

Während in den bisherigen mechanischen Spektraltheorien, welche die Spektra als Eigenschwingungen elastischer Systeme darstellen wollen [ich denke hier im besonderen an die Theorien von Ritz[2]) und Lindemann[3])], der Weg eingeschlagen wurde, die Differentialgleichungen der Eigenschwingungen eines geeignet gewählten elastischen Systems aufzustellen, von solcher Art, daß die Eigenfrequenzen den Formeln von Balmer, allgemeiner Formeln, wie denen von Kayser und Runge, für die Frequenzen der Spektrallinien entsprechen, bin ich in folgender Weise vorgegangen:

Ich betrachte, wie in der klassischen Mechanik, zwei Massenteilchen m_0 und m, der Einfachheit halber zunächst kugelförmig, deren Radien gegen die Zentraldistanz r klein sein mögen; das Teilchen m_0 möge auf das Teilchen m in der Richtung

Zentrum von $m_0 \xrightarrow[r]{} $ Zentrum von m

eine Kraft $f(r)$ ausüben, welche als eine gewisse Funktion der Zentraldistanz gedacht ist und — das ist für eine mechanische Theorie unerläßlich — mit Hilfe von Schwingungen der Teilchen und eines Zwischenmediums zu er-

1) A. Korn, Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes I—XII. Diese Zeitschr. 18, 323, 341, 504, 539, 581, 1917; 19, 10, 201, 234, 327, 363, 426, 1918; 20, 58, 85, 1919.

1) N. Bohr, Phil. Mag. (6) 27, 1, 476, 857, 1913.
2) W. Ritz, Diss. Göttingen 1903; diese Zeitschr. 4, 406, 1903; Ann. d. Phys. (Drudes) 12, 264, 1903.
3) F. Lindemann, Münchn. Ber. 31, 441, 1901; 33, 27, 1903.



klären ist. Wir können, das ist augenscheinlich und kann durch zahlreiche Beispiele belegt werden[1]), die Funktion $f(r)$ so wählen, daß bei der Bewegung der Massenteilchen

$$r = r_0 + \varepsilon(t) \cos \frac{t}{T} 2\pi \tag{1}$$

ist, wo r_0 eine konstante Entfernung, T eine konstante kleine Zeitdauer und die Funktion $\varepsilon(t)$ der Zeit t eine kleine Entfernung darstellen soll, welche gegen r_0 klein ist. Der Einfachheit halber sei m_0 als ruhend gedacht. Das Teilchen m hat dann eine schwingende Zentraldistanz (mit der Schwingungsdauer T) von dem ruhenden Teilchen m_0, wenn wir noch voraussetzen, daß die Differentialquotienten $\varepsilon'(t)$ gegen die maximalen Geschwindigkeiten des Teilchens m außerordentlich klein sind.

Ist m ein elektrisches Teilchen und T eine Schwingungsdauer innerhalb des sichtbaren Spektrums, so könnte ein solches System Lichtschwingungen von der Schwingungsdauer T aussenden. Ich habe mir nun die Frage gestellt, ob es nicht möglich ist, eine Funktion $f(r)$ so zu finden, daß bei einem solchen Wechselwirkungsgesetz eine Vielheit von Bewegungen

$$r = r_{j0} + \varepsilon_j(t) \cos \frac{t}{T_j} 2\pi, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

möglich ist, wobei die T_j, etwa in der Art

$$T_1 > T_2 > \ldots$$

geordnet, Schwingungsdauern sind, wie sie einer Spektralserie zugehören. In der Tat habe ich durch meine Bemühungen in dieser Richtung gefunden, daß die folgende Funktion[2])

$$\left.\begin{aligned} f(r) &= F'(r), \\ F(r) &= \left(\alpha + \frac{\beta}{r^2}\right) \cos \frac{r}{\lambda} 2\pi + \frac{2\pi}{3\lambda} \frac{\gamma}{r^3} \sin \frac{r}{\lambda} 2\pi, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

in welcher α, β, γ, λ Konstanten sind, den gestellten Anforderungen entspricht. Dies soll zunächst in dieser ersten Abhandlung gezeigt werden, während die Zurückführung des Wechselwirkungsgesetzes auf Schwingungen der Teilchen in einem Zwischenmedium, zusammen mit weiteren Folgerungen aus diesen Vorstellungen, Gegenstand späterer Ausführungen sein wird.

1) Ein Beispiel wird durch zwei Himmelskörper gegeben, welche sich nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, wenn zu irgendeiner Anfangszeit die Bedingungen derart sind, daß m eine nahezu kreisförmige Bahn um m_0 beschreibt. Es lassen sich auch einfache Beispiele angeben, bei denen sich m gegen m_0 nur in der Richtung der Zentraldistanz bzw. in der entgegengesetzten Richtung bewegt.

2) Dieselbe ist explizite:

$$\begin{aligned} f(r) = &\left\{-2\beta + \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \gamma\right\} \frac{1}{r^3} \cos \frac{r}{\lambda} 2\pi - \\ &- \frac{2\pi}{\lambda}\left(\alpha + \frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4}\right) \sin \frac{r}{\lambda} 2\pi. \end{aligned} \tag{3'}$$

Seien x, y, z die Koordinaten des Zentrums von m, dann sind die Bewegungsgleichungen dieses Teilchens (das Zentrum von m_0 wird als Anfangspunkt des Koordinatensystems genommen):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(r) \frac{x}{r}, \ldots, \tag{4}$$

mit den beiden bekannten Integralen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} m \left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right\} &= F(r) + c_1, \\ r^2 \frac{d\omega}{dt} &= c_2, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

bei Einführung der Polarkoordinaten (r, ω) durch die Transformation:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos \omega, \\ y &= r \sin \omega \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

und Verlegung der Ebene, in welcher die Bahn des Teilchens m stets bleiben muß, in die Ebene $z = 0$; c_1 und c_2 sind Integrationskonstanten.

Durch Elimination von $\frac{d\omega}{dt}$ aus (5) ergibt sich:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c_1 + F(r) - \frac{1}{2} \frac{m c_2^2}{r^2}, \tag{7}$$

und hieraus durch Differentiation nach t:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{m} f(r) + \frac{c_2^2}{r^3}. \tag{8}$$

Diese beiden Gleichungen kommen hauptsächlich für uns in Betracht. Wir setzen:

$$r_{j0} = j\lambda, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

so daß für $r = r_{j0}$ $(j = 1, 2, \ldots)$:

$$\sin \frac{r}{\lambda} 2\pi = 0, \quad \cos \frac{r}{\lambda} 2\pi = 1,$$

und daher:

$$\frac{1}{m} f(r) + \frac{c_2^2}{r^3} = 0,$$

wenn die Konstanten die Beziehung erfüllen:

$$m c_2^2 = 2\beta - \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \gamma. \tag{10}$$

Sei nun δ_j[1]) eine genügend kleine Länge, so ergibt sich für eine Bewegung, welche in den Grenzen:

$$-\delta_j \leqq \varrho_j = r - r_{j0} \leqq + \delta_j \tag{11}$$

stattfindet, nach (8) in erster Annäherung die Gleichung:

$$\frac{d^2 \varrho_j}{dt^2} = -\left(\frac{3 c_2^2}{r_{j0}^4} - \frac{1}{m} f'(r_{j0})\right) \varrho_j. \tag{12}$$

1) Die Hinzufügung des Index j zu δ soll andeuten, daß diese kleine Größe für jedes j einen anderen Wert haben kann.

Die Gleichung (7) gestattet ohne Schwierigkeit den Nachweis, daß für irgendein j bei geeigneter Wahl der Konstanten eine Bewegung für alle Zeit zwischen die Grenzen (11) eingeschlossen werden kann, und daß dann somit die Gleichung (12) stets die Bewegung in erster Annäherung darstellen wird. So ergibt sich, daß das Teilchen m von m_0 bei geeigneter Beschaffenheit der Konstanten eine schwingende Zentraldistanz[1]) um r_{jo} als Mittelwert mit der Schwingungsdauer

$$T_j = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3c_2^2}{r_{jo}^4} - \frac{1}{m} f(r_{jo})}} \qquad (13)$$

haben wird, in einer ersten Annäherung; über diese Bewegung werden sich andere zu vernachlässigende Bewegungen überlagern.

Mit Rücksicht auf (3') und (10) ist

$$f(r_{jo}) = \frac{3mc_2^2}{r_{jo}^4} - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left(\alpha + \frac{\beta}{r_{jo}^2} + \frac{\gamma}{r_{jo}^4}\right),$$

somit:

$$\frac{3c_2^2}{r_{jo}^4} - \frac{1}{m} f(r_{jo}) = \frac{1}{m}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left(\alpha + \frac{\beta}{r_{jo}^2} + \frac{\gamma}{r_{jo}^4}\right),$$

und es folgt:

$$T_j = \frac{\lambda\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{r_{jo}^2} + \frac{\gamma}{r_{jo}^4}}}, \quad j = 1, 2, .. \qquad (14)$$

Nach (9) können daher die Schwingungen der Zentraldistanz der beiden Teilchen die folgenden Schwingungsdauern haben:

$$T_j = \frac{\lambda\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha + \frac{1}{j^2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \beta + \frac{1}{j^4}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^4 \gamma}}, \quad j = 1, 2 ..; \qquad (15)$$

eventuell können noch Oberschwingungen auftreten, deren Werte aus den genannten durch Division mit einer ganzen Zahl erhalten werden (die im übrigen für die Optik nicht in Betracht kommen).

Vergleichen wir diese Formel mit der Formel von Kayser und Runge für Spektralserien:

$$T_j = \frac{1}{a + \frac{b}{j^2} + \frac{c}{j^4}}, \qquad (15')$$

in der a, b, c Konstanten sind, so ergibt sich ohne weiteres, daß alles, was der Kayser-Rungeschen Formel gehorcht, auch unter die Herrschaft der obigen Formel gebracht werden kann[1]). Die einfachere Balmersche Formel für die Wasserstoffserie wird sich ergeben, wenn zwischen den Konstanten α, β, γ die Relationen

$$\frac{\beta}{\lambda^2} = -8\alpha, \quad \frac{\gamma}{\lambda^4} = 16\alpha$$

bestehen.

Es zeigt sich somit, daß durch das Wechselwirkungsgesetz (3) ein System mm_0 geschaffen wird, von welchem die Lichtschwingungen einer Spektralserie ausgehen können; es bleibt nur noch die Aufgabe zu erledigen, dieses Wechselwirkungsgesetz durch Schwingungen der Teilchen und ein Zwischenmedium mechanisch zu erklären. Diese Aufgabe wird in einer späteren Abhandlung ihre Erledigung finden; hier mögen noch einige Bemerkungen allgemeiner Art folgen.

Mit Rücksicht darauf, daß c_2 im allgemeinen nicht null ist, — dies muß bereits für den einfachen Fall des Wasserstoffmoleküls ausgeschlossen werden — ergibt sich ein Anschluß an diejenigen Ideen, welche mit erheblichen Umlaufsgeschwindigkeiten elektrischer Teilchen um gewisse Kerne im Molekül rechnen; eine Vereinfachung dieser Ideen ergibt sich insofern, als sich hier nur nahezu kreisförmige Bahnen und nahezu konstante Umlaufsgeschwindigkeiten der elektrischen Teilchen bei Annahme zweier Teilchen vorfinden. Eine Komplikation kann sich natürlich auch hier bei Vorhandensein einer Vielheit wirkender Teilchen ergeben. Das Wechselwirkungsgesetz (3) weist schon darauf hin, daß für die in Betracht kommenden Schwingungen, deren Folge das Wechselwirkungsgesetz sein könnte, das Zwischenmedium nicht als inkompressibel, sondern als kompressibel zu erachten sein wird, worauf die Faktoren

$$\cos\frac{r}{\lambda}2\pi, \quad \sin\frac{r}{\lambda}2\pi$$

hindeuten. Wie ist dies mit meinen mechanischen Vorstellungen über das elektro-magnetische Feld, welches das Zwischenmedium als empirisch inkompressibel ansieht, zu vereinen? Es muß offenbar für die hier in Betracht kommenden Schwingungen eine größere Kompressibilität des Zwischenmediums angenommen werden, als für die Schwingungen mit den außerordentlich kleinen Schwingungsdauern, welche im allgemeinen die Ursachen der elektromagnetischen Erscheinungen sein sollen. Hierzu ist folgendes zu bemerken: Ich habe in meinen

1) Im allgemeinen wird das Teilchen hierbei eine Umlaufsbewegung um das Teilchen m_0 ausführen, die nahezu kreisförmig ist und (infolge der zweiten Gleichung [5]) mit nahezu konstanter Umlaufsgeschwindigkeit vor sich geht.

1) Der Unterschied in den beiden Formeln ist zwar augenscheinlich, aber durch Hinzufügung von Gliedern

$$\frac{d}{j^6} + \frac{e}{j^8} + ..$$

im Nenner der Kayser-Rungeschen Formel zu beheben.

Veröffentlichungen schon wiederholt die Ansicht ausgesprochen, daß das Zwischenmedium, das für langsame Bewegungen kompressibel sein kann, für rasche Schwingungen mit außerordentlich kleiner Schwingungsdauer eine außerordentlich kleine Kompressibilität besitzen muß, so daß bei einer gewissen Grenze das Medium geradezu als empirisch inkompressibel anzusehen ist. Bei den Schwingungen, welche für das Zustandekommen des Wechselwirkungsgesetzes (3) in Betracht kommen, braucht diese Grenze noch nicht erreicht zu sein, mit anderen Worten diese Schwingungen sollen mit einer erheblich größeren Schwingungsdauer stattfinden als diejenigen, denen im allgemeinen die elektromagnetischen Erscheinungen ihren Ursprung verdanken. Es entspricht dies vollständig dem Gedankengange, welcher zu der „Individualitätskorrektur"[1]) des mechanischen Grundgesetzes geführt hat.

1) A. Korn, diese Zeitschr. **18**, 323, 1917.

(Eingegangen 20. Juni 1919.)

Die atomistische Konstitution einer Kristalloberfläche.

Von E. Madelung.

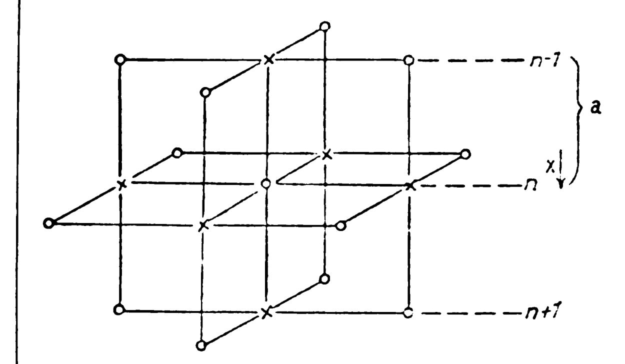
Während im Innern eines Kristalles die Atome mit der Regelmäßigkeit angeordnet sind, die dem Kristallsystem entspricht, hat man an der Oberfläche gewisse Abweichungen hiervon zu erwarten. Die Bedingungen, unter denen sich die äußersten Atome befinden, unterscheiden sich von denen der Innenatome dadurch, daß diese nicht wie außen auf allen Seiten regelmäßig von Nachbarn umgeben sind, sondern solche Nachbarn nach einer Seite nicht besitzen. Dadurch müssen Abweichungen von der regelmäßigen Anordnung entstehen, die sich bis zu einer gewissen Tiefe in den Kristall hinein fortpflanzen werden.

Aus Symmetriegründen kann man schließen, daß bei regulären Kristallen des $NaCl$-Typus nur Verschiebungen senkrecht zur Oberfläche gegenüber der normalen Anordnung auftreten können. Dieser Fall soll allein im folgenden behandelt werden.

Anschaulich kann man die Verhältnisse, die zu erwarten sind und von der Rechnung bestätigt werden, folgendermaßen schildern. Zwei Atome, z. B. Na haben die Neigung, sich in in einer bestimmten Entfernung voneinander einzustellen, zwei Cl-Atome in einer andern, je ein Atom Na und eines Cl in einer dritten. Treten diese Atome aber zu einem Kristall zusammen, so müssen sie sich auf eine einzige Gitterkonstante einigen. Es werden also vielleicht die Na-Atome enger zusammentreten als ihrer Natur entspricht, die Cl aber vielleicht weiter. Diese Tendenz wird sich an der Oberfläche bemerkbar machen, indem dort die Na-Atome etwas über die mittlere Begrenzung hinaustreten, die Cl-Atome aber weiter hineintreten.

Für die Rechnung gehe ich in einer etwas schematischen Weise vor, indem ich nur Kräfte zwischen den nächsten Nachbarn annehme. Diese Hypothese hat sich bei früheren Rechnungen[1]) bewährt und liefert auf alle Fälle ein qualitativ richtiges Bild. Ferner betrachte ich die Verschiebungen als klein, so daß nur lineare Beziehungen auftreten. Schließlich nehme ich an, daß Kräfte zwischen den Atomen nur von deren Natur und ihrer Entfernung abhängen, also Zentralkräfte sind. Es ließe sich ferner denken, daß die Oberflächenatome wegen ihrer unsymmetrisch angeordneten Nachbarschaft auch innere Veränderungen erleiden und daher anders auf ihre Nachbarn wirken als die Innenatome. Hiervon muß ich aber aus Mangel an irgendwelchen Unterlagen absehen.

Das Kristallgitter des $NaCl$-Typus ist ein kubisches flächenzentriertes Raumgitter. Jedes Atom einer Art hat als nächste Nachbarn 6 Atome der andern Art im Abstand a und als zweitnächste 12 Atome der gleichen Art im Abstand $a\sqrt{2}$ (s. Fig.). Diese sollen allein



berücksichtigt werden. Die Kristalloberfläche liege parallel zu einer Würfelfläche. Ich bezeichne die Gitterpunkte der zweiten Art durch einen Index $'$. Ferner die Atome der Oberfläche durch die Indexziffer 1, der nächsten Fläche 2 usw. Von weiteren Bezifferungen kann ich aus Symmetriegründen absehen.

1) E. Madelung, Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. 1909/1910; diese Zeitschr. **11**, 818, 1910; M. Born u. Th. v. Kármán, diese Zeitschr. **13**, 297, 1912.

Die Koordinate x liegt senkrecht zur Oberfläche, ebenso die Verschiebungen u. Die Verschiebungen v und w parallel zu y und z setze ich gleich Null.

Bezüglich der Bezeichnung schließe ich mich an Born[1]) an mit folgenden Vereinfachungen: da nur je drei Größen P und Q vorkommen, unterscheide ich diese durch Indizes.

Es bezieht sich

P und Q auf zwei Atome der einen Art (Abstand $= a\sqrt{2}$),

P'' und Q'' auf zwei Atome der andern Art (Abstand $= a\sqrt{2}$),

P' und Q' auf je eines der einen und eines der andern Art (Abstand a), und ich schreibe P statt $\delta^2 P$ und Q statt $\delta^4 Q$.

Das relative Potential zweier Atome 1 und 2 sei $\varphi_{12} + \varphi^0_{12}$.

$$\varphi_{12} = P_{12}\left((u_1 - u_2)(x_1 - x_2) + \frac{(u_1 - u_2)^2}{2}\right) + \\ + Q_{12}\frac{(u_1 - u_2)^2}{2}(x_1 - x_2)^2.$$

Die Summe der φ für ein Atom der ersten Art der Fläche n wird dann

$$\Phi_n = S\varphi = 4P\left((u_n - u_{n+1})(-a) + \right. \\ \left. + (u_n - u_{n+1})^2\right) + Q\frac{(u_n - u_{n+1})^2}{2}a^2, \\ + 4P\left((u_n - u_{n-1})(a) + \right. \\ \left. + \frac{(u_n - u_{n-1})^2}{2}\right) + Q\frac{(u_n - u_{-1})^2}{2}a^2, \\ + P'\left((u_n - u'_{n+1})(-a) + \right. \\ \left. + \frac{(u_n - u_{n+1})^2}{2}\right) + Q'\frac{(u_n - u'_{n+1})^2}{2}a^2, \\ + 4P'\frac{(u_n - u'_n)^2}{2}; \\ + P'\left((u_n - u'_{n-1})(a) + \right. \\ \left. + \frac{(u_n - u_{n-1})^2}{2}\right) + Q'\frac{(u_n - u'_{n-1})^2}{2}a^2.$$

Die von den Verschiebungen herrührende Kraft parallel zu x auf dies Atom wird

$$X_n = \frac{\partial \Phi_n}{\partial u_n} = 4P(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) + \\ + 4Qa^2(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}), \\ + P'(6u_n - u_{n+1} - u_{n-1} - 4u'_n) + \\ + Q'a^2(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}).$$

Ich führe die Abkürzungen ein:

$$A = 4(P + a^2 Q) \qquad B = 4P + 4P'$$
$$A' = P' + a^2 Q' \qquad B' = 4P'$$
$$A'' = 4(P'' + a^2 Q'') \qquad B'' = 4P'' + 4P'.$$

Dann wird

$$-X_n = u_n(2A + 2A' + B') - (u_{n+1} + \\ + u_{n-1})A - u'_n B' - (u'_{n+1} + u'_{n-1})A', \\ -X'_n = u'_n(2A'' + 2A' + B') - (u'_{n+1} + \\ + u'_{n-1})A'' - u_n B' - (u_{n+1} + u_{n-1})A'.$$

Für $n = 1$ fallen in Φ_1 die Glieder mit $n - 1$ fort. Es wird daher

$$-X_1 = u_1(A + A' + B') - u_2 A - u_1' B' - \\ - u_2' A' - Ba, \\ -X_1' = u_1'(A'' + A' + B') - u_2' A'' - u_1 B' - \\ - u_2 A' - B'' a.$$

Im Gleichgewichtszustand müssen sämtliche X verschwinden: also erhält man ∞ viele lineare Gleichungen, deren Schema lautet:

u_1	u_2	u_3	u_4	...	u_1'	u_2'	u_3'	u_4'	...	
$A+A'+B'$	$-A$	—	—	...	$-B'$	$-A'$	—	—	...	$-Ba$
$-A$	$2A+2A'+B'$	$-A$	—	...	$-A'$	$-B'$	$-A'$	—	...	—
—	$-A$	$2A+2A'+B'$	$-A$	...	—	$-A'$	$-B'$	$-A'$	...	—
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$-B'$	$-A'$	—	—	...	$A''+A'+B'$	$-A''$	—	—	...	$-B''a$
$-A'$	$-B'$	$-A'$	—	...	$-A''$	$2A''+2A'+B'$	$-A''$	—	...	—
.....	....	....	...	..	.....	......	...	...	..	....

Addiert man sämtliche Gleichungen bis zu hoher Ordnung und beachtet, daß die u_n für großes n, d. h. im Innern schließlich verschwinden müssen, so ergibt sich

$$-Ba - B''a = 0; \quad B + B'' = 0,$$

also

$$P + P'' = -2P'.$$

Diese Relation muß also im Kristall gelten, um die Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen.

Das unendliche Schema löse ich durch folgenden Ansatz:

$$u_n = u_1 \cdot \alpha^{n-1}; \quad u'_n = u_1' \cdot \alpha^{n-1}.$$

Dadurch reduzieren sich die Gleichungen auf folgende 4:

1. $u_1(A + A' + B' - \alpha A) - u_1'(B' + \alpha A') = \\ = -Ba,$
2. $-u_1(B' + \alpha A') + u_1'(A'' + A' + B' - \\ - \alpha A'') = -B''a = +Ba,$
3. $u_1(-A + \alpha(2A + 2A' + B') - \alpha^2 A) - \\ - u_1'(A' + \alpha B' + \alpha^2 A') = 0,$
4. $-u_1(A' + \alpha B' + \alpha^2 A') + u_1'(-A'' + \\ + \alpha(2A'' + 2A' + B) - \alpha^2 A'') = 0.$

1) Born, Dynamik der Kristallgitter, S. 20, Formel 13, 14.

Diese Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander: Es folgt nämlich aus (1) und (2) durch Addition:

$$u_1(A+A')(1-\alpha)+u_1'(A''+A')(1-\alpha)=0$$

und aus (3) und (4)

$$u_1(A+A')(-1+2\alpha-\alpha^2)+u_1'(A''+ \\ +A')(-1+2\alpha-\alpha^2)=0,$$

d. h. jede der beiden Kombinationen liefert:

$$\frac{u_1}{u_1'}=-\frac{A''+A'}{A+A'}.$$

Wir haben also tatsächlich nur 3 unabhängige Gleichungen für die 3 Unbekannten u_1, u_1' und α. Durch obigen Ansatz ist also das System von Gleichungen zu lösen.

Die formale Berechnung dieser Größen bietet keine Schwierigkeiten. Doch führt sie zu keinen einfachen Formeln, auf deren Wiedergabe ich verzichte.

Das Ergebnis ist also: In der Oberfläche eines flächenzentrierten regulären zweiatomigen Kristalls sind die Atome der einen Art gegen die der andern senkrecht zur Oberfläche verschoben. Diese Verschiebung nimmt nach innen nach einer reinen Exponentialfunktion ab.

Die numerische Berechnung der tatsächlichen Verschiebungen u in einem speziellen Fall ist bisher nicht durchführbar, da die in Frage kommenden Größen P und Q sich nicht experimentell ermitteln lassen, sondern nur solche Kombinationen von ihnen, welche in der Kristallphysik eine Rolle spielen. Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß zwischen ihnen solche Relationen bestehen, daß die Verschiebungen gerade verschwinden. Es ist aber kein Grund für ein solches Zusammentreffen einzusehen. Im Gegenteil, es erscheint als nicht unwahrscheinlich, daß in bestimmten Fällen die Verschiebungen so groß werden, daß der Zusammenhang des Kristalls in der Oberfläche und daher auch im Innern in Frage gestellt wird. Es läßt sich denken, daß durch solche Umstände das physikalische Verhalten wie Kristallform, Dampfdruck, Löslichkeit und dgl. beeinflußt wird.

Eine andere physikalische Konsequenz läßt sich aus obigen Betrachtungen ziehen. Da die Atome von Elektrolyten (Salzen) elektrische Ladungen tragen, muß in den Kristalloberflächen eine elektrische Doppelschicht infolge der Verschiebungen auftreten. Allerdings wird diese sich der Beobachtung entziehen, da sie sich mit konstanter Stärke über die ganze Kristalloberfläche erstreckt und daher keine elektrostatischen Kräfte im Außenraum liefert.

Es wäre allerdings denkbar, daß ihre Beobachtung trotzdem gelänge, wenn man das Folgende annehmen darf: Es könnten von außen oder von innen in die Oberflächenschicht einwandernde Elektronen im Laufe der Zeit die Doppelschicht neutralisieren. Bricht man nun einen Kristall durch, so würde eine Doppelschicht nur an der durch den Bruch gebildeten frischen Oberfläche existieren und müßte sich durch elektrische Kräfte an ihrer Begrenzungslinie bemerkbar machen können. Ich habe versucht, ob sich solche nachweisen lassen, indem ich Steinsalzstäbchen durchbrach und unmittelbar darauf mit Schwefelmennigepulver bestäubte. Ich habe aber keinerlei Anzeichen für elektrische Kräfte bemerken können. Die Versuche wurden allerdings ganz roh improvisiert; eine sorgfältigere Wiederholung erscheint wünschenswert.

Schließlich darf man wohl annehmen, daß die an einem besonders einfachen Falle in Obigem geschilderten Verhältnisse auch in beliebig komplizierten Fällen qualitativ in derselben Form wiederkehren. Ja, es erscheint nicht ausgeschlossen, daß auch in Flüssigkeitsoberflächen analoge Anomalien auftreten und als die Ursache der bekannten Doppelschicht in ihnen angesprochen werden dürfen. Dafür spricht jedenfalls der Umstand, daß die kinetische Theorie des Gesetzes von Eötvös[1]) nur unter der Annahme zum richtigen Resultat führte, „daß die Anordnung der Moleküle auch in Flüssigkeiten innerhalb kleiner (wahrscheinlich dauernd wechselnder) Bereiche durch Raumgitter darstellbar ist“.

1) E. Madelung, diese Zeitschr. **14**, 729, 1913.

(Eingegangen 24. August 1919.)

Eine Näherungsformel für die Sättigungsspannung des Wasserdampfes.

Von Paul Schreiber.

Wenn man im logarithmischen Doppelpapier[1]) mit 100 mm oder 250 mm Länge des Mantissenbereiches die Sättigungsspannungen s des Wasserdampfes als Ordinaten zu den absoluten Temperaturen T als Abszissen aufträgt, so ordnen sich die Punkte bis zu $T=350^0$ so an, daß sie nur durch eine gerade Linie verbunden werden können. Sonach müssen die Formeln

1) Die Logarithmenpapiere stellt die Firma C. Schleicher & Schüll, Düren (Rheinland) her. Proben und die von mir verfaßten Erläuterungsschriften können von dieser Firma bezogen werden. Man vergleiche auch Meteorol. Zeitschr. **27**, 198 ff., 1910; **32**, 443 ff., 1915 und Abh. d. naturw. Ges. Isis in Dresden 1910, Heft II.

$$s = p\,T^q$$

oder

$$\log s = \log p + q \log T$$

gültig sein. Die Koordinatenpaare

$$T_1 = 260^0,\quad s_1 = 1{,}69 \text{ mm}$$

und

$$T_2 = 350^0,\quad s_2 = 313{,}8 \text{ mm}$$

ergaben

$$\log s = -42{,}21197 + 17{,}57366 \log T. \quad \text{(I)}$$

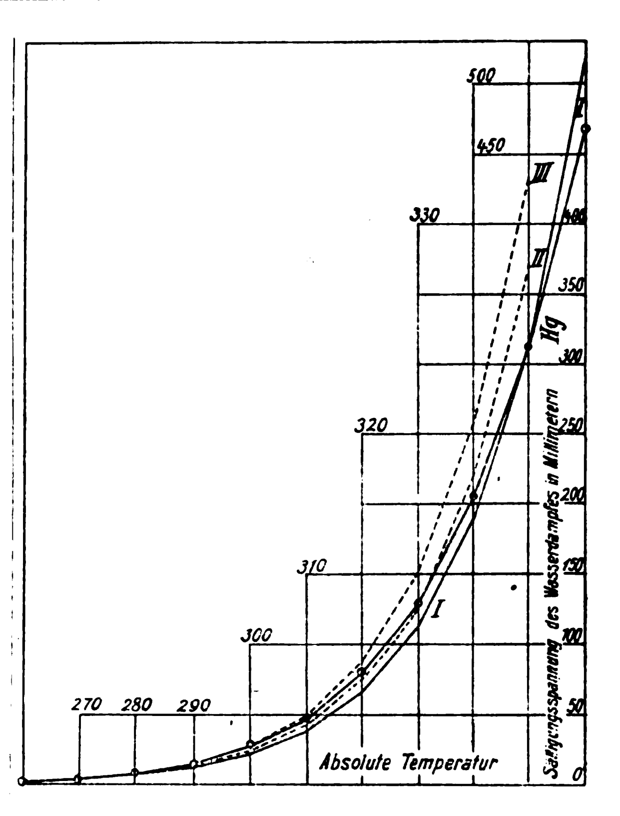
Dies ließ mich vermuten, daß die Formeln

$$s = 6 \cdot 10^{-8}(10^{-2}T)^{18} \quad \text{(II)}$$

bis

$$s = 7 \cdot 10^{-8}(10^{-2}T)^{18} \quad \text{(III)}$$

die Funktion zur Darstellung bringen könnten. In der Figur wurden durch Kreise die durch Beobachtung gefundenen Werte von s für $T = 260^0$ bis 360^0 von 10 zu 10^0 angegeben. Die Kurven I, II und III stellen den Verlauf der nach den drei Gleichungen berechneten Sättigungsspannungen dar. Die Firma Schleicher & Schüll stellt Logarithmenpapiere mit 600 mm Länge des Mantissenbereiches her. Sollte auch bei diesem Maßstab der Funktionsverlauf von einer Geraden merklich nicht abweichen, so würde für graphische Methoden die Gleichungsform als tatsächlich genügend richtig anzusehen sein und würde man nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werte von p und q abzuleiten haben. Diese Rechnung wird dann lehren, für welches Temperaturintervall ein solches Konstantenpaar gültig ist. Da die Gleichungsformen $y = a\,(s)^b$ sehr häufig



vorkommen, ist dies für die Anwendung der Logarithmenpapiere von hoher Bedeutung, da diese Gleichungen dann in

$$y = a\,(p\,T^q)^b = a \cdot p^b\,(T)^{qb} = \alpha\,(T)^\beta$$

übergehen und auf dem Doppelpapier als Gerade erscheinen müssen.

Dresden, den 15. Juni 1919.

(Eingegangen 21. Juni 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Der Energieinhalt der Festkörper im Lichte der neueren Forschung.

Von Erwin Schrödinger.

(Fortsetzung.)

§ 16. Läßt man in (37^2) x gegen ∞ gehen, so verschwindet das zweite Glied in der Klammer exponentiell, das erste aber nur wie x^{-3}, da das Integral gegen den endlichen Wert

$$\int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (52)$$

konvergiert. Man hat also als Grenzausdruck

$$\lim_{T=0} C_v = 3AR \cdot \frac{12}{x^3} \frac{\pi^4}{15} = 3AR \cdot \frac{4\pi^4}{5} \cdot \frac{T^3}{\Theta^3}. \quad (53)$$

Die Näherung gilt für etwa $x > 12$, d.i. $T < \Theta/12$ mit 1 Proz. Genauigkeit. Nach diesem sog. T^3-Gesetz Debyes (oder, wenn man vom Energieinhalt spricht: T^4-Gesetz) soll sich bei genügend tiefer Temperatur jeder Körper in energetischer Hinsicht wie das Vakuum nach dem Stefan-Boltzmannschen Strahlunggesetz verhalten (s. o. § 4). Für letzteres wäre formal, $\Theta = 35000^0$ zu setzen. Die zur Prüfung von (53) geeigneten experimentellen Daten wurden in T. VI zusammengestellt. Die mit M. W. überschriebenen Spalten geben die Molekularwärmen, also — nach

Tabelle VI[1]).

(T^3-Gesetz)

Stoff	T	M. W.	Q
CaF_2 (Eucken u. Schwers)	17,5	0,0670	2,32
	19,9	0,1028	2,36
	21,5	0,1316	2,37
	23,5	0,1680	2,35
	25,6	0,2180	2,35
	27,6	0,276	2,36
	29,1	0,331	2,38
	34,0	0,536	2,39
	36,8	0,663	2,37
	37,8	0,713	2,38
	39,8	0,836	2,37
Mittel			$2{,}36_4$
Al (Nernst 4, 7)	19,1	0,066	2,12
	23,6	0,110	2,03
	27,2	0,162	2,01
	32,4	0,25	1,95
	33,5	0,301	2,00
	35,1	0,33	1,97
Mittel			$2{,}01_3$
$C_{reg.}$ Nernst 2)	88	0,028	0,345
	92	0,033	0,349
Mittel			$0{,}34_7$

Stoff	T	M. W.	Q
FeS_2 (Eucken u. Schwers)	(21,7	0,0648	1,85)[2])
	(23,1	0,0754	1,83)
	(24,3	0,0864	1,83)
	(25,1	0,0958	1,83)
	(26,6	0,1085	1,80)
	27,5	0,1095	1,75
	27,8	0,1130	1,74
	29,8	0,1385	1,74
	29,9	0,140	1,74
	30,3	0,140	1,74
	32,9	0,179	1,72
	33,4	0,185	1,71
	35,8	0,232	1,72
	37,0	0,260	1,73
	38,3	0,295	1,74
	42,2	0,402	1,75
	46,7	0,536	1,74
	49,0	0,622	1,75
	51,7	0,712	1,74
	54,7	0,844	1,74
	56,9	0,952	1,73
Mittel			$1{,}73_8$
Ca (Günther)	22,3	0,509	3,58
	24,0	0,627	3,57
Mittel			3,58

Stoff	T	M. W.	Q
Cu (Nernst 3, 4; K.-Onnes 2)	14,51	0,0396	2,35
	15,24	0,0491	2,40
	15,60	0,0506	2,37
	17,17	0,0687	2,39
	17,50	0,0726	2,39
	18,03	0,0792	2,38
	18,89	0,0930	2,40
	19,58	0,1010	2,45
	20,20	0,1155	2,42
	20,75	0,1217	2,39
	20,88	0,1247	2,40
	21,50	0,1410	2,42
	23,5	0,22	2,57
	25,37	0,234	2,43
	27,7	0,32	2,47
Mittel			$2{,}41_5$
CSi (Nernst 7, Günther)	52,0	0,10	0,892
	53,0	0,050	0,696
	56,6	0,143	0,924
	57,0	0,112	0,982
	59,5	0,177	0,945
	61,2	0,142	0,853
	63,1	0,197	0,923
	67,3	0,259	0,935
	68,7	0,303	0,978
	69,0	0,286	0,955
	71,3	0,335	0,975
Mittel			$0{,}914_4$

Stoff	T	M. W.	Q
Si (Nernst 7)	20,1	0,031	1,56
	24,0	0,053	1,57
	28,2	0,086	1,57
	33,7	0,152	1,58
	39,7	0,248	1,58
	44,6	0,352	1,58
	53,1	0,548	1,54
Mittel			$1{,}56_9$
Fe (Günther)	32,0	0,152	1,67
	33,1	0,177	1,70
	35,2	0,244	1,77
	38,1	0,288	1,73
	42,0	0,325	1,64
	46,9	0,522	1,71
Mittel			$1{,}70_3$
BeO (Günther)	76,8	0,202	0,765
	78,1	0,219	0,773
	78,6	0,195	0,739
	79,3	0,226	0,769
	79,7	0,243	0,784
	80,3	0,223	0,756
	82,6	0,236	0,750
	84,9	0,274	0,766
Mittel . . . . . . : :			0,763

1) Literatur s. bei Tab. II, S. ...
2) Nach Ansicht der Autoren gestört.

Tabelle VII.

	Stoff	C	FeS_2	CaF_2	Fe	Al	Cu	Ca
$\Theta_{therm.}$	dem Gesamtverlauf angepaßt (s. Tab. II)	1860	645	474	453	398	315	226
	aus dem T^3-Gesetz (Gl. 53)	2230	645	473	455	385	321	216

unserer bisherigen Bezeichnungsweise — für CSi und $BeO: 2C_v$, für FeS_2 und $CaF_2: 3C_v$. Die Q-Spalte gibt die Quotienten

$$Q = \frac{10^2 \sqrt[3]{M.W.}}{T},$$

die nach dem T^3-Gesetz von der Temperatur unabhängig sein sollten. Wie man sieht, ist die Konstanz durchwegs recht gut erfüllt.

Es ist klar, daß keine endliche Anzahl von Gliedern der Form (22) ein solches Verhalten von $\lim_{T=0} C_v$ wiedergeben kann, daher mußte auch die sonst so erfolgreiche Nernst-Lindemannsche Formel (27^2) in diesem Punkte versagen (s. o. Tab. III). Die Tatsachen fordern gebieterisch eine (annähernd) kontinuierliche Reihe von Frequenzen bis herab zu solchen, die von viel niedrigerer Größenordnung sind als die Höchstfrequenz. —

Daß in einigen Fällen der Ausdruck (30) auch noch im Bereich der letzteren eine brauchbare Näherung bildet, zeigt die Erfahrung. Theorie und Erfahrung stimmen darin überein, daß die Abgrenzung dieser „thermisch einfachen" Körperklasse keine scharfe sein wird. Ein Kriterium für die Abgrenzung, d. h. für die Anwendbarkeit der Näherungstheorie im Einzelfall, läßt sich aus ihr selbst wegen der Allgemeinheit bzw. Unbestimmtheit ihrer Annahmen über die atomare Struktur naturgemäß nicht schöpfen. Eine Durchsicht des Beobachtungsmaterials (Tab. II und V) läßt chemische Einfachheit und reguläre Kristallsymmetrie als — zwar weder notwendige noch hinreichende — aber doch günstige Bedingungen für die Gültigkeit der Näherungstheorie erkennen.

Letzteres — die Rolle der Kristallsymmetrie — führt uns auf einen zweiten Punkt, in dem die Debyesche Theorie einer Vertiefung bedarf.

§ 17. Als echten Festkörper sieht man heute wohl allgemein nur kristallisierte Materie an und es steht von den meisten in unseren Tabellen angeführten Stoffen (ganz besonders von den Metallen!) auch experimentell fest, daß sie wirklich ein kristallines Gefüge aufweisen. Nun darf man wohl annehmen, daß der Energieinhalt nicht von der mehr oder minder vollkommenen äußeren Ausbildung der Kristallform abhängt. Dann müßte man aber von Rechts wegen die Debyesche Rechnung für das äolotrope Medium durchführen und es ist von vornherein nicht klar, daß die Funktionsform (37) dabei erhalten bleibt; jedenfalls würden in die Berechnung der für den C_v-Verlauf charakteristischen Größe Θ die wahren äolotropen Elastizitätskonstanten eingehen, schon bei regulären Kristallen bekanntlich drei an Zahl!

Für $NaCl$, KCl, CaF_2 und FeS_2 sind diese — und nur diese — Konstanten bekannt. Hier haben Hopf und Lechner[1]) die Berechnung von $\Theta_{Deb.}$ so ausgeführt, daß sie (34) erweiterten in

$$\frac{1}{\bar{c}^3} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{4\pi} \int\int \frac{d\omega}{c_i^3}. \tag{54}$$

c_1, c_2, c_3 bedeuten die drei Schallgeschwindigkeiten für Planwellen mit der Wellennormale im Winkelelement $d\omega$ (longitudinaler, „ordinärer" und „extraordinärer" Schallstrahl). Die Integration ist über alle Richtungen zu erstrecken. Wir werden das Verfahren später als folgerichtig erkennen. In den meisten Fällen sind aber die wahren äolotropen Konstanten unbekannt und man muß sich praktisch trotz besserer Einsicht mit der quasiisotropen Theorie und den quasiisotropen Konstanten behelfen. Daß auf diese Weise die regulär-kristallinen Medien noch am besten approximiert werden, ist wohl vor jeder Rechnung einleuchtend.

§ 18. Mit dieser Unvollkommenheit hängt wohl auch das Versagen der Theorie in einem anderen wichtigen Punkt zusammen, den wir bisher vollkommen außer Betracht gelassen haben: eine etwaige Temperaturabhängigkeit von Θ, d. h. von ν_m.

Rechnet man Θ aus dem Mittelwert von $C_v^{1/3}/T$ bei tiefer Temperatur allein nach Formel (53) (Tab. VII), so überschreiten die Abweichungen von den aus dem Gesamtverlauf berechneten Θ-Werten (Tab. II) z. T. ein wenig die wahrscheinlichen Beobachtungsfehler. Hierzu kommt, daß, bei einigen besonders sorgfältigen und engmaschigen Durchmessungen, im T^3-Bereich selbst minimale, aber deutlich systematische Abweichungen vom Gesetz (53) sich gezeigt haben[2]). Man ist versucht, dies auf eine geringfügige Temperaturabhängigkeit von ν_m bzw. von Θ zurückzuführen. Die Theorie bietet eine vollkommen konsequente Handhabe in der Temperaturabhängigkeit der Elastizitätskonstanten (und der Dichte), die in (43) bzw. (44) eingehen. Aber merkwürdigerweise erweist sich nach Eucken[3]) die Variabilität insbesondere des Torsionsmoduls[4]) einiger Metalle als viel zu groß, um die Darstellbarkeit des C_v-Verlaufs durch (37^2)

1) L. Hopf u. G. Lechner, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 643, 1914.

2) W. Nernst u. F. A. Lindemann, Berl. Ber. 1912, S. 1163; Keesom u. K.-Onnes, Leiden Comm. Nr. 143, S. 20 ff.; Nr. 147, S. 9 ff. (Amst. Proc. **17**, 894, 1915; **18**, 484, 1916).

3) A. Eucken, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 571, 1913.

4) Torsionsmodul $= \frac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)\varkappa} = \varrho c_t^2$.

mit einheitlichem Θ dann überhaupt noch verstehen zu können.

Tabelle VIII.

		Al	Cu	Ag
$\Theta_{Deb.}$ (n. Gl. 44)	bei Zimmertemperatur	413	341	220
	bei tiefer Temperatur	502	353	241
$\Theta_{therm.}$	aus Gesamtverlauf (s. Tab. II)	398	315	215
	aus T^3-Gesetz (Gl. 53)	385	321	—

Eucken vermutet wohl mit Recht, daß offenbar die äolotropen Konstanten viel weniger mit der Temperatur variieren, aber es bleibt merkwürdig genug, daß die quasiisotrope Theorie viel eher mit den bei Zimmertemperatur gemessenen Konstanten das (thermisch) „richtige" Θ liefert, während der aus dem elastischen Verhalten bei tiefer Temperatur erschlossene Wert thermisch unbrauchbar ist[1]).

Alles in allem genommen scheint ein näheres Eingehen auf die atomare und auf die äolotrope Struktur der festen Materie (die, wie wir heute mit Sicherheit wissen, aufs innigste zusammenhängen) für ein volles Verständnis ihres Energieinhalts unentbehrlich. Die rechnerischen Schwierigkeiten sind dabei allerdings so große, daß der praktische Erfolg bisher nicht weit über eine Konsolidierung der Debyeschen Theorie hinaus getragen hat.

Die Raumgittertheorie der Atomwärme.

§ 19. Den Grund zu dieser Theorie, von der wir hier nur einen sehr gedrängten Abriß geben können, haben Born und v. Kármán[2]) etwa gleichzeitig mit Debyes Veröffentlichung gelegt. Zu voller Allgemeinheit ausgebaut wurde sie von Born[3]), für einige Spezialfälle exakt durchgerechnet von Thirring[4]) und Born[5]).

Die geometrische Vorstellung vom Aufbau der äolotropen Materie ist die von den Kristallphysikern schon längst ausgebildete und gehegte, die durch die berühmte Laue-Friedrich-Knippingsche Entdeckung der Röntgenstrahlinterferenzen und die daran anknüpfende ausgedehnte Forschungsarbeit zur objektiven Gewißheit geworden ist[1]); im einfachsten Fall, den wir zunächst ins Auge fassen: die von den Atomen umzitterten Mittellagen bilden die Schnittpunkte dreier, im allgemeinen schiefwinkeliger Scharen paralleler, äquidistanter Ebenen.

Der dynamische Ausbau des Modells (der für die Röntgeninterferenzen, wenn man vom Temperatureinfluß absieht, entbehrlich ist) besteht darin, daß man zwischen nächstbenachbarten, oder auch allgemeiner, zwischen beliebigen Atompaaren Kräfte einführt, die in den Mittellagen verschwinden und lineare Vektorfunktionen der relativen Verrückungen sind. Aus diesem nur noch wenig verallgemeinerten (s. u. § 20) Modell konnte Born einen großen Teil der Kristallphysik formal ableiten.

Denkt man sich nun aus einem solchen „einfachen Atomgitter" wieder einen „Block" herausgeschnitten, der N „Elementarparallelopipede", folglich N Atome enthält, und sucht seine Eigenschwingungen nach der oben (§ 11) skizzierten Methode wirklich zu berechnen, so bemerkt man, daß trotz der formal-mathematischen Einfachheit des Problems (N lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten) die Sonderstellung der Randatome schier unüberwindliche Schwierigkeiten bereitet. — Sie lassen sich vermeiden, indem man den Block als Teil eines unendlichen Gitters auffaßt. Dann ist jedes Atom seiner Umgebung gegenüber in derselben geometrischen und dynamischen Situation, die unendlich vielen Differentialgleichungen der Bewegung reduzieren sich auf drei Typen und lassen sich leicht integrieren. Als Eigenschwingungen erhält man drei dreifach ausgedehnte Kontinua stehender Planwellen: Wellennormale beliebig, Wellenlänge innerhalb gewisser Grenzen (s. u.) beliebig, nach Festlegung beider noch drei Polarisationstypen.

Der exakte Nachweis[2]), welche Auswahl dieser unendlich vielen Eigenschwingungen des unendlichen Gitters einem endlichen Teil desselben zuzurechnen sei, verursacht die bedeutendsten Schwierigkeiten, die wir hier völlig übergehen müssen. Das Ergebnis ist von denkbarster Einfachheit. Auf das Volumen V entfallen

$$\frac{V}{\lambda^2} d\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\omega \tag{55}$$

Eigenschwingungen einer Type von der Wellenlänge zwischen λ, $\lambda + d\lambda$ und mit der Wellennormale im Raumwinkelelement $d\omega$.

1) Einen Erklärungsversuch s. b. A. Eucken, I. Conseil Solvay, Deutsche Ausgabe S. 387. (Halle a. S. bei Knapp 1914.)

2) M. Born u. Th. v. Kármán, diese Zeitschr. **13**, 297, 1912; **14**, 15, 1913. — S. a. M. Born, ebend. **15**, 185, 1914; P. Debye u. J. Kern, ebend. S. 490.

3) M. Born, Dynamik der Kristallgitter, bei Teubner 1915. — W. Dehlinger, diese Zeitschr. **15**, 276, 1914; Dissertation München.

4) H. Thirring, diese Zeitschr. **14**, 867, 1913; **15**, 127, 180, 1914.

5) M. Born, Ann. d. Phys. (4) **44**, 605, 1914.

1) Referate: M. v. Laue, Jahrb. d. Rad. u. El. **11**, 308, 1914; A. Jonsohn, ebend. **14**, 52, 1917; W. Voigt, diese Zeitschr. **19**, Heft 15ff., 1918.

2) M. Born u. Th. v. Kármán, diese Zeitschr. **14**, 65, 1913.

Die große Allgemeinheit dieses Resultats, dem nichts der Kristallsymmetrie oder der Gitterstruktur Eigentümliches anhaftet, erklärt sich daraus, daß die kinematische Möglichkeit einer Welle ausschließlich von ihrer Länge, nicht von ihren sonstigen Bestimmungsstücken abhängt[1]). Der Ausdruck ist in der Tat auch für beliebig äolotrope Kontinua gültig; im Falle der Isotropie deckt er sich mit (30). Die ganze Komplikation bei der weiteren Anwendung liegt in der Art, wie die Schwingungszahl ν von der Wellenlänge und Richtung der Wellennormale abhängt.

Sehen wir von dem, was die Raumgittertheorie darüber aussagt, vorläufig noch ab, und setzen für die drei Wellentypen bzw.

$$\lambda = \frac{c_1}{\nu}; \quad \lambda = \frac{c_2}{\nu}; \quad \lambda = \frac{c_3}{\nu}, \tag{56}$$

so erhalten wir die früher geforderte Verallgemeinerung der Debyeschen Theorie für das äolotrope Kontinuum. Die c_i sind die aus den gemessenen Elastizitätskonstanten (und der Dichte) in bekannter Weise zu bildenden Schallgeschwindigkeiten für die Longitudinal- und die beiden polarisierten Transversalwellen. Sie hängen von der Achsenrichtung von $d\omega$ ab. Durch Integration über $d\omega$ und Summation erhält man insgesamt zwischen ν und $\nu + d\nu$

$$\frac{12\pi V}{\bar{c}^3}\nu^2 d\nu \tag{57}$$

Eigenfrequenzen, wo $\bar{c}$ die schon oben benutzte Abkürzung (54). Diese geänderte Bedeutung von $\bar{c}$ ist aber auch das einzige, wodurch sich (57) von (30) [unter Rücksicht auf (34)] unterscheidet. Bricht man wieder bei der $3N^{\text{ten}}$ Frequenz ab, so erhält man wieder (35) usw., kurz die Debyesche Theorie ohne jede weitere Änderung[2]). —

Ganz anders, wenn man in (55) jene Abhängigkeit zwischen ν und λ einsetzt, die die Gittertheorie wirklich liefert. Es stellt sich nämlich heraus, daß die Struktur für die kürzesten, mit dem Atomabstand vergleichbaren Wellen merkliche Dispersion hervorruft. Das Produkt $\nu\lambda$ — die Fortpflanzungsgeschwindigkeit — ist für eine Wellentype und gegebene Normalenrichtung nicht mehr konstant, sondern variiert auch noch mit λ. Als Folge davon ergibt sich das Abbrechen des Spektrums bei hohen Schwingungszahlen „automatisch".

Ein Beispiel soll das klarer machen. Wir wählen etwa: Einfaches kubisches Gitter, Würfelkante b, stehende Longitudinalwelle in Richtung einer Würfelkante, die zu ihr senkrechten Atomebenen schwingen als ganze, undeformiert, in Richtung der Kante, und zwar unisono mit zeitlich unveränderlicher, von einer Ebene zur nächsten periodisch veränderlicher Amplitude. In diesem Spezialfall lautet die Dispersionsgleichung

$$\nu = \nu_g \sin\frac{\pi b}{\lambda}, \tag{58}$$

wo ν_g von der Atommasse und den Atomkraftparametern in einfacher Weise abhängt. Für lange Wellen wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c_\infty = \lim_{\lambda=\infty} \nu\lambda = \nu_g \pi b, \tag{59}$$

was, beiläufig bemerkt, eine Relation zwischen den Atomkraftparametern und den meßbaren Elastizitätskonstanten darstellt. Wird λ mit b vergleichbar, so nimmt c etwas ab, für $\lambda = 2b$ auf den Bruchteil $\frac{2}{\pi} = 0{,}658\cdots$. Läßt man λ noch kleiner werden, so erhält man nichts Neues! ν nimmt wieder ab, die Wellenlänge — der doppelte Abstand zweier Knotenebenen — in Wahrheit wieder zu![1]) ν_g ist eine echte und wahre obere Grenzfrequenz für Wellen dieser Type und Richtung.

Wie sieht nun das betreffende Teilspektrum (55) aus? Mit (58) wird

$$\frac{V}{\lambda^2} d\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\omega = \frac{V}{\pi^3 b^3} \cdot \frac{(\arcsin \nu/\nu_g)^2}{\sqrt{\nu_g^2 - \nu^2}} d\nu\, d\omega. \tag{60}$$

Solange $\lambda \gg b$, also $\nu \ll \nu_g$, ist die Verteilung [mit Rücksicht auf (59)]:

$$\frac{V}{c_\infty^3}\nu^2 d\nu d\omega, \tag{61}$$

also ganz von der Art, wie bei Debye [s. (30)]. In der Nähe der Grenzfrequenz ν_g, wo der Nenner verschwindet, häufen sich, als Folge der Dispersion, die Eigenfrequenzen noch stärker, um bei $\nu = \nu_g$, ganz konform der früheren Konzeption, schroff abzubrechen.

Ähnlich verhält sich jedes solche Teilspektrum. Fundamental wichtig ist, daß ν_g nicht für alle denselben Wert hat, sondern eine (dreiwertige) kontinuierliche Funktion der Achsenrichtung von $d\omega$ ist: die Grenzfrequenz variiert von Richtung zu Richtung und von einer Wellentype zur anderen.

Die Hauptvernachlässigung der Debyeschen Theorie (selbst in der obigen Ausdehnung auf äolotrope Kontinua) besteht offenbar darin, daß sie statt dieser dreiwertigen Richtungsfunktion ein Generalmittel ν_m

1) Eine Veranschaulichung bei L. Flamm, diese Zeitschr. 19, 122, 1918.

2) s. a. D. A. Goldhammer, diese Zeitschr. 14, 1185, 1913.

1) $\lambda = 2b$ heißt, Nachbarebenen haben entgegengesetzt gleiche Amplitude. Rascher kann die Amplitude von Ebene zu Ebene nicht variieren.

einsetzt, so gewählt, daß es die Gesamtzahl der Freiheitsgrade auf den richtigen Wert $3N$ bringt.

Nach Born wird man der Wahrheit schon näher kommen, wenn man wenigstens für jede der drei Wellentypen eine besondere Grenzfrequenz bestimmt[1]). Wir übergehen die Details, wie das zu geschehen hätte, da sie bisher keine praktische Bedeutung bekommen haben. Für C_v erhält man (in der Bezeichnung der Tab. V):

$$C_v = \frac{1}{3}[D(\Theta_1) + D(\Theta_2) + D(\Theta_3)], \qquad (62)$$

wo Θ_1, Θ_2, Θ_3, wie bei Debye, Funktionen der makroskopischen Elastizitätskonstanten und der Dichte sind. —

§ 20. Der bisher behandelte einfachste Fall, daß jedes Atom sich gegenüber seinen Nachbarn in der gleichen geometrischen und dynamischen Situation befindet, kann in Strenge nur bei Elementen zutreffen. Die Röntgenkristallforschung hat ergeben, daß bei chemischen Verbindungen nicht etwa die Moleküle in den Punkten eines einfachen Gitters zu placieren sind; will man sich schon so ausdrücken, so ist jedenfalls der Zusatz nötig: Moleküle mit unveränderlicher mittlerer Atomkonfiguration und in paralleler Orientierung. Da aber mit großer Schärfe viele Atomanordnungen festgestellt sind (z. B. die der Alkalihalogenide[1]), die eine definite Abgrenzung des chemischen Moleküls im Kristall überhaupt nicht gestatten, drückt man sich besser so aus: Es sind mehrere (n) kongruente Atomgitter ineinandergestellt, in paralleler Orientierung und um gewisse Vektoren gegeneinander verschoben. Jedes von ihnen kann mit einer anderen, es können aber auch einige davon mit derselben Atomart besetzt sein. Ja, es stellt sich heraus, daß man Mehrfachheit des Gitters — oder in der anderen, weniger passenden Sprechweise: Mehratomigkeit des Moleküls — auch schon für Elemente zulassen muß.

Was fügt diese letzte Verallgemeinerung des Modells dem Spektrum der Eigenfrequenzen hinzu? — Alles bisher Gesagte bleibt unverändert aufrecht, wenn man nur unter V auch jetzt ein Volum $= N$ Elementarparallelopipeden des einfachen Gitters versteht (V enthält also jetzt $n \times N$ Atome gleicher oder verschiedener Art).

1) S. a. D. A. Goldhammer l. c. dann M. Brillouin, Ann. d. Phys. (9) 1, 433, 1914.

2) Die Alkali- und Halogenatome stehen in den ganzzahligen Punkten eines rechtwinkligen Koordinatensystems; und zwar die einen in den Punkten mit gerader, die anderen in denen mit ungerader Koordinatensumme; jedes Alkali hat also sechs gleichweit entfernte nächste Halogen-Nachbarn und vice versa.

Die Vermehrung der Freiheitsgrade von $3N$ auf $n \times 3N$ spricht sich darin aus, daß zu den 3 elastisch-akustischen Wellentypen $3(n-1)$ weitere hinzutreten, die ebensoviel weitere Spektralzweige (55) bilden. Die neuen Bewegungstypen — ich will sie „2. Art" nennen — bestehen, grob gesprochen, in Parallelverschiebungen der n einfachen Gitter gegeneinander: für $\lambda = \infty$ (dieser Fall ist am leichtesten zu übersehen) führen sie — jedes einzelne undeformiert — als n starre Körper einfach-harmonische Translationsschwingungen gegeneinander aus.

Soll die ganze Anordnung überhaupt stabil sein, so muß eine Verrückung der letztgenannten Art auch wirklich Reaktionskräfte wachrufen. Daher kann dieser Schwingung unmöglich die „Frequenz 0" zukommen; das Dispersionsgesetz muß also für die Wellentypen 2. Art von ganz anderem Charakter sein. In der Tat ergibt sich: Solange die Wellenlänge (= doppelter Abstand der Knotenebenen) groß ist gegen die Atomabstände, ist für diese Wellentypen nicht das Produkt $\nu\lambda$, sondern ν selbst konstant, und zwar auch von der Richtung der Wellennormale unabhängig!

Von größter Bedeutung ist folgendes: Sind einzelne Atomarten elektrisch geladen, so wird bei diesen Schwingungen — und hauptsächlich bei ihnen — ein elektrisches Moment der Volumeinheit geweckt. Daher werden umgekehrt gerade sie durch einfallende elektrische Wellen erregt und zwar durch optische und ultraoptische natürlich langwellige unter ihnen. Das läßt uns folgendes Ergebnis der exakten Rechnung verstehen:

Die $3(n-1)$ Grenzfrequenzen 2. Art treten als Eigenfrequenzen (der Helmholtz-Kettelerschen Art) in der optischen Dispersionsformel auf[1]). —

Zur Berechnung des Energieinhalts liegt es nahe, die neuen Spektralzweige ähnlich zu approximieren, wie die drei elastisch-akustischen: Man sieht von den Besonderheiten bei kleiner Wellenlänge ab und setzt durchwegs das Grenzgesetz, diesfalls:

$$\nu = \text{const} = \nu_l \quad l = 4, 5, \cdots 3n. \qquad (63)$$

In dieser Näherung liefert dann jeder Zweig offenbar ein Glied vom monochromatischen Einsteinschen Typus (21) bzw. (22). Für die Wärmekapazität des mittleren Grammatoms (N

1) Der erste, der optische Eigenschwingungen aus einem Gittermodell und den elastischen Eigenschaften erfolgreich berechnet hat, war Madelung, Gött. Nachr. 1909, S. 100; 1910, S. 43; diese Zeitschr. 11, 898, 1910 — Über einige spezielle Gittertypen s. M. Born, Berl. Ber. 1918, S. 604.

Atome; $\frac{N}{n}$ Elementarparallelepipede) erhält man, in den früheren Bezeichnungen:

$$C_v = \frac{1}{3n}\Big[\sum_{l=1}^{3} D(\Theta_l) + \sum_{l=4}^{3n} E\,(\Theta_l)\Big];$$

$$\Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3 \text{ aus elast. Konstanten;} \qquad (64)$$

$$\Theta_l = \frac{h\nu_l}{k} \qquad l = 4,\ 5, \cdots 3n.$$

Durch die gemessenen Elastizitätskonstanten lassen sich die ν_r bzw. Θ_r-Werte 2. Art im allgemeinen nicht ausdrücken. Wohl liefert die Rechnung sie — natürlich — als Funktionen der Atommassen und -kraftparameter. Aber die Zahl der letzteren muß im allgemeinen größer angenommen werden als die der unabhängigen Elastizitätskonstanten. Daher können die Beziehungen von der Art (59) die Kraftparameter nie eindeutig liefern, sondern nur gewisse Kombinationen von ihnen. In den Grenzfrequenzen 2. Art treten sie im allgemeinen in anderen Kombinationen auf.

§ 21. Eine volle Aufklärung für das seltsame Zusammentreffen der Reststrahlenfrequenz mit der Debyeschen Grenzfrequenz ergibt sich aus dem Gesagten vorerst noch nicht. Im Gegenteil: Da für die Alkalihalogenide mindestens $n = 2$ ist (für Flußspat gar $= 3$), scheint die Darstellung durch eine D-Funktion überhaupt inadäquat. In dieser Erwägung hat denn auch Nernst[1]) vorgeschlagen, hier

$$C_v = \tfrac{1}{2}\,[D(\Theta) + E(\Theta')] \qquad (65)$$

zu versuchen, wobei für Θ der „elastische" [allenfalls der Lindemannsche, Gl. (47)], für Θ' der Reststrahlen-Wert einzusetzen wäre. Dabei bedeutet das Zusammenlegen der ersten drei Θ-Werte die bekannte Näherung; das zweite Tripel fällt wegen der hohen (regulären) Symmetrie auch der Theorie nach zusammen. — (65) stimmt für $NaCl$ und KCl merklich schlechter, als die frühere Darstellung; $AgCl$ wird recht gut wiedergegeben.

Die Aufklärung dieses zunächst recht unbefriedigenden Sachverhalts ist in dem geringen Unterschied der Atommassen (23, 35; 39, 35; dagegen 108, 35) und darin zu suchen, daß die Auffassung der Spektralzweige zweier Art als monochromatisch doch wieder nur eine Näherung ist, die in gewissen Grenzfällen notwendig versagen muß. Man kann ja ein 2-faches Gitter vom Typus der Alkalihalogenide (s. § 20 Anm.) dadurch kontinuierlich in ein einfaches überführen, daß man die Atommassen und die Kraftparameter[1]) allmählich gleich werden läßt. Dabei müssen die Zweige zweiter Art mit denen erster Art allmählich verschmelzen; sie können daher bei geringem Massenunterschied auch nicht angenähert monochromatisch sein. Daß selbst beim Steinsalz die Verschiedenheit der Atommassen das mechanische Spektrum nur wenig beeinflußt, läßt sich aus Rechnungen Thirrings[2]) entnehmen, während andererseits eine gewisse Überlegung von Born u. Kármán[3]) starke Anhaltspunkte dafür gibt, daß die Monochromasie bei starker Verschiedenheit der Massen am genauesten zutrifft.

In einer Reihe solcher Fälle, die der Debyeschen Formel durchaus widerstreben würden, finden wir denn auch, daß Formelbildungen vom Typus (64), (65) den C_v-Verlauf gut wiedergeben (s. Tab. V); hierher ist insbesondere auch die Form

$$C_v = 1/n\, D(\Theta)$$

bei tiefer Temperatur zu rechnen, die man dadurch erklären kann, daß die E-Glieder bereits erloschen sind. — Mehr als diese formal-mögliche Übereinstimmung läßt sich bis jetzt wohl nicht konstatieren. —

Als wichtiges bisheriges Ergebnis halten wir nochmals fest: Die exakte Übereinstimmung der optischen Eigenfrequenzen mit den elastisch berechneten oder die Vorhersage des thermisch-energetischen Verhaltens aus den Frequenzen der einen oder der anderen Art allein ist bei komplizierterer Struktur im allgemeinen nicht mehr zu erwarten; die Übereinstimmung der Größenordnung ist ein wertvoller Beweis dafür, daß im Kristall Atomkräfte der gleichen Art und Größenordnung einerseits den Zusammenhalt zwischen den chemisch verschiedenen Atomen, anderseits den Zusammenhalt des ganzen Kristallgefüges hervorbringen[4]).

1) W. Nernst, Göttinger Vorträge (bei Teubner 1914). S. 81 ff.

1) Die wichtigsten Kraftparameter: „Halogen → Alkali" und „Alkali → Halogen" sind schon nach dem Gegenwirkungsprinzip gleich!

2) H. Thirring, diese Zeitschr. 15, 132, 1914.

3) M. Born u. Th. v. Kármán l. c. § 5: Gitterlinie, abwechselnd mit Atomen und mit Elektronen besetzt.

4) Anmerkung bei der Korrektur: Sieh hiezu M. Born u. A. Landé, Über die absolute Berechnung der Kristalleigenschaften mit Hilfe Bohrscher Atommodelle, Berl. Ber. 1918, 1048; P. Debye u. P. Scherrer, Atombau, diese Zeitschr. 19, 474, 1918.

(Schluß folgt.)

BESPRECHUNGEN.

Rudolf Mehmke, Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung. In zwei Bänden. Erster Band: Punktrechnung. Erster Teilband: Das Rechnen mit Punkten, Geraden und Ebenen (Erste Hälfte). Grundzüge der projektiven Geometrie. Anwendungen und Übungen. VIII, 394 S. mit 152 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1913. M. 14.—

Durch Zufall ist das vorliegende Buch, von dessen zwei Bänden nur der erste Teilband des ersten Bandes erschienen ist, in dieser Zeitschrift nicht referiert worden. Da es sich um ein Werk von grundlegender Bedeutung handelt — es gibt wohl kein ähnliches Werk über Punktrechnung in deutscher Sprache — und da gerade der Physiker an der Entwicklung dieser Rechnungsarten Interesse hat, so sei es gestattet, nachträglich noch auf diese 1913 erschienene Arbeit hinzuweisen. Das um so mehr, als hoffentlich auch die fehlenden Teile noch erscheinen werden. Durch die Entwickelung der Relativitätstheorie werden allgemeinere geometrische Rechnungsmethoden als die Vektorenrechnung im üblichen engeren Umfang mehr und mehr ein notwendiger Studiengegenstand des Physikers. Eine systematische Pflege solcher Disziplinen ist erwünscht, und die aus so berufener Feder hervorgegangenen Vorlesungen verdienen besondere Aufmerksamkeit. Mehmke will eine umfassende Darstellung der Punktrechnung geben, und als deren besonderen Fall eine, voraussichtlich ebenso umfassende, Vektorenrechnung. Letztere von Graßmannschen Gesichtspunkten aus entwickelt zu sehen, wird gerade dem Physiker willkommen sein. Die meisten Lehrbücher gehen ja über die eigentliche Begründung des Vektorenbegriffes einfach hinweg.

Mehmke beginnt im vorliegenden Teile mit der Punktrechnung (S. 1—178). Mit Virtuosität benutzt er dieselbe alsdann zu einer, die Fruchtbarkeit der Methoden glänzend erweisenden, ziemlich weitgehenden Darstellung der projektiven Geometrie (S. 179—358). Die Punktrechnung wird sozusagen an diesem Objekte eingeübt. Die Darstellung erscheint geeignet, den Leser anzuregen zum Studium der Klassiker des Gebietes: Graßmann, Möbius, Hamilton usw. Obwohl der Physiker die Punktrechnung lieber auf physikalische Probleme angewendet sehen würde, so unterliegt es doch keinem Zweifel, daß die projektive Geometrie, wenn sie in so eleganter Art gegeben wird, für den Physikstudierenden ein nicht zu unterschätzendes Bildungsmittel ist. Kaum eine andere Disziplin dürfte den Blick für Analogien so schulen, als eine solche Behandlung der projektiven Geometrie. Mehmke legt großen Wert auf Dualitätsmethoden zur Ableitung neuer Sätze. Die systematische Behandlung von Korrelationen, der wir hier begegnen, muß unwillkürlich dazu anregen, das physikalische Denken nach ähnlichen Prinzipien zu organisieren. Es drängt sich sogar das Gefühl auf, daß mutatis mutandis ähnliche Methoden wie sie hier zur Ableitung geometrischer Sätze benutzt werden, in der Physik in einem bisher nicht gekannten Grade eine Rolle spielen könnten, um aus bekannten Erscheinungsgruppen neue abzuleiten. Eine nähere Inhaltsangabe erscheint hier überflüssig — wer sich für den Gegenstand interessiert, wird es jedenfalls nicht bereuen, dieses hervorragende Werk genau durchzusehen.

H. Hörig.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: Der frühere Vorstand der Hauptstation für Erdbebenforschung in Straßburg Geh. Regierungsrat Professor Dr. Oskar Hecker an der Universität Jena für Geophysik und Erdbebenforschung, an der Universität Hamburg Dr. Ernst Tams für Geophysik, insbesondere Seismologie.

Ernannt: Der ord. Professor der Mathematik und Mechanik an der Technischen Hochschule Delft Dr. J. Klopper zum Rektor und Dr. J. Clay zum Lehrer für Naturkunde an der neugegründeten Indischen Technischen Hochschule in Niederländisch-Indien, Dr. Heinrich Ficker zum ord. Professor für Meteorologie und Geophysik, der frühere a. o. Professor an der Universität Straßburg (z. Z. an der Universität Frankfurt) Dr. Edgar Wedekind zum ord. Professor der Chemie an der Forstakademie Hann.-Münden.

Berufen: Der Privatdozent an der Universität Göttingen Professor Dr. Erwin Madelung zum a. o. Professor der Physik an der Universität Kiel, der ord. Professor an der Universität Freiburg i. d. Schweiz Dr. Tadeusz v. Estreicher zum ord. Professor für allgemeine Chemie an der Universität Krakau, der bisherige Professor am Polytechnikum in Riga Dr. Paul Walden zum ord. Professor der Chemie an der Universität Rostock, der frühere Professor an der Universität Moskau Dr. Fischer zum ord. Professor für anorganische Chemie an der Universität Posen, der Dozent an der Universität Krakau Dr. A. Galecki zum a. o. Professor der physikalischen Chemie an der Universität Posen, der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Ernst Berl zum ord. Professor für chemische Technologie an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

Gestorben: Der Vorsitzende des Aufsichtsrats der Siemens & Halske A.-G. Geh. Regierungsrat Dr. Werner v. Siemens.

Angebote.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und H. Th. Simon



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 50 Mark fürs Inland und 64 Mark fürs Ausland jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 58 Mark, im Ausland 80 Mark.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstraße 2.

No. 22. 15. November 1919. No. 554. 20. Jahrgang.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen, B. = Besprechung.)



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 22. 15. November 1919. 20. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 24 am 30. November 1919.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Integration der thermodynamischen Differentialgleichung von Helmholtz nach dem Nernstschen Wärmetheorem.

Von A. Byk.

Das Nernstsche Wärmetheorem läßt sich so formulieren[1]), daß man die Helmholtzsche Differentialgleichung

$$A - U = T\frac{dA}{dT}, \qquad (1)$$

die die beiden Hauptsätze der Thermodynamik zusammenfaßt[2]) mit der Nebenbedingung

$$\frac{dA}{dT}_{(T=0)} = 0 \qquad (2)$$

integriert. (A ist die maximale Arbeit des betreffenden Vorganges, U die Wärmetönung, T die absolute Temperatur.) Das allgemeine Integral von (1) ist

$$A = -T\int\frac{U}{T^2}dT + a_0 T,$$

wobei a_0 die willkürliche Konstante der Differentialgleichung erster Ordnung (1) darstellt. Setzt man U als Temperaturfunktion für konstanten Druck in der Form einer Potenzreihe mit einer unbestimmten, aber endlichen Anzahl von Gliedern an:

$$U = U_0 + \alpha T + \beta T^2 + \varkappa_1 T^3 + \varkappa_2 T^4 + \ldots, \qquad (3)$$

so ergibt[3]) die Bedingung (2) die Forderung $\alpha = a_0 = 0$. Man erhält so A in der Form eines unbestimmten Integrals mit wegfallender Konstante, wofür Nernst[4]) sich der Schreibweise bedient:

$$A = -T\int^T \frac{U}{T^2}dT. \qquad (4)$$

Diese soll angeben, daß der Ausdruck unter dem Integralzeichen unbestimmt zu integrieren und die obere Grenze T in den so gewonnenen Ausdruck einzusetzen ist.

Das Fehlen einer unteren Grenze ist, wie Nernst[1]) selbst bemerkt, ein Mangel der Formulierung und macht insbesondere die anschauliche Deutung des Integrals als Flächeninhalt unmöglich. Eine solche erscheint zunächst nur ausführbar, wenn man in der Entwicklung von U nach (3) das erste Glied absondert und schreibt[2]):

$$A = U_0 - \Sigma\nu F, \qquad (5)$$

wobei

$$F = T\int_0^T \frac{E}{T^2}dT,\quad E = \int_0^T C_p dT.$$

Die Summation ist über sämtliche bei der Reaktion beteiligte Substanzen auszuführen; die Molekülzahlen ν der ursprünglichen Substanzen sind positiv, die der entstehenden negativ zu rechnen. Die Molekularwärmen bei konstantem Druck C_p stehen zu den Koeffizienten der Entwicklung (3) in der Beziehung:

$$\Sigma\nu C_p = 2\beta T + 3\varkappa_1 T^2 + 4\varkappa_2 T^3 + \ldots.$$

In den Ausdrücken F hat man die gewünschte untere Grenze und kann somit die Bestimmung von A bis auf den Summanden U_0 auf die Auswertung von Flächeninhalten zurückführen[3]).

Es fragt sich, ob es nicht möglich ist, auch ohne Abtrennung von U_0 für das Integral der rechten Seite von (4) eine untere Grenze anzugeben. Da der Wert des unbestimmten Integrals an der unteren Grenze verschwinden soll, so ist die zugehörige Temperatur T' durch die Gleichung gegeben:

1) W. Nernst, Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes. Halle 1918, S. 191.
2) Helmholtz, Gesammelte Abhandlungen II, S. 969.
3) Nernst, a. a. O., S. 67.
4) Nernst, a. a. O., S. 191.

1) a. a. O.
2) Nernst, a. a. O., S. 95.
3) Nernst, a. a. O., S. 80.

$$\int^{T} \frac{U}{T^2} dT = 0. \qquad (6)$$

Nach dem Ansatz (3) ($\alpha = 0$) ist

$$\int^{T'} \frac{U}{T^2} dT = -\frac{U_0}{T'} + \beta T' + \tfrac{1}{2} \varkappa_1 T'^2 + + \tfrac{1}{3} \varkappa_2 T'^3 + \dots \qquad (7)$$

Bringt man alle Glieder der rechten Seite von (7) auf den Generalnenner T', so ist nach (6) zu fordern, daß der entstehende Quotient zweier ganzer rationaler Funktionen von T' verschwindet. Diese Forderung kommt, da Zähler und Nenner für $U_0 \gtrless 0$ keinen gemeinschaftlichen Teiler besitzen, darauf hinaus, daß der Zähler verschwindet, sofern der Grad der Funktion im Zähler größer ist als derjenige der Funktion im Nenner[1]). Das wird aber stets der Fall sein, wenn nicht etwa alle Koeffizienten $\beta, \varkappa_1, \varkappa_2, \dots$ verschwinden. Wir können die Forderung (6) im allgemeinen also schreiben:

$$U_0 - \beta T'^2 - \sum_{n=1,2,\dots m} \frac{\varkappa_n}{n+1} T'^{(n+2)} = 0, \qquad (8)$$

wenn die Entwicklung von U mit dem Gliede $\varkappa_m T^{m+2}$ abschließt.

Ist speziell $\beta = \varkappa_1 = \dots \varkappa_m = 0$, so lautet die Bedingung (6) $-\frac{U_0}{T'} = 0$. Für diese gebrochene rationale Funktion, bei der der Grad des Nenners höher ist als der des Zählers, wird der Grad durch denjenigen des Nenners angegeben[2]). Der Grad der gebrochenen Funktion ist also 1. Sie nimmt den Wert Null daher einmal an, und zwar für $T' = \infty$. Ist demnach U im besonderen Falle von der Temperatur unabhängig und damit das Berthelotsche Prinzip bei beliebiger Temperatur erfüllt, so wird die untere Integrationsgrenze in (4) $T' = \infty$. Man kann also nicht, wie es z. B. Sackur[3]) tut, bei Mitberücksichtigung des ersten Gliedes der Entwicklung von U mit der unteren Grenze Null rechnen, die nach Absonderung von U_0 in F eingeführt werden darf.

Verschwinden, wie es im allgemeinen der Fall sein wird, nicht alle Koeffizienten von β bis $\varkappa_m$, so werden $m + 2$ Werte von T' durch die wegen $\alpha = 0$ rein algebraische Gleichung (8) gegeben. Ohne die das Nernstsche Wärmetheorem enthaltende Gleichung (2) würde α nicht allgemein verschwinden. Die Gleichung (8) würde dann noch ein logarithmisches Glied enthalten, und man könnte nicht mehr ohne weiteres behaupten, daß für beliebige Werte der Koeffizienten auch nur eine Wurzel von (8), d. h. eine mögliche untere Grenze für das Integral $\int \frac{U}{T^2} dT$ existierte. Die Existenz einer solchen unteren Grenze ist also an die Gültigkeit des Nernstschen Wärmetheorems geknüpft. Ist aber $\alpha = a_0 = 0$, so können wir einen beliebigen der $m + 2$ Werte von T' als untere Grenze des Integrals wählen. Solange auch nur einer der Werte T' reell und positiv ist, ergibt sich die Darstellung von

$$\int_{T'}^{T} \frac{U}{T^2} dT$$

bzw. A als Flächeninhalt ohne weiteres.

Die T' brauchen aber nicht positiv und reell zu sein. In dem einfachsten Falle, in dem sich $U = U_0 + \beta T^2$ setzen läßt, hängt die Realität von T' von dem Vorzeichen von $\frac{U_0}{\beta}$ ab. Für $\frac{U_0}{\beta} > 0$ (Umwandlungspunkt des Schwefels, Hydratation von Kupfersulfat[1]) ist T' reell, für $\frac{U_0}{\beta} < 0$ (Hydratation von Ferrozyankalium[2]) imaginär. Im allgemeinen werden wir es also auch mit komplexen Werten der unteren Grenze T' zu tun haben, deren reeller Anteil positiv oder negativ sein kann. Die Einführung von komplexen Temperaturen ist natürlich ein rein mathematisches Hilfsmittel und bedeutet in keiner Weise eine physikalische Erweiterung des Temperaturbegriffes. Die Flächenstücke, die das Integral[3])

$$\int_{T'}^{T} \frac{U}{\Theta^2} d\Theta$$

zusammensetzen, werden sich auch sämtlich als reell erweisen, und das Resultat stimmt in jedem einzelnen Falle mit Gleichung (4) überein. Der Fall liegt hier ähnlich wie bei der formellen Einführung komplexer Integrale zur Auflösung der Differentialgleichung der elastischen Schwingung[4]).

1) Siehe z. B. Burkhardt, Analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen (4. Aufl., Leipzig 1912), S. 151.
2) Burkhardt, a. a. O.
3) Thermochemie u. Thermodynamik (Berlin 1912), S. 317.

1) Nernst, a. a. O., S. 87.
2) Nernst, a. a. O., S. 93.
3) Wir bezeichnen die unabhängige Veränderliche, wenn wir jetzt auch komplexe Werte mit in Betracht ziehen, allgemein mit Θ, indem wir das Zeichen T nach wie vor für die reelle obere Grenze des Integrals auf der rechten Seite von (4) reservieren.
4) Vgl. z. B. Helmholtz, Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte [illegible]

Wir haben es nunmehr also mit dem Integral einer Funktion komplexen Argumentes zu tun. Ein solches können wir nicht mehr ohne weiteres gleich der Differenz der nach den Regeln für Funktionen reeller Argumente gebildeten Werte des unbestimmten Integrals an den beiden Grenzen setzen. Es kann vielmehr noch vom Integrationswege abhängig sein. Nun läßt sich das Integral wie bei Funktionen reeller Argumente berechnen für Wertebereiche der komplexen Veränderlichen, in denen die Integralfunktion eine sogenannte reguläre Funktion dieser komplexen Veränderlichen ist[1]). Hierzu ist nur erforderlich[2]), daß für jeden Punkt des Bereiches der Differentialquotient dieser Funktion einen bestimmten Wert hat. Diese Eigenschaft aber kommt[3]) jeder rationalen Funktion der komplexen Veränderlichen in jedem Punkte zu, in welchem sie endlich ist. Nun ist die hier in Betracht kommende, nach den Regeln der Integralrechnung für reelle Veränderliche gebildete Integralfunktion:

$$-\frac{U_0}{\Theta}+\beta\Theta+\sum_{n=1,2,\ldots m}\frac{\varkappa_n}{n+1}\Theta^{n+1}. \qquad (9)$$

Die Funktion (9), als Funktion der komplexen Veränderlichen $\Theta = x + iy$ betrachtet, ist ebenso wie auch der Integrand nach dem angegebenen Kriterium für alle Punkte mit Ausnahme von $\Theta = 0$ und $\Theta = \infty$ regulär. Die Differenz der Werte von (9), genommen an den beiden Grenzen T und T', stellt also den Wert des Integrals

$$\int_{T'}^{T}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta$$

für beliebige Integrationswege vor, sofern sie nicht gerade durch die Punkte $\Theta = 0$ oder $\Theta = \infty$ hindurchgehen. Der Punkt $\Theta = 0$ ist ein sogenannter Pol der Funktion (9) sowie des Integranden. Es seien $T\vartheta T'$ und $T\vartheta' T'$ in der Ebene der komplexen Veränderlichen Θ (Fig. 1) zwei verschiedene, im Endlichen ver-

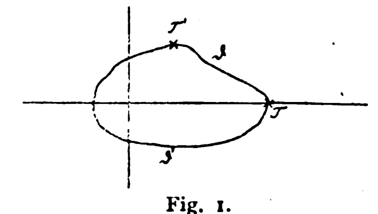


Fig. 1.

bleibende Integrationswege, die den Wert 0 einschließen, in dem die Integralfunktion, wie angegeben, nicht regulär ist. Dann gilt zwar immer noch, daß für jeden der beiden Wege das Integral gleich der Differenz der Werte der Integralfunktion an den beiden Grenzen ist. Aber diese könnten möglicherweise mehrdeutig sein, und es könnten für die beiden Wege nicht die gleichen Werte in Betracht kommen. Geht man von einem bestimmten Werte der Integralfunktion in T aus, nämlich dem eindeutigen Werte von (9) für das reelle Argument T, so werden sich die auf den beiden verschiedenen Wegen in T' erreichten Werte der Integralfunktion unterscheiden um $2\pi i$ mal dem Residuum des Integranden im Pole $\Theta = 0$[1]). Das Residuum ist der Koeffizient von Θ^{-1} in der Entwicklung von $\frac{U}{\Theta^2}$ nach Potenzen von Θ. Dieser Koeffizient ist aber $\alpha = 0$. Die Integrale auf den beiden Integrationswegen werden also identisch. Die Integralfunktion ist auch für komplexe Werte von Θ eindeutig. Dieser eindeutige Wert ist gleich der Funktion (9), genommen für komplexes Argument. Es wird also auch für komplexe Θ sein

$$A=-T\int_{T'}^{T}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta=-T\int^{T}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta+T\int^{T'}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta,$$

und die Bedingung dafür, daß

$$A=-T\int^{T}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta,$$

wird auch hier sein

$$\int^{T'}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta=0.$$

Diese Bedingung wird durch die im allgemeinen komplexen Wurzeln der Gleichung (8) erfüllt.

Wenn man auch nur eine dieser $m+2$ Wurzeln ermittelt hat, kann man nunmehr A bzw.

$$\int^{T}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta$$

als Flächeninhalt deuten. Der Integrationsweg ist willkürlich, sofern man die Punkte $\Theta = 0$ und $\Theta = \infty$ vermeidet. Für eine untere Grenze $T' = a + bi$, für die $a > 0$, wollen wir ihn so wählen, daß wir von T aus in der Θ-Ebene auf der reellen Achse bis zu dem Punkte $\Theta = a$ gehen und von dort aus parallel zur imaginären Achse bis zum Punkte T' (vgl. Fig. 2). Ist T' rein imaginär und positiv, so dürfen wir den Integrationsweg auf der reellen Achse nicht bis $\Theta = 0$ fortsetzen, sondern wir sparen den Nullpunkt durch einen im Quadranten I liegen-

1) Burkhardt, a. a. O., S. 120.
2) Burkhardt, a. a. O., S. 114.
3) Burkhardt, a. a. O., S. 111.

1) Burkhardt, a. a. O., S. 148.

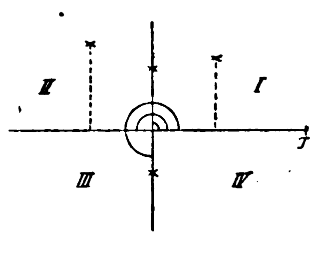


Fig. 2.

den Viertelkreisbogen aus, dessen Radius wir beliebig klein machen können, der aber auch beliebige endliche Werte haben kann. Auf der positiven imaginären Achse gehen wir dann weiter bis zum Punkte T'. Ist $a < 0$, liegt also T' im zweiten oder dritten Quadranten, so wird die Aussparung des Nullpunktes durch einen im ersten und zweiten Quadranten liegenden Halbkreisbogen bewirkt. Ist T' rein imaginär und negativ, so erfolgt die Aussparung durch einen Dreiviertelskreisbogen innerhalb der drei ersten Quadranten.

Für $a > 0$, in welchem Falle wir auf der reellen Achse direkt bis zum Punkte $\Theta = a$ gehen können, zerfällt das Integral

$$\int_{T'}^{T} \frac{U}{\Theta^2} d\Theta$$

in die Teilintegrale

$$\int_{\Theta=a}^{T} \frac{U}{\Theta^2} d\Theta + \int_{T'}^{\Theta=?} \frac{U}{\Theta^2} d\Theta.$$

In dem Integrationsbereiche des zweiten Integrals, in dem der rationale Integrand endlich und darum stetig ist[1]), drückt sich das Integral der Funktion

$$\frac{U}{\Theta^2} = X(x, y) + iY(x, y)$$

des komplexen Arguments $\Theta = x + iy$ folgendermaßen aus[2]):

$$\int_{T'}^{a} \frac{U}{\Theta^2} d\Theta = \int_{a,b}^{a,0} X dx - \int_{a,b}^{a,0} Y dy + i\int_{a,b}^{a,0} Y dx + i\int_{a,b}^{a,0} X dy. \quad (10)$$

Da x auf dem ganzen Integrationswege konstant ist, fällt rechts das erste und dritte Integral weg. Also wird das gesamte Integral, wenn wir auch im ersten Teil den reellen Anteil der Integrationsvariablen mit x bezeichnen

$$\int_{T'}^{T} \frac{U}{\Theta^2} d\Theta = \int_{a}^{T} \frac{U}{x^2} dx - \int_{a,b}^{a,0} Y dy + i\int_{a,b}^{a,0} X dy.$$

Da das Integral links und die beiden ersten Integrale rechts reell sind, muß das dritte rein imaginäre Integral rechts wegfallen. Es bleibt:

$$\int^{T} \frac{U}{T^2} dT = \int_{T'}^{T} \frac{U}{\Theta^2} d\Theta = \int_{a}^{T} \frac{U}{x^2} dx - \int_{b}^{0} Y(a, y) dy. \quad (11)$$

Man braucht also nur die Form von Y aus der gegebenen Form von U herzuleiten, um die das Integral

$$\int^{T} \frac{U}{T^2} dT$$

darstellende Fläche konstruieren zu können.

Nach (3) ist ($\alpha = 0$):

$$\frac{U}{\Theta^2} = \frac{U_0}{\Theta^2} + \beta + \sum_{n=1,2,\ldots m} \varkappa_n \Theta^n = X + iY$$

$$= \frac{U_0(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \beta + \sum_{n=1,2,\ldots m} \varkappa_n x^n +$$

$$+ \sum_{\mu=1,2,\ldots\infty} (-1)^{\mu} \cdot y^{2\mu} \cdot \sum_{n=1,2\ldots m} \varkappa_n \binom{n}{2\mu} \cdot x^{n-2\mu}$$

$$+ i\left\{\frac{-2U_0 xy}{(x^2 + y^2)^2} + \sum_{\mu=1,2\ldots\infty} (-1)^{\mu+1} \cdot y^{2\mu-1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{n=1,2,\ldots m} \varkappa_n \binom{n}{2\mu - 1} \cdot x^{n-2\mu+1}\right\}. \quad (12)$$

Der Wert von $Y(a, y)$, in (11) eingesetzt, ergibt

$$\int^{T} \frac{U}{T^2} dT = \int_{a}^{T} \frac{U}{x^2} dx$$

$$- \int_{b}^{0} \left\{\frac{-2U_0 ay}{(a^2 + y^2)^2} + \sum_{\mu=1,2,\ldots\infty} (-1)^{\mu+1} \cdot y^{2\mu-1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{n=1,2,\ldots m} \varkappa_n \binom{n}{2\mu - 1} a^{n-2\mu+1}\right\} dy. \quad (13)$$

Sind die Koeffizienten der Entwicklung von U bekannt, so läßt sich a und b durch numerische Auflösung von (8) ermitteln. Das links stehende Integral und damit auch A läßt sich also als Flächeninhalt deuten.

Im Falle $a = 0$ schiebt sich, wie wir gesehen haben, zwischen die beiden Integrationswege auf der reellen und der imaginären Achse

1) Burkhardt, a. a. O., S. 109. Die ersten Grenzen der Integrale beziehen sich auf x, die zweiten auf y.

2) Burkhardt, a. a. O., S. 120.

ein Viertelkreisbogen als mittlerer Integrationsweg ein. Nennen wir δ dessen willkürlichen Radius, so wird:

$$\int_{T'}^{T}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta=\int_{+\delta}^{T}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta+\int_{(\varrho_{\mathrm{I}})}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta+\int_{i\delta}^{i\delta}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta. \quad (14)$$

Der Integrationsweg des ersten Integrals rechts ist die reelle Achse, der des zweiten der Viertelkreisbogen, der des dritten die imaginäre Achse. Auf dem Viertelkreisbogen besteht zwischen x und y die Beziehung

$$x^2+y^2=\delta^2,\ y=+\sqrt{\delta^2-x^2},$$
$$x=+\sqrt{\delta^2-y^2}.$$

Das zweite Integral rechts wird demnach gemäß (10):

$$\int_{(\varrho_{\mathrm{I}})}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta=\int_0^{\delta}X(x,\sqrt{\delta^2-x^2})\,dx-$$
$$-\int_{\delta}^{0}Y(\sqrt{\delta^2-y^2},y)\,dy$$
$$+i\int_0^{\delta}Y(x,\sqrt{\delta^2-x^2})\,dx+$$
$$+i\int_{\delta}^{0}X(\sqrt{\delta^2-y^2},y)\,dy. \quad (15)$$

Das dritte Integral auf der rechten Seite von (14) wird wegen der Konstanz von x

$$\int_{i\delta}^{i\delta}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta=-\int_{\delta}^{\delta}Y(0,y)\,dy+i\int_{\delta}^{\delta}X(0,y)\,dy. \quad (16)$$

Da das Integral auf der linken Seite und das erste Integral auf der rechten Seite von (14) reell sind, so müssen sich die imaginären Glieder auf den rechten Seiten von (15) und (16) wegheben. Man erhält, wenn man wieder auf der reellen Achse x statt Θ als Integrationsvariable schreibt:

$$\int_{T'}^{T}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta=\int_{\delta}^{T}\frac{U}{x^2}dx+\int_0^{\delta}X(x,\sqrt{\delta^2-x^2})\,dx-$$
$$-\int_{\delta}^{0}Y(\sqrt{\delta^2-y^2},y)\,dy-\int_{\delta}^{\delta}Y(0,y)\,dy. \quad (17)$$

Setzt man in (17) die Werte von X und Y gemäß (12) ein, so wird:

$$\int\frac{U}{T^2}dT=\int_{T'}^{T}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta=\int_{\delta}^{T}\frac{U}{x^2}dx$$
$$+\int_0^{\delta}\Bigg\{\frac{U_0(2x^2-\delta^2)}{\delta^4}+\beta+\sum_{n=1,2,\ldots m}\varkappa_n x_n+$$
$$+\sum_{\mu=1,2\ldots\infty}(-1)^{\mu}(\delta^2-x^2)^{\mu}\cdot\sum_{n=1,2\ldots m}\varkappa_n\binom{n}{2\mu}x^{n-2\mu}\Bigg\}dx$$
$$-\int_{\delta}^{0}\Bigg\{\frac{-2U_0y\sqrt{\delta^2-y^2}}{\delta^4}+\sum_{\mu=1,2,\ldots\infty}(-1)^{\mu+1}y^{2\mu-1}\,.$$
$$\cdot\sum_{n=1,2,\ldots m}\varkappa_n\binom{n}{2\mu-1}(\delta^2-y^2)^{\frac{n-2\mu+1}{2}}\Bigg\}dy$$
$$-\int_{\delta}^{\delta}\Bigg\{\sum_{n=1,2,\ldots m}(-1)^{\frac{n+3}{2}}\varkappa_n y_n\,\cdot$$
$$\cdot\sum_{\mu=1,2,\ldots\infty}\binom{n}{n+|n+1-2\mu|}\Bigg\}dy.. \quad (18)$$

Der letzte Summand enthält nur diejenigen Glieder der Entwicklung von $Y(0,y)$, die den Faktor

$$\binom{n}{2\mu-1}=\binom{n}{n}=1$$

besitzen. Diese sind nämlich die einzigen, die nicht verschwinden. Der hinzugesetzte Faktor

$$\sum_{\mu=1,2,\ldots\infty}\binom{n}{n+|n+1-2\mu|}$$

sorgt dafür, daß der Integrand für jeden Wert von μ verschwindet, für den nicht $n=2\mu-1$ ist.

Im Falle $a<0$ haben wir es nach Fig. 2 mit einem vierfach geteilten Integrationswege zu tun. Er verläuft: 1. auf der reellen positiven Achse, 2. auf einem Halbkreisbogen mit dem Radius δ, der die positive mit der negativen reellen Achse verbindet, 3. auf der reellen negativen Achse und 4. auf einer Parallele zur imaginären Achse. Dann wird das Integral:

$$\int\frac{U}{T^2}dT=\int_{T'}^{T}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta=\int_{+\delta}^{T}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta+\int_{(\varrho_{\mathrm{I}}+\varrho_{\mathrm{II}})}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta+$$
$$+\int_a^{-\delta}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta+\int_{a+bi}^{a}\frac{U}{\Theta^2}d\Theta. \quad (19)$$

Das zweite Integral rechts setzt sich aus dem schon berechneten Integral

$$\int\limits_{(\varrho_I)} \frac{U}{\Theta^2} d\Theta$$

und dem über den im zweiten Quadranten liegenden Viertelkreisbogen zusammen. Für diesen letzteren ist

$$x = -\sqrt{\delta^2 - y^2}, \; y = +\sqrt{\delta^2 - x^2}.$$

Also wird dieses letztere Integral, von dem wir nur den reellen Anteil schreiben, da der imaginäre sich doch weghebt:

$$\int\limits_{(\varrho_{II})} \frac{U}{\Theta^2} d\Theta = \int\limits_{-\delta}^{0} X\,(x, \sqrt{\delta^2 - x^2})\, dx - \\ - \int\limits_{0}^{+\delta} Y\,(-\sqrt{\delta^2 - y^2}, \; y)\; dy.$$

Das dritte Integral rechts von (19) ist auf der reellen Achse zu nehmen und wird daher

$$\int\limits_{a}^{-\delta} \frac{U}{x^2} dx,$$

das vierte reduziert sich auf

$$-\int\limits_{b}^{0} X\,(a, y)\; dy.$$

Entnimmt man die Werte von $\frac{U}{x^2}$, X und Y aus (12) und setzt in (19) ein, so kann man wieder die Auswertung von A auf eine Flächenmessung zurückführen.

Der Fall $a = 0$, $b < 0$ bedarf keiner gesonderten Betrachtung, da ein ihm entsprechender Wert von T stets zugleich mit dem konjugiert komplexen $a = 0$, $b > 0$ auftritt. Wir können also stets auch den letzteren Wert als untere Integrationsgrenze einführen. Dieser Fall ist aber bereits erledigt.

Wir wenden die Gleichungen (13) und (18) auf je einen wirklich vorkommenden Fall an. Bei tiefen Temperaturen ist nach Debye[1])

$$U = U_0 + \varkappa_2 T^4,$$

also

$$\int \frac{U}{\Theta^2} d\Theta = -\frac{U_0}{\Theta} + \frac{\varkappa_2}{3} \Theta^3.$$

Bedingung (8) lautet hier:

$$U_0 - \frac{\varkappa_2}{3} T^4 = 0; \; T = \sqrt[4]{\frac{3 U_0}{\varkappa_2}}.$$

Ist $\frac{U_0}{\varkappa_2} > 0$, so kann man die reelle positive Wurzel als untere Grenze des Integrals wählen. Ist $\frac{U_0}{\varkappa_2} < 0$, so ist keine der vier Wurzeln reell. Vielmehr wird

$$T = \sqrt[4]{\frac{-3 U_0}{\varkappa_2}} \left\{ \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \pm i \sqrt{\frac{1}{2}} \right\},$$

wobei

$$\sqrt[4]{-\frac{3 U_0}{\varkappa_2}}$$

die reelle positive Wurzel aus dem positiven Ausdruck $-\frac{3 U_0}{\varkappa_2}$ bedeutet. Wenn wir die beiden oberen Vorzeichen wählen, so fällt T in den ersten Quadranten der Zahlenebene (Fig. 2), und das Integral berechnet sich nach (13):

$$\int\limits^{T} \frac{U}{T^2} dT = \int\limits_{\sqrt[4]{-\frac{3}{4}\frac{U_0}{\varkappa_2}}}^{T} \frac{U}{x^2} dx + \int\limits_{0}^{\sqrt[4]{-\frac{3}{4}\frac{U_0}{\varkappa_2}}} \left\{ \frac{-2 U_0 \sqrt[4]{-\frac{3}{4}\frac{U_0}{\varkappa_2}} \cdot y}{\left(\sqrt{-\frac{3}{4}\frac{U_0}{\varkappa_2}} + y^2\right)^2} + 2\varkappa_2 \sqrt[4]{-\frac{3}{4}\frac{U_0}{\varkappa_2}} \cdot y \right\} dy. \tag{20}$$

Betrachten wir wie üblich den Vorgang in der Richtung, daß $U_0 > 0$, so ist im zuletzt besprochenen Falle $\varkappa_2 < 0$. Wir können die Integranden der beiden Integrale rechts von (20) durch Strecken senkrecht zur Ebene der komplexen Veränderlichen Θ darstellen. Dann werden die Integrale selbst durch Stücke von Ebenen repräsentiert werden, die die komplexe Θ-Ebene in zwei zueinander senkrechten, begrenzten Geraden schneiden. Die eine dieser Geraden, die dem ersten Integral rechts von (20) entspricht, erscheint in der Θ-Ebene als das Stück der reellen Achse zwischen den Punkten T und

$$\sqrt[4]{-\frac{3}{4}\frac{U_0}{\varkappa_2}},$$

die andere, die dem zweiten Integral entspricht, als das der imaginären Achse parallele Geradenstück zwischen

1) Vgl. Nernst, a. a. O., S. 87.

$$\Theta = \sqrt[4]{-\frac{3}{4}\frac{U_0}{x_2}} \text{ und } \Theta = T' = \sqrt[4]{-\frac{3}{4}\frac{U_0}{x_2}} + i\sqrt[4]{-\frac{3}{4}\frac{U_0}{x_2}}.$$

Wir legen die beiden, die Integrale repräsentierenden reellen Flächenstücke in die komplexe Θ-Ebene um. Dann erhält die Kurve des ersten Integranden $\frac{U}{x^2}$ die positive imaginäre Achse zur Asymptote und schneidet die reelle Θ-Achse im Punkte

$$\Theta = \sqrt[4]{-\frac{U_0}{x_2}}.$$

Das erste Integral wird für den Fall, daß man (siehe Fig. 3)

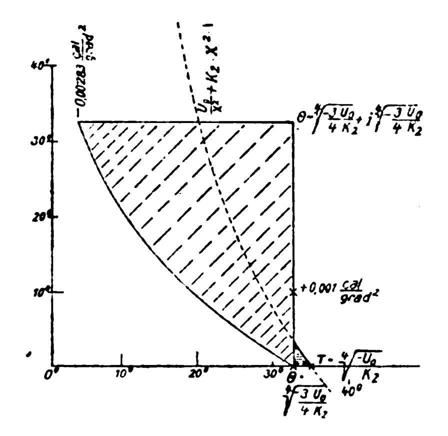


Fig. 3.

$$T = \sqrt[4]{-\frac{U_0}{x_2}}$$

als obere Grenze wählt (die Temperatur, bei der $\frac{U}{T^2}$ verschwindet), durch das horizontal schraffierte Flächenstück dargestellt. Die Kurve des zweiten Integranden setzt im Punkte

$$\Theta = \sqrt[4]{-\frac{3}{4}\frac{U_0}{x_2}}$$

an, da für diesen der Integrand verschwindet, und das zweite Integral wird durch die schräg schraffierte Fläche repräsentiert.

Die Fig. 3 ist mit Werten U_0 und x_2 gezeichnet, die den wirklichen Verhältnissen entsprechen. Nach S. 505 ist $\Sigma \nu C_p = 4 x_2 T^3$. Im Gebiete des Debyeschen Ansatzes ist C_v mit T^3 proportional[1]); damit werden in kondensierten Systemen annähernd auch die C_p mit T^3 proportional. Der Größenordnung nach liegen in einigen von Nernst nnd Schwers[1]) untersuchten Fällen diese Proportionalitätsfaktoren zwischen 10^{-5} und 10^{-6}. Wir tragen also den wirklichen Verhältnissen Rechnung, wenn wir etwa $x_2 = -10^{-6}$ setzen. Wir wählen ferner die Temperatur

$$\sqrt[4]{-\frac{3}{4}\frac{U_0}{x_2}},$$

so daß wir im Gebiete der tiefen, für das Debyesche Gesetz in Betracht kommenden Temperaturen bleiben. Setzen wir etwa $U_0 = 1{,}5$ cal, so wird

$$\sqrt[4]{-\frac{3}{4}\frac{U_0}{x_2}} = 32{,}6^0.$$

Wir haben es dann allerdings mit einer Reaktion von beim absoluten Nullpunkt nahezu verschwindender Wärmetönung zu tun. Der Inhalt der schraffierten Flächen hat, da die Differentiale positiv sind, das Vorzeichen der zugehörigen Ordinaten; derjenige der horizontal schraffierten Fläche ist daher als positiv, derjenige der schräg schraffierten als negativ zu rechnen. Dann wird

$$A = -T\int^T \frac{U}{T^2}\,dT = U_0 - \frac{x^2}{3}T^4,$$

wie es sein muß, wesentlich positiv.

In einer Reihe von Fällen[2]) ist sehr angenähert

$$U = U_0 + \beta T^2, \text{ also } \int \frac{U}{\Theta^2}\,d\Theta = -\frac{U_0}{\Theta} + \beta\Theta.$$

Die Bedingung (8) wird dann

$$U_0 - \beta T'^2 = 0;\ T' = \pm\sqrt{\frac{U_0}{\beta}}.$$

Der Fall $\frac{U_0}{\beta} > 0$ bietet keinerlei Besonderheiten.

Ist $\frac{U_0}{\beta} < 0$, so wird $T' = \pm i\sqrt{-\frac{U_0}{\beta}}$. Wählen wir das obere Vorzeichen, so ist die untere Grenze des Integrals in (4) positiv rein imaginär, und die komplexe Integration liefert gemäß (18):

$$\int_{T'}^{T} \frac{U}{\Theta^2}\,d\Theta = \int_{\delta}^{T}\left(\frac{U_0}{x^2} + \beta\right)dx +$$

1) Nernst, a. a. O., S. 51.

1) Sitzungsber. d. Preußischen Akademie 1914, S. 355.

2) Nernst, Wärmetheorem, S. 86.

$$+\int_0^\delta \left\{ \frac{U_0 (2x^2 - \delta^2)}{\delta^4} + \beta \right\} dx$$

$$+\int_0^\delta \frac{-2 U_0 y \sqrt{\delta^2 - y^2}}{\delta^4} dy. \qquad (21)$$

Man überzeugt sich leicht durch Ausführung der Integration, daß der willkürliche Wert von δ herausfällt, wobei der Ausdruck die gewöhnliche Form

$$\int^T \frac{U}{T^2} dT = -\frac{U_0}{T} + \beta T$$

annimmt.

In Fig. 4 sind die Integrale auf der rechten Seite von (21) als Flächen für den Fall der

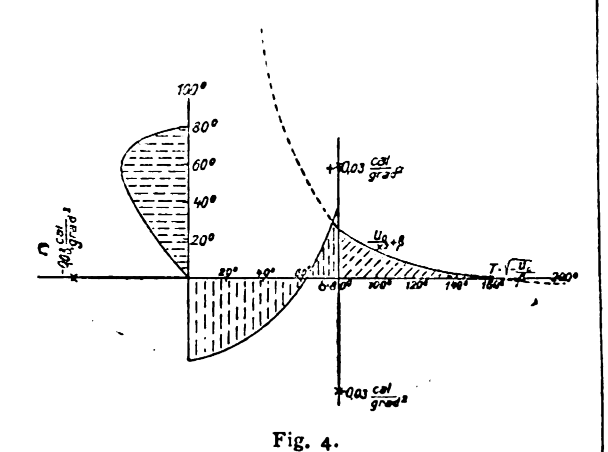


Fig. 4.

Hydratation des Ferrozyankaliums[1]) dargestellt. Hier ist $U_0 = 113$ cal, $\beta = -0{,}00441 \frac{\text{cal}}{\text{grad}^2}$; der willkürliche Wert von δ ist zu 80° Kelvin angenommen. U verschwindet bei $T = 160°$ K. Für diesen Wert der oberen Grenze stellen die schräg, die vertikal und die horizontal schraffierten Flächen die drei Integrale der rechten Seite von (21) dar. Jede dieser Flächen ist, da die Differentiale positiv sind, mit dem Vorzeichen ihrer Ordinate zu nehmen. Man sieht, daß die Gesamtfläche negativ wird, so daß A, wie es sein muß, positiv ausfällt. Für einen anderen Wert der oberen Grenze T hat man die obere Grenzabszisse der schräg schraffierten Teilfläche entsprechend zu verlegen. Auch kann man für δ, das zwar klein sein kann, es aber nicht zu sein braucht, jeden beliebigen anderen Wert wählen.

Das Nernstsche Wärmetheorem, das die Aufgabe löst, die maximale Arbeit aus rein thermischen Daten zu berechnen, sieht als charakteristisch für einen Vorgang die Gesamtheit der Koeffizienten der Entwicklung von U an. Nachdem wir gewisse charakteristische Temperaturen als untere Grenzen für die Integration eingeführt haben, liegt es nahe, diese auch als Konstanten in die Entwicklung von U einzusetzen. In der Tat ist es viel leichter, die Koeffizienten einer Gleichung durch ihre Wurzeln als umgekehrt auszudrücken. Schreiben wir (8) in der Form:

$$\sum_{n=m,(m-1)\ldots 1} \frac{x_n}{n+1} \frac{m+1}{x_m} T^{(n+2)} +$$

$$+ \beta \frac{m+1}{x_m} T^2 - \frac{U_0 (m+1)}{x_m} = 0,$$

so wird:

$$x_{m-1} = -\frac{m \cdot x_m}{m+1} (T'_1 + T'_2 + \ldots T'_{m+2})$$

$$x_{m-2} = +\frac{(m-1) x_m}{m+1} (T'_1 T'_2 + T'_1 T'_3 + + \ldots + T'_2 T'_3 + \ldots + T'_{m+1} T'_{m+2})$$

— — — — — — — — — — —

$$-U_0 = (-1)^{m+2} \cdot \frac{x_m}{m+1} (T'_1 T'_2 \ldots T'_{m+2}),$$

womit die Koeffizienten β bis x_m auf die T' und auf U_0 zurückgeführt sind. Die Gleichungen zeigen, daß die Koeffizienten der Entwicklung von U und damit auch die Werte von

$$\int_{T'}^T \frac{U}{\Theta^2} d\Theta$$

bzw. A im allgemeinen von sämtlichen T' abhängen.

Berlin, Juni 1919.

(Eingegangen 24. Juni 1919.)

Eine diamagnetische Erscheinung in leuchtendem Stickstoff und magnetisches Verhalten seiner Bandenspektra.

Von W. Steubing.

(Mit Tafel XV.)

Die Veranlassung zu den im folgenden wiedergegebenen Versuchen gaben Ergebnisse und Folgerungen, die aus einer Arbeit gewonnen wurden, die sich mit den magnetischen Einflüssen auf fluoreszierenden Joddampf beschäftigte und kürzlich veröffentlicht wurde[1]).

1) Nernst, a. a. O., S. 93.

1) W. Steubing, Spektrale Intensitätsverschiebung und Schwächung der Jodfluoreszenz durch ein magnetisches Feld (Ann. d. Phys. 58, 55, 1919).

Hierbei handelt es sich jedoch weniger um das Studium spektraler Änderungen durch das Magnetfeld (Zeemaneffekt) und allgemeine Intensitätsänderungen, wie sie älteren Arbeiten wohl meist zugrunde liegen, als um die Feststellung, ob und wie der durch Entladungen dissoziierte und ionisierte Stickstoff in seinen einzelnen Molekülgattungen bzw. Elektrizitätsträgern magnetischen Einflüssen unterliegt. Neben der Feststellung der diamagnetischen Erscheinung bei passender Versuchsanordnung ergaben sich dabei gewisse Anhaltspunkte für die Frage nach der Natur der Träger der einzelnen Bandenspektren und mögen darum gleichzeitig mitgeteilt werden[1]).

Die Untersuchung, die auf das sichtbare Spektrum beschränkt blieb, bezog sich auf die Bandenspektren, die hauptsächlich in der positiven Säule des Gleichstroms auftreten und anerkanntermaßen dem Stickstoff als Träger zugeschrieben werden, nämlich wenn wir die Deslandressche Bezeichnung beibehalten, die erste Gruppe, das im Rotgelb liegende Bandenspektrum, ferner die blauviolette zweite Gruppe, die sich im Aufbau ganz von der ersten Gruppe unterscheidet, endlich die am stärksten in der negativen Glimmschicht auftretenden wieder andersartigen Banden. Das bisher als Cyanbandenspektrum bezeichnete, aber nach der Untersuchung von Grotrian und Runge[2]) zweifellos dem reinen Stickstoff zugehörige Spektrum trat unter den obliegenden Versuchsbedingungen nicht hervor.

Da es für mich von besonderer Bedeutung war, die Spektra bei verschiedener Orientierung des Feldes zu studieren, waren die Maximaldimensionen der Entladungsröhren durch die Durchbohrungen der Magnetpole vorgeschrieben. Die weiteste Röhre hatte eine lichte Weite von 11 mm, die anderen waren in der Weite abgestuft bis zum Kapillarendurchmesser.

Um für die Entladung störende magnetische Einflüsse auf die Kathode (und Anode) auszuschließen, waren die Röhren sehr lang (60—80 cm), hatten im übrigen die übliche Form mit Platten oder Zylinderelektroden aus Aluminium.

Sämtliche Röhren wurden ohne Kittungen mit der Apparatur verbunden, zum Teil — bei longitudinalem Feld — wurden sie im Magneten zusammengeblasen.

Zur Regulierung des Gasdrucks und zum Evakuieren diente eine rotierende Quecksilberpumpe nach Gaede mit rotierender Kapselvorpumpe, ferner war zur Druckmessung ein Mc Leod-Manometer angeschmolzen, dessen Quecksilberdämpfe nach Bedarf durch ein Kühlrohr in Kohlensäureschnee ferngehalten wurden.

Als Gasfüllung diente chemisch reiner, aus Ammoniumnitritlösung erzeugter Stickstoff und späterhin, da sich keine Unterschiede zeigten, Bombenstickstoff, der über P_2O_5 getrocknet durch sublimiertes Kalium sauerstoffrei gemacht wurde und, wie eine Probe zeigte, nur geringe Mengen Argon enthielt, die die Untersuchung nicht beeinträchtigten.

Die Röhren wurden stundenlang sorgfältig gereinigt durch Abpumpen und Durchleiten frischen Gases, während die Röhren bis an die Leistungsgrenze, d. i. bis zum Glühen der Elektroden, mit Strom belastet wurden.

Da ich während der Versuche mit weit geringeren Strömen arbeitete, konnte ich an den so gereinigten Röhren auch bei stundenlangen Betrieb keine Verunreinigungen entdecken.

Bei einzelnen Versuchen wurde Quecksilberdampf absichtlich zugelassen.

Die einzige Schwierigkeit, die bei längeren Expositionen auftrat, falls der Gasdruck konstant gehalten werden mußte, war die lästige Selbstevakuierung der Stickstoffröhren, die bei stärkeren Strömen solche Gasmengen verschlucken, daß nur durch dauerndes Zuleiten frischen Gases Konstanz zu erzielen ist.

Der Strom wurde stets von einer Hochspannungsmaschine von Siemens & Schuckert von maximaler Spannung von 4800 Volt geliefert, der Strom durch einen Amylalkohol-Jodkadmium-Widerstand reguliert, die Stärke an einem Präzisionsmilliampèremeter und die Klemmspannung der Röhren an einem Braunschen Elektrometer kontrolliert. Es sei noch hervorgehoben, daß kein Pol der Maschine geerdet war und Schwingungen in der Leitung nicht auftraten, wie die Prüfung mit Telephon ergab, was für das Folgende zu beachten ist.

Die Gasdrucke in den Röhren wurden zwischen dem Einsetzen der Entladung (ca. 1,6 mm) und dem Verlöschen (ca. 0,1 mm) variiert.

Der benutzte Magnet war ein altes Modell von Ruhmkorff, der aber für vorliegende Zwecke genügende Felder lieferte.

1) Eine von J. Stark angeregte Arbeit von O. Hardtke, die sich speziell mit den Emissionsbedingungen der Stickstoffspektren und ihren Trägern befaßt (Ann. d. Phys. 56, 363, 1918) und hierüber genaue Angaben macht, war mir beim Abschluß dieser Versuche noch nicht bekannt, deren Veröffentlichung infolge der Absperrung des besetzten Gebietes nicht eher erfolgen konnte.

2) W. Grotrian u. C. Runge, Die sogenannten Cyanbanden, diese Zeitschr. 15, 545, 1914.

Die Beobachtungen wurden mit dem Auge unter Zuhilfenahme eines Gradsichtspektroskops vorgenommen, außerdem erfolgten spektrographische Aufnahmen des ganzen sichtbaren Spektrums mittels eines sehr lichtstarken, an anderer Stelle beschriebenen Spektrographen[1]). Dabei gelangte sowohl das dort erwähnte kleine Plangitter wie das große Rutherford-Prisma zur Verwendung, mit welch letzterem die Expositionszeiten nach Minuten zählten.

Als Platten benutzte ich Hauffultrarapid, die durch Pinachrom bis ins Rot gleichmäßig sensibilisiert waren, vgl. dazu loc. cit.[2]). Die Entwicklung geschah mit Rodinal 1:10 nach der Uhr.

Über die positive Säule des Stickstoffs, die Intensitätsverhältnisse der Bandenspektra, auch über den Einfluß eines äußeren magnetischen Feldes liegen bereits eine ganze Anzahl von Arbeiten vor, die allerdings nicht alle in ihren Ergebnissen übereinstimmen. Schon lange war neben der Ablenkung, die die positive Säule entsprechend einem Konvektionsstrom erfährt, die Verkleinerung des Stromquerschnitts, mit anderen Worten die Vergrößerung der Stromdichte erkannt worden, und mit ihr sind naturgemäß Änderungen der Intensität der Spektra zu erwarten.

Ich fand tatsächlich, daß die in der positiven Säule des Stickstoffs auftretenden Intensitätsänderungen zugunsten des einen und zuungunsten des anderen Bandenspektrums unter dem Einfluß des Magnetfeldes sich genau so einstellen, als wenn man den Querschnitt der Säule mechanisch auf gleiche Dimensionen bringt, wie sie in verschiedenen starken Feldern auftreten. Es lassen sich keine Unterschiede in den Spektra nachweisen, die nach der einen oder anderen Methode erhalten werden. Zum genauen Vergleich dienten Röhren, die in ihrer Gesamtlänge und allgemeinen Beschaffenheit den im Magnetfeld benutzten entsprachen, nur waren stellenweise Säulen von geringerem Querschnitt (drei verschiedene Abstufungen) eingesetzt, die für jede beliebige durch das Rohr gesandte Stromstärke die Intensitätsänderung als Funktion des Querschnitts der positiven Säule erkennen ließen. Die Unterschiede sind schon bei Betrachtung mit bloßem Auge recht beträchtlich. Während die weiten Teile der Entladungsröhren in ihrem orange-goldfarbenen Licht leuchten, zeigen die engen Teile ein mehr blauweißes Licht, wie ihn entsprechend der im Magnetfeld verengerte „Stromfaden" zeigt. Gleichartig sind auch die weiterhin angeführten spektroskopischen Ergebnisse.

Zu der Untersuchung im Magnetfeld eignen sich besonders die weiteren Röhren, zu enge Röhren sind schon wegen ihres hohen Widerstandes bei der hier verwendeten großen Länge unbrauchbar.

Zunächst sei hervorgehoben, daß bei allen Versuchen (wie übrigens aus Tafel XV, Fig. Ia erkennbar) die positive Säule des Stickstoffs keine Schichtung zeigte, in Übereinstimmung mit den Versuchen von Gehlhoff[1]), der in reinem Stickstoff keine Schichtung erhielt. Ich fand, solange das Gas bzw. die Röhren nicht genügend rein waren, z. B. Quecksilberdampf enthielten, daß stets Schichtung eintrat; noch empfindlicher als dieser erwies sich Wasserstoff (Kohlenwasserstoff) für die Schichtenbildung. Dabei variierte die Stromstärke im Entladungsrohr zwischen 1 und 14 Milliamp.

Da in der ungeschichteten Säule die Verhältnisse einfacher liegen, war dies für die Untersuchung der magnetischen Einwirkung von Vorteil.

I. Beobachtungen ohne Magnetfeld.

Bei niedrigen Stromstärken (ca. 1 Milliamp.) leuchtete die positive Säule innerhalb des Druckgebiets von 1,5—0,1 mm in rötlichem Licht; mit wachsendem Strom nahm sie einen mehr orange- bis goldfarbenen Ton an, und die spektroskopische Beobachtung ergab, daß im ersten Falle (schwacher Strom) die erste und zweite Gruppe des Bandenspektrums ungefähr sich gleichmäßig in die Gesamtintensität teilten, während mit gesteigertem Strom die Intensität des ersten rotgelben Bandenspektrums viel rascher wuchs wie die des zweiten blauvioletten. Messungen ergaben, daß dabei die Intensität des rotgelben Bandenspektrums nicht proportional der Stromstärke, sondern in einem viel stärkeren Grade anwuchs. Dies Resultat steht scheinbar völlig in Widerspruch mit den Messungen von Jungjohann[2]), der erstens ein rascheres Anwachsen des zweiten Bandenspektrums als des ersten fand und bei letzterem strenge Proportionalität zwischen Stromstärke und Helligkeit. Beim

1) W. Steubing, loc. cit. S. 66.
2) Ebenda S. 73, 74.

1) Gehlhoff, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. 14, 1912.
2) W. Jungjohann, Über Emission u. Absorption leuchtender Gase bei hohen Stromdichten unter Verwendung von Gleichstrom, Zeitschr. f. wissensch. Photographie 9, 105, 1911.

Vergleich ist aber zu beachten, daß die Bedingungen, unter denen Jungjohann arbeitete, ganz andere waren. Er arbeitete zwar auch mit Gleichstrom (Wehnelt-Oxydkathode), aber hohen Stromdichten in einer Quarzkapillare (Gleichstromröhre nach Konen). Die hier verwendeten Röhren von großer Weite (bis 11 mm) bedingen ganz andere, d. h. viel geringere Stromdichten, und außerdem ist die Stromdichte nicht im Querschnitt konstant anzunehmen. Man darf also keineswegs bei verdoppelter Stromstärke in der Röhre gleichmäßig im Querschnitt verdoppelte Ionendichte annehmen (vgl. auch hierzu die Arbeit von Salinger, betreffend die gemessene Querspannung in Entladungsröhren[1])). Sobald man zu engen Entladungsröhren, also hohen Stromdichten, übergeht, wird die Erscheinung anders im Sinne der Resultate Jungjohanns, und das gleiche zeigt sich, wenn man in diesen weiten Röhren den Querschnitt der Säule magnetisch ändert (siehe folg. Abschnitte).

Die positive Säule zeigt an der Stelle der magnetischen Einschnürung ein mehr blauweißes Aussehen, und mit wachsendem Strom wächst die zweite Gruppe erheblich rascher als die erste. Dies zeigt also, daß die Existenzbedingungen der Träger des ersten Bandenspektrums und des zweiten verschieden sind, in starker Ionendichte ist das zweite bevorzugt, und dem entspricht auch das magnetische Verhalten beider Spektra. Die ganze Erscheinung wird vom Gasdruck nicht erheblich beeinflußt, wenigstens zeigten die Röhren bei mehreren Zentimetern Druck, wenn der Strom einer zwanzigplattigen Influenzmaschine (< 1 Milliamp.) hindurchgeleitet wurde, dasselbe rötliche Aussehen und entsprechende Intensitätsverhältnis zwischen beiden Spektren wie bei den niedrigen Drucken und betrieben mit schwachem Hochspannungsstrom.

Neben den genannten beiden Spektra ist stets — aber schwach — vorhanden das negative Bandenspektrum. Seine Intensität ist so gering, daß es mit bloßem Auge leicht übersehen wird und erst auf gut ausexponierten Spektrogrammen in seinen Hauptbanden hervortritt.

II. Beobachtungen mit transversalem Magnetfeld.

In diesem ist der Stickstoff bereits mehrfach untersucht, und es liegen auch Potentialmessungen an der positiven Säule vor, die eine Vermehrung des Widerstands infolge der Ablenkung der Ionen im magnetischen Feld ergeben.

Auch hier lassen sich die Erscheinungen am weitesten Rohre am besten übersehen. Während vor dem Einschalten des Magnetfeldes die positive Säule in ihrer ganzen Länge in schönem rotgelben Licht leuchtet, wird mit dem Einsetzen des Feldes die Strombahn je nach Feld und Stromrichtung rechts oder links an die Wandung des Rohres gepreßt; der so entstehende „Stromfaden" leuchtet in bläulich weißem Licht, während die außerhalb des Feldes befindliche Säule ihre Färbung ungeändert beibehält. Infolge des magnetisch vergrößerten Widerstandes muß man Widerstand ausschalten, um die Stromstärke im Rohr auf die gleiche Höhe zu bringen. Die spektrographische Aufnahme der Säule mit und ohne Feld zeigt, daß mit Einschalten des Feldes das ganze zweite Spektrum enorm an Helligkeit zugenommen hat, ohne daß im ersten oder im zweiten Spektrum die geringste Änderung hinsichtlich des Intensitätsverlaufs stattgefunden hätte. Da man durch Wahl der Expositionszeit die Spektra mit und ohne Magnetfeld auf derselben Platte in gleicher Schwärzung erhalten kann, ist eine zuverlässige Entscheidung darüber möglich. Bemerkenswert ist aber, daß auch außerhalb des magnetisch abgelenkten Stromfadens der größte Teil der Röhre noch von einem braunroten Licht erfüllt bleibt, das — wie die spektroskopische Beobachtung lehrt — von dem ersten Bandenspektrum herrührt. Man könnte wohl die physiologische Wirkung auf das Auge zur Erklärung heranziehen, daß das rotgelbe Licht von dem Auge noch wahrgenommen würde, während das schwache blauviolette Leuchten des zweiten Spektrums übersehen würde, doch ergaben auch die spektrographischen Aufnahmen besonders im longitudinalen Felde (siehe folg.) das gleiche Resultat. Eine vollständige Trennung beider Spektra ist jedoch nicht möglich.

III. Beobachtungen mit longitudinalem Magnetfeld.

Zu diesen Versuchen wurden dieselben Röhren wie zuvor verwendet und durch die durchbohrten Magnetpole geführt, nötigenfalls im Magneten erst zusammengesetzt und verblasen. Beim Einschalten des Feldes tritt wie im vorigen Falle ein Zusammenziehen der positiven Säule zu einem Stromfaden ein, der sich durch die Mitte der Entladungsröhre zieht, gleich-

1) H. Salinger, Über die Äquipotentialflächen in der positiven Säule des Glimmstromes, Ann. d. Phys. **54**, 296, 1917.

zeitig nimmt der Widerstand der Röhre ab, und der Strom muß durch Vergrößern des Vorschaltwiderstands auf seinen alten Betrag gebracht werden. Das Aussehen des „Stromfadens" ist das gleiche wie im Falle des senkrechten Feldes, ebenso ist in ihm die Intensität des zweiten Spektrums erheblich gewachsen. Um den Faden herum, fast noch den Querschnitt des ganzen Rohres füllend, allerdings mit viel geringerer Leuchtkraft, zeigt sich das braunrote Leuchten, das von dem ersten Spektrum herrührt. Man kann diese Erscheinung auch spektrographisch festhalten, wenn man die Lockyersche Methode der Abbildung benutzt. Verläuft das Magnetfeld horizontal, ist also auch die Röhre horizontal-senkrecht zum Spalt gerichtet und bildet man das Bild der positiven Säule zwischen den Polen auf den Spalt des Apparates ab, so erhält man ein Spektrum, das ohne Erregung des Magneten gleich lange Linien über das ganze sichtbare Spektrum liefert. Sobald der Magnet erregt wird, bildet sich in der Mitte des Rohres der Lichtfaden ab, und man erhält auf der Platte ein Spektrum, das aus kurzen und langen Linien zusammengesetzt ist, und zwar sind die Linien des zweiten Bandenspektrums alle verkürzt trotz größerer Intensität und gleicher Exposition, während die des ersten wenig verändert sind, etwas schwächer (vgl. Tafel XV, Fig. III u. IV). Diese Erscheinungen beobachtet man, wenn man zylindrische Entladungsröhren von gleichmäßigem Querschnitt verwendet.

IV. Diamagnetische Beobachtungen.

Wählt man nun die Versuchsbedingungen im longitudinalen Felde so, daß die Gasmoleküle unbehindert durch die Dimensionen der Entladungsröhre bzw. durch ihre Wandungen den magnetischen Kräften folgen können, so zeigt sich außer den vorher geschilderten Änderungen beim Einschalten des Feldes eine neue Erscheinung.

Die Versuchsanordnung hierzu war kurz folgende: Ohne die anderen Bedingungen (Gasfüllung, Druck, Stromquellen, Magnet usw.) irgendwie zu ändern, zerschnitt ich eine der zylindrischen Entladungsröhren zwischen den Polen und setzte im Interferrikum eine abgeflachte Kugel ein, wie es nebenstehende Fig. 1 schematisch zeigt und bei auseinander gezogenen Polschuhen ohne Feld die Photographie in Tafel XV, Fig. Ia erkennen läßt.

Wie zu erwarten, ist ohne Feld die Erscheinung im wesentlichen unverändert, nur verbreitert sich die positive Säule in der Kugel

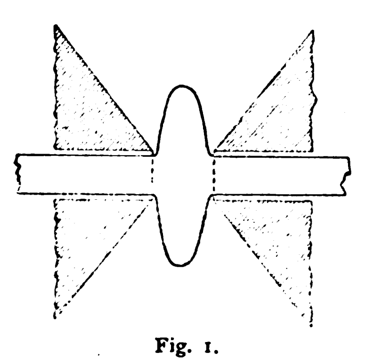


Fig. 1.

ein wenig und erscheint daher dort etwas lichtschwächer, aber in der gleichen Farbe leuchtend.

Wird jetzt das Feld erregt, so zeigt sich folgendes: der Stromfaden in seiner bläulich leuchtenden Form bildet sich aus wie früher, umgeben von dem rotbraunen Saum wie im zylindrischen Rohr, also im allgemeinen dieselben Spektra zeigend. Während man aber nun die eigentliche Kugel wie zuvor dunkel erwarten sollte, zieht sich durch ihre Mitte genau senkrecht zum Magnetfeld und zur Stromrichtung eine bläulich leuchtende Scheibe, die bis an die Glaswandung reicht und bei starkem Felde dort direkt beiderseits umgebogen erscheint. Kommutieren von Strom und Feld hat keinen Einfluß, wie ja auch die Scheibe durchaus symmetrisch in der Äquatorebene der Kugel liegt (Tafel XV, Fig. Ib). Die spektrale Untersuchung zeigt, daß das bläuliche Leuchten identisch ist mit dem Spektrum der negativen Glimmschicht, d. h. es enthält die negativen Banden (Tafel XV, Fig. IIa u. b). Obschon das Leuchten dem Auge nicht sehr hell erscheint, reicht es doch zur spektroskopischen und spektrographischen Untersuchung gut aus, und bei Projektion auf den Spalt (Lockyers Methode) erhält man Bilder, die deutlich die verschieden langen Spektra zeigen.

Gasdruck und Strom sind nicht ohne Einfluß. Beim Einsetzen der Entladung, also von ca. 1,5 mm Druck an, ist die Erscheinung vorhanden und läßt sich bis 0,5 mm gut beobachten; von da an wird sie undeutlicher, das vorher scharf begrenzte Leuchten verbreitert sich und wird undeutlicher und schwächer, ist bei 0,3 mm eben noch erkennbar und verschwindet dann, während die Entladung, der Stromfaden mit seiner Aureole, sich bis 0,15 mm Druck verfolgen lassen. Die günstigste Stromstärke war etwa 2 Milliamp.; das Leuchten der „Scheibe" hat dabei die gleiche Farbe wie die negative Glimmschicht bei gleicher Stromstärke, ein tiefsattes Blau; mit wachsendem

Strome wird die Farbe mehr weißblau, und da im Verhältnis die Intensität in der eigentlichen Strombahn ungleich schneller wächst, tritt die Erscheinung zurück, bleibt aber gleichwohl scharf begrenzt und erkennbar noch bei mehr als der vierfachen Stromstärke.

Ohne Magnetfeld ist das blaue Leuchten nicht erkennbar, es genügen aber schon schwache Felder ($<$ 1000 Gauß), um die Erscheinung hervorzurufen, und sehr starke sind unvorteilhaft. — Bemerkenswert ist, wie sich beim Ein- und Ausschalten des Magneten die Wirkung der Selbstinduktion in allmählichem Entstehen und Verschwinden der „Scheibe" zeigt.

Es liegt nahe, zunächst nach einer rein elektrischen Erklärung der Leuchterscheinung zu suchen, ohne irgendwie die magnetischen Moleküleigenschaften dazu heranzuziehen. Ich habe aber trotz aller Bemühungen weder irgendwelche sekundären Stromeffekte finden können, noch eine Erklärungsmöglichkeit gesehen, die den beobachtbaren Tatsachen besser gerecht würde.

Abgesehen von den vorerwähnten Versuchen der Abhängigkeit von der Selbstinduktion des Magneten schien mir auch folgendes auf einen diamagnetischen Vorgang hinzuweisen, bei dem die diamagnetischen Moleküle senkrecht zur Kraftrichtung sich zu bewegen streben.

Ersetzt man bei der Röhre in der vorbeschriebenen Anordnung die abgeflachte Glaskugel zwischen den Magnetpolen durch eine andere, die nicht senkrecht zur Entladungsröhre, sondern geneigt zu ihr bzw. der Feldrichtung verläuft, wie es folgendes Schema zeigt,

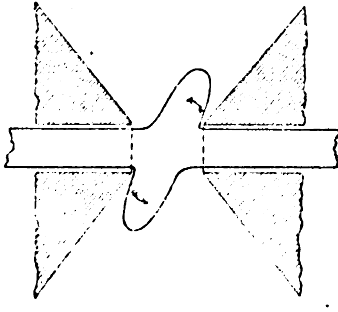


Fig. 2.

so stellt sich die Scheibe nicht in die Symmetrieebene der Kugel, d. h. ebenfalls geneigt gegen die Röhrenachse bzw. die Feldrichtung ein, sondern zeigt deutlich das Streben, wieder senkrecht zum Feld zu stehen, neigt sich also in der in der Figur durch Pfeile bezeichneten Richtung, ohne allerdings sich direkt an die Glaswandung anzulegen, was wohl ebenso auf die Entstehungsweise des Leuchtens der Scheibe wie auf die experimentelle Schwierigkeit zurückzuführen ist, eine flache Kugel geneigt so anzublasen, daß der geradlinige Stromdurchgang möglich ist. Es läßt sich eine Deformation des Rohres und damit auch der positiven Säule nicht ganz vermeiden. Die Dimensionen der Kugel oder, wenn man will, des Rotationsellipsoids in diesen Versuchen betrugen etwa: Äquatordurchmesser 33 mm, Polardurchmesser 13 mm. Wählt man erheblich größere Dimensionen, so wird die Erscheinung wesentlich ungünstiger zu beobachten sein, erstens, weil die Streuung des Feldes bei dem vergrößerten Polabstand größer, die Homogenität geringer wird, zweitens aber m. E., weil die Bedingungen, unter denen das Gas zum Leuchten erregt wird, ungünstiger werden.

Es sei bemerkt, daß mit dem Ausschalten des Stromes die Erscheinung sofort verschwindet, also nichts mit Nachleuchten oder dergl. zu tun hat.

Die Reinheit der Gasfüllung ist auch nicht ohne Einfluß, obschon gerade beim Stickstoff die Verunreinigungen nicht solche Rolle zu spielen scheinen wie bei anderen Gasen; wenigstens vernichten geringere Beträge von Quecksilberdampf, selbst von Sauerstoff (Luft) die Erscheinung nicht[1]).

So interessant es ist, daß man in einem elektrisch zum Leuchten gebrachten, also ionisierten Gase in einem Magnetfeld diamagnetische Erscheinungen beobachten kann, so wichtig erscheint die Frage, welches die Träger dieses Diamagnetismus sind, weil sie trotz der Ionisierung nicht vom Magnetfeld axial gesammelt werden[2]). Man kann für die diamagnetischen Moleküle nur annehmen, daß sie entweder elektrisch neutral sind — und dagegen

1) Weitere Versuche in dieser Richtung die an Sauerstoff, Jod und Wasserstoff angestellt wurden, ferner Versuche über den Einfluß von Verunreinigungen, die die Erscheinung ändern, sollen später mitgeteilt werden. Hier sei nur so viel bemerkt, daß unter gewissen Umständen die leuchtenden Moleküle nicht wie hier symmetrisch senkrecht zur Feldrichtung hinausgeschleudert werden, sondern den magnetischen Kraftlinien folgend aus dem dann dunkel werdenden Glaskörper herausgezogen werden.

2) Es ist schon hervorgehoben, daß die Versuche mit Hochspannungsgleichstrom ausgeführt wurden (Dynamomaschine, auch Batterie) und Schwingungen oder Wechselströme, nicht nachweisbar waren. Es sei aber bemerkt, daß man die Erscheinung auch mit Wechselströmen (Induktor betrieben mit Rotax) erhalten kann, aber sehr viel schlechter trotz beliebig variierter Stromstärken.

spräche die Art des Spektrums, welches mit dem in der negativen Glimmschicht, also bei starker Ionisierung auftretenden, identisch ist, oder daß ihre Träger eine im Verhältnis zur Ladung so viel größere Masse besitzen, daß die diamagnetische Wirkung der letzteren die elektrische Kraftwirkung weit überwiegt.

Noch auf folgendes sei hingewiesen: Man könnte vielleicht annehmen, daß derartig diamagnetisch beeinflußte Moleküle, aus der Strombahn ganz herausgerissen, sich zu einem geschlossenen Ring im Kugeläquator anordnen müssen. Dabei ist aber zu beachten, erstens daß ein solcher Ring nur erkennbar wäre, wenn dabei auch gleichzeitig die richtigen Leuchtbedingungen gegeben wären, und zweitens, daß in dem ionisierten Gase eine beständige Entladung und ein Austausch der Elektrizitätsträger mit den neutralen Molekülen stattfinden muß, also ein stationärer Ruhezustand, wie er obigem Bilde entspräche, kaum eintreten kann. Daß mit Verstärkung des Magnetfeldes ein Umbiegen der Leuchterscheinung an der Glaswandung nach beiden Seiten hin einsetzt, ist bereits erwähnt, ebenso, daß starke Magnetfelder ungünstig wirken, weil augenscheinlich die Partikel zu rasch durch das Feld herausgeschleudert werden, als daß die Leuchterscheinung sich gleichmäßig ausbilden könnte.

Für die Leuchtwirkung möchte ich folgende Erklärung versuchen. Es ist bekannt, daß die Glaswandung solcher Entladungsröhren negative Ladung besitzt, wie ja überhaupt ein Spannungsgefälle zwischen Wandung und Rohrmitte besteht[1]), ferner, daß sekundäre Kathodenstrahlen von der Glaswandung (und nicht nur von ihr) ausgehen, die, wenn ihre Geschwindigkeit auch nicht zur Ionisierung zu führen braucht, doch genügt, um die Moleküle zur Emission besonders des Bandenspektrums zu veranlassen, bei dem ja die Emission durchaus nicht mit Ionisierung verbunden zu sein braucht. (Ich führe nur als Beispiel das Jodfluoreszenzbandenspektrum an, bei dem sicher keine Ionisierung besteht.) Haben wir also eine Gasschicht hervorgerufen durch den Diamagnetismus einer Molekülart in der Röhre, die sich unter dem Einfluß des Magnetfeldes in der Äquatorebene (bei symmetrischer Kugellage) bewegt, so werden bei günstigen Bedingungen die von der Kugelwandung ausgehenden sekundären Kathodenstrahlen die Gasmoleküle zur Emission anregen, ohne daß infolge ihrer geringen Geschwindigkeit in der Gasschicht Ionen von großem $\frac{e}{m}$ erzeugt werden, die ja in die Strombahn hineingezogen werden müßten.

1) **Salinger**, loc. cit.

Zum Schluß seien noch einige Erläuterungen zu den auf der Tafel XV abgebildeten Spektra usw. gegeben.

Fig. Ia gibt (ohne spektrale Zerlegung) das Aussehen der positiven Säule im longitudinalen Felde (Magnetfeld horizontal verlaufend) wieder unter Verwendung der Röhre mit der kugelförmigen Erweiterung zwischen den Polen. Die durchbohrten Polschuhe sind einige Zentimeter auseinandergeschoben, so daß man außer dem kugelförmigen Teil noch rechts und links ein Stück der ungeschichteten positiven Säule erkennt. Man sieht, daß in der Kugel der Querschnitt der positiven Säule etwas vergrößert und die Intensität des Leuchtens etwas geringer erscheint. Die Farbe ist rötlich bis orangefarben.

Fig. Ib gibt dieselbe Röhre bei gleichem Stromdurchgang, aber nach Zusammenschieben der Pole bis an die Kugel und erregtem Magnetfeld. Man sieht die positive Säule etwas zusammengezogen und senkrecht zu ihr und dem Magnetfeld die bläulich leuchtende Scheibe im Querschnitt. Die Aufnahmen a und b sind beide auf Hauffultrarapidplatten gemacht, die mit Pinachrom bis ins Rot sensibilisiert sind. Infolgedessen sind die Helligkeitsverhältnisse in den verschiedenen Teilen ganz ähnlich, wie sie dem Auge erscheinen.

Der bläulichweiße „Stromfaden" tritt in der Aufnahme b nicht deutlich hervor, weil die ihn umgebende rotbraune Hülle mit dem 1. Spektrum zu stark auf die Platte mit einwirkt. Auf nur blau empfindlichen Platten ist die Erscheinung viel charakteristischer zu sehen. Die Aufnahmen sind rechtwinklig zur Röhre und dem Felde gemacht.

Fig. IIIa gibt das Spektrum der Röhre bei Ia wieder, wobei der Teil in der Kugel auf den Spalt des wieder rechtwinklig stehenden Spektrographen abgebildet ist. Rechts sieht man die Hauptbanden des 2. Spektrums, links dichtgedrängt die des 1. Spektrums.

Fig. IIa zeigt das Spektrum von Ib (in gleicher Weise auf den Spalt projiziert). Man sieht die langen Linien, die von der diamagnetischen Leuchterscheinung ausgehen, in annähernd gleicher Stärke über die ganze Länge des Spalts gehen. Die Hauptbanden des negativen Spektrums sind deutlich zu erkennen.

Fig. IIb zeigt zum Vergleich das Spektrum der negativen Glimmschicht bei schwachem Strom an einer anderen Röhre aufgenommen und auf den Spalt abgebildet.

Fig. IIIb zeigt (in gleicher Weise wie IIIa auf den Spalt projiziert), wie unter dem Einfluß des longitudinalen Magnetfeldes die Verkürzung der Banden in der zweiten Gruppe auftritt, während die der ersten Gruppe nahezu ihre ursprüngliche Länge beibehalten. Die von beigemischtem Quecksilberdampf herrührenden *Hg*-Linien (λ 5461 und λ 4358) zeigen mit und ohne Feld gleiche Länge und Intensität. Das gleiche Bild ergeben die — im Unterschied von den vorigen Prismenspektren — mit dem Gitter aufgenommenen Spektra der Fig. IV, a und c verschieden lange exponiert mit Magnetfeld, b ohne Magnetfeld.

Man sieht auf b, daß die Linien des ersten Bandenspektrums (links), von gleicher Länge sind wie die des zweiten (rechts), während bei a und c die Banden der zweiten Gruppe stark verkürzt und dabei intensiver geworden sind, gegenüber den ziemlich gleich intensiv und lang gebliebenen der ersten Gruppe, entsprechend dem geschilderten Vorgang im Magnetfeld, bei dem sich der bläulich leuchtende „Stromfaden" ausbildet, umgeben von seiner im Lichte der ersten Gruppe leuchtenden braunroten Hülle.

Der Rheinischen Gesellschaft für wissenschaftliche Forschung in Bonn möchte ich auch an dieser Stelle für ihre Unterstützung bei dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Aachen, Phys. Institut der Techn. Hochschule.

(Eingegangen 5. Juli 1919.)

Über das Prinzip der singulären Lösungen.

Von Siegbert Wiesner.

Gewissen Differentialgleichungen wird nicht nur Genüge getan durch das allgemeine, durch Integrationskonstanten charakterisierte Integral bzw. die vollständige, eine willkürliche Funktion enthaltende Lösung, sondern auch durch die singuläre Lösung, die von Integrationskonstanten und willkürlichen Funktionen frei ist. Indem wir uns sogleich zur geometrischen Interpretation wenden, so entsprechen im dreidimensionalen Raume allgemeinen Integralen Scharen von Punktmannigfaltigkeiten derart, daß jede einzelne Kurve oder Fläche durch die Festlegung der Integrationsparameter bestimmt ist, dagegen den singulären Lösungen die jene Scharen Einhüllenden, welche an jedem Individuum der Scharen mit einem Linien- bzw. Flächenelemente teilnehmen. So hat z. B. die Differentialgleichung

$$y^2 y'^2 + y^2 - r^2 = 0$$

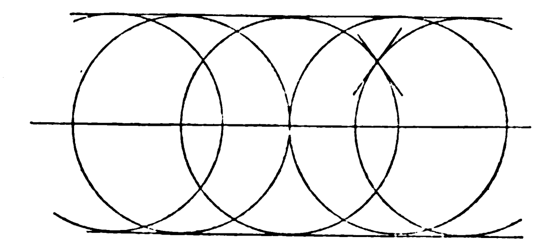
zur allgemeinen Lösung die durch

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2$$

dargestellte Schar von Kreisen vom Radius r, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen. Der singulären Lösung

$$y = \pm r$$

entsprechen die zur x-Achse im Abstande $\pm r$ parallelen, alle Kreise der Schar tangierenden Geraden.



Bekanntlich findet man die singuläre Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$f(x, y, y') = 0,$$

durch Elimination des y' aus ihr und $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$. Notwendig für das Bestehen der singulären Lösung ist somit, daß die Differentialgleichung von höherem als dem ersten Grade in y' ist oder anders gesprochen, daß sie für jeden Punkt im allgemeinen mindestens zwei verschiedene Werte von y' ergibt. Die singuläre Lösung ist dann jener ausgezeichnete Ort von Punkten, für welche die Differentialgleichung zwei gleiche y'-Werte ergibt.

Analog ist die singuläre Lösung der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

das Eliminationsresultat aus ihr und

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

Ein weites Gebiet der Erscheinungswelt umfaßt Vorgänge, deren physikalische Erklärung uns darauf hinweist, sie mathematisch als singuläre Lösungen darzustellen. Es sind jene Vorgänge, welche durch die Gesamtheit einer großen Menge von zwar diskret aber sehr nahe gelagerten Korpuskeln zustande kommen. Der gesetzmäßige Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen eines Moleküls wird durch allgemeine Integrale der seine Natur beherrschenden Differentialgleichungen dargestellt und ist mit Parametern behaftet, die durch die „Anfangsbedingungen" des Moleküls festgelegt sind. Der raumzeitliche Zusammenhang dieser molekularen Zustandsgrößen aber, oder die einzelnen Individuen aus der Schar des allgemeinen

Integrals bleiben uns für immer verborgen. Wir beobachten bloß, sozusagen makroskopisch, Gesetze, die wohl durch die molekularen Zustandsverknüpfungen bedingt sind, aber frei sind von den von Molekül zu Molekül wechselnden Parameterwerten, die also, falls sie sich aus den Differential- oder Integralgesetzen des Moleküls ableiten lassen, deren singuläre Lösung darstellen. Die notwendige Bedingung der Existenz von singulären Lösungen ist aber gegeben. In der Tat: Sei V die Zustandsgröße des Moleküls, so bedeutet jeder Zusammenstoß zweier Moleküle, daß an einem und demselben Raumzeitpunkte (x_1, x_2, x_3, x_4) zwei „Flächenelemente" $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ auftreten. Bei der Kleinheit der Moleküle und ihrer freien Weglängen kann man davon sprechen, daß sich diese Flächenelemente zu einer Schar von Integralflächen zusammenfügen, deren Einhüllende die singuläre Lösung ist. Dieser singulären Lösung muß das „makroskopische" Gesetz des aus den Molekülen zusammengesetzten Körpers entsprechen, wenn immer wir annehmen, daß es durch das Molekulargesetz bedingt ist. Gewährleistet uns also das Molekulargesetz mathematisch auch nur die Notwendigkeit der Bedingungen einer singulären Lösung, so läßt das in Erscheinungtreten des makroskopischen sie auch als hinreichend erkennen.

Die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2 \cdots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \cdots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0$$

bietet als nichtlineare die notwendige Bedingung der Existenz einer singulären Lösung dar. Ich habe bereits früher gezeigt[1]), daß diese Bedingung auf Gleichungen zwischen Koordinaten und Geschwindigkeiten führt, die in Verbindung mit den Lagrangeschen Gleichungen die beiden Hauptsätze der Wärmelehre ergeben. Der mathematische Weg dabei sind dieselben Eliminationen, die Helmholtz durchgeführt und durch hypothetische zyklische Bewegungen gedeutet hat. Das allgemeine Integral verknüpft Arbeit, Geschwindigkeit und Lage eines einzelnen durch Integrationskonstante charakterisierten Moleküls, welches wir uns hier als inneren Kräften unterliegendes Punktsystem vorstellen. In Erscheinung treten aber nicht diese, sondern die „makroskopischen" oder wie wir von nun an sagen wollen, die „Zustandsgrößen zweiter Art", äußere Arbeit, Temperatur, Entropie einerseits, Arbeit und Wärme andererseits, deren Verknüpfungsgesetz frei ist von den von Molekül zu Molekül wechselnden Parametern. Unser Prinzip berechtigt uns somit, die singuläre Lösung der mechanischen Grundgleichungen als homologen mathematischen Ausdruck der beiden Hauptsätze zu lesen. Dadurch, daß bei uns die atomistische Begründung der Beobachtung und die mathematische Analyse einander parallel gehen, indem beide molekulare Veränderungen (Individuen des allgemeinen Integrals) zugrunde legen und in der singulären Lösung (Gesetz zweiter Art) ein von den Parametern freies Gesetz erkennen, fallen die erkenntnistheoretischen Bedenken weg, die Helmholtz selbst hatte, die thermodynamischen Gesetze durch einen zyklischen Motor, etwa der Art, wie ihn Boltzmann[1]) konstruiert, zu erklären.

Derselben Betrachtungsweise unterliegt die Erscheinung der Selbstinduktion. Die Lagrangeschen, von außen angesetzte Kräfte berücksichtigenden Gleichungen lauten:

$$-P_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right).$$

Verstehen wir unter q_1 den von einem Punkt aus gemessenen Abstand auf dem Leiter, unter P_1 die Kraft, die q_1 zu vergrößern strebt, und eliminieren mit Hilfe der Singularitätsbedingungen das q_1 durch die übrigen q_i, so folgt

$$P_1 = \frac{d}{dt} L q_1',$$

wo L eine Funktion der q_i und q_i' $(i \neq 1)$ ist. Die Deutung dieser Gleichung als Gesetz zweiter Art liefert das Gesetz der Selbstinduktion.

Das Huyghenssche Prinzip in seiner ursprünglichen Fassung ist ein Spezialfall unseres allgemeinen Gesetzes, da die Einhüllende der elementaren Wellenflächen sich als singuläre Lösung der die Gestalt der Wellenfläche beherrschenden nichtlinearen Differentialgleichung darstellt. In dieser rein geometrischen Gestalt steht das Prinzip zu der heutigen Theorie, welche die zeitliche Ausbreitung des Erregungszustandes berücksichtigend auf der vierdimensionalen Laplaceschen Gleichung beruht, in demselben Verhältnisse wie die Keplerschen Gesetze zur Newtonschen Theorie der Planetenbewegung.

Auch in die Gastheorie spielt unser Prinzip in bemerkenswerter Weise hinein. Zu dem eigengesetzlichen System von Differentialgleichungen, denen das Korpuskel unterliegt, tritt nämlich als Verteilungsgesetz eines auf alle Kor-

1) Diese Zeitschr. **20**, 346ff., 1919.

1) Vorlesungen über **Maxwells Theorie**, S. 8ff.

puskel ungeordnet verteilten Zustandes x das Fehlergesetz

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}.$$

Die Einhüllende der durch diese Gleichung dargestellten Kurven, welche der singulären Lösung der zugrundeliegenden Differentialgleichung entspricht, wird gewonnen durch Elimination des h mit Hilfe von

$$x = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

d. h, die mittlere Zustandsgröße (mittlerer Fehler) ist die dem Berührungspunkte der Zustandskurve und der Einhüllenden entsprechende Zustandsgröße. Dieser Mittelwert ist aber auch, wie in der Wahrscheinlichkeitstheorie gezeigt wird, gleich der Quadratwurzel aus dem arithmetischen Mittel der Fehlerquadrate $\frac{\Sigma x^2}{n}$. In der Anwendung auf die Gastheorie, wo $x^2 = m c^2$, ist also

$$\overline{mc^2} = \frac{\Sigma m c^2}{n} = \frac{1}{2 h^2}$$

die zur Gewinnung der Einhüllenden notwendige Bedingung. Nach unserem Prinzipe kommt $\overline{m c^2}$ die Bedeutung einer Zustandsgröße zweiter Art zu, wogegen die Gastheorie die fundamentale Frage, ob man berechtigt ist, in diesem Mittelwerte eine physikalische Qualität zu sehen, nicht stellt.

Betrachten wir, den modernen Anschauungen folgend, das Körpermolekül als aus „Energieknoten" zusammengesetzt, die inneren Kräften des das Molekül bildenden Systems unterliegen, so gilt jedenfalls für dieses System ein Erhaltungsgesetz, demzufolge der „kinetische Energie-Impulstensor", der eine homogene quadratische Funktion der Ableitungen der Weltkoordinaten nach der Eigenzeit ist,

$$u_i = \frac{d x_i}{ds},$$

vermehrt um den potentiellen, S, der Energiekonstanten a gleich ist:

$$\sum_1^n {}^e \sum_1^4 {}^{ik}\mu^{(e)} u_i^{(e)} u_k^{(e)} + S = a.$$

Als singuläre Lösung ergibt sich sofort:

$$S = a.$$

D. h.: Der Körper verhält sich so, als ob die Moleküle im statischen Gleichgewichte wären. Die Gesamtenergie des das Molekül bildenden Systems tritt als unveränderliche Ladung, die „Masse", eines starren Korpuskels auf.

Wien, im August 1919.

(Eingegangen 15. August 1919.)

Eine genaue Formel für die Sättigungsspannung des Wasserdampfes zwischen 0 und 50° C.

Von Paul Schreiber.

Im logarithmischen Doppelpapier mit 600 mm Länge des Mantissenbereiches, welches ich in der Notiz vom 15. Juni 1919[1]) erwähnt habe, gestaltet sich die Spannungskurve des Wasserdampfes ebenfalls zu einer geraden Linie. Das Gesetz $s = p T^q$ kann aber nicht streng richtig sein. Der Anblick der Kurven in der erwähnten Notiz brachte mich schon auf den Gedanken, daß die Formel

$$\log s = \log s_1 + \log f(T)$$

zum Ziele führen könne. Hierin würden

$$\log s_1 = p + q \log T$$

die Grundform und $\log f(T)$ ein Verbesserungsglied sein. Die Rechnung habe ich mit 26 Koordinatenpaaren von $t = 0^0$ C bis $t = 50^0$ C, also $T = 273^0$ bis 323^0 durchgeführt und dabei als pflichtgetreuer Meteorolog die Zahlen in den „Internationalen meteorologischen Tabellen" (Broch-Regnault) verwendet. Die neuen Zahlen von Scheel und Heuse weichen ziemlich stark von diesen ab. Ich fand folgende Gleichungen:

$$\log s_1 = -7{,}0814 + 17{,}8 \log(10^{-2} T)$$
$$\log f(T) = +0{,}0115 - 0{,}0000494 (T - 298)^2$$
$$\log s = -7{,}0699 + 17{,}8 \log(10^{-2} T) - 0{,}0000494 (T - 298)^2.$$

In der Tabelle I wurden die Werte für s nach Scheel und Heuse, Broch-Regnault und nach meiner Formel zusammengestellt. Die Differenzen zwischen den Beobachtungsergebnissen steigen bis zu 0,56 mm. Die Differenzen 2—3 wachsen erst von 42° C an sehr stark. Von 0 bis 42° sind sie von derselben Größenordnung wie die Unterschiede der Beobachtungsergebnisse, es wird also zulässig sein, innerhalb eines ziemlich beträchtlichen Temperaturintervalles einfach die Grundform anzuwenden. Berücksichtigt man das Verbesserungsglied, so stellt meine Formel die Werte, aus denen sie abgeleitet worden ist, so gut dar, daß ich sie

1) Diese Zeitschr. **20**, 496, 1919.



Tabelle I.

Sättigungsspannung s des Wasserdampfes in mm Hg-Säule.

t^0 C	T	Scheel-Heuse	Broch-Regnault	Schreibers Formel s_1	Schreibers Formel s	Differenzen in Hundertstel Millimeter 1—2	2—3	2—4
		1	2	3	4	1—2	2—3	2—4
0	273	4,58	4,57	4,81	4,60	+ 1	— 14	— 3
2	5	5,25	5,27	5,48	5,30	— 2	— 21	— 3
4	7	6,10	6,07	6,23	6,09	+ 3	— 16	— 2
6	9	7,01	6,97	7,08	6,98	+ 4	— 11	— 1
8	281	8,05	7,99	8,05	8,00	+ 6	— 6	— 1
10	3	9,21	9,14	9,13	9,14	+ 7	+ 1	0
12	5	10,52	10,43	10,35	10,42	+ 9	+ 8	+ 1
14	7	11,99	11,88	11,72	11,87	+11	+ 16	+ 1
16	9	13,64	13,51	13,26	13,49	+13	+ 25	+ 2
18	291	15,48	15,33	14,99	15,31	+15	+ 34	+ 2
20	3	17,54	17,36	16,94	17,34	+18	+ 42	+ 2
22	5	19,83	19,63	19,12	19,61	+20	+ 51	+ 2
24	7	22,38	22,15	21,56	22,12	+23	+ 59	+ 3
26	9	25,22	24,96	24,30	24,93	+26	+ 66	+ 3
28	301	28,36	28,07	27,36	28,07	+29	+ 71	0
30	3	31,83	31,51	30,78	31,51	+32	+ 73	— 0
32	5	35,67	35,32	34,61	35,34	+35	+ 71	— 2
34	7	39,91	39,52	38,88	39,55	+39	+ 64	— 3
36	9	44,58	44,16	43,64	44,20	+42	+ 52	— 4
38	311	49,71	49,26	48,95	49,30	+45	+ 31	— 4
40	3	55,34	54,87	54,85	54,90	+47	+ 2	— 3
42	5	61,52	61,02	61,45	61,06	+50	— 4	— 4
44	7	68,28	67,76	68,78	67,78	+52	—102	— 2
46	9	75,67	75,13	76,92	75,12	+54	—179	+ 1
48	321	83,74	83,19	86,00	83,15	+55	—281	+ 4
50	3	92,54	91,98	96,02	91,83	+56	—404	+15

wohl mit Recht eine genaue Formel nennen darf.

Von meinem Standpunkt als Meteorolog aus habe ich keine Veranlassung, die Angelegenheit weiter zu verfolgen, anders ist dies aber vom thermodynamischen Standpunkt aus.

Wie man sieht, lassen sich die Gleichungen folgendermaßen schreiben und ableiten:

$$s = \alpha \cdot \beta^\tau \cdot T^q$$

oder

$$\ln s = \ln \alpha + \tau \ln \beta + q \ln T$$

$$\frac{ds}{dt} = s \ln \beta \cdot \frac{d\tau}{dt} + \frac{qs}{T}$$

$$y = \frac{T}{s} \cdot \frac{ds}{dt} = T \cdot \ln \beta \cdot \frac{d\tau}{dt} + q.$$

Hierin sind α ein sehr kleiner, β ein von 1 nur wenig verschiedener Zahlenwert, q der Exponent 17,8 und $\tau = (T—298)^2$, oder auch eine andere Funktion von T. Über die Funktion y gibt Zeuner in seiner „Technischen Thermodynamik" die aus Tabelle II ersichtlichen Zahlenwerte. Wäre y konstant, so müßte $\beta^\tau = 1$ also $T \cdot \ln \beta \frac{d\tau}{dt} = 0$ und $y = q$ sein, es würde also die Grundform ausreichen. Das ist nahezu bei der Kohlensäure der Fall. Bei allen anderen Dämpfen nimmt y mit steigender Temperatur ab, es muß also entweder $\ln \beta$

Tabelle II.

Die Funktion $y = \frac{T}{s} \cdot \frac{ds}{dt}$.

Gegenstand	Temperatur t von	Temperatur t bis	Werte für Y von	Werte für Y bis
Wasserdampf	0	200	19,52	9,85
Ätherdampf	0	120	12,50	8,35
Alkoholdampf	0	150	18,10	10,40
Azeton	0	140	16,25	8,38
Chloroform	0	160	14,79	7,65
Chlorkohlenstoff	0	160	15,11	8,19
Schwefelkohlenstoff	0	150	12,48	7,37
Kohlensäure	—30	+30	7,58	6,61
Ammoniak	—40	+40	22,32	11,71
Schweflige Säure	—40	+40	25,28	12,59

oder $\frac{d\tau}{dt}$ negativ sein. Für $T = 298^0$ gibt Zeuner bei Wasserdampf $y = 17,743$ an, was von dem Wert q nur wenig verschieden ist.

Die Clapeyronsche Formel liefert als Zustandsgleichung

$$us = \frac{1402—1,24\,T}{1—0,00001281\,T\,(t—24)},$$

worin also u das spezifische Volumen in Kubikmetern bedeutet. Für die Dichte des Dampfes bezogen auf atmosphärische Luft erhält man

$$\delta = 2,153\,T \frac{1—0,00001281\,T\,(t—24)}{1402—1,24\,T}.$$

Nach diesen Formeln findet man

$$T = 273^0 \quad t = \ \ 0 \quad us = 1054{,}6 = 3{,}863\ T \qquad \delta = 0{,}5573,$$
$$T = 323^0 \quad t = 50 \quad us = 1012{,}5 = 3{,}135\ T \qquad \delta = 0{,}6878,$$
$$\text{Mittel } t = 25 \quad us = 1033{,}6 = 3{,}469\ T \qquad \delta = 0{,}6226.$$

Ich möchte aber noch erwähnen, daß die von Zeuner (S. 9) aufgeführte Youngsche Formel meiner Grundform fast genau entspricht, wenn man darin $\alpha = 273$ setzt. Die Werte Youngs für die drei Konstanten hat Zeuner nicht angegeben. Ähnlich ist auch die Formel von Rankine.

Ich glaube, die Sache ist es wert, weiter verfolgt zu werden, wobei man aber nicht die ausgeglichenen Zahlen in den Spannungstafeln, sondern die Beobachtungswerte selbst wird zugrunde legen müssen. Hierzu werden die neuen auf 600 mm Mantissenbereich beruhenden Logarithmenpapiere (Marke 370½1—8) sehr gute Diense leisten.

Dresden, am 26. August 1919.

(Eingegangen 31. August 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Der Energieinhalt der Festkörper im Lichte der neueren Forschung.

Von Erwin Schrödinger.

(Schluß.)

§ 22. Die Erwägungen des vorangehenden Paragraphen machen es wünschenswert, die Berechnung von U und C_v aus der Gitterstruktur wirklich exakt, ohne Vernachlässigung der Besonderheiten bei kleiner Wellenlänge, durchzuführen, indem man für jeden der $3n$ Zweige (55) den wahren Zusammenhang zwischen ν und λ einsetzt, jeder Eigenschwingung den Energiewert (14) zuteilt, nach $d\lambda$ (bzw. $d\nu$) und $d\omega$ integriert und über alle Zweige summiert.

Die Rechnung wird in jedem besonderen Fall ziemlich verwickelt, da ν^2 als $3n$-wertige Funktion von λ und den Richtungskosinus der Wellennormale das Wurzelsystem einer Gleichung vom $3n$-ten Grade bildet. Durch einen naheliegenden Kunstgriff Thirrings läßt sich das Problem zwar ganz allgemein für beliebige Strukturen bewältigen, aber die betreffenden Entwicklungen konvergieren leider nur für höhere Temperatur (etwa $C_v > 3{,}0$) genügend gut. Die äußerst nötige Entwickelung für tiefe Temperatur steht derzeit noch aus.

Thirring[1]) hat nach dieser Methode die Alkalihalogenide und Kupfer, Born[2]) das interessante Diamantmodell durchgerechnet. Die Ergebnisse sprechen jedenfalls nicht gegen die Theorie; die ausgesprochen schlechte Übereinstimmung beim Kupfer dürfte durch die mangelhafte experimentelle Kenntnis der Moduln und die unrichtige Wahl der Gitterstruktur verursacht sein. Irgendwelche scharfe Schlüsse lassen sich nicht ziehen, einerseits wegen der eben erwähnten Beschränkung des Temperaturbereichs, anderseits wegen der früher betonten Freiheit, die für die Wahl der Atomkraftparameter auch bei genauer Kenntnis des elastischen Verhaltens noch bleibt.

1) H. Thirring, diese Zeitschr. **14**, 867, 1913; **15**, 127, 180, 1914.
2) M. Born, Ann. d. Phys. **44**, 605, 1914. S. a. A. Magnus, Ann. d. Phys. **48**, 983, 1915.

Besprechung einiger bisher zurückgestellter Fragen im Zusammenhang mit dem Quantenansatz (14).

§ 23. In den §§ 7 und 9—22 haben wir in gedrängter Form darzustellen versucht, wie nach Einführung des Quantenwertes der mittleren Energie (§ 4) für die Freiheitsgrade der Festkörper unsere Vorstellungen von der Struktur ihrer Wärmebewegung sich allmählich der tatsächlich beobachteten Abhängigkeit ihrer thermischen Energie von der Temperatur angepaßt haben.

Dabei wird es dem Leser von Haus aus nicht entgangen sein, daß die Quantenformel (14) den Ausgleich der Boltzmann-Richarzschen Diskontinuität (s. o. § 3) formal vollzieht. Die mittlere Energie einer Koordinate bei gegebener Temperatur wird nach (14) in der Tat um so kleiner, je höher die Frequenz, d. h. je größer ceteris paribus die Kräfte sind, die einer Verschiebung der Koordinate aus der Normallage entgegenwirken. Diese Auffassung hat sich auch für die von Boltzmann als starr angesehenen Freiheitsgrade der zwei- und mehratomigen Gase experimentell bewährt: es ist gelungen für H_2, N_2, O_2 u. a. jenes (hohe) Temperaturgebiet messend zu erreichen[1]), wo

1) N. Bjerrum, Zeitschr. f. Elektrochemie **17**, 732, 1911.

die intermolekulare Schwingung zur Atomwärme allmählich beizusteuern beginnt[1]).

Da die Quantentheorie, von diesem Standpunkt betrachtet, die Weiterbildung jener provisorischen Annahme ist, haben Agglomerationshypothesen, die auf dem Provisorium fußen, neben ihr keinen Platz mehr. Statt von einer Verminderung des Energieinhalts durch Agglomeration könnte man folgerichtig höchstens von einer starken Erhöhung des betreffenden ν- bzw. Θ-Wertes sprechen[2]), doch dürfte, wie wir gesehen haben, bei Festkörpern die explizite Abhängigkeit des Ausdruckes (14) von der Temperatur in allen Fällen ausreichen.

Von fast noch größerer Bedeutung für uns ist Euckens Resultat[3]), der mit H_2-Gas ein (tiefes) Temperaturgebiet erreicht hat, wo noch zwei weitere Freiheitsgrade „abgestorben" sind — offenbar die rotatorischen; unterhalb 50° K verhält sich der Wasserstoff thermisch wie ein einatomiges Gas! Man erklärt sich das so, daß offenbar auch für den Energieinhalt der rotatorischen Freiheitsgrade die Quantentheorie in der einen oder in der anderen Form gelten muß, unter ν die Rotationsfrequenz verstanden[4]). Die anfängliche Kühnheit dieser Annahme verschwindet, wenn man sich klar macht, daß die Planck-Einsteinschen Überlegungen der §§ 4 u. 5 von den dort betrachteten Oszillatoren auf rotierende, starre Dipole ohne wesentliche Änderung übertragbar sind. — Folgende bisher beiseite gesetzten Punkte:

1. Das Fehlen des Rotationseinflusses bei einatomigen Gasen;

2. das scheinbare Fehlen der dritten rotatorischen Koordinate bei H_2, N_2, O_2;

3. das Fehlen des Rotationseinflusses im Festkörper

finden damit ihre gemeinsame Erklärung in der auch durch andere Umstände nahegelegten außerordentlichen Kleinheit des Trägheitsmoments beim Einzelatom.

In der Tat: Die mit einer bestimmten Rotationsenergie verbundene Rotationsfrequenz ist mit der Quadratwurzel aus dem Trägsheitsmoment verkehrt proportional und wird daher, wenn letzteres nur genügend klein ist, schon bei geringer Energieaufnahme so stark anwachsen, daß (14) dann nur mehr einen kleinen Bruchteil von (15) darstellt, ebenso wie bei einer von Haus aus hochfrequenten Koordinate.

Auch hier bildet die Quantentheorie wieder eine Milderung der früher bestandenen gedanklichen Härten:

Nach Boltzmann provisorisch: Die Atome müssen als materielle Punkte gelten, die nur drei Freiheitsgrade besitzen;

nach der Quantentheorie: Es genügt, sie nur von genügend kleinem Trägheitsmoment, sozusagen mit genügender Annäherung als materielle Punkte zu denken.

Wir können hinzufügen, daß anderweitige Schätzungen der verschiedenen Trägheitsmomente mit dieser Auffassung nicht im Widerspruch stehen, ja daß sich zum Teil eine verblüffende Übereinstimmung zeigt[1]).

§ 24. Als ein vernachlässigter Punkt der älteren Theorie wurden am Ende des § 3 noch die interatomaren optischen Freiheitsgrade angeführt. Mit ihnen befaßt sich in anderem Zusammenhang ein ausgebreiteter Zweig der Quantentheorie[2]). Aber auch ohne die Detailvorstellungen der Theorie der Serienspektra heranzuziehen (was uns hier zu weit ab führen würde), ist wohl folgendes klar:

Man braucht nur auch für diese Freiheitsgrade die Quantenformel (14) gelten zu lassen, dann läßt ihre hohe Frequenz auf der einen Seite, der intime mathematische Zusammenhang von (14) mit der Strahlungsformel (11) auf der anderen Seite, verstehen, daß der Beitrag zur Atomwärme solange verschwindend klein bleiben muß, als die Strahlung der betreffenden Frequenz im (optischen) Spektrum des schwarzen Körpers noch nicht merklich vertreten ist[3]).

Der Quantentheorie erscheinen also

1. Der normale Atomwärmewert 6 cal/·°C (nicht ein hohes Vielfaches davon!);

---

1) Die Schwingungsfrequenz folgt, jedenfalls der Größenordnung nach, richtig aus dem Bohr-Debyeschen Molekülmodell. Vgl. A. Rubinowicz, diese Zeitschr. 18, 187, 1917 (es handelt sich um die dort mit D_2 bezeichnete Schwingungsform).

2) In diesem Falle käme der Unterschied zwischen (14) und (14a) — die Nullpunktsenergie — in Frage.

3) A. Eucken, Berl. Ber. 1912, S. 141.

4) Auch hier kommt wieder die Nullpunktsenergie in Frage. — Überhaupt ist die Theorie für Gebilde, deren Frequenz stark vom Energieinhalt abhängt, noch nicht zu solcher Zwangsläufigkeit durchgebildet. Wir können darauf hier nicht eingehen, da es sich für die Festkörper um eine Nebenfrage handelt.

1) S. bes. F. Krüger, Ann. d. Phys. (4) 51, 450, 1916. — L. Flamm, diese Zeitschr. 19, 126f., 1918.

2) Referate: E. Riecke, diese Zeitchr. 16, 222, 1915; E. Wagner, diese Zeitschr. 18, 461, 488, 1917; P. S. Epstein, Die Naturwissenschaften 6, 230, 1918 (Planck-Jubelheft).

3) Übrigens bleiben gerade die optischen und ultravioletten Schwingungsformen des Atoms im festen Zustand sicher nicht unverändert erhalten. Vermutlich bilden die betreffenden Elektronen den „Kitt" im Gitter. Born ordnet sie — provisorisch — gleich den Atomen, in einer Anzahl einfacher Gitter an, was dazu führt, daß in (64) ebensoviele von den ν-Werten 2. Art ins Ultraviolett fallen. Von den betreffenden E-Gliedern würde das eben im Text Gesagte gelten. — Anm. b. d. Korr.: Siehe jedoch die zu § 21 zitierte Arbeit von Born u. Landé.

2. die triviale Tatsache, daß Körper bei Zimmertemperatur nicht glühen

als Ausfluß ein und derselben Gesetzmäßigkeit.

Es läßt sich also wohl sagen, daß, wer die Quantentheorie einmal akzeptiert hat, an ihre unmittelbarsten Folgen wirklich mit jedem „Augenblick" aufs neue erinnert wird. —

§ 25. Zweifellos noch am wenigsten geklärt ist die Frage nach der Energie der freien Elektronen im Metall. Nach den älteren Theorien (Riecke, Drude) kommt ihnen, wie den Gasatomen, der Äquipartitionswert $\frac{kT}{2}$ zu (pro Freiheitsgrad; also $\frac{3kT}{2}$ pro Elektron). Da ferner ihre Zahl nicht klein sein soll gegen die Zahl der Atome, sollten sie zur inneren Energie und zur Atomwärme merkliche Beträge beisteuern.

Daß das bis zu ziemlich hohen Temperaturen nicht der Fall ist, geht aus den Ergebnissen der vorigen Abschnitte wohl mit Sicherheit hervor[1]). Aber eine Handhabe, um dies aus der Quantentheorie zu verstehen, bietet sich zunächst nicht dar.

Es wäre möglich, daß die Elektronen nur zeitweise „frei", größtenteils aber im Gitter eingebaut sind (Richarz, Königsberger), und daß in letzterem Zustand ihr hoher Frequenzwert sie von der Teilnahme dispensiert[2]). — In Anlehnung an den auffallenden, von Nernst[3]), dann von Kamerlingh-Onnes[4]) festgestellten, von Lindemann[5]) versuchsweise gedeuteten Befund, daß der elektrische Widerstand der Metalle einen merkwürdig parallelen Verlauf mit ihrem Energieinhalt zeigt, hat dann W. Wien[6]) eine Theorie des galvanischen Leitvermögens entwickelt, nach der die Elektronenenergie konstant sein kann; freilich scheint das Wiedemann-Franzsche Gesetz dies nicht zu gestatten[7]).

Der Punkt ist — das muß man eingestehen — noch erheblich störend; um so mehr ist von seiner beharrlichen Verfolgung für den Ausbau der Theorie zu hoffen, in der ja die Stellung der Elektronen im Raumgitter überhaupt noch eine offene, bisher nur notdürftig verkleidete Lücke bildet[1]).

1) Vgl. zu der Frage auch: O. Richter, Diss. Marburg 1908; Ann. d. Phys. **39**, 1590, 1912; **42**, 779, 1913; A. Wigand, diese Zeitschr. **8**, 344, 1907; — J. Königsberger, Zeitschr. f. Elektrochem. **17**, 289, 1911.

2) Eine andere Möglichkeit erwähnt F. Skaupy, Verh. d. D. Phys. Ges. **17**, 269, 1915.

3) W. Nernst, Berl. Ber. 1911, S. 312.

4) K.-Onnes, Comm. Phys. Lab. Leiden Nr. 99 u. Nr. 119.

5) F. A. Lindemann, Berl. Ber. 1911, S. 316.

6) W. Wien, Berl. Ber. 1913, S. 184; Vorl. a. d. Columbia-Univ. 1913, S. 29ff. (bei Teubner 1913); s. a. W. H. Keesom, Gött. Vortr. 1913, S. 194.

7) K. F. Herzfeld, Ann. d. Phys. (4) **41**, 27, 1913.

Die Atomwärme bei hoher Temperatur; Ferromagnetica.

§ 26. So oft eine Gruppe von Freiheitsgraden nach der Quantentheorie noch nicht ihren vollen Beitrag zur Atomwärme liefert, muß C_v mit wachsender Temperatur noch weiter wachsen. Denn als Grenzgesetz für hohe Temperatur wird immer Äquipartition verlangt. Daher bilden alle zuletzt angeführten Umstände theoretische Gründe für ein Ansteigen der Atomwärme bei hoher Temperatur über den Dulong-Petitschen Wert $3AR$ hinaus.

Ein weiterer Grund, der ein Abweichen von diesem Grenzwert verursachen kann, liegt in den schon ganz zu Anfang erwähnten Abweichungen der Atomkräfte von der Linearität, die mit zunehmender Amplitude immer fühlbarer werden müssen. Im Gegensatz zu der oben über die Agglomerationstheorien gemachten Bemerkung ist dieser Punkt der älteren Theorien durch die Quantentheorie nicht nur nicht überholt, sondern noch nicht einmal erreicht. Soweit sie bis jetzt vorliegt und im vorigen besprochen wurde, bezieht sie sich, streng genommen, nur auf den Fall des exakt linearen Kraftgesetzes oder, wenn man will, unendlich kleiner thermischer Deformationen. Denn nur dann lassen diese sich in Eigenschwingungen auflösen und nur auf diesen Fall passen unsere Vorschriften für den Energieinhalt (s. o. § 11).

In erster Näherung werden die tatsächlich bestimmt anzunehmenden Abweichungen von der Linearität nur eine langsame Änderung der mittleren Atomkonfiguration[2]) und der (scheinbaren) linearen Atomkraftparameter mit der Temperatur zur Folge haben. Im übrigen wird man wie bisher rechnen können. — Eine zweite Näherung fehlt bis jetzt noch. Möglicherweise tragen die empirischen e-Glieder, welche die meisten Beobachter in großer Nähe des Schmelzpunkts den theoretischen Formeln hinzuzufügen für nötig finden (s. Tab. V: Eis, Zinksulfat[3])),

1) Anm. b. d. Korr.: Sieh hiezu die zu § 21 zitierte Arbeit von Debye u. Scherrer.

2) Bei exakter Linearität wäre keine thermische Ausdehnung vorhanden! — S. P. Debye, Gött. Vorträge 1913, S. 19ff. — M. J. M. van Everdingen, Diss. Utrecht 1914. — Ornstein u. Zernike, Amst. Proc. **19**, 1289, 1304, 1916.

3) S. a. E. Griffiths, Proc. Roy. Soc. (A) **89**, 561, 1914, und P. Schübel, Zeitschr. f. anorg. Chem. **87**, 81, 1914, nach denen sich starke Überschreitungen des Normalwerts $3R$ besonders bei den niedrig schmelzenden: *Na, Sn, Bi* vorfinden.

diesem in der Theorie noch nicht berücksichtigten Umstand Rechnung. —

Was das Experiment anlangt, so liefern alle bisher benutzten, und wohl auch alle denkbaren Methoden auch bei höherer Temperatur natürlich stets nur C_p; wegen der schon recht beträchtlichen Größe und unserer unsicheren Kenntnis der $(C_p - C_v)$-Korrektion (s. § 9) gestatten sie nur unsichere Schlüsse auf C_v. Das gilt auch von einer experimentell sehr interessanten, von Corbino[1]) und Pirani[2]) entwickelten Methode, die — der Nernstschen grundsätzlich nahe verwandt[3]) — wahre Atomwärmen von etwa 800^0 bis 1800^0 K zu messen gestattet. Die C_v-Werte, die Corbino angibt (für *Wo* 7,82; für *Pt* 8,32 cal/^{0}C, beides bei zirka 1800^0 K) sind zwar theoretisch durchaus wahrscheinlich; aber umgekehrt, als Beweis für irgendeine theoretische Anschauung, können sie aus dem genannten Grunde nicht gelten.

§ 27. Den einzigen Fall, in dem bedeutende Überschreitungen des Grenzwerts $3AR$ mit Sicherheit nachgewiesen und zugleich mit Sicherheit theoretisch gedeutet sind, bilden die Ferromagnetica (*Fe*, *Co*, *Ni* und Magnetit, Fe_3O_4). Die eigentümliche Erscheinung, die sich hier darbietet[4]), besteht in einem schon bei mittlerer Temperatur ein wenig abnormalen, mit zunehmender Temperatur beschleunigt wachsenden Anstieg von C_p, die z. B. für *Fe* bei etwa 1040^0 K die schwindelnde Höhe von fast $9AR$ cal/^{0}C erreicht. Beim sog. Curieschen Punkt, d. i. jene Temperatur, wo der Ferromagnetismus verschwindet, fällt C_p sprunghaft, beim *Fe* auf etwa $6AR$ cal/^{0}C. Die Art des Anwachsens und die Größe des Sprunges sind von Weiß und Beck[5]) quantitativ aus der Langevin-Weißschen Theorie[1]) des Ferromagnetismus erklärt worden. Nach ihr besitzen diese Körper auch im äußerlich unmagnetischen Zustand eine starke Spontanmagnetisierung (von der Größenordnung der experimentellen Sättigungsmagnetisierung), die der weitgehenden Bevorzugung einer gewissen Richtung seitens der magnetischen Achsen der Moleküle oder Atome entspringt. Unter dem zunehmend „desorientierenden" Einfluß der Wärmebewegung geht die Ausrichtung immer mehr verloren, beim Curie-Punkt verschwindet sie. Die Arbeit, die zum „Herausdrehen" der magnetischen Achsen aus der Vorzugsrichtung nötig ist, ist jener magnetische Anteil der Atomwärme.

Dabei ist die Annahme nötig, daß die zwei Freiheitsgrade, die einer Drehung der magnetischen Achse entsprechen, mindestens bei höherer Temperatur schon mit dem Äquipartitionswert an der Wärmebewegung teilnehmen. Es kann sich also (s. o. § 23) nicht um eine Atomachse, sondern es müßte sich um eine Molekülachse handeln. Damit geraten wir aber in einen gewissen äußerlichen Widerspruch mit der modernen Gittertheorie, die es im Kristall nicht mit Molekülen zu tun haben will.

Man wird den Widerspruch nicht für sehr ernsthaft halten. Immerhin scheint es nötig zu betonen, daß die Spezialtheorie der thermischen Anomalien der Ferromagnetica mit dem früher entwickelten allgemeinen Bild noch nicht völlig in Einklang gebracht ist.

---

1) O. M. Corbino, Rend. Linc. (5) **19**, (1), 133, 1909; **20**, (1), 223, 1911; **21**, (1), 181, 188, 346, 1912; **22**, (1), 430, 684, 1913; Nuov. Cim. (3) **1**, 389, 1912; (6) **5**, Mai 1913; diese Zeitschr. **11**, 413, 1910; **12**, 292, 1911; **13**, 375, 1912; **14**, 915, 1913. — L. Fabaro, Cim. (6) **9**, 123, 1915. — A. G. Worthing, Phys. Rev. (2) **5**, 340, 1915.

2) M. v. Pirani, Verh. d. D. Phys. Ges. **14**, 1037, 1912.

3) Glühdraht, ohne Kalorimetergefäß, frei im Vakuum, dient selbst a) als Heizdraht b) zur Zuführung der Temperaturänderungsenergie, c) zur Temperaturmessung, d) zur Messung der Temperaturänderung. Der Strahlungsaustausch mit der Umgebung wird natürlich berücksichtigt.

4) Literatur: Pionchon, Ann. Chim. Phys. (6) **11**, 33, 1887 (*Fe, Ni, Co*); Tilden, Phil. Trans. **A**, **201**, 37, 1903 (*Ni*); Harker, Phil. Mag. (6) **10**, 430, 1905 (*Fe*); Oberhoffer, Metallurgie (Zeitschrift f. d. gesamte Hüttenkunde) **4**, 427, 1907 (*Fe*); E. Lecher, Verh. d. D. Phys. Ges. **9**, 647, 1907; Wien. Ber. **117** (2a) 111, 1908 (*Fe, Ni*); P. Weiß u. J. Beck, Journal de Phys. (4) **7**, 249, 1908 (*Fe, Ni*, Magnetit); M. v. Pirani, Verh. d. D. Phys. Ges. **14**, 1037, 1912 (*Fe*); s. ferner die Literatur zur Tab. II (*Fe*).

5) Weiß u. Beck l. c. Journ. d. Phys. (4) **7**, 249, 1908.

1) Zusammengefaßt in: P. Weiß, Conférence faite à la Société Française de Physique, Paris, 6. Januar 1912.

(Eingegangen 5. Juli 1918.)

Nachtrag bei der Revision am 7. Juni 1919:

1. Zur Klärung der zuletzt berührten Frage wird die Strukturbestimmung des Magnetits durch W. H. Bragg, Phil. Mag. (6), **30**, 305, 1915 von erheblichem Interesse sein.

2. Die zu Tabelle II mit „K. Onnes 1" zitierte Stelle wird mir erst jetzt im Original zugänglich. Die beiden von Onnes u. Holst in den Intervallen $4^0 26 \rightarrow 6^0 48$ K bzw. $2^0 93 \rightarrow 3^0 97$ K gemessenen C_v-Werte des Quecksilbers fügen sich nicht nur nicht in die (nach den Pollitzerschen Messungen) mit $\Theta = 97^0$ gezeichnete Debye-Kurve ein (sie würden ungefähr $\Theta = 60^0$ verlangen), sondern widerstreiten auch für sich genommen dem T^3-Gesetz. In Tabelle VI eingefügt, würden die beiden Q-Werte um 12 Proz. voneinander abweichen.

BESPRECHUNGEN.

H. Brick, Drähte und Kabel, ihre Anfertigung und Anwendung in der Elektrotechnik. 2. Auflage. 8. 112 S. mit 43 Abbildungen im Text. (A. u. d. T.: Aus Natur und Geisteswelt. 285. Bändchen.) Leipzig, B. G. Teubner. 1919. Pappband. M. 1.90 u. 40% Teuerungszuschlag.

Der Werdegang des elektrischen Leiters wird hier geschildert, und wir lernen, welche Summe von Arbeit aufzuwenden ist, bis aus dem zutage geförderten Erz das Länder verbindende Kabel wird, oder der unendlich feine Spulendraht eines Meßinstrumentes. Wer den heutigen Hochstand der Elektrotechnik nicht als selbstverständlich hinzunehmen gewöhnt ist, sondern sich über ihre Hilfsmittel gern Gedanken macht, der wird das Buch mit Interesse lesen. An Wissenschaft finden wir nur dasjenige ganz kurz erwähnt, was zur Beurteilung der Eigenschaften des Fertigfabrikats unbedingt nötig ist. Leider ist hierbei eine arge Unachtsamkeit mit unterlaufen. Wenn bei Anführung der Selbstinduktion gar nicht erwähnt wird, daß sie von der geometrischen Gestalt des Leiters abhängt, und sich dafür lediglich die Behauptung findet, sie hänge nicht nur von der Frequenz des Stromes, sondern auch vom Material des Leiters ab, so dürfte dies bei dem Physiker ein etwas erstauntes Schütteln des Kopfes hervorrufen. V. Pieck.

H. Egerer, Ingenieur-Mechanik. Lehrbuch der technischen Mechanik in vorwiegend graphischer Behandlung. Erster Band: Graphische Statik starrer Körper. gr. 8°. VIII u. 380 S. m. 624 Abbildungen. Berlin, J. Springer. 1919. M. 14.—

Der Verfasser hat als Repetitor und später als Hochschullehrer reiche Erfahrungen erworben über die Schwierigkeiten, welche den Studierenden der technischen Hochschulen beim Studium der Mechanik entgegentreten und über die Methoden, um dieses Studium zu erleichtern. Diese Erfahrungen weiteren Kreisen nützlich zu machen, ist der Hauptzweck dieses neuen Mechanik-Lehrbuches. Der pädagogische Gesichtspunkt tritt in den außerordentlich zahlreichen Beispielen (238 mit 145 vollständig gelösten Aufgaben) in Erscheinung; er äußert sich aber auch in einer besonders starken Betonung der geometrischen Anschauung, was gerade für den Ingenieur eine Erleichterung bedeutet, da er ohnehin gezwungen ist, sein räumliches Vorstellungsvermögen besonders gut auszubilden. Ob diese Betonung auch für Leser mit anderem Bildungsgang, wie etwa Mathematiker und Physiker, von wesentlichem Vorteil ist, mag allerdings zweifelhaft sein, immerhin wird sie kein Nachteil sein und die sonstigen in der Darstellung und Stoffanordnung liegenden Vorzüge lassen das Buch auch für Nichtingenieure, soweit sie sich eingehend mit graphischer Statik beschäftigen wollen, empfehlenswert erscheinen. Betz.

M. Grübler, Lehrbuch der technischen Mechanik. Erster Band. Bewegungslehre. gr. 8°. V u. 140 S. m. 124 Abbildungen. Berlin, J. Springer. 1919. M. 8.—

Die Gesetze der Mechanik sind auf der Erfahrung begründet. Es kommen dabei aber auch vielfach rein formale Beziehungen zur Anwendung, welche unabhängig von der physikalischen Welt bestehen und deshalb auch keine Erfahrungstatsachen enthalten. Es sind dies z. B. die Beziehungen zwischen Raum- und Zeitgrößen. Der Verfasser hat nun diese über das Gebiet der Mechanik hinaus allgemeingültigen Gesetze in einem besonderen Bande als Bewegungslehre vereinigt und als Grundlage der eigentlichen Mechanik an die Spitze seines Lehrbuches gestellt.

In 14 Kapiteln werden zunächst die Grundbegriffe erörtert, dann die gerade und krummlinige Bewegung eines Punktes und ihre Darstellung in verschiedenen Koordinatensystemen dargestellt. Es folgen dann die Bewegungsgesetze starrer Körper in der Ebene und im Raume, die freie und gebundene Bewegung, die Relativbewegung und zum Schluß ein Ausblick auf die Relativitätstheorie.

Das Buch ist in erster Linie für die Studierenden der technischen Hochschulen bestimmt und berücksichtigt deshalb in seinen Beispielen hauptsächlich technische Aufgaben. Aber diese Rücksicht ist auch nicht kleinlich durchgeführt, wie die kurze Einführung in die Relativitätstheorie zeigt. Bei der allgemeinen Bedeutung des behandelten Stoffes wird das Buch daher auch für Nichttechniker, insbesondere für Physiker eine recht nützliche Lektüre bilden, zumal die Darstellung leicht verständlich ist, was ja bei einem Lehrbuch wesentliche Voraussetzung ist. Betz.

R. v. Mises, Fluglehre. Vorträge über Theorie und Berechnung der Flugzeuge in elementarer Darstellung. kl. 8°. VI u. 192 S. m. 113 Abbildungen. Berlin, Julius Springer. 1918. M. 8.—

Das Buch ist aus Vorträgen hervorgegangen, die der Verfasser teils für Offiziere, teils als publicum für Hörer aller Fakultäten gehalten hat. Es setzt daher im wesentlichen nur solche Kenntnisse voraus, die man sich an höheren Schulen erwirbt.

Nach einem kurzen historischen Überblick über die wichtigsten Fortschritte in der Entwicklung der Flugtechnik bringt der Verfasser ein allgemeines Kapitel über Luftkräfte: Luftdruck, Luftdichte, Staudruck und ähnliche Begriffe werden erläutert und ihre Abhängigkeit von äußeren Umständen, insbesondere von der Höhe über dem Boden wird klargelegt. Weiter werden die Luftwiderstandsgesetze und die Formeln dafür besprochen sowie die Einflüsse erläutert, von denen die Beiwerte abhängen. Das zweite Kapitel handelt von der Tragfläche. Darin bringt der Verfasser die flugtechnisch wichtigsten Eigenschaften der Flügel, ihre übliche graphische Darstellung und ihre Abhängigkeit von der Profilform und vom Grundriß. Im Anschluß daran wird der Zusammenhang der Fluggeschwindigkeit und der erforderlichen Zugkraft mit den Flügeleigenschaften auseinandergesetzt. In ähnlicher Weise wie die Tragfläche sind in den beiden folgenden Kapiteln die Luftschraube und der Motor behandelt. Im 5. Kapitel wird das Zusammenwirken von Tragfläche, Luftschraube und Motor und die übersichtliche Darstellung der dabei auftretenden Fragen erläutert. Im folgenden Kapitel wird das beim Flugzeug besonders wichtige und schwierige Gebiet der Steuerung, Stabilität und Stabilisierung behandelt und schließlich im letzten Kapitel noch das Wichtigste über den Ab-



flug, die Landung und die Navigation der Flugzeuge gesagt.

Die Fluglehre von Mises wird von sehr vielen freudig begrüßt werden; denn die bisherige flugtechnische Literatur ist teilweise für einen verhältnismäßig sehr engen Leserkreis geschrieben; soweit sie sich aber an einen weiteren Kreis wendet, geht sie meist wieder nicht tief genug auf die grundlegenden Fragen ein. Im vorliegenden Buche hat es der Verfasser verstanden, einen glücklichen Mittelweg zu finden: Er behandelt alle einigermaßen wichtigen Aufgaben mit ausreichender Gründlichkeit, er geht auch den auftretenden Schwierigkeiten nicht aus dem Wege, sondern sucht sie dem Leser nach Möglichkeit überwinden zu helfen. Man ist beim Lesen angenehm überrascht durch die Klarheit, mit welcher der immerhin schwierige Stoff dargestellt ist. Dazu kommt noch die beherrschende Sachkenntnis, mit welcher die zahlreichen Einzelprobleme des umfangreichen Gebietes behandelt werden, die durchaus auf der Höhe der modernen Forschungsergebnisse steht. Trotzdem ist aber die Darstellung so, daß man ohne erhebliche Vorkenntnisse den Ausführungen folgen kann; allerdings ist dazu, besonders für den Nichtfachmann, eine nicht unerhebliche geistige Mitarbeit erforderlich, um in das fremde Gebiet mit zahlreichen neuen Begriffen und Überlegungsformen einzudringen. Auf jeden Fall kann man allen denen, die sich vom wissenschaftlichen Standpunkt aus für das Flugwesen interessieren, das Buch als eines des besten sehr empfehlen. Betz.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Frankfurt a. M. Dr. A. Landé für theoretische Physik, an der Technischen Hochschule München Dr. Ing. Heinrich Lüders für Chemie und Technologie der Lebensmittel mit besonderer Berücksichtigung ihrer physikalischen Chemie.

Ernannt: Aktuar cand. rent. Arnfinn Palmström zum a. o. Professor der Versicherungstechnik an der Universität Kristiania, der a. o. Professor der Chemie an der Universität Zürich Dr. Paul Karrer zum ord. Professor ebenda, Dr. Heinrich Wigge zum Dozenten für Physik und Funkentelegraphie am Polytechnikum in Köthen, die a. o. Professoren an der Universität Rostock Dr. Richard Störmer (Chemie) und Dr. Rudolf Weber (Mathematik) zu ord. Honorarprofessoren daselbst, der a. o. Professor für Beleuchtungsindustrie an der Technischen Hochschule Wien Dr. Hugo Strache zum ord. Professor ebenda, der Privatdozent an der Universität Jena Dr. Friedrich Schulz zum a. o. Professor für Physiologische Chemie ebenda, Professor Dr. W. Olbrich zum a. o. Professor der darstellenden Geometrie an der Hochschule für Bodenkultur in Wien, der a. o. Professor an der Universität Marburg Dr. Alfred Thiel zum ord. Professor für physikalische Chemie ebendaselbst.

Verliehen: Dem Lektor der praktischen Vermessungskunde an der Universität Münster Georg Schewior und dem Lektor für Photographie an der Universität Halle Dr. Wilhelm Thiem der Titel Professor, dem Privatdozent der Chemie an der Universität Kiel Dr. Karl Joh. Freudenberg und dem Privatdozent für Physikalische Chemie an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Walter Fraenkel der Titel Professor.

Berufen: Der ord. Professor für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Ing. Ludwig Binder zum ord. Professor für Elektromaschinenbau an der Technischen Hochschule Dresden.

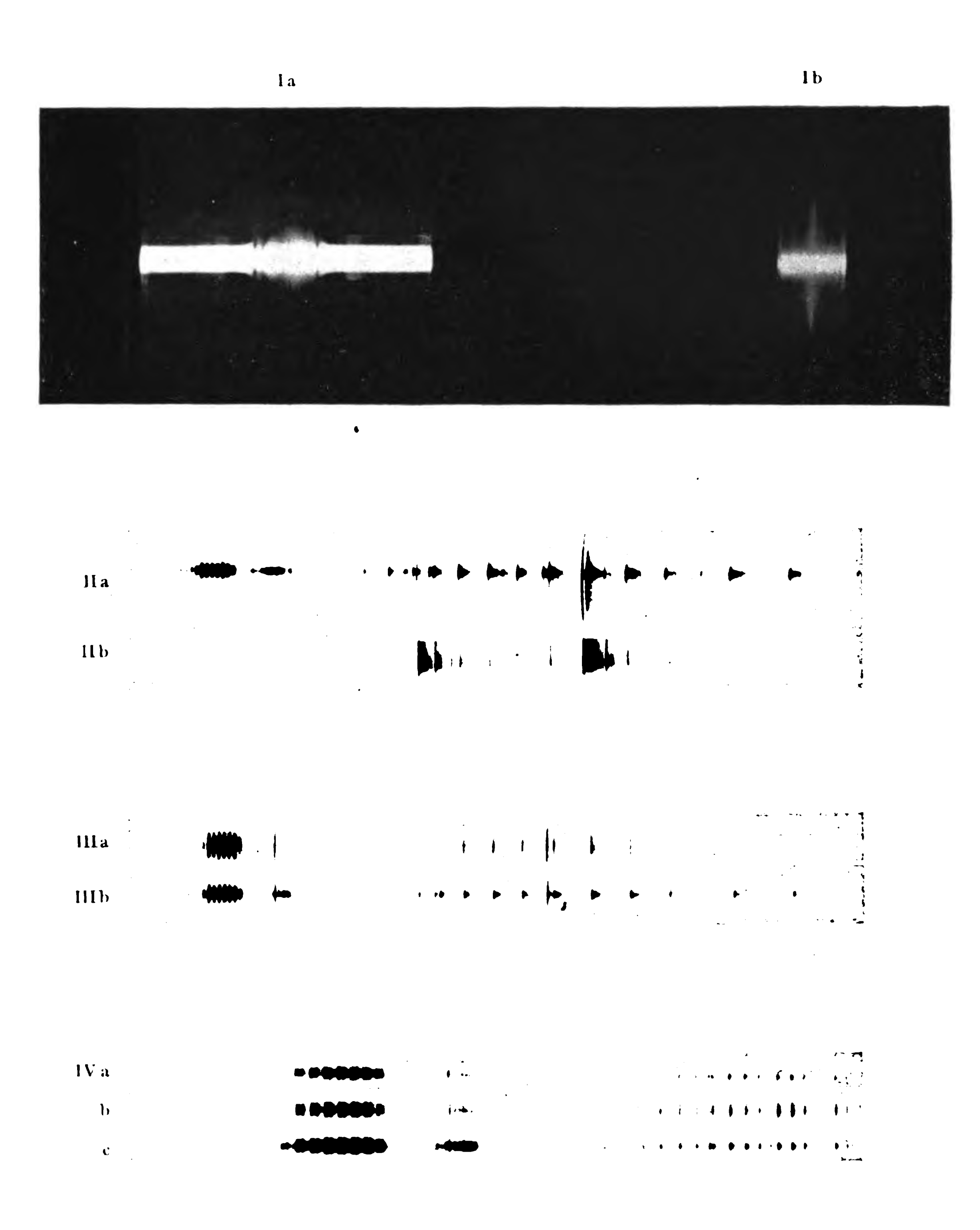
Nobelpreise: Für Physik 1918: Geh. Regierungsrat ord. Professor der Physik an der Universität Berlin Dr. Max Planck; für Physik 1919: ord. Professor der Physik an der Universität Greifswald Dr. Johannes Stark; für Chemie: Geh. Regierungsrat Professor Dr. Fritz Haber, Direktor des Kaiser-Wilhelms-Instituts für physikalische Chemie.

Gestorben: Der frühere a. o. Professor der Chemie an der Universität Basel Dr. Christoph Friedrich Goppelsröder, der Privatdozent für darstellende und projektive Geometrie an der Technischen Hochschule Wien Professor Dr. O. Danzer, der ord. Professor für höhere Analysis und Integralrechnung an der Universität Pisa Dr. Ulisse Dini, der frühere ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt Geh. Hofrat Dr. Friedrich Graefe, der wissenschaftliche Sekretär der Société scientifique de Bruxelles Professor Dr. P. Mansion in Gent, der ord. Professor für Chemie an der Universität Zürich Dr. Alfred Werner.

Angebote.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



W. Steubing, Eine diamagnetische Erscheinung in leuchtendem Stickstoff und magnetisches Verhalten seiner Bandenspektra.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und **H. Th. Simon**



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von 50 Mark fürs Inland und 64 Mark fürs Ausland jährlich. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 58 Mark, im Ausland je nach dem Valutastande.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 23. 1. Dezember 1919. No. 555. **20. Jahrgang.**

Inhaltsverzeichnis:

Die um das sieben- bis achtfache gestiegenen Druck- und Papierpreise zwingen mich, den Bezugspreis für die Physikalische Zeitschrift auf 50 Mark für das Inland zu erhöhen. Der Preis für das Ausland wird nach dem jeweiligen Valutastande festgesetzt. Für Bezug unter Kreuzband werden 8 Mark fürs Inland und 16 Mark fürs Ausland besonders berechnet. Diese Erhöhung gilt auch für die früheren Jahrgänge, soweit sie noch vorhanden sind.

Leipzig, im Dezember 1919. *S. Hirzel.*

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 23. 1. Dezember 1919. 20. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 1 am 15. Dezember 1919.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Der Ursprung des Actiniums.

Von Otto Hahn und Lise Meitner.

Das Actinium wird heute allgemein als Zweigprodukt des Urans betrachtet. Eines der Glieder der Uranreihe besitzt zwei Zerfallsmöglichkeiten, deren eine über das Radium zu dem als *RaG* bezeichneten Bleiisotop führt, während die andere die Actiniumreihe liefert. Obwohl diese Auffassung als feststehend in alle radioaktiven Lehrbücher übergegangen ist, ist das zu ihrer Begründung vorhandene experimentelle Material recht ungenügend. Die Berechtigung der Einreihung des Actiniums in die Uranreihe erfordert zunächst die Beantwortung zweier Fragen, und zwar erstens: Ob Actinium ein konstanter Bestandteil aller Uranmineralien ist, und zweitens: Welchen Zahlenwert das konstante Aktivitätsverhältnis Actinium/Uran besitzt. Die weitere Aufgabe, das Glied der Uranreihe festzulegen, an dem die Abzweigung eintritt, ist logischerweise erst nach der Beantwortung der genannten Fragen in Angriff zu nehmen. Die einzige experimentelle Unterlage für die Entscheidung dieser beiden Fragen bildete bis vor kurzem eine Arbeit von B. Boltwood[1]) aus dem Jahre 1908, in der das Verhältnis $Ac:U$ in zwei verschiedenen Pechblenden nach je 2 verschiedenen Methoden untersucht worden war. Die vier erhaltenen Werte zeigen untereinander Abweichungen von mehr als 100 Proz., was leicht zu verstehen ist, wenn man berücksichtigt, daß zu der damaligen Zeit die Chemie der Radioelemente im allgemeinen sehr wenig ausgebildet war, und daß die Chemie des Actiniums auch heute noch sehr große Schwierigkeiten bietet. Aus dem Durchschnittswert der von Boltwood erhaltenen Zahlen berechnete dann Rutherford, daß nur 8 Proz. der Uranatome in die Actiniumreihe übergehen, während die übrigen 92 Proz. bei ihrem Zerfall die Radiumreihe bilden. In neuerer Zeit ist die Frage von Fußler[1]) untersucht worden, und zwar durch Bestimmung des Verhältnisses $Ac:U$ in 2 Carnotiten aus Colorado. Es wurden 3 Bestimmungen ausgeführt, die in willkürlichem Maß gemessen für die relative α-Aktivität der Actiniumreihe die Werte 135, 176 und 107 ergaben, also auch Abweichungen untereinander von 60 Proz. aufweisen.

Man kann in diesen Resultaten wohl eine Bestätigung des genetischen Zusammenhangs zwischen Actinium und Uran sehen. Eine Sicherung des Zahlenwertes des Abzweigungsverhältnisses bietet aber diese Arbeit nicht. Das scheint auch die Ansicht des Verfassers selbst gewesen zu sein, da er, obwohl seine Werte bedeutend niedriger sind als die Boltwoodschen, auf diesen Punkt in seiner Arbeit gar nicht eingeht[2]).

Eine genaue Kenntnis des Abzweigungsverhältnisses ist aber für verschiedene prinzipielle Fragen von Bedeutung.

Es schien uns daher wünschenswert, eine nochmalige Bestimmung des Verhältnisses $Ac:U$ auszuführen. Die Auffindung des Protactiniums, der Muttersubstanz des Actiniums, bot auch viel günstigere Bedingungen für die Bestimmung dieses Verhältnisses. Es ist natürlich klar, daß das Verhältnis Protactinium : Uran in Mineralien denselben Wert besitzen muß wie Actinium zu Uran. Die Bestimmung mittels des Protactiniums bietet gegenüber dem Actinium zwei große Vorteile. Erstens ist noch immer keine einwandfreie Methode zur quantitativen chemischen Abtrennung des Actiniums bekannt. Die häufig angewendete Ammoniakfällung des

1) B. Boltwood, Amer. Journ. of Science (4) **25**, 269—298, 1908.

1) K. H. Fußler, Phys. Rev. (2) **9**, 142—146, 1917.

2) Nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn Prof. St. Meyer hat er eben auch die Konstanz des Verhältnisses $Ac:U$ untersucht und bestätigt.

Actiniums ist durchaus unzuverlässig[1]). Zweitens besitzt Actinium keine nachweisbare Strahlung und seine Zerfallsprodukte, durch deren Strahlung allein die Bestimmung der abgeschiedenen Actiniummengen erfolgt, sind erst nach 4—5 Monaten im Gleichgewichtszustand vorhanden. Demgegenüber zeigt das Protactinium nach unseren Ergebnissen augenscheinlich gut definierte und reproduzierbare chemische Reaktionen. Außerdem besitzt es eine typische α-Strahlung, die die sofortige Bestimmung der abgeschiedenen Protactiniummenge ermöglicht und sich infolge der langsam erfolgenden Nachbildung des Actiniums nur sehr langsam ändert, so daß kein besonders rasches Arbeiten erforderlich ist.

Als Ausgangsmaterial für die Untersuchungen diente österreichische Pechblende mit einem Urangehalt (Element) von 60,7 Proz. Zunächst wurde das bei der Auffindung des Protactiniums verwendete Verfahren benützt. Es werden einige Gramm Pechblende mit Salpetersäure erschöpfend extrahiert. Dabei lösen sich alle radioaktiven Körper einschließlich des Radiums praktisch quantitativ auf. Die unlösliche Kieselsäure enthält neben minimalen Mengen an Polonium (und eventuell RaE und Uran X) nur das Protactinium. Dieses wurde daraus in der früher beschriebenen Weise[2]) hergestellt. Merkwürdigerweise war die so gewonnene Protactiniummenge viel geringer als sich aus dem Urangehalt der verwendeten Pechblende und einem Abzweigungsverhältnis von 8 Proz. für die Actiniumreihe berechnen ließ, und zwar wurde nur etwa ein Viertel der errechneten Menge erhalten. Zwei Möglichkeiten boten sich für die Erklärung dieses Befundes. Entweder konnte ein Teil des Protactiniums in die Salpetersäurelösung gegangen sein, oder der Prozentsatz der Abzweigung ist in Wirklichkeit beträchtlich geringer als bisher angenommen wurde. Ersterer Fall war zunächst der wahrscheinlichere, und wir haben daher die salpetersaure Lösung der Pechblende auf etwa darin vorhandenes Protactinium untersucht. Tatsächlich ließ sich eine ganz beträchtliche Menge darin nachweisen, aber auch bei deren Berücksichtigung blieb die gefundene Menge noch hinter der errechneten weit zurück. Wollte man aus diesem Befund den Schluß ziehen dürfen, daß tatsächlich der bisher angenommene Wert von 8 Proz. für das Abzweigungsverhältnis zu hoch ist, so mußte er auf verschiedenen unabhängigen Abtrennungswegen überprüft werden.

1) Ein gutes Hilfsmittel zur Kontrolle, inwieweit bei den einzelnen chemischen Operationen die Abscheidung des Actiniums quantitativ erfolgt, würde die Zugabe des mit Actinium isotopen und durch seine Abklingung scharf charakterisierten β-strahlenden Mesothor 2 bieten.

2) O. Hahn u. L. Meitner, diese Zeitschr. **19**, 208—218, 1918.

Wir haben deshalb aus Uranpechblende nach verschiedenen Aufschlußmethoden das Protactinium hergestellt, alle dabei erhaltenen Filtrate und Rückstände verarbeitet und die dabei erzielten Gesamtausbeuten an Protactinium untereinander verglichen.

Es kamen drei verschiedene Aufschlußmethoden zur Anwendung. Erstens Aufschluß mit Natriumbisulfat, zweitens Zersetzung des Minerals durch Flußsäure und Schwefelsäure und drittens die schon erwähnte Auflösung durch Salpetersäure. Im ersten und dritten Fall ist die Hauptmenge des Protactiniums im ungelösten Teil zu erwarten, während beim Aufschluß mit Flußsäure das Protactinium in Lösung geht. Da aber diese Reaktionen möglicherweise nicht quantitativ sind, wurden in allen Fällen Lösungen und Ungelöstes gleichermaßen auf Protactinium verarbeitet. Alle diese Abtrennungsmethoden beruhten auf der Annahme, daß das Protactinium den allgemeinen Reaktionen des Tantals folge. Daher wurde vor jeder Teilverarbeitung dem zu untersuchenden Material eine kleine Menge Tantalsäure, meistens 10—20 mg, zugesetzt und diese dann abgeschieden. Wir unterlassen es, hier auf die chemische Verarbeitung genauer einzugehen, da sie an anderer Stelle ausführlich publiziert wird[1]). Es soll hier nur an einem Beispiel der allgemeine Gang der Untersuchung dargelegt werden, etwa an einem Bisulfataufschluß.

2 g Mineral wurden mit 20 mg Tantalsäure gemischt, mit Natriumbisulfat aufgeschlossen und mit Wasser ausgelaugt. Dabei resultiert ein gelöster und ein ungelöster Teil. Der ungelöste Teil soll das Tantal und damit das Protactinium enthalten. Aus diesem ungelösten Teil wurde nun das Tantal von den anderen Substanzen mittels des früher angegebenen Flußsäure-Schwefelsäureverfahrens abgetrennt. Man erhält dabei einen in Flußsäure unlöslichen Teil und die das Tantal und Protactinium nebst gewissen geringen Verunreinigungen enthaltende Flußsäurelösung. Nach Eindampfen und Abrauchen der Lösung wird das Tantal und Protactinium durch Behandlung mit Königswasser von den Verunreinigungen, die dabei in Lösungen gehen, gereinigt. Genau dem gleichen Prozeß wurde auch der in Flußsäure unlösliche und der in Königswasser gelöste Teil unterworfen, weil ja doch geringe Mengen Protactinium sich bei den anderen Substanzen finden könnten. Eben-

1) Chem. Ber. **52**, 1812—1828, 1919.



so wurde mit der ursprünglichen Bisulfatlösung verfahren. Die Summe aller so erhaltenen Protactiniummengen bestimmt den Protactiniumgehalt des Ausgangsmaterials.

Die Kontrolle, daß die mit dem Tantal abgeschiedene Aktivität tatsächlich nur von Protactinium herrühre, geschah einerseits zunächst durch die Feststellung, daß die beobachteten α-Strahlen die für das Protactinium charakteristische Absorbierbarkeit besaßen. Andererseits wurde die Änderung der Aktivität über längere Zeiten messend verfolgt. Unter Beobachtung entsprechender Vorsichtsmaßregeln gelingt es leicht, das Protactinium frei von radioaktiven Verunreinigungen zu erhalten. Nur geringe Mengen von Polonium wurden manchmal mitgerissen, deren Menge sich aber leicht aus der anfänglichen Aktivitätsabnahme solcher Präparate bestimmen ließ.

Um aus den Aktivitätsmessungen auf das Verhältnis Protactinium : Uran schließen zu können, wurden sehr sorgfältige Vergleichsmessungen ausgeführt. Da wir das Protactinium immer nur mit Tantal gemischt erhielten, konnten naturgemäß zum Vergleich mit Uran nicht dicke Schichten, sondern nur möglichst dünne Schichten verwendet werden, wobei durch Variation der Schichtdicke deren Einfluß ausgeschaltet, d. h. auf die Schichtdicke Null extrapoliert werden mußte.

Die zu untersuchende Schicht wurde in folgender Weise hergestellt. Das Material wurde im Achatmörser unter Chloroform möglichst fein zerrieben und dann mit einem feinen Pinsel auf gewogene Aluminiumbleche von 7,5 cm Durchmesser aufgestrichen. Man erhält so befriedigend gleichmäßige Schichten.

Zunächst wurde Uranoxyd von 2—14 mg Gewicht untersucht. Die Messung geschah in der üblichen Weise in einem α-Elektroskop von 4,5 cm Plattenabstand, so daß die Reichweite sowohl der Uran-α-Strahlen als der des Protactiniums voll ausgenutzt wurde. Es zeigte sich, daß die Aktivität pro Milligramm Substanz bei wachsender Schichtdicke, wie zu erwarten, etwas kleiner wurde. Es ergab sich, daß einem Milligramm Uranelement

$$(UI + UII) \; (= 1{,}178 \text{ mg } U_3O_8)$$

bei der Schichtdicke Null die Aktivität 11,7 (in willkürlichen Einheiten) entspricht.

Da nun die verwendete Pechblende 60,7 Proz. Uran enthielt, so mußte die α-Aktivität von $UI + UII$ aus 1 g Pechblende die Aktivität $607 \times 11{,}7 = 7100$ besitzen.

In gleicher Weise wurde auch für die erhaltenen Protactiniumpräparate der Einfluß der Schichtdicke eliminiert. Dabei haftet den gefundenen Werten insofern eine gewisse Unsicherheit an, als die bei der Verarbeitung der Pechblende auf Protactinium zugesetzten Tantalmengen nicht immer ganz gleich waren. Doch sind die dadurch bedingten Abweichungen klein gegenüber den übrigen unvermeidlichen Ungenauigkeiten der Methode.

Hat nun die aus 1 g Pechblende isolierte Protactiniummenge, unter gleichen Bedingungen wie das Uran gemessen, die α-Aktivität a (auf die Schichtdicke Null extrapoliert), wobei noch die Korrektur auf die verschiedenen Reichweiten angebracht werden muß, so berechnet sich das Abzweigungsverhältnis in Prozenten

$$z = \frac{100 a \cdot 2}{7100}.$$

Der Faktor 2 rührt davon her, daß beim Uran 2 α-Strahlenprodukte gemessen werden, nämlich UI und UII.

Die Korrektur auf die Reichweite geschah in der Weise, daß die Gesamtionisation den Reichweiten direkt proportional gesetzt wurde, was bei den kleinen Unterschieden in den Reichweiten von Uran und Protactinium auch genügt. Für Uran wurde als Reichweite ein Mittelwert von 2,7 cm angesetzt, für Protactinium der von uns früher gefundene Wert von 3,34 cm. Danach sind die für die Aktivität des Protactiniums gefundenen Werte um 18 Proz. zu verkleinern.

Die erhaltenen Resultate sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt. Die erste Spalte enthält die jeweilig verwendeten Mengen Pechblende, die zweite die Methode der Verarbeitung und die dritte die Summe der direkt gefundenen Aktivitäten für Protactinium, in willkürlichem Maße gemessen. Die vierte, die auf die Schichtdicke Null und die mittlere Reichweite des Urans korrigierten Werte. In der letzten Spalte sind die erhaltenen Werte auf 1 g Pechblende reduziert.

Tabelle.

Verwendete Pechblende	Methode	direkt gefundene Aktivität des *Pa*	auf Schichtdicke und Reichweite korr.	pro 1 g Pechblende
2 g	Bisulfataufschluß	261,7	214,7	107,4
2 g	"	271,4	223	111,5
2 g	"	270,7	221,6	110,8
1 g	Flußsäureaufschluß	126,5	103,8	103,8
2 g	"	271,0	222	111
2 g	Salpetersäurelösung	246	201,8	100,9
			Mittel	107,5

Die erhaltenen Einzelwerte lassen erkennen, daß die nach verschiedenen Aufschlußmethoden gewonnenen Mengen Protactinium in guter Übereinstimmung stehen, so daß die Annahme berechtigt erscheint, daß das Protactinium aus dem Ausgangsmaterial ohne nennenswerte Verluste abgeschieden worden ist. Als Mittelwert ergibt sich die Zahl 107,5, der wohl eine Genauigkeit von mindestens 10 Proz. zuerkannt werden darf. Daraus berechnet sich nach dem weiter oben dargelegten, daß das Abzweigungsverhältnis der Actiniumreihe in Prozenten den Wert

$$z = \frac{100 \cdot 107{,}5 \cdot 2}{7100} = 3{,}06 \text{ Proz.}$$

besitzt, also rund 3 Proz.

Dieser Wert ist beträchtlich geringer als der nach dem Boltwoodschen Befund von. Rutherford berechnete Wert von 8 Proz. Man könnte nun einwenden, daß die für das Protactinium angewendeten Abscheidungsverfahren keine quantitativen Ausbeuten liefern. Obwohl es von vornherein unwahrscheinlich ist, daß unsere Methoden, bei der alle Teilprodukte immer wieder verarbeitet wurden, nur etwa ein Drittel des gesamten vorhandenen Protactiniums ergeben sollten, haben wir doch zur Prüfung dieses Punktes einen direkten Kontrollversuch ausgeführt.

Zu diesem Zwecke wurden 2 g Pechblende vor ihrer Aufarbeitung mit einem stark aktiven Protactiniumpräparat versetzt, das wir uns früher aus größeren Mengen Rückständen hergestellt hatten und dessen α-Aktivität durch sorgfältige Messungen festgestellt worden war. Sie hatte in unsern hier verwendeten willkürlichen Einheiten gemessen den Wert 630. Dann wurde das Material in der oben angegebenen Weise durch Aufschluß mit Natriumbisulfat und weitere Behandlung mit Flußsäure und Königswasser auf Protactinium verarbeitet. Das so gewonnene Präparat wies eine Aktivität von 847 auf. Da die im Mittel aus 2 g Pechblende erhaltene direkt gemessene Aktivität nach der obigen Tabelle 262 beträgt, mußte, falls keine nennenswerten Verluste bei der Aufarbeitung auftreten, das Präparat die Aktivität 630+262 = 892 besitzen. Der tatsächlich gefundene Wert 847 weicht davon nur um 5 Proz. ab; damit ist die Möglichkeit ausgeschlossen, daß die Abweichung zwischen dem Boltwoodschen und unserem Wert durch Fehler der Abscheidungsmethoden bedingt sein kann. Man darf sogar aus dem eben besprochenen Versuch schließen, daß unser Mittelwert von 3 Proz. sich wahrscheinlich um weniger als 10 Proz. von dem tatsächlichen Wert unterscheidet.

Daß der Wert des Abzweigungsverhältnisses nur 3 Proz. und nicht, wie bisher angenommen wurde, 8 Proz. beträgt, erleichtert die Herleitung der Actiniumreihe aus der Uranreihe über das Bindeglied Uran Y. Uran Y ist ein vierwertiger Körper, der zu einem ganz geringen Prozentsatz aus Uran I oder Uran II entsteht und bei seiner Umwandlung unter Aussendung von β-Strahlen ein fünfwertiges Element bilden muß. Die Annahme, daß dieses fünfwertige Element eben die Muttersubstanz des Actiniums sei, liegt nahe und ist auch von uns und anderen schon vor der Auffindung des Protactiniums gemacht worden. Schwierigkeiten bot dabei nur der Umstand, daß Antonoff[1]), der Entdecker des Uran Y für das Verzweigungsverhältnis Uran Y : Uran den Wert von etwa 2 Proz. gefunden hatte und wir in sehr guter Übereinstimmung damit für dasselbe Verhältnis den Wert 2,1 Proz. angegeben hatten[2]), während für Ac : Uran bisher der Wert 8 Proz. galt. Diese Schwierigkeit ist durch unseren neuen Befund, daß das Verhältnis Protactinium : Uran und damit auch $Ac \div U$ nur den Wert 3 Proz. besitzt, behoben. Der Unterschied zwischen 2,1 Proz. und 3 Proz. ist nicht von Bedeutung, wenn man berücksichtigt, daß der Prozentsatz für das Uran Y aus Vergleich der in ihrer Geschwindigkeit sehr verschiedenen β-Strahlen des Uran Y mit denen des Urans X gewonnen wurde und eine richtige Reduktion auf gleiche Geschwindigkeit bei der mangelhaften Kenntnis des Zusammenhanges zwischen Ionisation und Geschwindigkeit der β-Strahlen nicht möglich ist.

Durch die nahe Übereinstimmung zwischen dem Prozentsatz $UY : U$ und $Pa : U$ ist also wohl eine neue Stütze dafür gewonnen, daß das UY das Bindeglied zwischen der Uran- und der Actiniumreihe bildet. Die größere Genauigkeit, die unserer Bestimmung des Abzweigungsverhältnisses gegenüber der älteren Boltwoodschen zuerkannt werden darf, gestattet auch mit mehr Wahrscheinlichkeit als bisher den Schluß zu ziehen, daß das UY neben dem Ionium aus dem UII und nicht neben dem Uran X_1 aus dem Uran I entstehe.

Diese Frage, ob die Abzweigung der Actiniumreihe beim Uran I oder beim Uran II stattfinde, ist vorläufig nicht unmittelbar zu entscheiden. Indirekte Beweise dafür, daß die Abzweigung beim Uran II eintritt, sind einerseits nach St. Meyer, v. Heß und H. Paneth[3])

1) G. N. Antonoff, Phil. Mag. (6) **26**, 1058, 1913.
2) O. Hahn u. L. Meitner, diese Zeitschr. **15**, 236 bis 240, 1914.
3) St. Meyer, v. Heß u. F. Paneth, Wien. Ber. **123**, 1459, 1914.

durch die Neigung der Geraden gegeben, die den Zusammenhang zwischen Reichweiten und Zerfallskonstanten der α-strahlenden Produkte der Actiniumreihe darstellt. Diese Gerade ist nämlich der entsprechenden Kurve für die Uran-Radiumreihe nicht parallel, sondern schneidet sie beim Uran *II*, woraus die Verfasser folgern, daß vermutlich vom Uran *II* aus die Actiniumreihe ihren Ursprung nehme. Eine weitere Stütze für diese Annahme bietet die Fajanssche Beziehung zwischen Atomgewicht und Lebensdauer isotoper Elemente. Darnach ist nämlich wahrscheinlich, daß Actinium das Atomgewicht 226 habe, also Protactinium das Atomgewicht 230 und letzteres daher aus dem Uran *II*, dessen Atomgewicht 234 beträgt, entstehen muß. Würde dagegen die Abzweigung beim Uran *I* stattfinden, so würde das Protactinium das Atomgewicht 234 haben, das Actinium daher das Atomgewicht 230. Rechnet man sich aus den beiden möglichen Atomgewichten des Actiniums das Atomgewicht des Endproduktes der Actiniumreihe, des „Actiniumbleies" aus, so ergibt sich im ersten Fall das Atomgewicht zu rund 206, und im zweiten Fall zu rund 210.

Nun hat Hönigschmied für das Atomgewicht des Bleies aus kristallisierter Pechblende aus Morogoro den Wert 206,05 erhalten. Natürlich mußte sein Blei nicht nur das „Uranblei", sondern auch das „Actiniumblei" des Erzes enthalten. Würde daher das letztere das Atomgewicht 210 haben, so müßte selbst bei dem niedrigen Wert des Verhältnisses $Ac : U$ von 3 Proz. der theoretische Wert des Atomgewichtes von Blei aus Pechblende 206,12 sein, also höher als der von Hönigschmied gefundene Wert. Da die Hypothese, daß das Actiniumblei instabil sei, durch keinerlei Beobachtung gestützt werden kann, muß man annehmen, daß das Atomgewicht des Actiniumbleies 206, das des Protactiniums also 230 beträgt und sonach die Abzweigung der Actiniumreihe beim Uran *II* eintritt.

Zusammenfassung.

1. Es wird die relative Aktivität des Protactiniums in Pechblende bestimmt, indem das Protactinium unter verschiedenen Bedingungen abgeschieden und seine α-Strahlung mit der des Urans verglichen wird.

2. Daraus ergibt sich, daß das Abzweigungsverhältnis der Actiniumreihe aus der Uranreihe nur 3,0 Proz. $\pm$ 0,3 beträgt und nicht wie bisher angenommen wurde, 8 Proz.

3. Der kleinere Wert dieses Prozentsatzes steht in guter Übereinstimmung mit der Herleitung der Actiniumreihe aus dem Uran *Y* und gibt befriedigende Unterlagen für die den einzelnen Produkten der Actiniumreihe, einschließlich des Actiniumbleies, zuzuweisenden Atomgewichte.

Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie.

(Eingegangen 16. August 1919.)

Über das Röntgenspektrum von Wolfram.

Von Manne Siegbahn.

Über das Röntgenspektrum des Wolframs liegt schon eine ganze Reihe von Untersuchungen vor. Der Grund dafür ist selbstverständlich der, daß Wolfram das am meisten verwandte Antikathodenmaterial bei technischen Röhren darstellt. Für den technischen Gebrauch solcher Röhren könnte man daher meinen, daß das Linienspektrum des Wolframs eine wesentliche Rolle spielt. Das ist aber im allgemeinen nicht der Fall. Die *L*-Serie des Wolframs ist allzu weich, um irgendwelche Bedeutung zu haben; sie wird schon in der Glaswand des Rohres wesentlich geschwächt. Die *K*-Reihe dagegen erfordert sehr große Härte des Rohres, um in merklicher Intensität hervorzutreten. Überhaupt liegt bis jetzt keine Mitteilung vor, die den Nachweis der Existenz des *K*-Spektrums bei gewöhnlichen gasgefüllten Röhren führt. Doch scheint es nicht ausgeschlossen, daß die neueren, spezielle „Therapie"-Röhren, das *K*-Spektrum von Wolfram erzeugen. Bei den gasfreien Röhren nach Coolidge ist die *K*-Reihe oft untersucht worden und kann vielleicht beim Betrieb mit höheren Spannungen neben dem kontinuierlichen Spektrum in Betracht kommen. Ebenso bei Lilienfeldröhren, wo Lilienfeld und Seemann das noch härtere *K*-Spektrum von Platin nachgewiesen und gemessen haben.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist eine möglichst genaue und vollständige Ausmessung des Röntgenspektrums von Wolfram. Im allgemeinen ist nur die eine oder andere Reihe von den verschiedenen Verfassern untersucht worden, zweitens zeigt ein Vergleich der von verschiedenen Autoren ausgeführten Messungen ziemlich große Unstimmigkeiten. Mit dem von mir konstruierten Präzisionsspektrographen war es jetzt möglich, eine größere Genauigkeit zu erzielen als von den genannten Autoren im allgemeinen erreicht war. Ferner lag es mir wesentlich daran die verschiedenen Reihen (*K*, *L* und *M*) mit vergleichbarer Genauigkeit auszumessen, um dem numerischen und damit dem physikalischen Zusammenhang der

Reihen ein und desselben Stoffes nachgehen zu können. Dabei liegt allerdings die Schwierigkeit vor, daß die verschiedene Härte dieser Reihen auch veränderte Konstruktion der Spektrographen bedingt. Die weichen *L*- und *M*-Reihen könnten sehr gut mit dem von mir früher beschriebenen Vakuumspektrographen untersucht werden. Die *K*-Reihe aber ist mit dem für härtere Strahlen gebauten Spektrographen (beschrieben in dieser Zeitschr. **20**, 251—256, 1919) gemessen worden.

Im folgenden wird über die Resultate bei den *K*- und *L*-Reihen berichtet. Die *M*-Reihe ist mit demselben Apparat von Herrn Wilhelm Stenström ausgemessen worden, worüber in seiner demnächst erscheinenden Doktorarbeit berichtet wird.

K-Reihe.

Zur Erzeugung der *K*-Reihe diente durchweg eine Glühkathode-Therapieröhre der Firma Siemens-Schuckert mit Gleichrichter derselben Firma betrieben. Die Betriebsspannung war etwa 100 Kilovolt. Mit einer Stromstärke von 3 bis 4 Milliamp. waren in erster Ordnung $^1/_2$ bis 1 Stunde, in zweiter etwa 3 Stunden Expositionsdauer nötig, wobei Kalkspat als Gitter benutzt wurde. Die Methodik der Aufnahme ist in der erwähnten Arbeit in dieser Zeitschr. beschrieben worden. Bei sämtlichen Aufnahmen wurden die Linien auf beiden Seiten der Nullinie exponiert.

Genau ausgemessen und berechnet ist die stärkste Linie der Gruppe, die $K\alpha_1$-Linie. Dann ist der Duplettenabstand $\alpha_1 - \alpha_2$ gemessen und berechnet. Die schwächeren β-Linien sind nur auf drei Platten mit größerer Expositionsdauer gut meßbar.

Außer den Aufnahmen mit dem erwähnten Spektrographen sind noch drei Spektrogramme mit einem neuen Präzisionsspektrographen für den mittel harten Bereich aufgenommen. Die Beschreibung dieses Spektrographen, die den Bereich zwischen Vakuum-Spektrographen (für $\lambda > 1{,}0$ Å.-E.) und dem obigen kurzwelligen Spektrographen (für $\lambda < 0{,}5$ Å.-E.) erschließt, wird an anderer Stelle erfolgen. Diese Aufnahmen mit dem neuen Spektrographen tragen die Nummern N. P. 32—34. Die größere Genauigkeit dürfte innerhalb dieses Gebietes der kurzwellige Spektrograph geben. Die schöne Übereinstimmung der drei Platten N. P. sind daher übertrieben und als zufällig zu betrachten.

In folgender Tabelle sind die Spektrogramme in ihrer Zeitfolge aufgeführt.

Die drei Gruppen in der Tabelle sind mit verschiedenen Kristallexemplaren erhalten. Daß die Gruppen entschieden verschiedene Mittelwerte geben, kann aber nicht gut in einer Änderung der Gitterkonstante gesucht werden. Sämtliche

$K\alpha_1$-Linie des Wolframs.

Datum	Bez.	Refl.-Winkel Kalkspat	λ X.E.
12./12. 18	γ 41	1°58′31,5″	208,82
12./12. 18	γ 42	1°58′31,3″	208,82
13./12. 18	γ 43	3°57′ 8,6″ (2. Ordnung)	208,79
7./12. 18	γ 48	1°58′28″	208,72
12./3. 19	W. 2	1°58′33″	208,87
13./3. 19	W. 3	1°58′29″	208,75
12./3. 19	N.P. 32	1°58′27″	208,71
13./3. 19	N.P. 33	1°58′29″	208,76
16./3. 19	N.P. 34	1°58′28″	208,73
4./4. 19	W. 4	1°58′40″	209,08
5./4. 19	W. 5	1°58′41″	209,10
6./4. 19	W. 6	1°58′33″	208,87
8./4. 19	W. 7	1°58′40″	209,08
		Medium	**208,85** X.E.

Wellenlängen sind mit $\log d = 0{,}7823347$ berechnet. Zur Beurteilung der erreichbaren Genauigkeit bei einem Röntgenspektrogramm sind die folgenden Ausmessungen des Duplettenabstandes aufklärend. An derselben Platte können die Duplettabstände links und rechts der Nulllinie um 0,02 mm verschieden sein, während z. B. die verschiedenen Werte aus W_3 und W_4 bzw. 208,75 und 209,08 durch eine Fehlorientierung jeder Linie um 0,03 mm erklärt wurden. Ich bin daher geneigt zu vermuten, daß die Grenze der Genauigkeit hier wesentlich durch zufällige Strukturfehler des Kristalls bedingt ist.

Wie oben erwähnt, ist die α_2-Linie durch den Duplettenabstand $\alpha_1 - \alpha_2$ bestimmt worden. An fünf Platten ist dieser Abstand sowohl links wie rechts von der Nullinie ausgemessen. Nur eine einzige Aufnahme der zweiten Ordnung ist verwertet, zwar ist der Abstand hier etwa verdoppelt, aber die herabgesetzte Schärfe der Linien ist hier nachteilig.

Duplettenabstand $\alpha_1 - \alpha_2$.

Platte	mm	
γ 47	0,385	
γ 48	0,400	
„	0,367	
γ 43 (2. Ordn.)	0,77	
γ 41	0,376	
W. 3	0,391	
„	0,372	
W. 4	0,373	
„	0,403	
W. 5	0,398	
„	0,412	
W. 6	0,402	
„	0,412	
Im Mittel	0,391	
$\Delta\lambda$	4,68	1. Ordn.
$\Delta\lambda$	4,65	2. Ordn.

Mittel $\Delta\lambda = 4{,}67$ X.E.

Der Duplettenabstand beträgt demnach hier 4,67 X-Einheiten (10^{-11} cm). Mit dem aus dem Wasserstoffmodell berechneten Wert verträgt sich dieser schlecht, was aber bei diesen schweren Atomen leicht verständlich ist. Als Wellenlängenwert für $K\alpha_2$ bekommen wir dann **213,52 X.E.**

Schließlich seien noch die Messungen der schwächeren Linien der K-Gruppe angegeben:

Platte	β_1-Linie	β_2-Linie
W. 3	1°44′27″	—
W. 6	1°44′48″	1°41′45″
W. 2	1°44′39″	1°41′52″
Mittel	1°44′38″	1°41′49″
λ X.E.	184,36	179,40

Zusammenfassend haben wir somit für die K-Serie des Wolframs gefunden

$$K\alpha_2 = 213{,}52 \text{ X.E.}$$
$$K\alpha_1 = 208{,}85 \text{ X.E.}$$
$$K\beta_1 = 184{,}36 \text{ X.E.}$$
$$K\beta_2 = 179{,}40 \text{ X.E.}$$

Die im vorstehenden benutzten Aufnahmen sind aufgenommen von Herrn Mag. Edv. Jönsson (γ 41—48), von Herrn Lic. K. A. Wingärdh (W. 2—7) und von Herrn Lic. A. B. Leide (N. P. 32—34), wofür ich diesen Herren hier meinen besten Dank sage.

In folgender Tabelle wird eine Zusammenstellung der von verschiedenen Autoren gewonnenen Wellenlängenwerte der K-Reihe gegeben:

	de Broglie	Hull und Rice	Ledoux-Lebard u. Dauvillier	Elmer Dershem	Siegbahn
$K\alpha_2$	} 203	218	212,8	212,4	213,52
$K\alpha_1$		214	205,3	207,6	208,85
$K\beta_1$	177	192	182,6	183,4	184,36
$K\beta_2$			176,8	178,4	179,40

L-Reihe.

Die Untersuchung der L-Reihe ist gemeinschaftlich mit Herrn Assistent Nils Stensson ausgeführt worden.

Die spektrographischen Anordnungen waren ganz dieselben wie bei den Präzisionsmessungen, welche vom Verf. in den Ann. d. Phys. d. J. publiziert worden sind. Betreffend der Einzelheiten sei auf diese Arbeit hingewiesen. Als analysierende Kristalle wurde teils Steinsalz, teils Kalkspat benutzt. Die stärksten Linien α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1 wurden je für sich genau bestimmt, und zwar jede Linie (außer γ) sowohl mit Kalkspat als auch mit Steinsalz, in jedem Falle aus zwei Aufnahmen.

Zusammenfassend waren die Resultate dieser Aufnahmen wie folgt:

		$L\alpha_1$	$L\alpha_2$
Kalkspat	Pl. 5	14° 4′33,6″	14°11′ 4,3″
„	Pl. 6	14° 4′37,8″	14°11′ 5,4″
Steinsalz	Pl. 8	15°10′40,2″	15°17′36,6″
„	Pl. 9	15°10′41,4″	15°17′40,4″

		$L\beta_1$	$L\beta_2$
Kalkspat	Pl. 2	12°11′24,5″	11°49′48,0″
„	Pl. 4	12°11′19,6″	11°49′45,7″
Steinsalz	Pl. 12	13° 8′11,0″	12°44′46,0″
„	Pl. 13	13° 8′19,7″	12°44′59,7″

		$L\gamma$
Steinsalz	Pl. 27	11°13′32,4″
	Pl. 28	11°13′31,8″
	Pl. 29	11°13′31,8″
	Pl. 30	11°13′19,8″
	Mittel	11°13′29,0″

Berechnet man die entsprechenden Wellenlängen unter Benutzung der von mir früher bestimmten Gitterkonstanten von Steinsalz $\log 2d = 7503541$ und Kalkspat $\log 2d = 7823347$, so bekommt man aus:

Pl.			Mittel
Pl. 5,6	$L\alpha_2$	1484,52	
Pl. 8,9	$L\alpha_2$	1484,51	1484,52
Pl. 5,6	$L\alpha_1$	1473,44	
Pl. 8,9	$L\alpha_1$	1473,52	1473,48
Pl. 2,4	$L\beta_1$	1279,15	
Pl. 12,13	$L\beta_1$	1279,19	1279,17
Pl. 2,4	$L\beta_2$	1241,92	
Pl. 12,13	$L\beta_2$	1241,90	1241,91
Pl. 27 — 30	$L\gamma_1$	—	1095,53

Da hier jeder zweite Wert mit Steinsalz und Kalkspat erhalten ist, zeigt die gute Übereinstimmung auch, daß die von uns benutzten Gitterkonstanten richtig gewählt sind.

Von den so genau bestimmten Linien aus sind dann die schwächeren gruppenweise ausgemessen. Das gesamte Wolframspektrum ist dabei in 3 Gebiete geteilt und photographisch aufgenommen. Einige Linien waren zu schwach, um im Komparator ausgemessen zu werden; diese sind mit aufgelegtem Maßstab in Zehntel-Millimeter gemessen. Ihre Wellenlängenwerte sind in folgender Tabelle mit einer Ziffer weniger angegeben als die anderen. In der zweiten Kolumne der Tabelle sind die Werte von ν/R (R = Rydbergsche Konstante) eingetragen, in

der dritten folgen die Bestimmungen von A. H. Compton aus 1916. Die Wellenlängen sind mit den obigen Gitterkonstanten von Kalkspat umgerechnet, in der vierten Kolumne finden sich die neuen Messungen von E. Dershem:

Die L-Reihe des Wolframspektrums
(Linien mit [ ] zweifelhaft).

Bez.	λ in X.E.	$\frac{\nu}{R}$	λ Compton	λ Dersh.
ε, l	1675,05	544,02		
α', α_2	1484,52	613,85	1484,6	1483
α, α_1	1473,48	618,45	1473,6	1472
η, η	1417,7	642,78	—	1416
υ, β_4	1298,74	701,66	1298,7	1298
—	[1287,1]	708,03	—	1287
β, β_1	1279,17	712,39	1279,2	1278
φ, β_3	1260,00	723,23	1260,2	1259
γ, β_2	1241,91	733,76	1242,1	1242
—	[1239,5]	735,29	—	—
—	[1220,5]	746,63	1218,7	1220
—	[1211,8]	752,00	—	1210
ζ, β_5	1203,1	757,43	—	—
—	[1128,4]	807,57	—	1129
δ, γ_1	1095,53	831,81	1096,5	1095
ϑ, γ_2	1065,84	854,98	1065,3	1065
χ, γ_3	1059,65	859,97	1058,4	1059
ψ, γ_4	1026,47	887,77	1025,1	1025

Die Übereinstimmung zwischen unseren Werten und denen von A. H. Compton ist überraschend gut. Compton schätzt nämlich die Genauigkeit seiner Winkelmessungen auf 0,5′, was in Prozenten der Wellenlängen etwa 0,07 Proz. entspricht. Unsre Werte stimmen aber innerhalb 0,01 bis 0,02 Proz. überein. Dershem hat später Messungen publiziert, die zwar nicht so genau sind, bei denen aber eine Reihe schwächerer Linien gefunden ist. Die Linien l und β_5 sind Dershem entgangen. Ob die übrigen Linien, die im allgemeinen auch von mir wieder gefunden sind, wirklich dem Wolfram angehören, steht nicht fest. Außer den in der Tabelle eingetragenen Linien finden sich bei Dershem noch drei sehr schwache Linien 1177, die vielleicht von Blei herrühren ($L\alpha_1$), 1071 und 1043.

Bekanntlich hat Sommerfeld die L-Reihe in zwei Gruppen mit konstanten Frequenzdifferenzen geteilt. Die jetzt vorliegenden genauen Messungen gestatten eine Nachprüfung dieser Gesetzmäßigkeit, die eine bemerkenswerte Tatsache entschleiert. Bilden wir nämlich die fraglichen Frequenzdifferenzen, beginnend am langwelligeren Ende des Spektrums, so bekommen wir:

$$\varepsilon - \eta = l - \eta = 98{,}76,$$
$$\beta - \alpha' = \beta_1 - \alpha_2 = 98{,}54,$$
$$\delta - \gamma = \gamma_1 - \beta_2 = 98{,}05,$$
$$\delta - \zeta = \gamma_1 - \beta_5 = 97{,}55.$$

Wie diese Werte zeigen, sind die Frequenzdifferenzen nicht vollkommen konstant, sondern nehmen mit abnehmender Wellenlänge ab.

Lund, Physikalisches Institut der Universität. Juni 1919.

(Eingegangen 2. Juli 1919.)

Über durch rotierende lineare Körper hervorgerufene Flüssigkeitsströmungen.

Von P. Metzner.

Eins der interessantesten mechanischen Probleme des lebenden Protoplasten ist die Frage der Fortbewegung einzelliger Organismen durch „Geißeln", mehr oder weniger lange fädige Gebilde, die einzeln oder in Büscheln meist an den Polen des in der Regel oblong gestalteten Körpers sitzen und durch ihre lebhafte Tätigkeit den Organismus entweder vor sich her treiben oder nach sich ziehen. Das Studium dieser Gebilde im Leben ist außerordentlich erschwert durch ihre Feinheit und die Schnelligkeit ihrer Bewegung. Deshalb war man meist auf die Beobachtung abgetöteten Materials oder in ihrer Bewegung verlangsamter Organismen (durch Zusatz schleimiger Stoffe oder Temperaturerniedrigung) angewiesen und wohl über die morphologischen Verhältnisse ziemlich genau unterrichtet, während die Kenntnis der Bewegungsvorgänge recht lückenhaft blieb — um so mehr, als durch die oben erwähnten Eingriffe Änderungen sowohl der physikalischen wie der physiologischen Bedingungen eintreten, die unter Umständen zu Trugschlüssen Veranlassung geben können. Gleichwohl ist schon frühzeitig von der Betrachtung der in ihrer Bewegung verlangsamten Geißeln und mechanischen Überlegungen ausgehend versucht worden, Theorien über die Mechanik der Geißelbewegung aufzustellen. Bütschli[1]), dessen Ansicht bis jetzt die meiste Anerkennung gefunden hat, nimmt an, daß die Geißeln bei ihrer Rotation (es werden in der Regel Rotationsfiguren umschrieben) stets die Gestalt einer Spirale beibehält. „Es bedarf keiner besonderen Erörterungen, daß durch diese spiralwellige Bewegung der Cilie oder Cilien in analoger Weise wie durch die Umdrehung einer Schiffsschraube eine Vorwärtsbewegung und zugleich eine Komponente gewonnen werden kann, die den Schwärmer um seine eigene Achse zu drehen sucht; ebenso wie bei der Schiffsschraube wird aber auch durch Wechsel der Umdrehungsrichtung der Geißeln bewirkt werden können, daß der

1) Bütschli, Die Protozoen in Bronns Klassen und Ordnungen des Tierreichs, Bd. I, Abs. 2 (1889), S. 857.



motorische Apparat den zu bewegenden Körper nach sich zieht oder vor sich her treibt"[1]). Fig. 1 gibt das Schema der Kräfteverteilung nach Bütschli wieder[2]). Der beliebige Punkt a der Geißel erfährt bei seiner Bewegung einen Widerstand, der sich in dem Reaktionsdruck R äußert, der in zwei zueinander rechtwinklige Komponenten zerlegt werden kann, von denen die eine (S) die Fortbewegung, die andere (D) die rückläufige Drehung des Körpers verursacht. Eine wirklich rotierende Schraube ist physiologisch nicht denkbar; der gleiche Effekt wird jedoch erreicht, wenn — wie Bütschli annimmt — eine spiralig über die Geißel hinziehende „Kontraktionslinie"[3]) besteht, die während der Geißeltätigkeit um die Geißel herumwandert und so aktiv die rotierende Schraube erzeugt. In neuerer Zeit ist nun ein genaueres Studium der Geißelbewegung (die Bewegung ist so rasch, daß meist nur der Schwingungsraum als Ganzes erscheint) durch die modernen Methoden der Dunkelfeldbeleuchtung ermöglicht worden. Besonders eingehend haben sich mit den Formen der Geißelbewegung Reichert[4]), Ulehla[5]) und Buder[6]) beschäftigt. Während Reichert und Buder auf Grund ihrer Beobachtungen an Bakterien sich der Theorie Bütschlis anschlossen, ist Ulehla geneigt, ihr nur die Bedeutung eines Spezialfalles beizumessen. Aus der Erwägung heraus, daß die Schraubengestalt auch passiv als Folge des Wasserwiderstands entstehen kann, wenn der rotierende Körper elastisch ist, ergab sich die Notwendigkeit, die Strömungsverhältnisse in der Nähe rotierender geißelähnlicher starrer und elastischer Körper zu untersuchen. Dabei wurde die Betrachtung ausgedehnt auf einfachere Bewegungsformen, die sich dann als weit wichtiger erwiesen.

I. Theoretisches.

Die sich bietenden Erscheinungen mathematisch genau zu verfolgen, lag außerhalb des Rahmens meiner Untersuchung, ist wohl auch für die in Betracht kommenden speziellen Verhältnisse nicht ohne weiteres durchzuführen.

1) W. Pfeffer, Handbuch der Pflanzenphysiologie II (1904), S. 706.

2) Die Bezeichnungen sind für die späteren Betrachtungen gegen das Original verändert.

3) Es ist mehrfach versucht worden, den Begriff der „Kontraktionslinien" durch konkretere Vorstellungen zu ersetzen. Diese Theorien sind aber für unsere Betrachtung hier ohne Belang.

4) K. Reichert, Die Sichtbarmachung der Geißeln und die Geißelbewegung der Bakterien. Zentralbl. f. Bakt. Abt. I Bd. 51 (1909), S. 14.

5) Vl. Ulehla, Ultramikroskop. Unters. über Geißelbewegung. Biolog. Zentralbl. Bd. 31. (1911), S. 645.

6) J. Buder, Zur Kenntnis des Thiospirillum jenense. Jahrb. f. wiss. Botanik Bd. 56 (1915), S. 529.

Die verschiedenen Formeln für den Widerstand schmaler Flächen lassen sich wegen der mannigfachen Störungen des Strömungsverlaufes nicht übertragen. Trotzdem dürften die folgenden ganz elementaren Betrachtungen, die sich bezüglich des Widerstandes zur Bewegungsrichtung geneigter Körper an die Auffassung Newtons[1]) anlehnen, den Verhältnissen wenigstens qualitativ gerecht werden.

Der Widerstand W eines dünnen starren zylindrischen Körpers, der mit mittlerer Geschwindigkeit in einer realen Flüssigkeit senkrecht zu seiner Längserstreckung fortbewegt wird, kann in erster Annäherung durch

$$W = f(\varrho, \mu, c) \cdot v^2 = k \cdot v^2$$

dargestellt werden[2]), wo v die Translationsgeschwindigkeit, ϱ die Dichte, μ die innere Reibung und c einen durch Dimensionen und Oberflächeneigenschaften des bewegten Körpers bedingten Faktor bezeichnet. Wird ein Rotationskörper umschrieben mit der Winkelgeschwindigkeit ω, so besitzt ein Punkt im Abstand r von der Drehungsachse eine Geschwindigkeit $r = r\omega$. Wird einfach ein Kegelmantel umschrieben, so erteilt jeder Punkt der Geißel einer bestimmten Flüssigkeitsmenge diese Geschwindigkeit in tangentialer Richtung. Es muß also ein Abwandern von Flüssigkeit nach außen stattfinden, hauptsächlich in der Nähe der Kegelbasis. Nehmen wir einfach an, daß die Geißel von der Länge l die Flüssigkeit beiseite schiebt[3]), so wird in der Zeiteinheit eine Wassermenge $M = c \cdot \omega \cdot l^2 \sin\beta$ abströmen, und wenn die gesamte Menge durch den Querschnitt der Kegelbasis ($q = \pi \cdot l^2 \sin^2\beta$) ersetzt werden muß, so erhält

1) J. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica (1686) Lib. II, Sect. III, VI. Die von N. aufgestellten Formeln des Widerstandes schiefgestellter Flächen gelten zwar nicht bei kleinen Neigungswinkeln und breiten flügelartigen Flächen (vgl. z. B. Bossut, Nouvelles expériences sur les fluides, Paris 1777), nähern sich dagegen den tatsächlichen Versuchsergebnissen bei schmalen Flächen, deren längere Seite in der Bewegungsrichtung verläuft. Bei den hier betrachteten Verhältnissen dürften die Abweichungen nicht beträchtlicher sein als bei den neueren theoretischen Ableitungen. Dafür sprechen z. B. auch die Messungen des Auftriebes in Luft von Wachsmuth am Königschen Instrumentarium (diese Zeitschr. 13, 1015, 1912.

2) Die von K. Przibram (Sitz.-Ber. d. K. Akad. d. Wiss. Wien, 122, II a, 1913) ermittelte Formel für den Reibungswiderstand rotierender Stäbe in zähen Flüssigkeiten gibt den Widerstand als lineare Funktion der Winkelgeschwindigkeit wieder auf Grund von Messungen bei sehr geringen Winkelgeschwindigkeiten. Es ist zu vermuten, daß bei höheren Drehgeschwindigkeiten sich die Beziehung einer quadratischen Funktion nähern wird, wie das in ähnlicher Weise für den freien Fall von sehr kleinen Kugeln in zähen Flüssigkeiten nachgewiesen werden konnte (H. S. Allen, Phil. Mag. [5] 50, 323, 519, 1900).

3) Unter Vernachlässigung der Vorgänge im Bewegungsschatten des Körpers.

der dort auftretende Flüssigkeitsstrom die Geschwindigkeit

$$v = \frac{M}{q} = \frac{c}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\sin \beta}, \tag{2}$$

wobei β den Winkel des Mantelstrahls mit der Rotationsachse bezeichnet. Dieser Strömung entspricht eine Zugkraft, die zu einer Fortbewegung eines den rotierenden Körper als Geißel tragenden freibeweglichen Körpers mit vorausgehender Geißel führen müßte mit um so größerer Geschwindigkeit, je schlanker der Schwingungsraum ist[1]). Infolge der Reibung nehmen bald größere Flüssigkeitsmengen an der Rotation teil, deren Winkelgeschwindigkeit mit der Entfernung rasch abnimmt. Ist die mittlere Geschwindigkeit ω', so können wir die Vorgänge in der Nähe des rotierenden Körpers so betrachten, als ob die Flüssigkeit in Ruhe sei und der Körper mit der Geschwindigkeit $\omega - \omega'$ sich bewege. Unsere allgemeinen Betrachtungen behalten demnach auch dann ihre Gültigkeit[2]).

Für den Fall, daß die Geißel spiralig gekrümmt ist (s. Fig. 1), können wir die Größe des

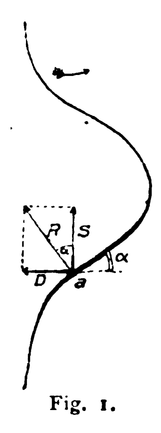


Fig. 1.

Reaktionsdruckes R ableiten, wenn wir das Auftreffen der Wasserteilchen als unelastischen Stoß auffassen (Newton). Wir erhalten dann, wenn α die Steigung der Geißelschraube bezeichnet,

$$R = a \cdot v^2 \cdot \sin^2 \alpha,$$

und der in Richtung der Rotationsachse wirkende Vortrieb S hat die Größe

$$S = a \cdot v^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha. \tag{3}$$

Der Wirkungsgrad ist demnach ein Maximum für $\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$, entsprechend einem Neigungswinkel α von $\pm 54^0 44' 7''$. Abgesehen davon, daß wir eine strenge Gültigkeit des Winkelwertes nicht erwarten können[1]), dürfen wir doch aus der Betrachtung als wesentlich entnehmen, daß sowohl ganz flache wie sehr steile Schrauben geringe Wirkung haben müssen.

Die horizontale Komponente $D = a v^2 \sin^3 \alpha$ hemmt die Bewegung in horizontaler Richtung und unterstützt so die gegenläufige Rotation des frei beweglich gedachten Körpers, der die Spirale als Lokomotionsorgan trägt. (Selbst bei Abwesenheit jeder Reibung muß eine derartige Rotation ja schon aus dem Prinzip der Erhaltung der Flächenräume gefolgert werden — eine Selbstverständlichkeit, deren aber in der einschlägigen Literatur nirgends gedacht wird.)

Wir gehen zur Betrachtung der Besonderheiten über, die elastische Stäbe bieten. Der Stab von der Länge l sei an einem Ende so befestigt, daß seine Längsachse senkrecht zur Bewegungsrichtung steht. Seine Dichte sei gleich der der umgebenden Flüssigkeit. Während der Bewegung wird er infolge des Widerstandes nach Maßgabe der ihm innewohnenden Elastizität durchgebogen. Da alle Punkte die gleiche Geschwindigkeit besitzen, können wir bei kleinen Geschwindigkeiten den Stab wie einen Träger betrachten, dessen Last gleichmäßig auf seine Länge verteilt ist. Die Gleichung der elastischen Linie können wir dann allgemein schreiben:

$$y = p \cdot W \cdot l^2 \left(x - \frac{x^4}{4 l^3} \right).$$

Für einen mit der Winkelgeschwindigkeit ω im Abstand r von der Drehungsachse rotierenden Stab berechnet sich daraus der Winkel α mit der Bewegungsrichtung im Punkte x, y daraus zu

$$\cos \alpha = p \cdot k \cdot r^2 \omega^2 l^2 \left(1 - \frac{x^3}{l^3} \right). \tag{4}$$

Es muß demnach bei der Rotation eine Schraubenform resultieren, deren Steigung bei Zunahme der Winkelgeschwindigkeit und des Abstandes von der Drehungsachse geringer wird. Die stärkste Durchbiegung liegt in der Nähe des Befestigungspunktes.

An der Gestaltung des Schwingungsraumes sind noch andere Kräfte beteiligt. Die Zentrifugalkraft tritt in ihrer Wirkung bei den in Frage kommenden geringen Dimensionen und kleinen Massen gegenüber den durch Reibung bedingten Kräften zurück. Um so größeren Einfluß besitzt eine andere Wirkung der Rotation. Der rotierende zylindrische Draht, dessen Halb-

1) Dieses Verhalten wird bei kleinen Winkeln β durch andere Einflüsse derart modifiziert, daß bei einem bestimmten kleinen Winkel ein Maximum der Wirkung eintritt.

2) Auf einige die Turbulenzprobleme berührende Einzelheiten komme ich bei Besprechung der Versuche noch kurz zurück.

1) Nach den experimentellen Erfahrungen ist

$$a v^2 \sin^2 \alpha < R < a v^2 \sin \alpha.$$

Im letzteren Grenzfall würde S ein Maximum bei $\alpha = 45^0$ ergeben.

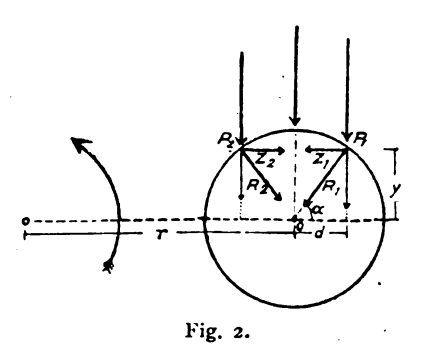


Fig. 2.

messer a sei, kreise im Abstand r um die Achse O (s. Fig. 2). Die Geschwindigkeit des Punktes P_1 ist dann

$$v_1 = \omega \sqrt{(r+d)^2 + y^2}.$$

Ihr entspricht ein Normaldruck R_1 mit der zentripetal gerichteten Komponente z_1, deren Größe einer Funktion des Winkels α und dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist:

$$z_1 = cf(\alpha)v_1^2 = cf(\alpha)\omega^2[(r+d)^2 + y^2].$$

Die zentrifugal gerichtete Komponente des im symmetrisch gelegenen Punkte P_2 angreifenden Normaldruckes R_2 ist (da α in beiden Fällen die gleiche Größe hat) entsprechend:

$$z_2 = -cf(\alpha)v_2^2 = -cf(\alpha)\omega^2[(r-d)^2 + y^2].$$

Das Drehmoment der Kraft $(z_1 + z_2)$ am Arme y beträgt dann

$$m = (z_1 + z_2)y = cf(\alpha)\omega^2[(r+d)^2 - (r-d)^2]y$$
$$= cf(\alpha)\omega^2 4rdy.$$

Ersetzen wir d und y durch $a \cos \alpha$ bzw. $a \sin \alpha$, so ist

$$m = 4cr\omega^2a^2f(\alpha)\cos\alpha\sin\alpha = 4cr\omega^2a\varphi(\alpha)$$

und das Gesamtmoment der an der Vorderseite des Querschnittes entstehenden Kräfte beträgt

$$M = 4cr\omega^2a^2\sum_{0^\circ}^{90^\circ}\varphi(\alpha) = 4cr\omega^2a^2C. \quad (5)$$

Für die Rückseite ergibt sich ein analoger Ausdruck mit gleichem Drehungssinn. Der Ausdruck $\sum_{0^\circ}^{90^\circ}\varphi(\alpha)$ ist von der Winkelgeschwindigkeit und der Entfernung von der Rotationsachse unabhängig und für den betreffenden Körper als konstant anzusehen[1]). Die Folge dieses Drehmomentes ist ein Ausweichen des Körpers nach der Seite des geringeren Widerstandes, also nach der Rotationsachse zu. Die Wirkung muß um so auffälliger sein, je größer das Drehmoment im Verhältnis zum mittleren Widerstand $W_r (= 2ac\omega^2r^2)$

1) Streng genommen ist ja auch $f(\alpha)$ von der Geschwindigkeit abhängig.

$$\frac{M}{W} = \frac{4cr\omega^2a^2C}{2acr^2\omega^2} = 2C \cdot \frac{a}{r}. \quad (6)$$

So muß z. B. der Schwingungsraum eines kurzen einen Kegelmantel beschreibenden Körpers (bei genügender Geschwindigkeit, um die zur Überwindung der elastischen Kräfte erforderliche absolute Energie zu schaffen) von der Spitze nach der Basis zu fortschreitend schlanker werden, bis schließlich der Stab in der Drehungsachse selbst rotiert. Ist — mit Rücksicht auf die natürlichen Verhältnisse — die Geißel an der Insertionsstelle als verhältnismäßig starr und der Winkel, den sie mit der Achse bildet, als unveränderlich zu betrachten, so kann die axiale Stellung nicht erreicht werden; die Geißel wird sich vielmehr in mehr oder weniger flachen Bogen (je nach ihren elastischen Eigenschaften) der Achse anschmiegen. Wegen der Verminderung der Reibungswiderstände geht damit bei konstanter treibender Kraft eine Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit parallel.

II. Versuchsanstellung.

Die zu den Versuchen benutzten Drähte waren unter Zwischenschaltung eines kurzen biegsamen Zwischenstückes direkt an der Achse eines kleinen senkrecht über dem Versuchsgefäß montierten Schwachstromelektromotors befestigt und durch ein Glasrohr (dessen untere Öffnung bis auf passende Weite zugeschmolzen wurde) bis zur Mitte des Gefäßes isoliert geführt. Dem herausragenden Ende wurde dann die gewünschte Form gegeben[1]). Das Versuchsgefäß selbst wurde so groß gewählt, daß ein störender Einfluß der Gefäßwände nicht auftrat (meist 26 × 30 × 30 cm). Einige Versuche wurden auch mit horizontaler Anordnung der Rotationsachse durchgeführt. Zur Führung des horizontalen wie des vertikalen Teiles der Achse in der Nähe der Gefäßwand dienen wieder Glasröhren. Beide Teile sind durch ein Stück einer dünnen biegsamen Welle verbunden. Störungen durch das rotierende freiliegende Knie traten nicht auf, so daß von einer völligen Abdeckung abgesehen werden konnte.

Zur Sichtbarmachung der Stromlinien im Innern der Flüssigkeit bediente ich mich der von Zenneck[2]) vorgeschlagenen Abänderung der

1) Dadurch werden störende Wirbelbildungen in der Nähe der Oberfläche vermieden. Außerdem nähert sich die Anordnung den natürlichen Verhältnissen, was der unbeweglichen dicken Führung der Körper des Organismus entspricht. Der Einfluß der Führung ist bei in ihrer Nähe rotierender „Geißel" ziemlich beträchtlich.

2) J. Zenneck, Demonstration und Photographie von Strömungen im Innern einer Flüssigkeit. Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 695, 1914.

Ahlbornschen Versuchsmethodik[1]). Die total reflektierenden kleinen Gasbläschen werden im Versuchstrog selbst elektrolytisch erzeugt (220 Volt, Vorschaltwiderstand 300 Ω), die Beleuchtung erfolgt annähernd senkrecht zur Beobachtungsrichtung durch Bogenlicht, das den Kondensor parallel verläßt, vor dem eine bewegliche Schlitzblende angebracht ist. So durchsetzen nur ganz schmale „Lichtplatten" den Trog, so daß dann, wenn die Gasentwicklung unterbrochen ist und sich das Wasser etwas geklärt hat, wundervoll scharf gezeichnete Strömungsbilder der beleuchteten Flüssigkeitsschichten entstehen. Zur Vermeidung von Reflexen werden die dem Beschauer und der Lichtquelle abgewandten Innenseiten des Glastroges mit schwarzem matten Karton bzw. Naturpapier verkleidet.

Um die Gestaltsveränderungen der elastischen Körper während der Rotation zu verfolgen, wurden photographische Aufnahmen der Schwingungsräume sowie Momentphotographien ($^1/_{100}$ sec) im durchfallenden Licht angefertigt. Zur subjektiven Beobachtnng bediente ich mich einer Art stroboskopischer Methode. An die Rückwand des Glastroges wurde eine Mattscheibe befestigt und in einiger Entfernung dahinter eine sehr intensiv leuchtende Geißlerröhre angebracht, die mit einem kleinen Funkeninduktor betrieben wurde, dessen Unterbrecher in weiten Grenzen reguliert werden konnte. So ließ sich jederzeit die Bewegung zu scheinbarem Stillstand bringen.

III. Versuche mit starren Körpern.

1. Gerade Drähte. (Messingdraht 1 mm; freier Teil 4 cm, 12—15 Umdrehungen pro Sekunde).

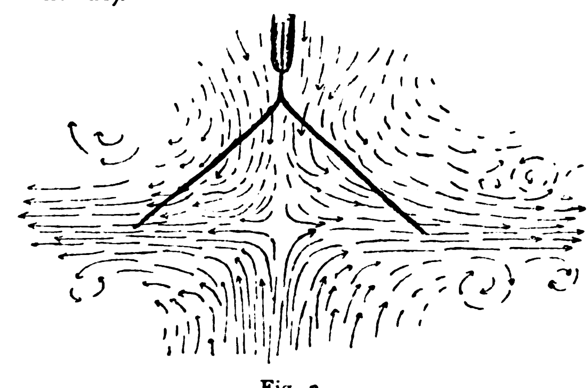


Fig. 3.

a) $\beta = 45^0$ (Fig. 3), Maximum der tangentialen Abwanderung an der Kegelbasis. Es bildet sich eine ziemlich scharf begrenzte, von mehr oder weniger zahlreichen Wirbeln begleitete Schicht größter Bewegung[1]) aus. Der Zustrom erfolgt sowohl von der Spitze als von der Basis her, hier etwas intensiver.

b) $\beta = 20^0$ (Fig. 4). Zone der Abwanderung bis fast zur Mitte des Kegels verschoben,

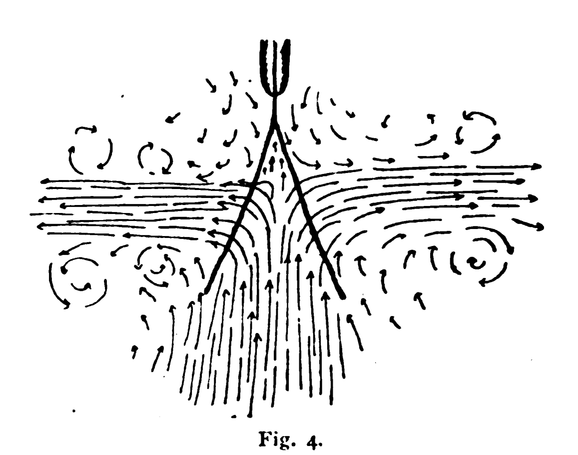


Fig. 4.

1,5 cm breite, gut abgesetzte Scheibe. Zustrom fast ausschließlich von der Basis und den untersten Teilen des Kegelmantels her; Zugwirkung anscheinend bedeutend.

Um wenigstens eine annähernde Vorstellung von der Größe des auftretenden Zuges zu bekommen, wurden einige provisorische Messungen[2]) gemacht. Ein dünnwandiges Glasrohr von 4 mm lichter Weite wurde U-förmig gebogen und in das Versuchsgefäß versenkt. Die Öffnung des kürzeren Schenkels befand sich 5 mm unterhalb der Kegelbasis genau in Verlängerung der Rotationsachse. Der lange Schenkel lag der Vorderwand des Glastroges an. Die Bewegung des Meniskus in der Röhre wurde mit einem Horizontalmikroskop mit Okularteilung bei schwacher Vergrößerung verfolgt ($n = 12$, Länge des Drahtes 5 cm).

Winkel β	Senkung des Meniskus
10^0	0,15 mm
15^0	0,46 „
20^0	0,95 „
23^0	0,98 „
30^0	0,58 „
35^0	0,46 „
45^0	0,24 „
50^0	0,19 „
70^0	0,18 „

1) Ahlborn, Jahrb. d. schiffsbautechn. Ges. 5, 417, 1904.

1) Diese sprunghaften Geschwindigkeitsdifferenzen entsprechen m. E. dem Turbulenzgebiet III der Bezeichnungsweise von Sorkau (Über den Einfluß von Temp., spez. Gew. u. chem. Natur von Flüssigkeiten auf die Turbulenzreibung. Diese Zeitschr. 13, 805, 1912.)

2) Bei den angeführten manometrischen Messungen machte sich bei so kleinen Verschiebungen die Trägheit

Aus der Zusammenstellung geht hervor, daß ein Maximum bei 20^0—23^0 besteht. Die geringe Wirkung bei kleineren Winkeln ist aus der Strömungsverteilung und der geringeren Energie (bei gleicher Winkelgeschwindigkeit) verständlich (vgl. Anm. 1 S. 538).

c) $\beta = 90^0$. Keinerlei einseitige Zugwirkung.

d) $\beta > 90^0$ (Fig. 5). Der Zustrom von der Basis nach der Spitze nimmt zwar auch bei

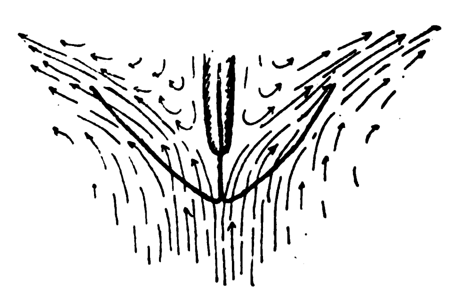


Fig. 5.

spitzeren Schwingungsräumen zu, wird aber durch Einfluß der Führung stark beeinträchtigt, so daß der von der freien Seite her kommende Strom überwiegt; also wiederum Zugwirkung.

2) Gebogene Drähte (1 mm Messingdraht in einer Schraubenwindung; α etwa 20^0). Schwingungsraum zylinderförmig; Strömung bei rechtläufiger Rotation analog Fig. 8, bei rückläufiger analog Fig. 9. Bei rechtläufiger Rotation auffallende Wirbelbildung im Innern des Schwingungsraumes, die bei größerer Steigung ($\alpha = 48^0$; vgl. Fig. 6) bedeutend geringer

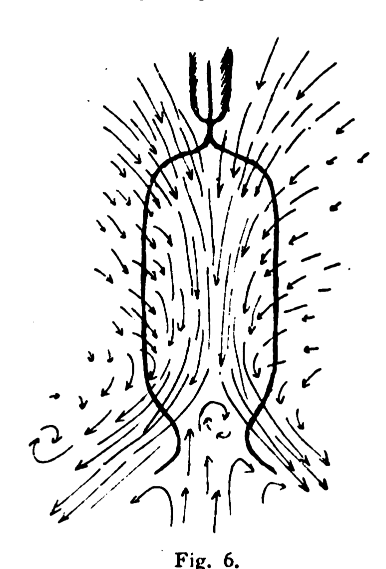


Fig. 6.

des der Röhrenwandung anhaftenden Wassers recht störend bemerkbar. Die beabsichtigten exakten Messungen mußten wegen anderer dringender Arbeiten vorerst zurückgestellt werden.

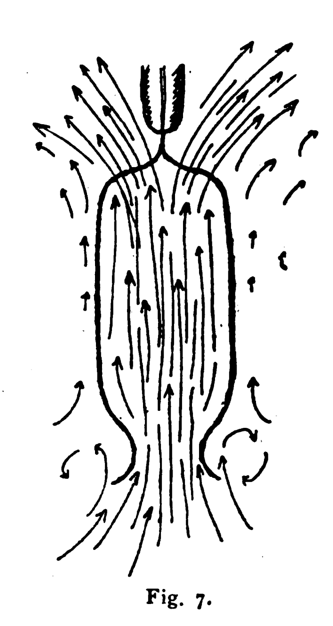


Fig. 7.

ist. Der Wirkungsgrad ist dann entsprechend größer. Bei der rückläufigen Rotation ist der Unterschied nicht so auffallend (Fig. 7).

IV. Versuche mit elastischen Körpern.

1. Wenig biegsame Drähte (0,5 mm Aluminiumdraht). Strömungsbilder analog den besprochenen; bei höheren Tourenzahlen „Zusammenschnurren" der Schwingungsräume entsprechend Gleichung (6). Bei schraubenförmigen Drähten entsprechende Deformationen (Fig. 8 u. 9).

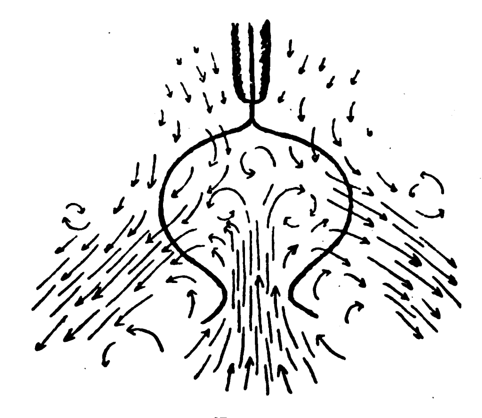


Fig. 8.

2. Nachgiebige Körper werden an einem 5 mm langen herausragenden Stück der starren Achse befestigt, das auch den Winkel β bestimmt.

a) Kupferdraht 0,1 mm, 7 cm lang, wird völlig passiv mitgezogen; scharfer Knick an der Befestigungsstelle; typische Schraubenform. Strömungsbild (Fig. 10).

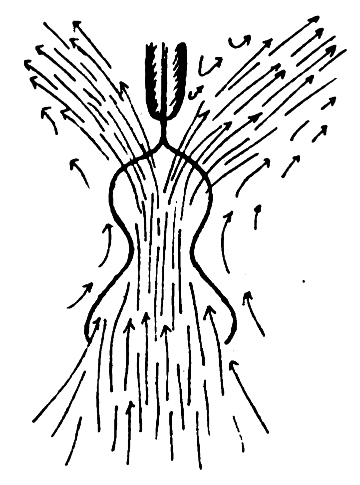


Fig. 9.

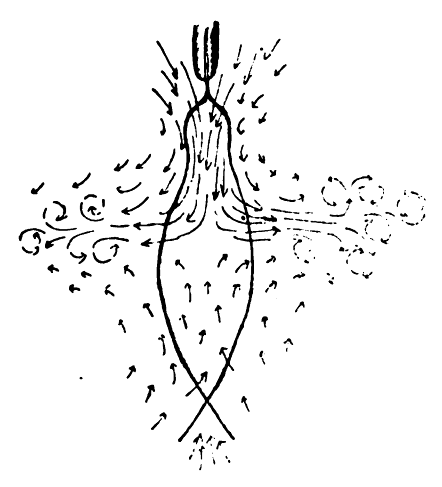


Fig. 10.

b) Messingspirale Φ 2,5 mm; $\beta = 30^0$. Bei sukzessiver Steigerung der Tourenzahl Veränderung des Schwingungsraumes (Fig. 11,1—4)

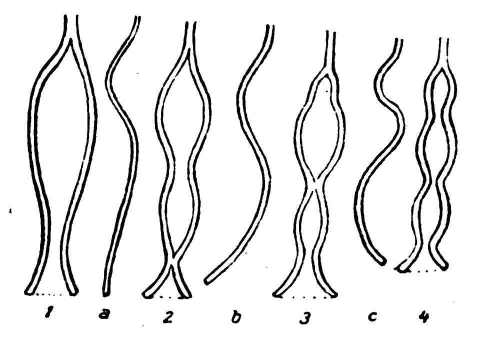


Fig. 11.

entsprechend unseren theoretischen Voraussetzungen: Verkleinerung von α, Verringerung des Durchmessers des Schwingungsraumes; Abwanderung meist in der Nähe der größten Ausbuchtung. Bei sehr langen „Geißeln" keine ausgesprochene Zugwirkung mehr. In Fig. 12 ist

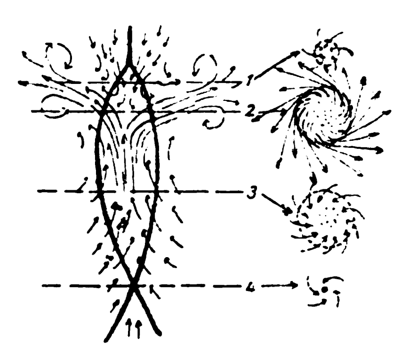


Fig. 12.

auch der Strömungsverlauf einzelner horizontaler Ebenen angegeben. In Fig. 11 sind bei *a*, *b*, *c* die den Schwingungsräumen 1, 2, 4 entsprechenden Formen des rotierenden Modells nach Momentaufnahmen wiedergegeben.

c) Kupferlitze, seidenumsponnen, 10 cm lang, stellt sich bei der Rotation auf fast 4 cm langer Strecke in die Drehungsachse ein, behält auch nach Aufhören der Rotation Schraubenform bei.

Bei sehr rascher Rotation treten überall bei elastischen Gebilden Kreiselwirkungen (Präzession) zutage. Ist $\beta > 45^0$, so wird bei Steigerung der Tourenzahl der Schwingungsraum stark verkürzt unter geringer Breitenzunahme. Diese Figur ist aber nur in labilem Gleichgewicht, wie plötzliche Streckungen und Übergänge in die Fig. 11 entsprechenden Formen zeigen, mitunter unter gewaltsamer Änderung des Winkels β.

Versuchen wir die geschilderten Verhältnisse auf den Bewegungsmodus der Geißeln anzuwenden, so kommen wir zu dem Schluß, daß eine ausgiebige Ortsbewegung schon durch einfache kegelförmige Schwingung erreicht werden kann, und daß sich die komplizierten Schwingungsräume elastischer Geißeln zum Teil auch rein mechanisch erklären lassen. Es erscheint wahrscheinlich, daß die von Bütschli angenommene Bewegungsform nur selten realisiert ist. Über die Versuche, diese Verhältnisse am Objekt selbst zu studieren und weitere mit Hilfe dieser Versuche erklärbare Einzelheiten der Geißelbewegung soll an anderer Stelle berichtet werden.

(Eingegangen 18. Juni 1919.)

Verfahren zur Messung sehr kleiner Kapazitäten und Induktivitäten.

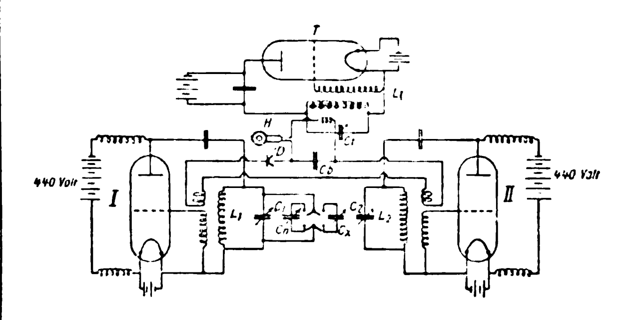
Von L. Pungs und G. Preuner.

In der Praxis der drahtlosen Telegraphie hat die Entwicklung der letzten Jahre das sogenannte Überlagerungsverfahren für den Empfang ungedämpfter Schwingungen hoher Frequenz gebracht. Es besteht bekanntlich darin, daß der Strom, welcher durch die ankommende Schwingung im Antennensystem verursacht wird mit einem zweiten am Aufnahmeort erzeugten von etwas verschiedener Schwingungszahl zur Überlagerung gebracht wird, so daß Schwebungen von hörbarer Frequenz entstehen, die mit dem Hörer beobachtet werden. Die praktische Verwendung ist erst durch die Erzeugung konstanter Schwingungen kleiner Energie durch Glühkathodenröhren mit Gitter am Empfangsort möglich geworden.

Es liegt nahe, das Verfahren zur Messung sehr kleiner Wellenlängenänderungen[1]) und damit auch zur Messung von Kapazitäten und Induktivitäten zu verwenden. Man kann dabei entweder die Tonhöhe der Schwebungen bzw. ihre Änderung bestimmen oder auf Verschwinden des Schwebungstones, also gleiche Schwingungszahl, einstellen. Das erste Verfahren hat den Nachteil, daß eine Bestimmung der Tonhöhe auf akustischem Wege notwendig ist, das zweite erfordert erst eine bestimmte Differenz der Schwingungen, bevor der Ton im Hörer beobachtet werden kann, wodurch die Empfindlichkeit beeinträchtigt wird.

Das von den Verfassern vorgeschlagene Verfahren vermeidet diese Nachteile und gibt eine große Steigerung der Empfindlichkeit. Der Grundgedanke besteht darin, daß zunächst, wie oben, zwei ungedämpfte durch Kathodenröhren erzeugte Schwingungen hoher Schwingungszahl (Periodenzahlen der Größenordnung 10^6 bis 10^5 pro Sekunde) überlagert werden. Dann wird nach Gleichrichtung die Differenzschwebung hörbarer Frequenz abermals, mit einer durch eine dritte Röhre erzeugten Schwingung gleicher oder etwas verschiedener Frequenz (z. B. von der Größenordnung 1000 pro Sekunde) überlagert und einem Telephon zugeführt, mit welchem das Auftreten und Verschwinden der langsamen (akustischen) Schwebungen beobachtet wird, die als Anzeigemittel bei der Messung dienen. Dabei erlaubt die Festlegung der zuletzt genannten Schwingungszahl von Tonfrequenz durch die Induktivität und Kapazität des Röhrenkreises diese Größen in Beziehung mit den zu messenden zu bringen und damit dem Verfahren eine besonders praktische Form zu geben.

Das grundsätzliche Schema der Anordnung gibt die Figur. Die Schaltung der Glühkathodenröhren mit Gitter für Schwingungserzeugung durch Rückkopplung wird als bekannt vorausgesetzt[1]). Es sind drei Schwingungssysteme zu unterscheiden. Das mit I bezeichnete ist das eigentliche Meßsystem. Die Wellenlänge seiner Schwingungen kann nach der gewünschten Empfindlichkeit gewählt werden. Die Verfasser nahmen z. B. 1000 bis 1500 m entsprechend den Periodenzahlen $3 \cdot 10^5$ bis $2 \cdot 10^5$. Das System II ist das Hochfrequenzsystem, welches zum Vergleich dient und dessen Schwingungszahl im allgemeinen konstant gehalten wird. Die Systeme dürfen sich nicht gegenseitig beeinflussen. Sie sind außerordentlich lose mit einem Kreis gekoppelt, welcher den Gleichrichter (Detektor) D und einen Blockkondensator C_b enthält. Parallel



zu diesem liegt der Hörer H, auf dessen Kreis nun das dritte oder „Tonfrequenz-System" T wirkt. Durch die Überlagerung der Schwingungen in den Systemen I und II wird bei richtiger Einstellung eine Schwebung von Tonfrequenz entstehen, die nach Gleichrichtung durch den Detektor im Telephon H hörbar ist. Diese Schwebung wird durch die Schaltung mit der Tonschwingung des Systems T elektrisch kombiniert, so daß im Telephon langsame akustische Schwebungen auftreten, die bekanntlich dann verschwinden, wenn beide Schwingungen gleich in ihrer Zahl sind. Ist die Schwingung der Kreise II und T konstant, so gibt die Beobachtung dieser Schwebungen ein außerordentlich empfindliches Mittel, um Veränderungen im Schwingungszustande des Kreises I festzustellen, die durch Änderung der Kapazität und Induktivität dieses Kreises auftreten. Darauf beruht die Verwendbarkeit dieser Methode für Meßzwecke.

1) Die Messung von Wellenlängen durch Überlagerung ist zuerst von Scheller mit Poulsengeneratoren ausgeführt worden.

1) Vgl. Meißner, Über Röhrensender, Elektrotechn. Zeitschr. 1919, Heft 7; Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie 14, 5, 1919.



Es sollen folgende Bezeichnungen gelten:

L_1, L_2, L_t die wirksamen Induktivitäten, C_1, C_2, C_t die wirksamen Kapazitäten } der Schwingungskreise I, II, T,

ν_1, ν_2 die Periodenzahlen der Schwingungen in I und II,

n_t die Periodenzahl der Schwingungen im System T,

n_s die Periodenzahl der langsamen Schwebungen im Hörer.

Als wirksame Kapazität bzw. Induktivität sollen die Werte bezeichnet werden, welche die durch die Röhre erregte Schwingungszahl des Systems bestimmen, so daß allgemein

$$\nu = \frac{3 \cdot 10^{10}}{2\pi\sqrt{C \cdot L}}$$

gesetzt werden kann.

Bei loser Gitterkopplung und der angegebenen, einfachen Rückkopplungsschaltung trifft diese Beziehung mit einer für die meisten Messungen genügenden Annäherung zu, da es sich nur immer um ein kleines Änderungsbereich von C und L handelt. L und C sind dann als empirische Werte zu betrachten, die für die gegebene Schaltung, Rückkopplung und Heizung gelten.

Dabei ist vorausgesetzt, daß die einzelnen Systeme sich nicht gegenseitig beeinflussen und deshalb keine komplizierten Erscheinungen, wie sprungweise Änderung der Schwingungszahl, eintreten.

Da die Konstanten bei der Messung in einfacher Weise empirisch bestimmt werden können, soll hier eine noch allgemeinere Form der Abhängigkeit zwischen ν, C und L eingeführt werden, und zwar wird ν gleich dem Produkte zweier beliebiger Exponentialfunktionen der beiden anderen Größen gesetzt. Bei der Messung kommen immer nur sehr kleine Bereiche in Frage und diese Form genügt auch großen Anforderungen an die Meßgenauigkeit vollkommen. Man hat somit:

$$\nu_1 = K_1 \cdot L_1^{\alpha} C_1^{\beta}; \; n_t = K_t \cdot L_t^{\gamma} \cdot C_t^{\delta}; \; \nu_2 = \text{const.} \tag{1}$$

Ferner:

$$(\nu_1 - \nu_2) - n_t = n_s. \tag{2}$$

Es soll sich die Kapazität[1]) um den Betrag ΔC_1 ändern, wo ΔC_1 sehr klein gegen C_1 ist. Dem entspricht eine Änderung von ν_1 um $\Delta\nu_1$ und der langsamen Schwebungszahl um n_x. Dann ist

$$\nu_1 + \Delta\nu_1 = K_1 \cdot L_1^{\alpha} (C_1 + \Delta C_1)^{\beta} = K_1 L_1^{\alpha} \cdot C_1^{\beta}\left[1 + \beta\frac{\Delta C_1}{C_1} + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\left(\frac{\Delta C_1}{C_1}\right)^2 + \dots\right]. \tag{3}$$

Die Glieder höherer Ordnung werden vernachlässigt und man erhält

$$\Delta\nu_1 = K_1 \cdot L_1^{\alpha} \cdot C_1^{\beta} \cdot \beta\frac{\Delta C_1}{C_1}, \tag{4}$$

also ist

$$\frac{\Delta\nu_1}{\nu_1} = \beta\frac{\Delta C_1}{C_1} \tag{5}$$

und ferner

$$\Delta\nu_1 = n_x. \tag{6}$$

Die Gleichung 6 läßt die große Empfindlichkeit des Verfahrens erkennen, was am besten an einem Zahlenbeispiel gezeigt werden kann, welches einer praktischen Messung entnommen ist. Die Wellenlänge im Kreise I sei 1000 m, also $\nu_1 = 3 \cdot 10^5$, $n_s = 1$ pro Sekunde. Eine Änderung von n_s um Bruchteile läßt sich sehr leicht und genau durch Abzählen mit Sekundenuhr feststellen, es sei zunächst $\Delta\nu_1 = n_x = 0{,}5$ gesetzt. Bei $\beta = 0{,}5$ und $C_1 = 1200$ cm erhält man nach Gl. (5) somit $\Delta C_1 = 0{,}004$ cm. Die Empfindlichkeit läßt sich durch Wahl der Wellenlänge usw. noch ganz wesentlich steigern und wird nur durch die bei kürzeren Wellen auftretende Inkonstanz der Schwingungen begrenzt.

Für die Messung kann das Verfahren in sehr verschiedener Art angewandt werden. Hier sollen drei grundsätzliche Methoden angeführt werden, wobei der Einfachheit halber nur von Kapazitätsmessungen die Rede sein soll; die Ausführungen lassen sich natürlich ohne weiteres auf Induktivitätsmessungen übertragen.

1. Die unbekannte Kapazität C_x (vgl. Figur) wird parallel zu C_1 geschaltet und dann durch eine veränderliche Normalkapazität C_n ersetzt, welche so eingestellt wird, daß bei $\nu_2 =$ konst., $n_t =$ konst. die Schwebungszahl in beiden Fällen die gleiche bleibt. Am einfachsten stellt man n_t so ein, daß in beiden Fällen $n_s = 0$ wird. Es ist dann $C_x = C_n$. Es ist dabei zu beachten, daß bei $\nu_2 =$ const. es zwei Werte für ν_1 gibt, für welche die Schwebung gleiche Tonfrequenz hat. Um Fehler zu vermeiden, muß ν_1 etwas kleiner als ν_2 gewählt werden, so daß beim Zuschalten von C_x, wodurch ν_1 weiter verkleinert wird, die Änderung der Tonhöhe immer in gleichem Sinne verläuft. Diese Methode hat den Vorteil, daß sie keine Bestimmung irgendwelcher Konstanten erfordert, sie setzt aber das Vorhandensein einer sehr kleinen veränderlichen Normalkapazität voraus, welche nicht einfach herzustellen ist.

1) Die Ausführungen lassen natürlich sich auch ganz analog auf die Änderungen der Induktivität übertragen.

2. Aus Gleichung (5) folgt

$$\Delta C_1 = \left(\frac{C_1}{\beta \nu_1}\right) \Delta \nu_1. \tag{7}$$

Durch Zuschalten einer bekannten festen Kapazität C_n und der Beobachtung von $\Delta \nu_1$, durch Abzählen von n_x wird die Konstante $\frac{C_1}{\beta \nu_1}$ bestimmt. Dann wird an Stelle von C_n die unbekannte Kapazität zugeschaltet und wieder $\Delta \nu_1$ bestimmt; C_x ergibt sich dann ohne weiteres aus der Gleichung (7). Ist keine genügend kleine Normalkapazität vorhanden, so schaltet man eine etwas größere parallel zu C_1 und bestimmt die Konstante durch unmittelbare Messung der Änderung von ν_1 nach bekannten Methoden (z. B. mit einem sehr empfindlichen Wellenmesser). Dabei ist zu beachten, daß diese parallel geschaltete Kapazität noch so klein gegenüber C_1 sein muß, daß die Entwicklung S. 544 bestehen bleibt.

Im übrigen gilt auch hier die gleiche Vorsichtsmaßregel für die Wahl von ν_1, wie unter 1.

3. Die Tonschwingungszahl n_t wird so eingestellt, daß

$$\nu_1 - \nu_2 = n_t,$$

die Schwebungen also verschwinden. Dann wird die unbekannte Kapazität C_x zugeschaltet und die Kapazität des Tonschwingungskreises T so weit geändert, daß die Schwebungen wieder verschwinden; es muß dann

$$\Delta \nu_1 = \Delta n_t$$

sein.

Nach den Gleichungen (4) und (1) hat man

$$\Delta n_t = K_t \cdot L_t^{\gamma} \cdot C_t^{\delta} \delta \frac{\Delta C_t}{C_t} = - K_1 L_1^{\alpha} C_1^{\beta} \cdot \beta \cdot \frac{\Delta C_1}{C_1},$$

hieraus

$$C_x = \Delta C_1 = \left(\frac{K_t}{K_1} \cdot \frac{C_1}{C_t} \cdot \frac{\delta}{\beta} \cdot \frac{L_t^{\gamma} C_t^{\delta}}{L_1^{\alpha} C_1^{\beta}} \cdot \right) \Delta C_t =$$

$$= \frac{C_1}{C_t} \cdot \frac{\delta}{\beta} \cdot \frac{n_t}{\nu_1} \Delta C_t = \text{const.}\ \Delta C_t,$$

d. h. einer Änderung von C_1 entspricht abgesehen vom Vorzeichen eine proportionale Änderung von C_t. Ist die Konstante durch Zuschalten einer bekannten Kapazität bestimmt, so kann C_x durch Einstellung von C_t auf Verschwinden der Schwebungen ermittelt werden.

Um die Größenordnung der Konstanten durch ein Beispiel annähernd festzulegen, sei $\delta = \beta$; $C_1 = C_t$ gesetzt, ferner $\nu_1 = 300\,000$, $\nu_t = 500$. Man erhält

$$\Delta C_1 = C_x = {}^1/_{600} \cdot \Delta C_t,$$

d. h. die Änderungen von C_1 kommen 600 fach als Änderungen von C_t zum Ausdruck.

Diese Methode hat den Vorzug, daß die Einstellung in gröberer Form, z. B. durch einen veränderlichen Kondensator größerer Kapazität erfolgen kann und daß dieselbe in größerer Entfernung von den Hochfrequenzkreisen ausgeführt wird. Dadurch fällt die Störung fort, welche sonst der Beobachter durch seinen Körper, und zwar infolge der Beeinflussung der Kapazität der Kreise während der Einstellung verursacht.

Bei den bisherigen Anwendungsformen des Verfahrens wurde die Schwingungszahl des Kreises II konstant gehalten. Natürlich läßt sich das Verfahren auch so verwenden, daß eine Änderung im Kreise I durch eine entsprechende im Kreise II ausgeglichen wird und das Verschwinden der langsamen Schwebungen die richtige Einstellung anzeigt. Die Anordnung muß dann besonders geeicht werden.

Bei den Messungen muß auf äußerste Konstanz der Schwingungen in bezug auf ihre Wellenlänge geachtet werden. Das geschieht durch Wahl nicht zu kurzer Wellenlängen, Konstanz der Heizung und Anodenspannung, ferner auch durch die Wahl der Röhren, die besonders ausgesucht werden müssen[1]).

Es soll hier noch folgendes Beispiel zur Kennzeichnung des Verfahrens aus einer Reihe von Messungen angeführt werden. Parallel zur Kapazität $C_1 = 1950$ cm wurde ein kleiner Luftkondensator geschaltet, bestehend aus zwei Kreisplatten von 2,6 cm Durchmesser, deren Entfernung durch eine Mikrometerschraube eingestellt werden konnte. Es wurde die Kapazitätsänderung bestimmt, welche man erhielt, wenn der Abstand der Platten von 7,5 auf 7,2 mm, also um 0,3 mm geändert wurde, und zwar nach der Methode 2 (durch Bestimmung der Änderung der Schwebungszahl), wobei $\nu_1 = 3{,}03 \cdot 10^5$ war. Es ergab sich 0,023 cm, während auf Grund der Rechnung aus dem Plattenabstand nach der Kirchhoffschen Formel 0,024 folgte. Dieser Wert beträgt $1{,}18 \cdot 10^{-5}$ der Kapazität C_1.

Nach den bisher ausgeführten Vorversuchen ist anzunehmen, daß die Methode sich für verschiedene Untersuchungen, z. B. für die Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Gasen usw. mit Erfolg verwenden lassen wird.

Diese Mitteilung ist nur als eine vorläufige zu betrachten. Weitere Veröffentlichungen über die Verfeinerung des Verfahrens und die Korrektionen behalten sich die Verfasser noch vor.

1) Als selbstverständlich werden die Vorsichtsmaßregeln, wie sie beim Arbeiten mit sehr kleinen Kapazitäten getroffen werden müssen, vorausgesetzt.

Kiel, Juli 1919. Laboratorium für Funkentelegraphie der Reichsmarine.

(Eingegangen 24. Juli 1919.)

Die gastheoretische Korrektur des Stokesschen Gesetzes.

Von Fritz Zerner.

Infolge der Wichtigkeit, welche das für Gase modifizierte Stokessche Gesetz für die Untersuchung einiger grundlegender Probleme der Physik gewonnen hat, scheint es nötig, auf einige Irrtümer in der Abhandlung von E. Cunningham[1]) hinzuweisen und die gastheoretische Korrektur am Stokesschen Gesetze richtigzustellen. Es ist auch ein zusammenfassender Vergleich dieser Korrektur mit der Erfahrung bereits jetzt um so mehr geboten, als W. Gerlach[2]) ihn in seiner Notiz „Zur Frage nach der Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes" versucht hat und auf einen Widerspruch zwischen Theorie und Erfahrung hinzuweisen sucht, der aber, wie im folgenden gezeigt wird, nicht begründet werden kann.

I.

Cunningham geht von der Überlegung aus: Bewegt sich eine Kugel im Gase, so wird sie ihre nächste Umgebung mitreißen. Es geht also ein doppelter Impulsumsatz vor sich. Erstens teilt die Kugel den an sie anprallenden Molekeln in der Zeiteinheit den Impuls I mit, zweitens übertragen die mitgerissenen Gasmolekeln infolge der inneren Reibung an das im Unendlichen ruhende Gas in der Zeiteinheit den Impuls U. Die Bewegung wird stationär sein, wenn $I = U$ ist. Die Kugel bewegt sich dann mit der Geschwindigkeit V, das sie umgebende Gas mit der Geschwindigkeit kV. Die Kraft P, die auf die Kugel wirken muß, um sie in ihrer Geschwindigkeit zu erhalten, ist

$$P = 6\pi\mu akV,$$

(wobei a den Radius der Kugel, μ den Reibungskoeffizienten des Gases bedeutet). Die Aufgabe der Rechnung ist die Bestimmung von k.

Ebenso wie Cunningham betrachten wir den Fall des elastischen und den des unelastischen Stoßes zwischen Kugel und Molekel gesondert. Für den ersten Fall findet Cunningham

$$I = \frac{8}{3} a^2 n V_0 \sqrt{\frac{\pi m M}{h(M+m)}},$$

wobei $V_0 = V - kV$ die Geschwindigkeit der Kugel gegen das sie umgebende Gas, m die Masse der Gasmolekel, n deren Anzahl im Kubikzentimeter, M die Masse der Kugel bedeutet.

Für den unelastischen Stoß macht dieser Autor folgende Annahme: „Jede Molekel verfängt sich in der Oberfläche der Kugel so, daß die Geschwindigkeit, mit der sie ausgeschleudert wird, in keinem Zusammenhang steht mit derjenigen, mit der sie aufgetroffen ist. Die Impulse, die bei der Ausschleuderung entstehen, heben sich gegenseitig auf, da für sie alle Richtungen gleich wahrscheinlich sind. Daher spielt nur der Impulsumsatz beim Auftreffen eine Rolle". Cunningham gibt weiter an, daß der Impulsumsatz in diesem Falle doppelt so groß ist wie im ersten. Diese Angabe beruht aber auf einem Irrtum.

Um dies nachzuweisen, wollen wir den Impulsumsatz I' auch in diesem Falle berechnen. Eine Kugel vom Radius $a-r$, der Masse M bewege sich mit der Geschwindigkeit V_0 durch ein Gas, dessen Molekel die Masse m, den Radius r und die mittlere kinetische Energie $\frac{m}{2}\frac{3\alpha^2}{2}$ besitzen. Der stationäre Zustand sei bereits hergestellt, insbesondere herrsche im Gas die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung. Es ist also die Wahrcheinlichkeit, daß eine Molekel eine Geschwindigkeit zwischen u und $u+du$, v und $v+dv$, w und $w+dw$ besitzt

$$\left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\, du\, dv\, dw; \quad h = \frac{1}{m\alpha^2}.$$

Nach dem Äquipartitionstheorem erhält dann die Kugel ebenfalls eine ungeordnete Bewegung. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine auf diese zurückgehende Geschwindigkeit zwischen den Grenzen U und $U+dU$, V und $V+dV$, W und $W+dW$ liegt, ist

$$\left(\frac{hM}{\pi}\right)^{3/2} e^{-hM(U^2+V^2+W^2)}\, dU\, dV\, dW.$$

Zur Charakterisierung des Flächenelements führen wir Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein, mit der Achse in der Richtung V_0, zur Berechnung des Druckes auf ein Flächenelement ein zweites, bewegliches, rechtwinkliges Koordinatensystem U, V, W, dessen eine Achse (U) immer auf das betrachtete Flächenelement senkrecht steht und dessen Ursprung immer mit diesem Flächenelement zusammenfällt.

Die Größe des Flächenelements ist danach $\alpha^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, die Molekel besitzt die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w, die Kugel $U + V_0 \cos\vartheta$, $V + V_0 \sin\vartheta$, W.

Die in der Zeiteinheit auf das Flächenelement auffallenden Molekel liegen dann auf einem Zylinder, dessen Basis das Flächenelement, dessen Höhe $(U + V_0 \cos\vartheta - u)$ ist, wobei zu beachten ist, daß dieser Ausdruck immer positiv bleiben muß. Die Größe des bei einem Stoß übertragenen, in die Richtung V_0 projizierten Impulses beträgt

$$\frac{Mm}{M+m}[V_0 + (U-u)\cos\vartheta + (V-v)\sin\vartheta].$$

---

1) E. Cunningham, Proc. Roy. Soc. (1) 83, 357 ff., 1910.

2) Diese Zeitschr. 20, 298, 1919.

Folglich ist I'

$$I' = \frac{h^3}{\pi^3} n a^2 \frac{m^{5/2} M^{5/2}}{M+m} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h[m(u^2+v^2+w^2)+M(U^2+V^2+W^2)]} (U +$$

$$+ V_0 \cos\vartheta - u)[V_0 + (U-u)\cos\vartheta + (V-v)\sin\vartheta] \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, du \, dv \, dw \, dU \, dV \, dW.$$

Die Integrationsgrenzen für U und u sind derart zu wählen, daß $(U + V_0 \cos\vartheta - u)$ immer größer als o bleibt.

Durch Integration über φ, w und W und Einführen von $\alpha_1 = U - u$, $\alpha_2 = V - v$, $\beta_1 = U + u$, $\beta_2 = V + v$ erhält man

$$I' = 2\pi n a^2 \frac{h^2}{\pi^2} \frac{m^2 M^2}{M+m} \int_0^{\pi} \int_{-V_0\cos\vartheta}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h}{M+m}[mM(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+(m+M)^2(\beta_1^2+\beta_2^2)]} [V_0 \alpha_1 \sin\vartheta +$$

$$+ (V_0^2 + \alpha_1^2)\cos\vartheta \sin\vartheta + \alpha_1\alpha_2 \sin^2\vartheta + V_0 \alpha_1 \cos^2\vartheta \sin\vartheta + V_0 \alpha_2 \cos\vartheta \sin^2\vartheta] \cdot d\vartheta \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, d\beta_1 \, d\beta_2.$$

Man sieht leicht, daß die Vernachlässigung des Integrals über α_1 von $-V_0 \cos\vartheta$ bis o nur einen Fehler von der Größenordnung $\frac{V_0}{\alpha}$ zur Folge hat und erhält

$$I' = 2\pi n a^2 \frac{h^2}{\pi^2} \frac{m^2 M^2}{M+m} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h}{M+m}[Mm(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+(m+M)^2(\beta_1^2+\beta_2^2)]} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{8}{3} V_0 \alpha_1 + \frac{\pi}{2} \alpha_1 \alpha_2\right) d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, d\beta_1 \, d\beta_2,$$

$$= \frac{8}{3} n a^2 V_0 \sqrt{\frac{\pi m M}{h(M+m)}}.$$

Es ist also nach den Annahmen, die Cunningham seiner Rechnung zugrunde legt, der Impulsumsatz im Falle des elastischen Stoßes gleich dem im Falle des unelastischen. Mithin ist klar, daß der Korrektionsfaktor k des Stokesschen Gesetzes von dem Verhältnis zwischen elastischen und unelastischen Stößen unabhängig ist. Um seine Größe zu bestimmen, müssen wir $I = U$ setzen.

$$6\pi\mu a k V = \frac{8}{3} a^2 n \sqrt{\frac{\pi m}{h}}. \quad \text{(Unter der Annahme } M >> m\text{)}.$$

$$k = \frac{4an\sqrt{\frac{\pi m}{h}}}{4an\sqrt{\frac{\pi m}{h}} + 9\pi\mu} = \frac{1}{1 + \frac{9}{4}\frac{\sqrt{\pi}\mu\sqrt{h}}{an\sqrt{m}}}.$$

Um die mittlere Weglänge einzuführen, setzt Cunningham

$$\mu = \frac{1}{3} \varrho \bar{c} l,$$

dann wird wegen

$$\bar{c} = 2\sqrt{\frac{1}{hm\pi}}, \quad \varrho = nm,$$

$$k = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}\frac{l}{a}},$$

während Cunningham

$$k = \frac{1}{1 + \frac{1,63}{2-f}\frac{l}{a}}$$

findet. Konsequenter ist es, auch bei der Berechnung der mittleren Weglänge die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung zu berücksichtigen. Dann erhält man $\mu = 0,350\,\varrho \bar{c} l$,

$$k = \frac{1}{1 + 1,58\frac{l}{a}}.$$

Die Annahme Cunninghams, daß im Falle des unelastischen Stoßes die einzelnen Impulse beim Ausstoß der Molekel sich gegenseitig aufheben, ist zumindest unsicher. Sie ist nur für den Fall richtig, daß von jedem Flächenelement der Kugel gleichviel Molekel im Durchschnitt ausgeschleudert werden. Dies hätte aber zur Voraussetzung, daß jede Gasmolekel solange in der Kugeloberfläche umherwandelt, daß nicht nur ihre Austrittsrichtung von der Einfallsrichtung, sondern auch die Austrittsstelle von der Einfallsstelle unabhängig wird. Das letztere ist aber sehr unwahrscheinlich; es ist vielmehr anzunehmen, daß die Austrittsstelle so nahe an der Eintrittsstelle liegt, daß der Rechnung der andere Idealfall zugrunde gelegt werden kann, daß nämlich Ein- und Austrittsstelle identisch sind. Es ist schon durch Anschauung unmittelbar klar, daß dann auch die Ausschleuderung einen Beitrag zum Gesamtimpuls liefern wird.

Dieser Impuls ist gleich

$$I'' = n a^2 \left(\frac{h}{\pi}\right)^{9/2} m^4 M^{3/2} \int \ldots\ldots \int e^{-h[m(u^2+v^2+w^2+u_1^2+v_1^2+w_1^2)+M(U^2+V^2+W^2)]} (U - u + \\ + V_0 \cos\vartheta)(u_1 \cos\vartheta + v_1 \sin\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, du \, dv \, dw \, du_1 \, dv_1 \, dw_1 \, dU \, dV \, dW,$$

wobei u, v, w die Geschwindigkeit der Molekel, $U + V_0 \cos\vartheta$, $V + V_0 \sin\vartheta$, W die der Kugel beim Auftreffen, u_1, v_1, w_1 die Geschwindigkeit, mit der die Molekel ausgeschleudert wird, ist. Durch eine der früheren analogen Rechnung erhält man

$$I'' = \frac{1}{3} n a^2 V_0 \sqrt{\frac{\pi m}{h}}.$$

Der gesamte Impuls

$$I' + I'' = 3 n a^2 V^0 \sqrt{\frac{\pi m}{h}}$$

und

$$k = \frac{1}{1 + 2\frac{\sqrt{\pi}\mu\sqrt{h}}{an\sqrt{m}}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{3}\frac{l}{a}},$$

wobei l definiert ist durch

$$\mu = \frac{1}{3} \varrho c l,$$

dagegen, falls man $\mu = 0{,}350\, \varrho \bar{c} l$ setzt

$$k = \frac{1}{1 + 1{,}40 \frac{l}{a}}.$$

Als allgemeine Formel erhält man für die Kraft

$$V = \frac{6\pi\mu a V}{1 + \frac{1{,}40}{1 - \frac{1}{3}\psi} \frac{l}{a}},$$

wobei ψ zwischen 0 und 1 variiert und durch das Verhältnis zwischen elastischen und sämtlichen Stößen und durch den Zusammenhang zwischen Ein- und Austrittsstelle der Gasmolekel aus der Kugeloberfläche bestimmt ist.

II.

Die experimentelle Forschung hatte vor allem nachzuweisen, daß die bei kleinen Kugeln auftretenden Abweichungen vom Stokesschen Gesetz durch einen Korrektionsfaktor von der Form

$$k = \frac{1}{1 + A\frac{l}{a}}$$

darzustellen sind, vor allem also, daß eine Variation des Radius bei konstantem Druck gleichwertig ist mit einer Variation des Drucks des umgebenden Gases bei konstantem Radius. Daß dies tatsächlich der Fall ist, zeigt schon der Vergleich der Arbeit von M. Knudsen und S. Weber[1]) mit der von L. W. Mac Keehan[2]). In der ersten Untersuchung wird für eine Kugel vom bekannten Radius $a = 0{,}772$ cm bei verschiedenen Gasdrucken der Korrektionsfaktor k bestimmt, in der zweiten für verschieden große Kugeln von ebenfalls bekanntem Radius $a = 2{,}5$ bis $0{,}12 \cdot 10^{-3}$ cm bei verschiedenem Druck. Beide Untersuchungen ergaben

$$A = 0{,}68 + 0{,}35\, e^{-1{,}85\frac{a}{l}}.$$

Außer diesen wurden noch einige andere Untersuchungen an bedeutend kleineren Probekörpern angestellt. E. Meyer und W. Gerlach[3]) sowie I. Parankiewicz[4]) bestimmten die Fallgeschwindigkeit eines und desselben Probekörpers bei verschiedenen Drucken und berechneten die Konstante A so, daß für alle Drucke der gleiche Radius resultierte. E. Meyer und W. Gerlach erhielten für ihre Pt-Kügelchen

$$A = 0{,}6 \left(8 > \frac{a}{l} > 1;\ a \sim 10^{-4}\,\text{cm}\right),$$

Tabelle.

$\frac{a}{l}$	dem entspricht bei Luft von gewöhnlichem Druck ein Radius a	$\bar{A}$ Mc. Keehan	$\bar{A}$ Knudsen
0,000—0,151		0,96	0,98
0,151—0,362		0,90	0,90
0,362—0,711	$4 \cdot 10^{-6}$ — $7 \cdot 10^{-6}$ cm	0,86	0,81
0,711—2,000	$7 \cdot 10^{-6}$ — $2 \cdot 10^{-5}$ cm	0,78	0,72
2,000— ∞	$2 \cdot 10^{-5}$ cm — ∞		0,68

1) M. Knudsen und S. Weber, Ann. d. Phys. IV, **36**, 981 ff., 1911.
2) Diese Zeitschr. **12**, 707 ff., 1911.
3) Elster-Geitel-Festschrift, Verlag Vieweg & Sohn, S. 196 ff.
4) Diese Zeitschr. **19**, 280 f., 1918.

I. Parankiewicz für *Se*-Kügelchen

$$A = 0{,}8\left(1{,}4 > \frac{a}{l} > 0{,}8;\ a \sim 10^{-5}\,\text{cm}\right).$$

Der Vergleich mit der obigen Tabelle zeigt eine recht gute Übereinstimmung mit den Knudsen-Weberschen Resultaten, obwohl die verwendeten Kügelchen 500 bzw. 5000 mal kleiner sind, als die von Knudsen-Weber verwendeten.

Die Annahme, daß die in Frage stehende Korrektur nur eine Funktion von $\frac{a}{l}$ und von der Form

$$\frac{1}{1 + A\frac{l}{a}}$$

ist, ist damit bestätigt.

J. Roux[1]) versuchte auf einem dritten Wege das Stokessche Gesetz in Gasen zu überprüfen. Er bestimmte die Fallgeschwindigkeit einer Kugel in Luft von gewöhnlichem Druck, ließ sie hier in eine Flüssigkeit fallen und bestimmte dann wieder die Fallgeschwindigkeit. Unter Annahme der Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes für Flüssigkeiten erhielt er aus der letzteren den Radius der Kugel und konnte damit wieder A berechnen. Er erhielt für 4 *S*-Kügelchen $A = 1{,}23$, für 5 andere $A = 1{,}64$ ($a \infty 1{,}10^{-4}$ cm).

Dieses Resultat weicht von dem Knudsens stärker ab. Doch gibt J. Roux selbst an, daß es ungenau ist[2]).

Andere experimentelle Überprüfungen des Stokes-Cunninghamschen Gesetzes beziehen weitere nicht auf rein mechanischer Grundlage beruhende Voraussetzungen ein, so die Größenbestimmung aus der Farbe von Ehrenhaft und in der Folge von Laski und Parankiewicz optische Theorien, die von R. A. Millikan die Existenz eines Elementarquantums der Elektrizität von der Größe des Elektrons. Dabei soll hier die Richtigkeit der Annahme des Elementarquantums gleichzeitig durch dieselben Versuche bewiesen werden. Die Resultate dieser Methode können daher nicht berücksichtigt werden. Die erstgenannte Methode benützt den Zusammenhang zwischen Fallgeschwindigkeit und Farbe der Probekörper und beweist die Richtigkeit eines Widerstandsgesetzes der Stokes-Cunninghamschen Art auch noch für Partikel, die an der Grenze des Auflösungsvermögens des Mikroskops liegen; sie kann aber für eine derart genaue Bestimmung von A begreiflicherweise nicht herangezogen werden.

Die angeführten rein mechanischen Untersuchungen ergeben:

1. Bei der Anwendung auf den Fall kleiner Kugeln in Gasen ist das Stokessche Gesetz mit einem Korrektionsglied

$$k = \frac{1}{1 + A\frac{l}{a}}$$

zu multiplizieren, das lediglich eine Funktion von $\frac{l}{a}$ ist, wie dies die Gastheorie fordert.

2. Die Konstante A ist stets kleiner als dies nach den im ersten Teile angeführten Rechnungen zu erwarten wäre. Weiter ergeben diese Untersuchungen, daß A eine innerhalb enger Grenzen beständig wachsende Funktion von $\frac{l}{a}$ ist.

Die in Punkt 2 angeführten Resultate waren W. Gerlach teilweise bekannt und verleiteten ihn zu der Behauptung, daß „die experimentelle Bestimmung der Beweglichkeit ultramikroskopischer Teilchen zu Resultaten führt, die nach der Theorie der Fallgeschwindigkeit kleiner Kugeln nicht zu deuten sind". Er weist auch in seiner Notiz darauf hin, daß man durch Fallenlassen des Widerstandsgesetzes die Existenz eines Elementarquantums der Elektrizität beweisen könne. Dem ist vor allem entgegen zu halten, daß ein experimentell bestimmtes Gesetz auch dann gilt, wenn es theoretisch noch nicht erklärt ist.

Dagegen zeigt bereits eine qualitative Diskussion der der gastheoretischen Korrektur zugrunde liegenden Rechnung, daß die auftretenden Abweichungen zu erwarten waren. Hauptsächlich entspricht die Annahme, daß die Geschwindigkeit des Gases gegen die Kugel überall gleich $V - kV$ ist, nicht den Tatsachen. Dies hat zur Folge, daß der errechnete Impuls zu klein wird. Denn die Kugeln, bei denen die Korrektur zur Anwendung kommt, sind von der Größe der mittleren Weglänge der Gasmolekeln und kleiner. Es stoßen also Molekeln an die Kugel, die von Orten kommen, die von der Kugeloberfläche um einen Kugelradius oder

---

1) Ann. de Chim. et Phys. VIII; 3. série, tome 29, 69ff., 1913.

2) Vgl. auch O. W. Silvey, Comparison of the fall of a dropelt in a liquid and in a gas. Silvey gibt zunächst eine Fehlerschätzung für die Experimente von Roux. Er bestimmt darauf nach derselben Methode A für *Hg*-Tröpfchen ($a \sim 1{,}10^{-4}$) und findet $A = 1{,}03$. Dieser Wert läßt sich aber mit dem Knudsenschen nicht ohne weiteres vergleichen, da für den Fall von Flüssigkeitströpfchen das Stokessche Gesetz wegen deren geringen inneren Reibung nicht streng gilt. Phys. Rev. N. S. VII, p. 87ff.

mehr entfernt sind. Die mittlere Relativgeschwindigkeit dieser Molekeln gegen die Kugel ist aber, wie sich aus dem Stokesschen Gesetz leicht überschlagsweise berechnen läßt, bedeutend größer als die an der Oberfläche der Kugel herrschende. Wenn der Radius klein wird gegen die mittlere Weglänge, wird U (siehe oben) dadurch vergrößert, daß die Kugel direkt (ohne Vermittlung durch die innere Reibung) Bewegungsgröße in fast ruhende Teile des Gases sendet und so der „hydrodynamische" Radius der Kugel vergrößert wird. Man überlegt leicht, daß die Berücksichtigung dieser Umstände A verkleinert und so „ein negatives f" vorgetäuscht wird. Ebenso, daß A deshalb eine Funktion von $\frac{l}{a}$ sein muß. Die Durchrechnung dieses Problems wird nach ihrem Abschluß veröffentlicht werden.

Zusammenfassung.

1. Es werden einige Irrtümer in der Cunninghamschen Ableitung der Korrektur des Stokesschen Gesetzes aufgezeigt und schließlich die Formel

$$P = 6\pi\mu a V \cdot \frac{1}{1 + \frac{1{,}40}{1 - \frac{1}{3}\psi} \frac{l}{a}}$$

gefunden, welche zwischen den von Cunningham angegebenen Grenzfällen liegt.

Es wird gezeigt, daß die experimentell gefundenen Resultate mit den gastheoretischen Korrekturen durchaus vereinbar und die auftretenden Abweichungen aus der Theorie erklärbar sind.

Wien, I. Physikalisches Institut der Universität, Juli 1919.

(Eingegangen 31. Juli 1919.)

Über axenparallele Kernschwingungen in Bohrschen Molekülen.

Von Gerda Laski.

In dieser Zeitschr. **20**, 269, 1919 habe ich die Frage behandelt, ob die Frequenz der axenparallelen Kernschwingung symmetrischer Bohrscher Gasmoleküle mit jenen Frequenzen zu identifizieren ist, welche der Energieansatz für den linearen Planckschen Oszillator erfordert, um die spezifischen Wärmen bei sehr hohen Temperaturen zu erklären, und ob sich bei dieser Problemstellung Rückschlüsse auf die Konstitution von Gasmolekülen nach Bohrscher Vorstellung ziehen lassen.

In diesen Berechnungen ist, wie Herr Prof. Eucken in dankenswerter Weise in einer Zuschrift an Herrn Prof. Debye bemerkt, ein bedauerlicher Irrtum unterlaufen. Es wurde übersehen, daß in den zum Vergleich mit den berechneten spezifischen Wärmen herangezogenen Tabellen von Pier nur die Werte für die mittleren spezifischen Wärmen im Intervall 0^0 bis T^0 angegeben sind. Man muß also die nach Formel (1), l. c., berechneten C_v nach der Beziehung $C_m = \frac{\int C_v dT}{T}$ reduzieren. Dann aber ergeben sich für die spezifische Wärme des Wasserstoffs (unter Zugrundelegung der ultraroten Eigenfrequenz des Bohr-Debyeschen Moleküls) viel zu kleine Werte, die auch innerhalb der Grenzen der möglichen Versuchsfehler nicht mit der Erfahrung in Einklang gebracht werden können.

Die l. c. konstruierten Molekülmodelle von Stickstoff und Sauerstoff lassen sich mit den Messungen der spezifischen Wärmen auch jetzt vereinbaren. Da bei den dort angegebenen Frequenzen ein Faktor $1/\sqrt{2}$ noch übersehen wurde, seien in folgender Tabelle die Resultate für N_2 nochmals zusammengestellt. Aus meinen korrigierten Berechnungen folgt für ein Stickstoffmodell mit je 2 Elektronen in den inneren Ringen und 10 Elektronen im äußeren Ringe: $\nu = 1{,}13 \cdot 10^{14}$; für ein Modell mit je 3 Elektronen in den inneren, 8 Elektronen im äußeren Ringe $\nu = 0{,}82 \cdot 10^{14}$. Dabei sind die inneren Ringe stets einquantig, der äußere zweiquantig zu nehmen. Als resultierenden Mittelwert der aus den Pierschen Messungen gerechneten Eigenfrequenz für N_2 gibt N. Bjerrum[1]) $\nu \cdot 0{,}83 \cdot 10^{14}$ an.

Spezifische Wärmen von N_2.

T	C_m beob.	C_m berechnet	
		mit $\nu = 1{,}13 \cdot 10^{14}$	mit $\nu = 0{,}82 \cdot 10^{14}$
1273^0	5,25	5,09	5,33
1660^0	5,31	5,21	5,55
2273^0	5,78	5,44	5,82
2773^0	5,93	5,60	5,99

Die dispersionstheoretische Umlaufsfrequenz ergibt sich bei N_2 auch im Falle von 3 Elektronen im Innenring in Übereinstimmung mit der quantentheoretisch berechneten: $\omega_{\text{quant.}} = 3{,}04 \cdot 10^{16}$, $\omega_{\text{Disp.}} = 3{,}49 \cdot 10^{16}$. Das Verhältnis

1) N. Bjerrum, Zeitschr. f. Elektrochemie 1911, S. 731.

der beobachteten Konstanten der Cauchyschen Dispersionsformel $\frac{A}{B}$ ist $1{,}66 \cdot 10^{-7}$. Nach den Formeln von Sommerfeld berechnet ergibt es sich zu $1{,}76 \cdot 10^{-7}$.

Bei Sauerstoff folgt für das ursprünglich angegebene Modell mit 12 Elektronen im äußeren Ring die Eigenfrequenz: $\nu = 1{,}34 \cdot 10^{14}$. Ordnet man auch hier wieder den inneren Ringen 3 Elektronen, dem äußeren entsprechend 10 Elektronen zu, so wird $\nu = 1{,}05 \cdot 10^{14}$. Diesem letzteren Modell entspricht $\omega_{\text{Disp.}} = 3{,}50 \cdot 10^{16}$, $\omega_{\text{quant.}} = 3{,}65 \cdot 10^{16}$. Nach Angabe von Pier verläuft die spezifische Wärme von O_2 sehr nahe der von H_2. Für H_2 folgt aber aus den Pierschen Messungen (nach Bjerrum) $\nu = 1 \cdot 10^{14}$.

Aus der großen Zahl von Möglichkeiten der Konfiguration im Bohrschen Sinne, welche die Elektronen im N_2- bzw. O_2-Molekül darbieten, heben sich neuerdings zwei, nur geringfügig unterschiedene Konfigurationstypen hervor, welche geeignet sind, mehrere voneinander unabhängige Erscheinungen in Übereinstimmung mit Erfahrungsdaten darzustellen. Die Modelle haben 3 planparallele Ringe: die beiden inneren einquantigen nahe den Kernen enthalten je 2 bzw. 3 Elektronen, der Rest ist im äußeren zweiquantigen Ringe untergebracht. Beide Möglichkeiten der Konstitution sind, wie ersichtlich, mit den Messungen der spezifischen Wärmen vereinbar, beide Möglichkeiten sind aber auch nach Resultaten der Röntgenspektroskopie nahegelegt, denn aus den theoretischen Betrachtungen von Debye, Sommerfeld-Kroo und Vegard ergibt sich, daß der innerste Elektronenring der Atome einquantig sein muß und 2 bzw. 3 Elektronen trägt, der zweite Ring muß zweiquantig sein und trägt entsprechend bis zu 8 bzw. 7 Elektronen. Die etwas bessere Übereinstimmung in den angeführten Resultaten im Falle von 3 Elektronen steht mit der zuerst von Debye gezogenen Folgerung im Einklang, daß der innerste (feste) Ring der Atome 3 Elektronen enthält.

So wunderbar und auffallend alle diese zahlenmäßigen Zusammenhänge sind, so ist doch andererseits sicher, daß man aus verschiedenen Gründen den angeführten Übereinstimmungen, einzeln betrachtet, nicht übermäßig viel Gewicht beilegen darf.

Um aber die Frequenz der Kernschwingungen von Bohrschen Gasmolekülen auch direkt mit präzisen Erfahrungstatsachen vergleichen zu können und den Umweg über andere Theorien und Beobachtungen zu vermeiden, wurde in einer noch im Gange befindlichen Untersuchung der Versuch gemacht, ob sich diese Eigenschwingungen bei asymmetrischen Molekülen mit der optisch beobachtbaren ultraroten Frequenz identifizieren lassen. Schiebt man im Sinne der Dispersionstheorie die Entstehung ultraroter Absorptionslinien intraatomaren Massenschwingungen zu, dann bietet die betrachtete Kernschwingung die einzige intraatomare Bewegungsmöglichkeit im Bohrschen Modell. Hier einige vorläufige Resultate: Eine näherungsweise Berechnung (mit Berücksichtigung der Wechselwirkung der Elektronenringe) ergibt bei CO (Ladung des C-Kernes $n_1 = 6$, Ladung des O-Kernes $n_2 = 8$, Gesamtzahl der Elektronen $n = 14$), daß sich mehrere Konfigurationen finden lassen, in denen bei geeigneter Wahl der Elektronenanordnung und Quantenzahl die berechnete ultrarote Eigenfrequenz nur um wenige Prozent von der beobachteten abweicht. Berechnet man hingegen bei HCl ($n_1 = 1$, $n_2 = 17$, $n = 18$) ebenfalls auf Grund der üblichen Annahmen (Anordnung in mehreren planparallelen Ringen senkrecht zur Achse, Coulombkräfte) die obere Grenze für die ultrarote Frequenz, so zeigt sich, daß man zwar auch hier wieder bei Anordnung in drei Ringen, wenn man an der Zweiquantigkeit des äußersten Ringes festhält, stets in die geforderte Größenordnung kommt, daß aber bei allen möglichen Elektronenanordnungen die berechnete Frequenz kleiner bleibt als die beobachtete.

Somit weist ein Teil der in dieser Notiz mitgeteilten Resultate darauf hin, daß auch bei Gasmolekülen die bisher üblichen einfachen Annahmen nicht in jedem Falle hinreichen, um Modelle zu konstruieren, welche allen an sie gestellten Anforderungen, den Mechanismus physikalischer Phänomene zu veranschaulichen, Genüge leisten können.

(Eingegangen 2. August 1919.)

Bemerkung zu dem Aufsatz: „Zur Mechanik des Freiballons von F. Jentzsch-Gräfe".

(Diese Zeitschr. 20, 320, 1919.)

Von Hans Maurer.

Ich erlaube mir darauf hinzuweisen, daß ein Teil der in diesem Aufsatz gegebenen Untersuchungen, besonders die Ergebnisse des § 2 bereits im Jahre 1909 von mir veröffentlicht worden sind, und zwar in dem vom Reichsmarineamt herausgegebenen Werke: Die For-



schungsreise S. M. S. „Planet“, 1906/1907, Band II, Aerologie S. 55—60, 66, 67.

Die Differentialgleichung (2) lautet bei mir:

$$M \frac{dv}{du} = gF - \alpha B^{2/3} \cdot v^2,$$

und es bedeutet:

bei Maurer	bei Jentzsch-Gräfe	
u	t	die Zeit
M	m	die gesamte in Bewegung gesetzte Masse
v	v	die Geschwindigkeit
gF	A	den freien Auftrieb
$a = \alpha B^{2/3}$	c	die Widerstandskonstante.

Daß bei mir beim freien Auftrieb die Schwerebeschleunigung g explizit auftritt, liegt am Unterschied des technischen und physikalischen Maßsystems. B ist bei mir der dem Volumen des Kugelballons proportionale Bruttoauftrieb. Die Widerstandskonstante a kann annähernd proportional zum horizontalen Kugelquerschnitt, also auch zu $B^{2/3}$ gesetzt werden.

Die Maximalgeschwindigkeit finde ich ebenso wie Herr Jentzsch-Gräfe:

$$v_m = \sqrt{\frac{gF}{\alpha B^{2/3}}} = \sqrt{\frac{A}{c}}.$$

Die Konstante α ist durch Versuche von Prof. Hergesell bestimmt, und für Einzelballons in m/kg/sec-System rund $\frac{g}{\alpha} = 20$ gefunden worden, also

$$v_m = \sqrt{\frac{20 F}{B^{2/3}}},$$

während für Tandems nach Prof. Hergesell die entsprechende Formel

$$v_m = \sqrt{\frac{40 F}{B_1^{2/3} + B_2^{2/3}}}$$

lautet.

Für die vorausgehenden Geschwindigkeiten ergibt sich bei mir übereinstimmend mit der Jentzsch-Gräfeschen Formel:

$$v = \sqrt{\frac{gF}{\alpha B^{2/3}}} \cdot \frac{e^{u \cdot N} + 1}{e^{u \cdot N} - 1}$$

wo

$$N = 2 \sqrt{\frac{gF}{M} \cdot \frac{\alpha B^{2/3}}{M}}.$$

Die Jentzsch-Gräfesche Gleichung

$$t = \frac{m v_m}{2A} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

lautet bei mir in gleicher Bedeutung:

$$u = \frac{1}{N} \ln (2n - 1),$$

da ich statt $v = \varepsilon \cdot v_m$ gesetzt hatte

$$v = \left(1 - \frac{1}{n}\right) v_m,$$

also

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{n},$$

so daß

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 2n - 1$$

ist.

Meine Arbeit gibt dann für drei damals gebräuchlich gewesene Ballongrößen und ein Tandem die Zeiten und Höhen, in denen die Endgeschwindigkeit bis auf Reste von $^1/_2$, $^1/_5$, $^1/_{10}$, $^1/_{20}$, $^1/_{100}$ erreicht wird.

Wegen meiner sonstigen Ausführungen über die Mechanik der Ballonaufstiege darf ich auf meine Arbeit verweisen.

Berlin, August 1919.

(Eingegangen 25. August 1919.)

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. K. G. Jonas für Chemie.

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Kiel (bisher in Göttingen) Dr. Erwin Madelung zum ord. Professor der theoretischen Physik ebendaselbst, der Privatdozent an der Universität Jena Dr. Hans Kaufmann zum a. o. Professor der Chemie ebendaselbst, J. W. Mc Bain zum Professor für Physikalische Chemie (Lord Leverhulme Professur) an der Universität Bristol, B. B. Mouat Jones zum Professor der Chemie an der Universität Aberystwyth, Dr. W. Aten zum a. o. Professor für Elektrochemie an der Universität Amsterdam, der Observator am astrophysikalischen Observatorium in Berlin Professor Dr. Wilhelm Münch zum Hauptobservator, der wissenschaftliche Hilfsarbeiter Dr. Kohlschütter zum Observator an diesem Institut.

Gestorben: Der frühere ord. Professor für praktische Geometrie und höhere Geodäsie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Matthäus Haid, der emer. a. o. Professor der Chemie an der Universität Wien Dr. Eduard Lippmann.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1919/20.

Universität Basel.

Hagenbach: Experimentalphysik II: Optik, Wärme, Elektrizität, 6; Physikalisches Praktikum für Vorgerücktere, ganztägig, für Anfänger (mit Veillon und Zickendraht), 8; Physikalisches Kolloquium, 14 tägig, 2 *g*. — **Matthies**: Mechanik, 4, Übungen, 1 *g*; Elastizitätstheorie, 2; Mathematisch-physikalisches Seminar: Ausgewählte Probleme aus den neueren Theorien, 2 *g*. — **Veillon**: Elementare Übungen in mathematischer Physik, 2. — **Zickendraht:** Radiotelegraphie und -telephonie, 2; Radiotelegraphisches Praktikum, 3. — **Zehnder**: Geschichte der Physik II: Neuzeit, 2; Physikalische Weltanschauungen II: Makrokosmos, 2. —

Rupe: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Vollpraktikum für organische Chemie, tägl.; Chemisches Kolloquium (mit Fichter, Bernoulli und Ruggli), 1 *g*. — **Fichter**: Analytische Chemie, 2; Experimentalchemie der seltenen Metalle, 1; Analytisches Halbpraktikum für Chemiker und Pharmazeuten, 9; Übungen in der qualitativen Analyse für Mediziner, 9; Chemisches Vollpraktikum: Anorganische und elektrochemische Übungen und Arbeiten, tägl. — **Bernoulli**: Physikalische Chemie II: Chemische Thermodynamik, 1; Metallographie und theoretische Metallurgie, 1; Chemisches Praktikum für Lehramtskandidaten und Naturwissenschaftler, 9; Physikalisch-chemisches Vollpraktikum, tägl.; Physikalisch-chemisches Praktikum für Anfänger, 4. — **Kreis**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel II, 2; Übungen in der Untersuchung von Lebensmitteln, 4; Arbeiten im Laboratorium für angewandte Chemie, tägl. — **Ruggli**: Chemie der Alkaloide, 1; Kurzes Repetitorium der organischen Chemie, 1. —

Mohrmann: Differential- und Integralrechnung, 4, Übungen, 1; Kurven und Flächen, 4; Mathematisches Seminar (mit Spieß), 1 *g*. — **Spieß**: Integralrechnung III: Anwendungen, 3; Funktionentheorie II: Elliptische Funktionen, lineare Differentialgleichungen usw., 3; Geschichte der Mathematik im 17. Jahrhundert, 1. — **Niethammer**: Sphärische Astronomie II und geographische Ortsbestimmung, 2; Methode der kleinsten Quadrate, 1; Astronomische Übungen für Anfänger, 3, für Vorgerückte, 3. — **Flatt**: Pädagogisches Seminar, mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung, 4; Repetitorium der Geometrie, 2; Geschichte der physischen Erziehung, 1. —

Universität Bern.

Forster: Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität, Wärme, 6; Theoretische Optik, 1 *g*; Repetitorium der Physik, 2; Physikalisches Praktikum, 4; Arbeiten im physikalischen Institut für Vorgerückte, nach Verabredung; Praktikum für wissenschaftliche Photographie, 2. — **Gruner**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus: Elektronentheorie, 4; Vektoranalysis und Potentialtheorie, 1; Mechanik deformierbarer Körper, 2; Seminar für theoretische Physik, 2. — **Blattner:** Elektrizitätswerke und elektrische Bahnen, 1; Theorie der Wechselströme (Einleitung), 1, Fortsetzung, 1. — **Luterbacher:** Dynamik, 2. — **Koestler**: Elektromagnetische Schwingungen, 2; Wechselstromtechnik, 2; Einführung in die theoretische Mechanik, 1—2; Theorie und Berechnung statisch unbestimmter Systeme, 1—2. —

Kohlschütter: Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 6; Anorganisch-chemisches Praktikum, tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner, $6^1/_2$; Kolloquium über anorganische Chemie: Einführung in die chemische Literatur, 1. — **Ephraim**: Physikalische Chemie, 3; Repetitorium der anorganischen Chemie, 2; Elektrochemisches Praktikum, 4. — **Mai**: Repetitorium der anorganischen Chemie: Allgemeiner Teil, 1. — **Frl. Woker:** Arbeiten im Laboratorium für physikalisch-chemische Biologie, ganz- und halbtägig; Kurs für die Untersuchung der Körperflüssigkeiten: Harn, Blut, Magensaft, Milch, 4; Physikalisch-chemische Biologie, 2; Fermente und Fermentwirkungen, 1. — **Tambor**: Organisch-chemisches Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend; Organische Chemie II, 5; Repetitorium der organischen Chemie I, 1. — **Abelin:** Ausgewählte Kapitel aus der Chemie der Fettreihe, 1—2. — **Schaffer:** Chemie der Nahrungs- und Genußmittel I, 2; Chemische Technologie der Lebensmittelgewerbe, nach Verabredung. —

Huber: Theorie der algebraischen Flächen, 3; Fouriersche Reihen und Integrale mit Anwendungen auf die Physik, 2; Determinantentheorie, 1; Mechanik des Himmels, 2; Mathematisches Seminar, 1. — **Crelier**: Algebraische Analysis 2; Sphärische Trigonometrie, 2; Integralrechnung, 2; Analytische Geometrie, 2; Darstellende Geometrie II, 2, IV, 2; Synthetische Geometrie (Fortsetzung), 2; Einleitung in die Differentialrechnung, 1; Elemente der Renten- und Versicherungslehre, 1; Mathematische Übung, 1; Mathematische Übungen und Repetitorium, 1. — **Berliner**: Zahlentheorie, 2. — **Manderli:** Astronomische Phänomenologie II: Theorie und Berechnung insbesondere der Sonnenfinsternisse und verwandter Erscheinungen, 2; Geographisch-astronomische Ortsbestimmung, 2, eventl. Übungen, nach Verabredung; Einführung in die Physik des Himmels, 1. — **Moser**: Mathematische Grundlagen der Krankenversicherung, 2; Die Makehamsche Funktion, 2; Einführung in die Lebensversicherungsrechnung, nach Verabredung; Mathematisch-versicherungswissenschaftliches Seminar, 1—2. — **Bohren**: Die Sozialversicherung und ihre Grundlagen, 2. —

Technische Hochschule Braunschweig.

Diesselhorst: Experimentalphysik: Elektrizität und Magnetismus, 4; Theorie der Elektrizität, 4; Physikalisches Praktikum I und II; Physikalisches Kolloquium, 14 tägig, 2 *g*. — **Weber**: Potentialtheorie mit Anwendungen auf die Elektrostatik, 2. — **Bergwitz**: Atmosphärische Elektrizität, 1; Radioaktivität, 1. — **Witte**: Grundzüge der mathematischen Physik, 1. — **Peukert**: Grundzüge der Elektrotechnik, 2; Allgemeine Elektrotechnik, 4; Elektrotechnische Übungen, 2; Elektrotechnisches Praktikum, 6; Arbeiten im elektrotechnischen Laboratorium, 9. — **Müller**: Elektromaschinenbau, 4, Übungen, 6; Elektrische Kraftanlagen, 2, Übungen, 2. —

Fries: Unorganische Experimentalchemie, 5; Chemie der organischen Farbstoffe, 3; Arbeiten im chemischen Laboratorium; Chemisches Kolloquium (mit Roth), *g*. — **R. Meyer**: Geschichte der Chemie, 1. — **Biehringer:** Analytische Chemie, 2; Chemische Technologie der Faserstoffe, 1; Heizstoffe und Kesselspeisewasser, 2, Übungen, 1. — **Roth**: Physikalische Chemie, 2; Metallurgie, 2; Chemie der Metalle, 1; Arbeiten im Laboratorium für physikalische Chemie und Elektrochemie. — **Reinke**: Chemische Technologie II, 1, 6, Übungen, 1; Chemisch-technische Analyse I, 2; Arbeiten im Laboratorium für chemische Technologie II und landwirtschaftlich-chemische Gewerbe; Chemische Technologie in den deutschen Kolonien, 1. — **Beckurts**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Gerichtliche Chemie, 1; Grundzüge der Maßanalyse, 1; Pharmazeutische Chemie, 4; Arbeiten im Laboratorium für pharmazeutische Chemie und Nahrungsmittelchemie. — **Troeger**: Analytische Chemie, 2; Chemie der Benzolderivate, 2; Repetitorium der anorganischen und organischen Chemie, 2. — **Emde**: Organische Stoffe mit physikalischer Wirkung: Arzneimittelsynthese, 1. —

Fricke: Analytische Geometrie und Algebra, 3; Differential- und Integralrechnung I, 5, Übungen, 2, II, 2. — **Timerding**: Darstellende Geometrie, 4, Übungen, 6; Algebraische Analysis, 2; Synthetische Geometrie, 2. — **Schlink**: Technische Mechanik I: Statik, 3, Übungen und Repetitionen, 2, II: Dynamik, 3, Übungen und Repetitionen, 2; Die Grundlagen des Fliegens und die verschiedenen Arten von Flugzeugen, 1; Eisenhochbauten, 2, Übungen, 4; Statik der Baukonstruktionen I, 3, Übungen, 4, II,

Übungen, 4. — **Lührs**: Grundzüge der Geodäsie, 1, Übungen, 1; Geodäsie II, 3, Übungen, 1; Höhere Geodäsie eventuell Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2; Planzeichnen, 4. —

Technische Hochschule Breslau.

Lummer: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrizität, Optik, 4; Physikalisches Praktikum, 3. — **Hilpert**: Elektrotechnik, 4; Elektromaschinenbau, I u. II, 2, Übungen, 4; Elektrotechnisches Laboratorium II, 4, III, 8; Kolloquium, 14tägig, g. — **Euler**: Elektrotechnische Meßkunde I und II, 2; Elektrische Kraftanlagen I, 2; Übungen, 4. — **Bohner**: Fernsprechtechnik, 2. —

Ruff: Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 4; Anorganische Experimentalchemie für Fortgeschrittene, 3; Anorganisch-chemisches Praktikum, tägl.; Chemisches Kolloquium (mit Eucken, Neumann und Semmler), 14 tägig, 2g. — **Eucken**: Physikalische Chemie I, 4; Physikalisch-chemisches Praktikum für Fortgeschrittene, tägl.; Kleines physikalisch-chemisches Praktikum I und II, 4; Einführung in das physikalisch-chemische Praktikum, 1. — **Neumann**: Anorganisch-chemische Technologie I und II, 4; Chemisch-technisches Praktikum, tägl.; Elektrochemisch-technisches Praktikum, tägl.; Kokerei-Praktikum, tägl.; Technische Elektrochemie, 1. — **Semmler**: Organische Technologie, 3; Organisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Nauß**: Technik der Gasanalyse, 1. — **Jonas**: Ausgewähle Gebiete der organischen Chemie II: Chemie der Steinkohle, Farbstoffe, Sprengstoffe, ätherischen Öle, Alkaloide, Harze, 3, Terpene und Camphor, 2. —

Dehn: Höhere Mathematik I, 5, Übungen, 3; für Chemiker und Hüttenleute, 3, Übungen, 2. — **N. N.**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 4; Ausgewählte Kapitel der Geometrie, nach Vereinbarung. — **Steinitz**: Höhere Mathematik III, 2, Übungen, 2; Potentialtheorie, 2. — **N. N.**: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Luftschiffahrt: Theorie der Luftschiffahrt, 2. —

Technische Hochschule Danzig.

Krüger: Experimentalphysik I, 3; Kleines physikalisches Praktikum, 4; Handfertigkeitspraktikum, 4; Großes physikalisches Praktikum, tägl.; Spezialvorlesung über ein physikalisches Gebiet, 2. — **Kalähne**: Einführung in das physikalische Praktikum, 1; Kinetische Theorie der Materie, 2; Photographie und photographische Reproduktionsverfahren, 1, Übungen für Anfänger und Fortgeschrittene, 3; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten im photophysikalischen Laboratorium, tägl. — **Försterling**: Elektrodynamik, 3. — **Roeßler**: Elektrotechnik II, 4; Elektrotechnisches Laboratorium II, 6 u. 9, III, 9, IV, tägl. außer Sonnabend; Projektierung elektrischer Anlagen, 2, Übungen, 4; Berechnung und Entwurf elektrischer Maschinen (mit Roth), 2, Übungen, 4. — **Grix**: Elektrische Hausinstallationen und Beleuchtungstechnik, 1; Elektrische Bahnen, 2, Übungen 4; Schwachstromtechnik, einschließlich Hochfrequenztechnik, 2. — **Roth**: Elektromaschinenbau, 1, Übungen, 4; Elektrotechnische Meßkunde, 2, Apparate- und Schalttafelbau, 2, Übungen, 4. — **Föttinger**: Einführung in die Physik der technischen Strömungserscheinungen, 2. — **Horn**: Schwingungserscheinungen auf Schiffen, 2. — **N. N.**: Praktische Meteorologie und Luftfahrt, 2. —

v. Wartenberg: Anorganische Experimentalchemie, 4; Praktikum im anorganisch-chemischen und elektrochemischen Laboratorium (mit Jellinek), tägl.; Physikalische Chemie I und II, 2; Kleines physikalisch-chemisches Praktikum I und II, 4; Großes physikalisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Wohl**: Organische Experimentalchemie I, 4; Praktikum im organisch-chemischen Laboratorium, tägl.; Praktikum im Laboratorium für landwirtschaftliche Gewerbe, tägl. — **Jellinek**: Analytische Chemie mit allgemeiner Einführung in die Chemie II, 3. — **Glimm**: Spezielle Technologie der Gärungsgewerbe, 2; Physiologische Chemie, 1; Praktikum für Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel sowie Gärungsphysiologie, tägl.; Technisch-chemische Untersuchungsmethoden, 3. —

v. Mangoldt: Höhere Mathematik II, 4, Übungen, 1; Ausgewählte Kapitel aus der höheren Mathematik, 2; Mathematisches Seminar (mit Sommer), 2g. — **Lorenz**: Dynamik starrer Körper, 2, Übungen, 2; Festigkeitslehre und Hydraulik, 4, Übungen 3. — **Schilling**: Darstellende Geometrie, 3, Übungen, 5; Malerische Perspektive und Photogrammetrie, 1, Übungen, 2. — **Sommer**: Höhere Mathematik I, 6; Flächentheorie, 3. — **v. Brunn**: Theorie der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, 2. — **Eggert**: Geodäsie I, 2, II, 2; Planzeichnen, 2; Geodätisches Praktikum I, 2, II, 2. —

Technische Hochschule Dresden.

Hallwachs: Experimentalphysik I, 5; Physikalisches Praktikum I, 6 oder 3, II, einschließlich Laboratoriumstechnik, für Fortgeschrittene, 9; Praktikum für größere physikalische Arbeiten, 20; Physikalisches Kolloquium, Referate über neue Arbeiten (mit Helm und Toepler), 14tägig, 2g. — **Toepler**: Theoretische Physik II: Wärme, 4, Übungen, 1. — **Dember**: Kathoden- und Röntgenstrahlen, 1; Harmonische Analyse und deren Anwendung, 1. — **Luther**: Photographie, 2; Photographisches Praktikum für Anfänger, sowie für Vorgeschrittene, 4 und 8; Selbständige Arbeiten, halb- und ganztägig. — **Görges**: Allgemeine Elektrotechnik II, 2; Theorie des Wechselstromes II, 4; Starkstromanlagen II, mit Übungen, 2; Elektrotechnische Übungen für Geübtere, 8; Elektotechnisches Praktikum, 4; Größere elektrotechnische Spezialarbeiten, 20. — **N. N.**: Elektromaschinenbau II, 2, IV, 2, Übungen, 4 und 8. — **Lottermoser**: Elektrische Öfen, 1. — **Barkhausen**: Elektrische Schall- und Schwingungsvorgänge, 2; Praktikum für Schwachstromtechnik, I, 3, II, 3; Größere Arbeiten auf dem Gebiete der Schwachstromtechnik, 20. —

F. Foerster: Metallurgie, 2; Chemische Großindustrie, 2; Spezielle anorganische Chemie, 2; Anorganisch-chemisches Praktikum: Qualitative Analyse, 12, Gewichts-, Maß- und Gasanalyse, Präparate, tägl. außer Sonnabend. — **Scholl**: Organische Chemie, 5; Organisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend. — **König**: Chemie und Technologie der aromatischen Verbindungen I, 2, Chemie der Textilindustrie, 3; Praktikum für Farbenchemie, 8; Praktikum für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Farbenchemie bzw. Färbereitechnik, ganztägig, Praktikum für Farbenchemie bzw. Färbereitechnik, halbtägig. — **Ernst Müller**: Allgemeine mechanische Technologie I, 3; Spinnerei, 3; Technologisches Praktikum für die Faserstofftechnik, 12, für Fortgeschrittene, 20. — **Erich Müller**: Elektrochemie, 2; Physikalische Chemie 3; Praktikum für Elektrochemie, 8; Praktikum für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Elektrochemie und physikalischen Chemie, tägl. außer Sonnabend. — **Dietz**: Chemische Technologie der Tonwaren, 1. — **Steinkopf**: Organisch-technische Chemie II, 2. —

Krause: Höhere Mathematik II, 4, Übungen, 2; Höhere Mathematik für die Hochbau- und Chem.-Abteilung, 2; Einleitung in die Theorie der komplexen Funktionen; 3; Mathematisches Seminar, 1g; Seminaristische Übungen für Physik, 1g. — **Helm**: Höhere Mathematik IV, 3, Übungen (mit Naetsch), 14tägig, 2; Kollektivmaßlehre einschließlich Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3. — **Ludwig**: Darstellende Geometrie II, 4, Übungen, 4; Darstellende Geometrie II: Perspektive, mit Übungen, 1; Differentialgeometrie der Raumkurven und Flächen, 3; Seminaristische Übungen über höhere Geometrie, 1g. — **v. Mises**: Fluglehre: Elementare Theorie und Berechnung der Flugzeuge, 3; Seminar: Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Fortgeschrittene, 1g. — **Böhmer**: Invaliditäts- und Pensionsversicherung, 2; Lebensversicherungsmathematik II, 1; Analytische Geometrie der Flächen 2. Grades, 3; Determinanten, 1; Übungen zur Versicherungsmathematik, 2. — **Naetsch**: Höhere Mathematik III und IV, 5, Übungen, 14tägig, 2; Einleitung in

die Theorie der partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung und des Pfaffschen Problems, 2. — **Pattenhausen:** Geodäsie, I, 2, Übungen, 2, II, 3, Übungen, 2; Höhere Geodäsie II, 2, Übungen, 2; Einführung in die Kenntnis des Fixsternhimmels, mit Beobachtungen im Observatorium, 1; Geodätische Ausarbeitungen, 2; Geodätische Rechenübungen, 2; Skizzieren geodätischer Instrumente, 2; Katastervermessung, 2; Planzeichnen I, Übungen, 2. —

Universität Erlangen.

Wiedemann: Experimentalphysik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 2; Physikalisches Halb- und Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Reiger:** Theoretische Physik, 4, Übungen, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium (mit Würschmidt und Hauser), 1 g. — **Würschmidt**: Geophysik, 4; Geschichte der Mathematik und Physik I, 2. — **Hauser**: Angewandte Physik, 2. —

O. Fischer: Organische Experimentalchemie, 5; Praktische Übungen im Chemischen Laboratorium (mit Henrich): a) Analytisch-chemische Übungen, b) Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Mediziner, 4. — **Busch:** Organische Chemie unter Berücksichtigung ihrer Anwendung in der Pharmazie, 3; Grundlagen der Nahrungsmittelchemie, 2; Chemisches Praktikum: a) ganztägig, tägl., b) halbtägig, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Übungen in der Untersuchung von Nahrungs- und Genußmitteln, tägl. außer Sonnabend. — **Henrich**: Analytische Chemie der Metalle, 2; Theorien der Chemie, 1. — **Dilthey**: Ausgewählte Kapitel aus der Arzneimittelsynthese, 2. —

Noether: Geometrische Transformationen, 4. — **E. Fischer**: Algebra, I, 4: Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 3 *g*. — **Tietze**: Analytische Geometrie des Raumes, 4, Übungen, 1; Bestimmte Integrale und Einführung in die Lehre von den Differentialgleichungen, 4, Übungen, 2; Seminar für Fortgeschrittene, 2. — **Holzberger**: Darstellende Geometrie II, 4, Übungen, 2 *g*. — **Hartwich**: Sonnensystem und Fixsternwelt, 2; Systematische Vorführung der Einrichtungen der Sternwarte, tägl. außer Donnerstag, *g*; Astronomisches Praktikum auf der Sternwarte, tägl. *g*. —

Universität Frankfurt a. M.

Wachsmuth: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Polarisation des Lichtes, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium (mit Born), 14 tägig, 2 *g*; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 6, für Fortgeschrittene, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 3; Handfertigkeitspraktikum (mit Seddig), nach Verabredung; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig. — **Born**: Mechanik II: Elastizität und Hydrodynamik, 4, Übungen, 1; Seminar über Quantentheorie (mit Stern), 1 *g*. — **Seddig:** Repetitorium der Experimentalphysik, 4; Photographisches Praktikum, 4 oder 8; Übungen zur Anstellung von optischen Projektionen und Vorlesungsversuchen, 2; Leitung selbständiger Arbeiten aus dem Gebiete der wissenschaftlichen Photographie, ganztägig. — **Stern**: Thermodynamik, 2; Molekulartheorie II: Statistische Mechanik, 2; Das Atom, 1. — **N. N.**: Theorie der Elektrizität, nach Verabredung. — **Déguisne**: Der elektrische Gleichstrom, 2; Gleichstrommessungen, 1; Einführung in die drahtlose Telegraphie, 1; Magnetismus, 1 *g*; Kolloquium über die neuere Literatur der angewandten Physik, 14 tägig, $1^1/_2$ *g*; Kleines elektrotechnisches Praktikum, 3 oder 6; Großes elektrotechnisches Praktikum, halb- oder ganztägig; Röntgenpraktikum, 3; Wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig. — **Gramberg**: Thermodynamische Untersuchungen an Maschinen: Instrumente und Methoden zu ihrer wissenschaftlichen Untersuchung, 1; Abriß der Wärmemaschinen: Einrichtung und thermodynamische Wirkungsweise der thermischen Kraft- und Arbeitsmaschinen, 1. — **Linke**: Wetterkunde, 2; Sonnenstrahlung, 1 *g*; Meteorologisch-geophysikalische Übungen, 2. —

Freund: Organische Experimentalchemie, 5; Kolloquium über organische Chemie, 14 tägig, 2; Chemisches Praktikum und Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten: a) organische Abteilung (mit F. Mayer und Fleischer), tägl., b) anorganische Abteilung (mit Ebler, F. Hahn und Speyer), tägl. außer Sonnabend, für Mediziner (mit Ebler, F. Hahn und Speyer), 4, für Angehörige der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät (mit Speyer), 2 halbe Tage. — **Lorenz**: Physikalische Chemie, 4; Neuere Theorien des elektrolytischen Leitvermögens, 1 *g*; Großes physikalisch-chemisches Praktikum (mit Fraenkel und Fester), halb- oder ganztägig; Kleines Praktikum der physikalischen Chemie und Elektrochemie (mit Fraenkel), 4 Wochen; Metallographisches Praktikum (mit Fraenkel), 3; Chemisch-technisches Praktikum (mit Fester), 3; Wissenschaftliche Arbeiten (mit Fraenkel und Fester), ganztägig; Physikalisch-chemisches Kolloquium, 14 tägig, 2. — **Fraenkel**: Heterogene Gleichgewichte, 2; Blei und Edelmetalle, 1. — **Fester**: Technische Chemie, auf physiko-chemischer Grundlage, I: Brennstoffe, 2. — **Fleischer**: Synthetische Methoden der organischen Chemie, 2; Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der anorganischen Chemie, 1. — **F. Mayer**: Einführung in die anorganische Chemie auf elementarer Grundlage, 1; Zwischenprodukte der Teerfarbenindustrie: Chemie der Benzolderivate, 2; Färberei und Zeugdruck, 1; Praktische Übungen in der Färberei der Textilfasern, 2. — **Ebler**: Einführung in die anorganische Chemie und qualitative Analyse, 3; Kolloquium über anorganische Chemie, 1 *g*; Gasanalyse und Gasvolumetrie, 1; Praktische Übungen im Arbeiten mit Gasen, 4; Einführung ins Mediziner-Praktikum, 1. — **Hahn**: Neuere Anschauungen auf dem Gebiete der anorganischen Chemie: Valenz- und Strukturlehre, 2; Chemisches Repetitorium für Mediziner, 2. — **Speyer**: Chemische Technologie IV: Anorganische Prozesse, 2; Chemie der Alkaloide, 1. — **Wedekind**: Chemie der zyklischen Verbindungen II: Heterozyklische Verbindungen, 2; Chemie der physiologisch und therapeutisch wichtigen Stoffe, 2. — **N. N.**: Pharmazeutische Chemie, 3; Die analytische Auffindung der Gifte, 2; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, ganz- oder halbtägig. — **Tillmans**: Nahrungsmittelchemie, II, 2; Praktikum der Nahrungsmittelchemie oder Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, ganz- oder halbtägig; Kursus in Nahrungsmitteluntersuchung, 4. — **Popp**: Gerichtliche Chemie und naturwissenschaftliche Kriminalistik, $1^1/_2$. — **Becker**: Angewandte Chemie und Bakteriologie in Industrie, Handel und Gewerbe, Chemisch-technische Warenkunde, Chemie und Industrie der Ersatzstoffe, mit Exkursionen, 3; Chemisches Praktikum: Übungen in der Untersuchung und Beurteilung von Handelswaren: Chemisch-technische Analyse, 5; Bakteriologischer Lehrkurs für Apotheker: Desinfektion und Sterilisation, 5. —

Bieberbach: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 2; Darstellende Geometrie mit Übungen, $3^1/_2$; Mathematisches Seminar: Lektüre von Gauß' Disquisitiones arithmeticae (mit Epstein, Hellinger, Schoenflies, Szasz), 2: Das Wesen der Mathematik, 1. — **Schoenflies**: Projektive Geometrie, 4, Übungen, 1. — **Hellinger**: Zahlentheorie, 4, Übungen, 1; Die Reihenentwicklungen der mathematischen Physik, 3. — **Epstein**: Algebra, 4, Übungen, 1; Höhere Flächentheorie, 2. — **Szasz**: Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4, Übungen, 1; Reelle Funktionen und Lebesguesche Integrale, 2; Übungen über höhere Analysis (mit Hellinger), 1. — **Brendel**: Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3; Übungen im astronomischen Rechnen, nach Verabredung; Einführung in die Versicherungswissenschaft, 2. — **Brill**: Rotation der Himmelskörper, 2. —

Universität Freiburg i. B.

Himstedt: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Übungen aus der theoretischen Physik, 1; Physikalisches Kolloquium, 2; Physikalisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu selbständigen Ar-

beiten, tägl. — **Koenigsberger**: Mathematische Physik: Optik, mit Übungen, 3 *g*; Quantentheorie, 1 *g*; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Mathematisch-physikalisches Kolloquium, *g*. — **N. N.**: Anleitung zu selbständigen Arbeiten im technisch-physikalischen Institut, tägl. *g*. — **Ansel**: Dynamik und Thermodynamik der Atmosphäre, 2 *g*; Populäre Astronomie, mit Lichtbildvorführungen, 2; Graphische Methoden der angewandten Mathematik, 2; Astronomische Ortsbestimmung mit Übungen am Universal, 2. — **Friedrich**: Moderne Atomtheorien, 2; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten, 1 *g*; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Die Dosimeterverfahren der Strahlentherapie für Mediziner, 1. — **Meyer**: Elektrochemie, 2; Physikalische Chemie für Mediziner, 1; Radioaktivität mit Demonstrationen, 1; Photographie mit Übungen und Demonstrationen, 2; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum, 2; Selbständige physikalisch-chemische Arbeiten, nach Verabredung. —

Gattermann: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum (mit Fromm, Meigen, Skita und Schwarz): für Chemiker, tägl. außer Sonnabend, für Nichtchemiker, halbtägig; Übungen im Experimentieren und Vortragen I, anorganisch, 2 *g*. — **Riesenfeld**: Anorganische Technologie: Metallurgie, mit Exkursionen, 2; Ionenlehre, 1; Chemie der seltenen Elemente, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im technologischen Institut, tägl.; Elektrochemisches Praktikum, 4. — **Fromm**: Organische Experimentalchemie, 5; Repetitorium der anorganischen Chemie für Mediziner, 2, Repetition, 1. — **Meigen**: Qualitative Analyse, 3; Chemisches Rechnen I, 1. — **Skita**: Aromatische Chemie: Benzolderivate, 2; Kolloquium für organische Chemie, 1. — **Madelung**: Chemie der heterozyklischen Verbindungen, 1. — **Schwarz**: Quantitative Analyse, 2; Chemie der Metalloide, 1. —

Loewy: Differential- und Integralrechnung I, mit Übungen, 5; Analytische Geometrie des Raumes, mit Übungen, 5; Ausgewählte Fragen der Algebra, nach Verabredung, *g*. — **Heffter**: Synthetische Geometrie, 4; Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln, 4; Funktionentheorie, 2 *g*. — **Seith**: Geometrie des Kreises, der Kugel und der Kegelschnitte, 2. — **Stickelberger**: Zahlentheorie, 3. — **Bolza**: Variationsrechnung, 4. —

Universität Freiburg (Schweiz).

Gockel: Experimentalphysik I, 6; Physik der Erde, 2; Physikalisches Kolloquium, 1; Physikalisches Praktikum für Mediziner und Pharmazeuten (mit v. Hauer), 6; Arbeiten und Übungen im Laboratorium, tägl. — **Joye**: Allgemeine Physik: Optik, 3; Mathematische Physik: Optik, 3; Physikalisches Seminar, 1; Praktische physikalische Übungen für Anfänger und Chemiker, 8; Physikalisches Laboratorium für Fortgeschrittene oder Lehramtskandidaten, tägl. außer Montag; Untersuchungsarbeiten im Laboratorium, tägl. — **v. Hauer**: Einführung in die physikalisch-chemischen Theorien, 3. —

Bistrzycki: Analytische Chemie II, 2; Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie und Technologie II, 3; Chemisches Kolloquium, 1; Analytisches Praktikum, sowie Anleitung zu selbständigen organisch-chemischen Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Analytisch-chemisches Praktikum für Mediziner, 14. — **v. Estreicher**: Anorganische Chemie, 5; Repetitorium über anorganische Chemie, 1; Chemisches Praktikum für Naturwissenschaftler und Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend. —

Plancherel: Differential- und Integralrechnung, 4, Übungen, 2; Theoretische Mechanik, 3. — **Bays**: Analytische Geometrie, 3, Übungen, 2; Funktionstheorie, 3. —

Universität Gießen.

König: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5; Physikalisches Praktikum (mit Uller und Cermak), für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 6, für Vorgeschrittene, nach Verabredung, für Chemiker, Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3; Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten, tägl.; Physikalisches Seminar für Lehramtskandidaten: Übungen in Demonstrationsversuchen und Behandlung einfacher theoretischer Hausaufgaben (mit Cermak), 14 tägig, 2 *g*; Physikalisches Kolloquium (mit Fromme), 14 tägig, 2. — **Cermak**: Handfertigkeitspraktikum, 3; Stromleitung in Gasen, mit Versuchen, 1; Röntgendiagnostik und Röntgentherapie in der Medizin, 1 *g*. — **Uller**: Einführung in die Gleich- und Wechselstromtechnik, zugleich Vorbereitung für die elektrotechnischen Übungen für Naturwissenschaftler, 2. — **Jentzsch**: Wärmekraftmaschinen in elementarer Darstellung, 1; Optotechnische Übungen, auch Anleitung zu selbständigen Arbeiten, nach Verabredung; Wissenschaftliche Mikroskopie, mit Demonstrationen, 1. — **Fromme**: Thermodynamik, 3; Theoretisch-physikalische Übungen, 1; Elemente der Astronomie und der mathematischen Geographie, mit Übungen, $1^1/_2$. —

Elbs: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum (mit Brand), tägl.; Chemische Übungen (mit Brand), für Landwirte, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner und Veterinärmediziner 5; Übungen in Unterrichtsversuchen für Lehramtskandidaten (mit Brand), 14 tägig, 2 *g*; Chemisches Kolloquium (mit Schaum, Brand und Feist), 2; Pharmazeutisch-chemische und nahrungsmittelchemische Übungen (mit Feist), tägl. — **Brand**: Chemische Technologie I: Technologie der anorganischen Stoffe mit Besichtigungen chemischer Betriebe, 2; Organische Farbstoffe mit Demonstrationen, 2; Warenkunde mit Demonstrationen, 1. — **Schaum**: Theoretische Chemie: Atomistik, Energetik und Verwandtschaftslehre, 2; Neuere Fortschritte auf dem Gebiet der physikalischen Chemie, 1; Repetitorium der allgemeinen Chemie mit besonderer Berücksichtigung der anorganischen Chemie, 1; Physikalisch-chemische Übungen, 6 bzw. 3; Physikalisch-chemisches Praktikum, ganz- oder halbtägig. — **Feist**: Pharmazeutisch-chemische Präparate, organischer Teil, 3; Ausmittelung der Gifte, 2. —

Engel: Zahlentheorie, 4; Integralrechnung, mit Übungen, 4; Funktionentheorie (Fortsetzung), 2; Mathematische Übungen für mittlere Semester, 1; Mathematisches Seminar: Differentialgeometrie, 2. — **Schlesinger**: Höhere Mathematik mit Übungen, 2; Synthetische Geometrie, 4; Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4; Mathematisches Seminar: Funktionentheorie, 1. — **Graßmann**: Lineare Systeme von Kegelschnitten, mit Übungen, 4; Analytische Mechanik I, 4; Mathematisches Seminar: Analytische Mechanik, 1. — **N. N.**: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, 2; Übungen in der Versicherungsrechnung, 2. — **Maennchen**: Numerische und graphische Auflösung von Gleichungen mit Übungen, 3. —

Universität Graz.

Benndorf: Experimentalphysik I: Allgemeine Physik und Mechanik, 5; Physikalische Übungen für Anfänger I, 6 *g*, II, 9 *g*; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend, *g*; Besprechung physikalischer Fragen (mit Radakovic), 2 *g*. — **N. N.**: Experimentalphysik I, für Mediziner und Pharmazeuten, 5. — **Streintz**: Akustik (Fortsetzung), 2. — **Rosenberg**: Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche, 3 *g*. — **Wassmuth**: Die Zustandsgleichung, 1 *g*. — **Radakovic**: Elektrizität, 5; Seminar für theoretische Physik, 2 *g*. — **Brell**: Vektorenrechnung mit Übungen, 3 *g*; Einführung in die Relativitätstheorie, 2. — **Ficker**: Allgemeine Meteorologie, 3; Ausgewählte Kapitel der Geophysik, 1; Meteorologisches Konversatorium, 1; Anleitung zur Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten, 2. —

Skrabal: Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 5; Chemische Übungen (mit Faltis), für Anfänger, tägl. außer Sonnabend, für Vorgeschrittene, tägl., für Mediziner, 4. — **Kremann**: Physikalische Chemie I, 2; Physikalische Arbeits- und Meßmethoden, 3; Physikalisch-chemisches Praktikum, für Vorgeschrittene, 20. — **Faltis**: Pharmazeutische Chemie, 5. — **Hemmelmayr**: Ausgewählte Kapitel aus der chemischen Technologie: Gärungs-

industrien, Kautschuk, 2; Experimentierübungen: Chemische Schulversuche, 2. —

Daublebsky: Differential- und Integralrechnung, 5; Mathematisches Seminar, 2 *g*. — **Streißler**: Darstellende Geometrie, 3. — **Hillebrand**: Theorie der Rotation der Himmelskörper, 3; Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, 2. —

Universität Hamburg.

Koch: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 4; Physikalisches Praktikum (mit Goos und Müller), 4; Physikalische Übungen für Fortgeschrittene und Anleitung zu selbständigen Arbeiten (mit Classen), tägl. — **Classen**: Einführung in die theoretische Physik: Elektrodynamik, 4. — **Jensen**: Ausgewählte Kapitel aus der atmosphärischen Optik, 1. — **Voege**: Elektrische Meßkunde, einschließlich Photometrie, 1. —

Rabe: Allgemeine Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 4, Chemisches Praktikum im analytischen Laboratorium (mit Paneth): Voll- und Halbpraktikum, tägl. außer Sonnabend, Medizinerhalbpraktikum, 3; Chemisches Praktikum im organischen Laboratorium und Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen, tägl. außer Sonnabend. — **Paneth**: Analytische Chemie, I, 2; Spezielle anorganische Chemie, 2. — **Voigtländer**: Technische Chemie und ihre Beziehungen zur Volks- und Weltwirtschaft, 1 *g*; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel I, 2; Praktische Übungen auf dem Gebiete der gerichtlichen Chemie, mit Besprechungen I: Toxikologie (mit Göhlich), nach Verabredung. — **Göhlich**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 2. — **Ehrenstein**: Chemische Übungen im Untersuchen und Beurteilen von Fetten und Ölen, 3. —

Radon: Differentialrechnung, 4, Übungen, 2; Differentialgleichungen, 2. — **Hecke**: Zahlentheorie, 4; Mathematische Behandlung der kinetischen Gastheorie, 4; Seminar: Über höhere Zahlentheorie, 2 *g*. — **Blaschke**: Projektive Geometrie, 4; Allgemeine Mechanik, 4, Übungen, 1 *g*; Mathematisches Seminar (mit Radon), 2 *g*. — **Riebesell**: Differential- und Integralrechnung II, 2, Übungen, 2 *g*; Die Grundlagen der mathematischen Statistik, 1 *g*. — **Schorr**: Sphärische Astronomie II, 2; Allgemeine Astronomie, 2. — **Schwassmann**: Einführung in die Astrophysik, 1. — **Dolberg**: Theorie der Planetenbewegung, 2. — **Graff**: Einführung in die Geodäsie I, theoretischer Teil: Basismessung, Triangulation, Netzentwürfe der Landesaufnahmen, 2. — **Tams**: Erdbeben, Erdmagnetismus, Konstitution des Erdkörpers, 2. — **Wegener**: Die Erforschung der oberen Luftschichten mit Drachen und Ballonen: Aerologie, 1. —

Universität Heidelberg.

Lenard: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 4; Physikalisches Praktikum (mit Becker und Ramsauer), 6; Physikalisches Seminar, 1 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten Fortgeschrittener im physikalischen und radiologischen Institut (mit Becker und Ramsauer), tägl. außer Sonnabend. — **Becker**: Theoretik der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Theorie der Strahlung und Quantentheorie, 1; Theoretisch-physikalische Übungen, 1 *g*. — **Ramsauer**: Radiologie mit Demonstrationen: Der Aufbau der Materie, 2. — **Schmidt**: Photographische Kurse für Anfänger und Vorgeschrittene, 2. —

Curtius: Experimentalchemie II: Organische Verbindungen, 4; Chemisches Praktikum für Anfänger und für Geübtere in anorganischer, organischer, physikalischer, analytischer und pharmazeutischer Chemie (mit Knoevenagel, Trautz, Stollé, Muckermann, Müller und Wilke), tägl. außer Sonnabend, auch für Lehramtskandidaten, für Mediziner, 4. — **Krafft**: Anorganische Chemie, 4; Praktisch-chemische Übungen und Arbeiten im Laboratorium, tägl. außer Sonnbend; Chemisches Anfängerpraktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Knoevenagel**: Chemie der Benzolderivate, 3; Chemie und Technologie der Teerfarbstoffe, 2; Praktische Anwendung organischer Farbstoffe in der Färberei und Druckerei, 4—6 Wochen. — **Trautz**: Physikalische Chemie: Elektrochemie, Thermochemie, Molekulartheorie, chemische Gleichgewichte, 3, Übungen, 1; Grundbegriffe der Chemie mit Experimenten, 2; Physikalisch-chemisches Kolloquium, 2; Praktische Einführung in die physikalische und Elektrochemie, 4—6 Wochen. — **Stollé**: Qualitative Analyse, 2; Pharmazeutische Chemie II, organischer Teil, 3. — **Mohr**: Die Theorien der organischen Chemie, 1. — **Muckermann**: Nahrungsmittelchemie, 2; Analytische Methoden offizineller Arzneimittel, 2; Wasser- und Harnanalyse; 2; Praktische Einführung in die Nahrungsmittelchemie. — **Müller**: Metalle, 2; Gasanalyse und Gasvolumetrie, 1, Praktische Übungen, 2. — **Wilke**: Einführung in die mathematische Behandlung der Chemie, mit Übungen, 2. —

Stäckel: Krumme Linien und Flächen, 3; Differential- und Integralrechnung, 4, Übungen, 1; Mathematisches Oberseminar (mit Perron), 2. — **Perron**: Partielle Differentialgleichungen, 4; Theorie der divergenten Reihen, 2. — **Koehler**: Raumkurven dritter Ordnung: Kubische Kegelschnitte, 2. — **Pfeiffer**: Darstellende Geometrie II, 3, Übungen, 2; Analytische Geometrie der Ebene, 4. — **Wolf**: Kapitel aus der Fixsternastronomie, 2 *g*. — **Kopff**: Relativitätstheorie, 2. — **Bopp**: Mengenlehre, 1. —

Universität Innsbruck.

Schweidler: Experimentalphysik I, 4; Einführung in die messende Physik I, 1; Die Strahlung radioaktiver Stoffe, 1 *g*; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6; Wissenschaftliche Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl., *g*. — **Lerch**: Physik für Pharmazeuten, 5. — **Tumlirz**: Theoretische Optik, 5; Übungen im mathematisch-physikalischen Seminar, 2 *g*. — **March**: Kinetische Gastheorie, 1. — **Hammerl**: Elektrotechnik I; Gleichstrom, 2 *g*. —

Brunner: Allgemeine Chemie I: Anorganische Chemie, 5; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **Hopfgartner**: Kolloidchemie, 2; Theoretische Grundlagen der analytischen Chemie, 2; Maßanalyse, 1. — **Zehenter**: Einführung in die chemische Technologie, 2 *g*. —

Gmeiner: Algebra, 3; Differentialgeometrie II: Raumkurven und Flächen, 2; Übungen im mathematischen Seminar, 2 *g*. — **Zindler**: Differentialrechnung und Integralrechnung, 5, Übungen, 2 *g*. — **Menger**: Darstellende Geometrie I, 2; Zeichenübungen, 1 *g*. — **Scheller**: Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, 4; Präzession, Nutation und Polhöhenschwankung, 1. —

Universität Jena.

Wien: Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Optik, 4; Physikalisches Kolloquium, *g*; Physikalisches Praktikum (mit Pauli): für Mathematiker und Physiker, 6, für Chemiker und Pharmazeuten, 2, für Mediziner, 3; Leitung physikalischer Spezialuntersuchungen (mit Auerbach, Straubel und Pauli), tägl. — **Pauli**: Experimentalphysik IV: Elektrizität, Magnetismus, Optik, für Fortgeschrittene, 2. — **Auerbach**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Grundzüge der Wetterkunde, 2; Die Grundlagen der Musik, mit Demonstrationen und Experimenten, 2; Einführung in die höhere Mathematik für Nichtmathematiker, 2. — **Straubel**: Abbildungstheorie II, 1. — **Rogowski**: Einführung in die Elektrotechnik, 2; Elektrotechnische Meßkunde; Die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und ihre technischen Anwendungen; Elektrotechnisches Praktikum, für Anfänger, 2, für Fortgeschrittene. — **Ambronn**: Einführung in die Theorie des Mikroskops, mit Übungen, 2; Mikrophotographie und Projektion, 1. —

Knorr: Allgemeine Experimentalchemie II: Organische Chemie, 3; Chemisches Seminar für Lehramtskandidaten (Übungen im Vortragen, Vorlesungsversuche



und Darstellung von Präparaten), 3; Chemisches Praktikum im analytischen Laboratorium: a) Vollpraktikum, 30, b) Halbpraktikum, 15, c) Mediziner-Vollpraktikum, 6, d) Mediziner-Halbpraktikum, 3, im organischen Laboratorium: Darstellung von Präparaten und Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten (mit Schneider), 40. — **Kaufmann**: Gasanalyse, mit Übungen, 1; Geschichte der Chemie, 1; Chemisches Repetitorium, 3. — **Schneider**: Neuere Theorien der Chemie, 1. — **Vongerichten**: Chemische Technologie, anorganischer Teil, 2; Färberei- und Druckereikursus, halb- und ganztägig; Technische Chemie für Nationalökonomen, 2; Technisch-chemisches Praktikum für Nationalökonomen. — **Immendorff**: Grundzüge der anorganischen und organischen Chemie (Experimentalchemie), für Landwirte, 5; Technische Chemie für Landwirte, 1; Großes chemisches Praktikum für Landwirte, tägl.; Kleines chemisches Praktikum für Landwirte, 7; Agrikulturchemisches Seminar für Fortgeschrittene, 14 tägig, 2. — **Keller**: Pharmazeutische Chemie I: Anorganische Chemie, 3; Untersuchung von Trinkwasser, Chemie und Untersuchung des Harns, 2; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: a) Halbpraktikum, tägl. außer Sonnabend, b) Ganzpraktikum, Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. außer Sonnabend, c) Nahrungsmittelchemisches Ganzpraktikum, tägl. außer Sonnabend; Vorlesungen und Übungen über Keimfreimachung von Arznei- und Verbandmitteln, 3. — **Hirsch**: Die Fermente und ihre Wirkungen, 2; Kolloquium über biochemische Fragen, für Fortgeschrittene, *g*. —

Haußner: Zahlentheorie, 4; Flächentheorie, 5; Differential- und Integralrechnung II, mit Übungen, 5; Proseminar: Anwendungen der Differentialrechnungen auf Geometrie, 2 ev. 3; Seminar: Flächentheorie, 2. — **Koebe**: Analytische Geometrie des Raumes und Determinanten, 4; Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 4; Proseminar: Analytische Geometrie, 1; Seminar: Funktionentheorie, 1 *g*. — **Winkelmann**: Graphische Statik, 2, Übungen, 2; Probleme der Mechanik, 2; Vektoranalysis mit Anwendungen und Übungen, 4. — **Knopf**: Bahnbestimmungen der Kometen und Planeten, 3; Wahrscheinlichkeitsberechnung und Methode der kleinsten Quadrate, 3. —

Technische Hochschule Karlsruhe.

Gaede: Physik, 4; Physikalisches Laboratorium (mit Schachenmeier), 6; Seminar für Experimentalphysik (mit Schachenmeier), 2 *g*; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im physikalischen Laboratorium, nach Vereinbarung. — **Schachenmeier**: Mathematische Physik, 3; Repetitorium der Physik, 2; Optik, 2. — **Peppler**: Meteorologie: Klimatologie, 1. — **Richter**: Elektromaschinenbau I, 5; Übungen im Konstruieren elektrischer Maschinen und Apparate, 4; Elektrotechnisches Laboratorium I, 3, II, 6, für Vorgeschrittene (mit Schleiermacher, Schwaiger und Hausrath), 8; Exkursionen zur Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Vereinbarung. — **Schleiermacher**: Grundlagen der Elektrotechnik und Meßkunde, 3; Theoretische Elektrizitätslehre, 3; Elektrotechnisches Laboratorium I, 6 und 3. — **Schwaiger**: Elektromotorische Betriebe, einschließlich Bahnen, 2; Elektrische Kraftwerke und Schaltanlagen, 2; Schalt- und Regulierapparate, 1; Hochspannungstechnik, 1, Übungen, 2; Exkursionen zur Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Vereinbarung. — **Teichmüller**: Allgemeine Elektrotechnik, 2; Elektrotechnisches Seminar, 2; Übertragung und Verteilung elektrischer Energie: Leitungen, 2, Übungen, 2; Energieversorgung des Landes, 1; Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Vereinbarung. — **Hausrath**: Drahtlose Telegraphie, 2; Schwachstromtechnik, 2; Theoretische Telegraphie I, 1; Besichtigung von Schwachstromanlagen, nach Vereinbarung. — **Thomälen**: Theorie der Wechselströme, 2, Übungen, 2. — **Schmidt**: Photographische Kurse, für Anfänger und Vorgeschrittene, 2; Ausflüge, 1 Nachmittag; Erklärung des zur Herstellung von Abbildungen in Betracht kommenden wichtigsten photomechanischen Illustrationsverfahren, 3 bis 4 *g*. —

Pfeiffer: Anorganische Experimentalchemie, 4; Organisch-chemisches Kolloquium (mit Franzen), 1; Spezielle Kapitel der allgemeinen Chemie, 1; Chemisches Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **Bredig**: Physikalische Chemie I, 2; Überblick über die theoretische und technische Elektrochemie, 3; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Kolloquium für Vorgeschrittene, 2; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Physikalisch-chemischer und elektrochemischer Einführungskurs. — **Franzen**: Organische Chemie II, 2; Organisch-chemisches Kolloquium, 1; Theorien der organischen Chemie, 1; Organisch-chemisches Seminar, 2. — **v. Antropoff**: Radioaktivität und Atombau, nach Vereinbarung. — **Askenasy**: Prozesse der elektrochemischen Großindustrie II und Bau und Betrieb der Akkumulatoren, 2. — **K. Bunte**: Wärmetechnik der Gaserzeugung und Gasverwendung, 2; Chemisch-technische Arbeiten auf dem Gebiete des Gasfaches. — **Dieckhoff**: Organische pharmazeutische Chemie, 2; Gerichtliche Chemie, 2. — **Eitner**: Chemische Technologie I, 2, II, 2; Methoden der technischen Analyse, 2, Übungen, 4; Ausgewählte Kapitel der technischen Analyse, 1, Übungen, 3; Übungen in der technischen Analyse für Vorgerücktere, tägl.; Spezielle Technologie der Gasbeleuchtung I, 1, Übungen, 4; Gaschemische Übungen, 2; Arbeiten im chemisch-technischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Technologische Exkursionen. — **Hess**: Arbeitsmethoden der organischen Chemie, 2; Heterozyklische Verbindungen, 2; Alkaloide, 1. — **Koenig**: Kolloidchemie, 2. — **Kreutz**: Die alkoholhaltigen Genußmittel, 1. — **Lembert**: Analytische Chemie II, 2. — **Reis**: Photochemie I: Strahlungslehre, 2; Kristallstruktur und Konstitution der Materie, 1. — **Rupp**: Über Nahrungs- und Genußmittel, 1; Chemische und mikroskopische Untersuchung von Nahrungs- und Genußmitteln sowie Gebrauchsgegenständen, 2. — **Terres**: Chemie der Gase, 2; Wiederholungskurs der chemischen Technologie, 4. — **Thies**: Chemie der Faserstoffe und Farbstoffe I, 2, Übungen (mit Lindner), 2. — **Ubbelohde**: Industrie der Fette und Harze, 2. —

Krazer: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 2. — **Böhm**: Höhere Mathematik III, 3, Übungen, 2; Mathematisches Seminar (mit Baldus), 1 *g*. — **Baldus**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 4. — **Heun**: Mechanik I, 4, Übungen, 2; Mechanisches Seminar: 3 *g*. — **Brandt**: Elementare und analytische Geometrie der Ebene und des Raumes I, 2, Übungen, 1; Graphische und numerische Differentiations- und Integrationsmethoden, 2, Übungen, 1. — **Haupt**: Übungen in den Grundlehren der höheren Mathematik, 2; Arithmetik und Algebra, 2, Übungen, 1; Ebene und sphärische Trigonometrie, 2, Übungen, 1. — **Noether**: Elemente der Mechanik, 3, Übungen, 1; Mechanische Probleme im Flugwesen, 2. — **Näbauer**: Praktische Geometrie, 3; Höhere Geodäsie, 3; Geodätisches Praktikum I, 2, III, 3; Methode der kleinsten Quadrate, 2. — **Merkel**: Repetitorium, 2; Plan- und Terrainzeichnen, 1, 2 und 4; Ausarbeitung der großen geodätischen Exkursion, 2. — **Stutz**: Katastervermessung und Feldreinigung, 2, Übungen, 2. —

Universität Kiel.

Dieterici: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 8 und 4, für Fortgeschrittene, tägl. — **Zahn**: Repetitorium der theoretischen Physik, 3, Einführung in die kinetische Gastheorie, 1. — **Martienssen**: Einführung in die Elekrotechnik, 2. — **Schmidt**: Einführung in die physikalischen Meßmethoden, mit Experimenten, 2. —

Diels: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum I, anorganische Abteilung (mit Mumm), tägl. außer Sonnabend, II, organische Abteilung, tägl.; Kolloquium über neuere chemische Arbeiten (mit Feist, Mumm, Horrmann, Preuner und Freudenberg), $1^1/_2$ *g*. — **Feist**: Allgemeine Warenkunde, 2; Chemische

Technologie der Metalle: Metallurgie, 2. — **Mumm**: Chemie der Metalle, 3. — **Horrmann**: Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Praktische Übungen im Untersuchen von Nahrungs- und Genußmitteln, 4; Pharmazeutische Chemie, anorganischer Teil, 3; Zusammensetzung und Untersuchung von Nahrungs- und Genußmitteln, 2. — **Stoehr**: Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie, 1. — **Preuner**: Einführung in die Elektrochemie, 2; Elektrochemische Übungen, 4. — **Freudenberg**: Herstellung organisch-chemischer Präparate, 2; Pflanzenstoffe, 1. —

Jung: Analytische Geometrie II, mit Übungen, 4; Elementarmathematik vom höheren Standpunkt, 3; Seminar für Fortgeschrittene, 1 *g*. — **Harzer**: Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung, 3; Differenzenrechnung, 1 *g*. — **Kobold**: Höhere Geodäsie, 2; Geodätische Übungen, nach Vereinbarung, *g*. — **Toeplitz**: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 2; Übungen für mittlere Semester, 2; Seminar für Fortgeschrittenere, nach Vereinbarung, *g*. — **Wirtz**: Photometrie der Gestirne, 2; Geschichte der griechischen Astronomie, 1 *g*. — **Neuendorff**: Darstellende Geometrie, mit Übungen, I, 6; Vorträge und Übungen zur angewandten Mathematik, 1 *g*. —

Universität Leipzig.

Wiener: Experimentalphysik II: Licht, Magnetismus, Elektrizität, 5, Mathematische Ergänzungen, 2; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Scholl), tägl.; Physikalische Übungen (mit Jaffé), 1, 2 oder 3 Halbtage, für Mediziner und Pharmazeuten (mit Scholl und Jaffé), 3; Physikalisches Kolloquium (mit Des Coudres), 2 *g*. — **Des Coudres**: Einleitung in die theoretische Physik, 4, Übungen, 1 *g*; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Fredenhagen), tägl. — **Scholl**: Praktikum der Wechselstrom- und Hochfrequenztechnik, mit Einschluß der drahtlosen Telegraphie, 2; Experimentalphysik für Zahnärzte, 4. — **Jaffé**: Einführung in die Hydrodynamik, 1. — **Wenger**: Meteorologie, 3; Einführung in die Bearbeitung geophysikalischer, besonders meteorologischer Beobachtungen, 2, Übungen, 2 *g*; Selbständige Arbeiten im Geophysikalischen Institut, tägl.; Geophysikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Marx**: Die wesentlichsten Grundgleichungen der theoretischen Physik und ihre Anwendungen, 2. — **Fredenhagen**: Einführung in die Elektrotechnik mit Besichtigungen großer industrieller Anlagen, 2; Repetitorium der Maxwellschen Theorie, 1 *g*. — **Haas**: Theorie der Molekularerscheinungen, 1. — **Lilienfeld**: Hochvakuumentladung und Röntgenstrahlen, 1 *g*. —

Hantzsch: Organische Experimentalchemie, 5; Analytisch- und anorganisch-chemische Übungen (mit Schaefer), auch für Anfänger, tägl.; Organisch-chemische Übungen (mit Reddelien), tägl.; Chemische Übungen für Mediziner und Zahnärzte (mit Schaefer), 6, für Fortgeschrittene (mit Stobbe, Rassow, Schaefer und Reddelien), tägl. — **Le Blanc**: Physikalische Chemie I, 4; Chemische Übungen: Analytische und präparative, anorganische und organische Arbeiten, für Anfänger und Fortgeschrittene (mit Böttger), tägl.; Physikalisch-chemische Übungen: Photochemisch-photographische (mit Weigert), elektro-chemische und kolloidchemische (mit Drucker und Ostwald), ganztägig, für Anfänger auch halbtägig, tägl.; Physikalisch-chemischer Einführungskurs, auch für Mediziner, auf Wunsch Darstellung elektrochemischer Präparate (mit Schall und Drucker), 4 oder 8. — **Paal**: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemische Übungen, analytisch-anorganisch und organisch, auch für Anfänger (mit Heller und Deußen), tägl.; Chemische Arbeiten für Vorgerücktere (mit Heller, Deußen und Scheiber), tägl.; Pharmazeutisch-chemisch-toxikologische Übungen (mit Deußen), tägl.; Arbeiten auf dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie (mit Deußen), tägl.; Chemische Übungen für Mediziner und Zahnärzte, 6; Chemisch-technische Übungen (mit Heller), tägl. — **Stobbe**: Heterozyklische Verbindungen mit besonderer Berücksichtigung der Alkaloide, 2; Mehrkernige aromatische Verbindungen: Gruppe des Diphenyls, der Polyphenylmethane, des Naphthalins, Anthracens usw., 1. — **Wagner**: Experimentelle Einführung in die Chemie auf physikalischer Grundlage, 2; Chemische Übungen für Lehrer; Schulversuche, Analyse und Präparate, tägl., Didaktische Besprechungen für Lehrer: Elektrochemie, 1 *g*, über Stoffwandlung und Arbeitsleistung, 1 *g*. — **Rassow**: Chemische Technologie, organische Betriebe: Zucker, Stärke, Gärungsgewerbe, Fette und Öle, 2; Technologische Ausflüge, nach Vereinbarung, *g*; Chemie und Technologie der Teerfarbstoffe, 2; Technische Gasanalyse, mit praktischen Übungen, 1; Die deutschen Salze: Kochsalze, Kali-, Magnesia- und Kalksalze, 1 *g*; Chemisch-technologische Übungen, ganz- oder halbtägig. — **Weigert**: Photochemie I (allgemeiner Teil), 2; Physikalische Chemie, 2; Photochemische, photographische, spektroskopische Übungen, 4. — **Schall**: Die Elektrosynthese organischer Verbindungen, 1. — **Böttger**: Wissenschaftliche Grundlagen der analytischen Chemie: Übersicht über das Gesamtgebiet der qualitativen und quantitativen Analyse, 2. — **Heller**: Chemie und technische Chemie, organischer Teil, 2. — **Drucker**: Physikalisch-chemische Arbeitsmethoden, 2. — **Schaefer**: Spezielle anorganische Chemie I, mit Versuchen, 2; Die Entwicklung der Atomtheorie, 1. — **Scheiber**: Organisch-chemische Theorien, 1. — **Ostwald**: Experimentelle Kolloidchemie, 2. — **Deußen**: Einführung in den Gebrauch des Deutschen Arzneibuchs, im Anschluß an die pharmazeutisch-chemischen Übungen, kursorisch, nach Vereinbarung; Sterilisationsübungen mit Prüfung auf Keimfreiheit, nach Vereinbarung. — **Reddelien**: Die Arbeitsmethoden in der organischen Chemie, 1. — **Wilke**: Einführung in das Maschinenwesen, 1; Maschinenzeichnen (Übungen), 1; Neuere Verbrennungsmaschinen, 1. —

Hölder: Elliptische Funktionen, 4; Variationsrechnung, 2; Mathematisches Seminar: Übungen für Vorgeschrittene in der Funktionentheorie, 2 *g*. — **N. N.**: Sphärische Astronomie, 4; Praktische Arbeiten in der Sternwarte, nach Vereinbarung, *g*. — **Rohn**: Analytische Geometrie des Raumes, 4, Übungen, 1 *g*; Determinanten, 2. — **Herglotz**: Mechanik, 5; Zahlentheorie: Quadratische Zahlkörper, 3, Übungen, nach Vereinbarung, *g*. — **Schnee**: Differential- und Integralrechnung, 4 und 14 tägig, 2, Übungen, 14 tägig, 2 *g*; Algebraische Gleichungen II, 3. — **Levi**: Flächen und Raumkurven, 3, Übungen, nach Vereinbarung, *g*; Nichteuklidische Geometrie, 2. —

Universität München.

Röntgen: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Optik, 5; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Praktische Übungen im Physikalischen Laboratorium (mit Wagner), 4. — **Sommerfeld**: Optik, 4; Seminar, Vorträge der Mitglieder (mit Lenz und Ewald), 2 *g*; Atombau und Spektrallinien, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, halbtägig. — **Graetz**: Experimentalphysik I: Einleitung, Wärme, Elektrizität, 5; Physikalisches Praktikum: a) Übungen in physikalischen Messungen, b) Übungen in physikalischen Demonstrationen, 4; Einleitung in die theoretische Physik I, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus der Physik, nach Vereinbarung, *g*. — **Schmauß**: Meteorologie und Klimatologie, 4; Meteorologisches Kolloquium, Repetitorium, 1 g. — **Wagner**: Spektralanalyse der Röntgenstrahlen, 1. — **Donle**: Physikalische Maße und Meßmethoden, 2. — **Lenz**: Kinetische Gastheorie mit besonderer Berücksichtigung der Brownschen Bewegung, 3. — **Ewald**: Dynamik der Kristallgitter: Atomistik der festen Körper, 3. —

Willstätter: Unorganische Experimentalchemie, 5; Organisch-chemisches Kolloquium (mit Dieckmann, Kalb, Meyer und Pummerer), 1 *g*; Praktische Arbeiten im Chemischen Laboratorium, unorganische Abteilung (mit Hönigschmid, Prandtl und Vanino), tägl. außer Sonnabend, organische Abteilung (mit Meyer und Dieckmann), tägl., physikalisch-chemische Abteilung (mit Fajans), tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner

(mit Vanino), 4; Arbeiten im Chemischen Laboratorium für fortgeschrittenere Mediziner, halb- oder ganztägig; Physikalisch-chemisches Praktikum (mit Fajans), 1. — **Paul**: Organische Chemie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung, 5; Lebensmittelchemie II, 2; Pharmazeutisch-chemische Präparatenkunde, anorganische Präparate, 3; Chemisches Praktikum: Praktische Übungen einschließlich physikalisch-chemischer, elektrochemischer und lebensmittelchemischer Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich der Übungen in den für den Apotheker wichtigen Sterilisationsverfahren, tägl. außer Sonnabend; Übungen für praktische Apotheker, nach Vereinbarung. — **Hönigschmid**: Analytische Chemie II, 3; Elektrolytisches Praktikum, ganztägig; Kolloquium für physikalische und anorganische Chemie (mit Prandtl und Fajans), $1^1/_2$ *g*. — **Prandtl**: Spezielle unorganische Experimentalchemie II, 5—8; Gruppe des periodischen Systems, 4; Praktikum für Gasanalyse, 4. — **Meyer**: Chemie der Benzolderivate, 4. — **Dieckmann**: Chemie der Kohlehydrate, 1. — **Fajans**: Physikalische Chemie II, 2; Elektrochemie, 2. — **Pummerer**: Chemische Technologie I; Anorganische Großindustrie (ohne Metallurgie), mit Exkursionen, 2. — **Kalb**: Repetitorium über organische Chemie (Kolloquium), 1. — **Bleyer**: Neuere Arzneimittel mit besonderer Berücksichtigung der Chemotherapie, 2. —

Lindemann: Analytische Geometrie der Ebene, 4; Analytische Mechanik, 4; Über die Grundlagen der Geometrie, 2; Übungen und Vorträge im mathematischen Seminar, $1^1/_2$ *g*. — **Voß**: Differentialgeometrie der Kurven und Flächen, 4; Einleitung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 4; Mathematisches Seminar, 2 *g*. — **Pringsheim**: Elemente der Funktionentheorie, 4; Theorie der elliptischen Funktionen, 4. — **Brunn**: Elemente der höheren Mathematik, 4. — **Hartigs**: Synthetische Geometrie, 5, Übungen, 1. — **Böhm**: Integralrechnung mit Übungen, 5; Elemente der Versicherungsrechnung, 2. — **Dingler**: Lektüre und Besprechung ausgewählter Stücke aus alten und neueren Klassikern der Mathematik und der exakten Wissenschaften, 2 *g*. — **Rosenthal**: Differentialrechnung, 4, Übungen, 1; Einführung in die Mengenlehre, 1; Theorie und Praxis der geometrischen Konstruktionen, 2. — **v. Seeliger**: Potentialtheorie und die Figur der Himmelskörper, 4; Astronomisches Kolloquium, 1 *g*. — **Großmann**: Sphärische Astronomie, 3. —

Universität Tübingen.

Paschen: Experimentalphysik: Akustik, Wärme, Magnetismus, Elektrizität, 5; Physikalische Anfängerübungen, 4, Wissenschaftliche Untersuchungen, ganztägig. — **Füchtbauer**: Theorie des Lichtes, 3, Seminar, 1. — **Rohmann**: Elektronen, mit Versuchen, 1. —

Wislicenus: Allgemeine Chemie I: Anorganische Chemie, 5, Ergänzungen, 1 *g*; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium für Anfänger und Fortgeschrittene, tägl.: a) Analytisch-chemisches Praktikum (mit Bülow und Weinland), b) Chemisch-pharmazeutisches Praktikum (mit Weinland), c) Präparative Arbeiten (mit Kliegl), d) Physikalisch-chemische Übungen (mit Magnus), e) Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten (mit Bülow, Weinland, Kliegl und Magnus). — **Thierfelder**: Organische Chemie für Mediziner, 4; Praktisch-chemische Übungen für Anfänger (mit Brigl) I: Qualitative Analyse, 6, II: Quantitative Analyse und physiologisch-chemische Übungen, 6; Physiologisch-chemische Übungen, 2; Physiologisch-chemische Arbeiten für Geübtere, tägl. — **Bülow**: Analytische Chemie I mit besonderer Berücksichtigung der praktischen Arbeiten, 3; Ausgewählte Kapitel aus der anorganischen und organischen Großindustrie, 2; Anorganische Elementarchemie mit besonderer Berücksichtigung technologisch wichtiger Prozesse, 2. — **Weinland**: Chemie der Arzneistoffe, anorganischer Teil, 2; Chemie der Nahrungsmittel, 1; Nachweis von Giften für gerichtliche Zwecke, 1; Maßanalyse: Ionentheorie, 1; Vergleichung der Elemente an der Hand des periodischen Systems, 1. — **Kliegl**: Umwandlung der Elemente, Kolloide, Nutzbarmachung des Luftstickstoffs, 1; Karbozyklische Verbindungen I: Einkernige Verbindungen, 3. — **Magnus**: Theoretische Chemie: Thermochemie und Elektrochemie, 2; Physikalisch-chemisches Kolloquium, 1. — **Brigl**: Anorganische Chemie für Mediziner, 2; Die chemische Erforschung der Naturfarbstoffe, 1. —

Maurer: Niedere Analysis, 4; Funktionentheorie, 3; Übungen im mathematischen Seminar, 2. — **N. N.**: Analysis II: Integralrechnung, 4; Übungen im mathematischen Seminar, 2. — **König**: Synthetische Geometrie, 4; Mathematisches Seminar, 2; Einführung in die Theorie der algebraischen Kurven, 3. — **Happel**: Analytische Geometrie der Ebene, 3, Übungen, 1; Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen, $2^1/_2$, Übungen, 1. — **Rosenberg**: Leitung selbständiger astronomischer und astrophysikalischer Arbeiten für Fortgeschrittene, tägl.; Allgemeine Himmelskunde mit Lichtbildern und Demonstrationen, 2; Theorie und Anwendung astronomischer Instrumente, 1. —

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und **H. Th. Simon**



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von jährlich 50 Mark fürs Inland und fürs Ausland auf Grund der Valuta-Ordnung. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 58 Mark, im Ausland je nach dem Valutastande.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 24. — 15. Dezember 1919. No. 556. — **20. Jahrgang.**

Die um das sieben- bis achtfache gestiegenen Druck- und Papierpreise zwingen mich, den Bezugspreis für die Physikalische Zeitschrift auf 50 Mark für das Inland zu erhöhen. Der Preis für das Ausland wird nach dem jeweiligen Valutastande festgesetzt. Für Bezug unter Kreuzband werden 8 Mark fürs Inland und 16 Mark fürs Ausland besonders berechnet. Diese Erhöhung gilt auch für die früheren Jahrgänge, soweit sie noch vorhanden sind.

Leipzig, im Dezember 1919. *S. Hirzel.*

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 24. | 15. Dezember 1919. | 20. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 2 am 31. Dezember 1919.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Gravitationsverschiebung der Spektrallinien bei Fixsternen.

II. Mitteilung.

Von Erwin Freundlich.

In einer gleich betitelten Arbeit[1]) hatte ich früher gezeigt, daß es möglich ist, auf Grund einer statistischen Überlegung den Durchschnittswert für die von der allgemeinen Relativitätstheorie geforderte Gravitationsverschiebung der Spektrallinien bei größeren Sterngruppen vom eigentlichen Dopplereffekt zu trennen. Es hatte sich dabei auch ergeben, daß gewisse Sterntypen, bei denen man im voraus einen solchen Effekt erwarten mußte, denselben in der Tat ausgesprochen zeigen, so daß dieser Effekt als systematische Verfälschung der Radialgeschwindigkeiten schon vor der Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie festgestellt worden war. Wenn man nun auch auf diesem Wege nicht zu einer quantitativen Prüfung der allgemeinen Relativitätstheorie gelangen kann, da wir zurzeit über die Massen und Dichten der Sterne sehr wenig wissen, kann man doch hoffen, das Wesen dieser allgemeinen Rotverschiebung bei den Spektrallinien der Fixsterne so weit zu ergründen, daß diese Untersuchungen an den Fixsternen eine eindeutige qualitative Prüfung der Relativitätstheorie zu liefern imstande sind. Einen Schritt weiter in dieser Richtung zu tun ist das Ziel der folgenden Überlegungen; doch soll vorher der wesentliche Inhalt der ersten Mitteilung nochmals hier kurz dargelegt werden.

Ist an der Oberfläche eines Sternes das Potential des Gravitationsfeldes von dem an der Oberfläche der Sonne wesentlich verschieden, so müßten die Spektrallinien im Spektrum dieses Sternes gegenüber denjenigen im Sonnenspektrum um einen Betrag verschoben sein, der proportional dem Potentialgefälle zwischen Stern und Sonne und proportional der Wellenlänge ist. Eine solche Linienverschiebung läßt sich jedoch bei einem einzelnen Stern nicht ohne weiteres von dem Dopplereffekt trennen, den die Spektrallinien wegen der Radialgeschwindigkeit des Sternes relativ zum Beobachter aufweisen. Die Gravitationsverschiebung würde aber, falls man es mit einer großen Zahl über den Himmel gleichförmig verteilter Sterne ungefähr gleicher Masse zu tun hat, deren Radialgeschwindigkeiten systematisch verfälschen. Denn wenn das Gravitationspotential auf der Oberfläche dieser Sterne durchweg niedriger ist als auf der Sonne, so offenbart sich der von der Relativitätstheorie vermutete Gravitationseffekt als eine Rotverschiebung der Linien, d. h. als eine Verschiebung nach dem roten Ende des Spektrums, und der Beobachter, der bisher jede Linienverschiebung als einen kinematischen Dopplereffekt anzusprechen gewohnt war, käme zu folgendem Ergebnis. Statt daß, wie zu erwarten wäre, sich die Radialgeschwindigkeiten dieser Sterne nach dem Zufallsgesetz um den Wert Null gruppieren, so daß also die Häufigkeitskurve der Radialgeschwindigkeiten sich durch eine Gaußsche Fehlerkurve darstellen läßt, würden sich die Radialgeschwindigkeiten, wegen der über die Dopplereffekte gelagerten allgemeinen Rotverschiebung der Spektren, symmetrisch um diejenige positive Geschwindigkeit gruppieren, die als Dopplereffekt diese Rotverschiebung hervorrufen würde. Die Häufigkeitskurve der Radialgeschwindigkeiten wäre eine Fehlerkurve, die um den Betrag dieser positiven Geschwindigkeit verschoben wäre. Diese Erscheinung ist nun in der Tat bei den Sternen gewisser Spektraltypen unzweideutig vorhanden, und zwar bei den *B*-Sternen, den weißen, sog. Heliumsternen, von welchen man auf Grund anderer Beobachtungen immer an-

1) Diese Ztschr. **16**, 115, 1915; Astr. Nachr. **202**, Nr. 4826.

nahm, daß sie besonders massig sind, und ferner bei den absolut hellen *K*- und *M*-Sternen; es sind dies Sterne, deren Oberflächenhelligkeit ihrem Spektrum gemäß niedrig ist, die jedoch trotz ihrer nachweislich sehr großen Entfernung, sehr hell sind — ich nenne nur α-Bootis (Arktur), α-Orionis —, so daß wir ihnen riesige Oberflächen zusprechen müssen. Nennen wir die mittlere allgemeine Rotverschiebung, die sich bei diesen Sterntypen hat nachweisen lassen, *K*, so ist[1])

für die *B*-Sterne: $K = + 4{,}3$ km $\pm 0{,}5$
„ „ *K*-Sterne: $K = + 3{,}5$ km $\pm 0{,}9$
„ „ *M*-Sterne: $K = + 5{,}3$ km $\pm 2{,}3$.

Zur Erklärung dieser allgemeinen Rotverschiebung kämen prinzipiell folgende Annahmen in Frage:

1. Man kann sie als einen gewöhnlichen Dopplereffekt auffassen, der besagen würde, daß die Sterne vom *B*-, *K*- und *M*-Typus einer allgemeinen Expansion unterliegen, die sich bei den sonnenähnlichen Sternen vom *F*- und *G*-Typ (gelbe Sterne) nicht offenbart und ebenso auch nicht bei den *A*-Sternen, weißen Sternen, die dem Spektraltyp nach zwischen den *B*- und *F*-Sternen stehen. Da die *B*-Sterne und die absolut hellen *K*- und *M*-Sterne überhaupt eine exzeptionelle Rolle am Himmel spielen und mit der näheren Umgebung der Sonne, die hauptsächlich aus *A*-, *F*- und *G*-Sternen besteht, anscheinend nicht zusammenhängen, so müßte man diese Expansion als kosmogonische Erscheinung auffassen; diese Auffassung ist in der Tat verschiedentlich vertreten worden.

2. Man kann als Ursache dieser allgemeinen Rotverschiebung der Spektrallinien Druckeffekte an den Oberflächen dieser Sterne ansprechen oder aber möglicherweise an den roten Kanten der Linien anliegende nahe Begleiter, die bei den zum Vergleich benutzten Sonnenlinien nicht oder viel schwächer auftreten. Dieser zweite Erklärungsversuch hat noch keine Stütze gefunden, er ist in Wirklichkeit nur der Not entsprungen, überhaupt eine Erklärungsmöglichkeit für diese rätselhafte Rotverschiebung bei den Spektrallinien verschiedener Sterntypen zu finden. Immerhin bedarf diese Seite des Problems noch einer sorgfältigen Untersuchung, die zurzeit in Vorbereitung ist.

3. Die dritte Erklärung für die allgemeine Rotverschiebung der Spektrallinien war die in der ersten Mitteilung vertretene Hypothese, daß sich in dieser Linienverschiebung die von der allgemeinen Relativitätstheorie geforderte Gravitationsverschiebung der Spektrallinien offenbart.

Es ist nun möglich, wenigstens für die *B*-Sterne nachzuweisen, daß die erste der drei Erklärungsmöglichkeiten so gut wie sicher nicht in Frage kommt. Dadurch fällt der gefährlichste Einwand gegen die unter 3. aufgestellte Hypothese. Denn da vorerst alles dafür spricht, daß sowohl bei den *B*-Sternen als auch den *K*- und *M*-Sternen die beobachtete allgemeine Rotverschiebung der Spektrallinien gleichen Ursprungs ist, aber bei den *B*-Sternen in erster Linie die Heliumlinien bei den Messungen benutzt werden, während bei den roten *K*- und *M*-Sternen ganz andere Linien auftreten und gemessen werden, so ist die Wahrscheinlichkeit außerordentlich klein, daß bei all diesen Linien nahe Begleiter oder Druckeffekte im gleichen Sinne wirken sollten.

Der Nachweis, daß es sich bei der Größe *K* um keinen Dopplereffekt handeln kann, ist natürlich nur möglich, wenn man bei Fixsternen den Dopplereffekt der Radialgeschwindigkeiten für sich zu bestimmen vermag. Für die Gesamtheit der *B*-Sterne, auf die sich die statistische Methode stützt, ist das nun nicht möglich. Denken wir uns aber den Fall, daß ein einzelner *B*-Stern oder eine Gruppe derselben sich in einem weit ausgedehnten Nebel befindet, der an der Bewegung dieser Sterngruppe teilnimmt. Dann wird man die Radialgeschwindigkeit dieser Sterngruppe auch aus dem Dopplereffekt der Linien im Nebelspektrum ableiten können. Und da das Licht des Nebels den weiten interstellaren Räumen entspringt — man kann natürlich immer voraussetzen, daß der lineare Abstand der Sterne einer solchen Gruppe außerordentlich groß ist, wenn wir die einzelnen Sterne zu trennen vermögen —, so kann man annehmen, daß die an den Nebellinien beobachteten Dopplereffekte durch den vermuteten Gravitationseffekt nicht verfälscht sind. Lagert sich aber über die Dopplereffekte der Sterne eine Rotverschiebung der Linien, hervorgerufen durch die Gravitationsfelder an ihren Oberflächen, so müßten die Sternspektren eine allgemeine Rotverschiebung gegenüber dem Nebelspektrum aufweisen. Diese Erscheinung hat sich nun bei dem einzigen Falle dieser Art, den wir bisher am Himmel beobachten können, unzweifelhaft feststellen lassen und soll im folgenden eingehender diskutiert werden.

Die Radialgeschwindigkeiten der Sterne der Orion-Nebelgruppe.

Im Sternbild des Orions findet sich eine Gruppe außerordentlich heller Heliumsterne,

1) Diese Werte sind einer neueren Untersuchung von W. Gyllenberg, Medd. Lund Obs., Ser. II, Nr. 13, 1915, entnommen und unterscheiden sich nur wenig von den ursprünglich von Campbell, Lick Obs. Bull., Nr. 195, 196, abgeleiteten Werten, die ich in der ersten Mitteilung heranzog.

Tabelle I.

*	α_{1900}	δ_{1900}	h	Sp	μ_α	μ_ϱ	ϱ_b	ϱ_0	$\varrho_0 - \varrho_N$	Autorität
	m		m				km	km	km	
τ Orionis	5^h 12,8	$-6^0 57'$	3,7	B_5	$-0^s,0011$	$-0'',007$	+20,8	+ 2,8	+ 3,5	A. J. 25, S. 64.
o „	16,7	−0 29	4,6	B_2	−0 ,0003	− 3	+28,0	+10,7	+11,4	L. O. B. 195.
Boss 1295	18,6	−0 15	5,8	B_3	− 10	− 1	+22,4	+ 5,4	+ 6,1	Mt. W. C. 105.
η Orionis	19,4	−2 29	3,4	B_1	+ 4	+ 1	+35,5	+17,9	+18,6	L. O B. 195.
ψ „	21,6	+3 0	4,7	B_2	− 3	− 13	+12,0	− 4,7	− 4,0	L. O. B. 195.
Boss 1332	26,0	+3 13	5,6	B_3	+ 4	− 7	+21,6	+ 5,2	+ 5,9	Mt. W. C. 105.
δ Orionis	26,9	−0 22	2,5	B_0	+ 1	− 3	+23,1	+ 5,7	+ 6,4	L. O. B. 195.
36 „	27,1	−7 23	4,6	B_0	+ 2	− 12	+17,0	− 1,5	− 0,8	L. O. B. 195.
Bond 640	30,4	−5 27	6,8	Oe_5	−	−	+20,0	+ 2,4	+ 3,1	A. J. 19, 355.
Bond 619	30,4	−5 27		B_2	−	−	−	−	−	A. J. 19, 355.
θ Orionis	30,4	−5 27	5,4	Oe_5	+ 2	+ 4	+19,0	+ 1,4	+ 2,1	L. O. B. 211.
c „	30,4	−4 54	4,6	B_3	+ 1	− 2	−	−	−	−
b „	31	−5 59	2,9	Oe_5	+ 2	− 4	+21,5	+ 3,5	+ 4,2	A. J. 32.
ε „	31,1	−1 16	1,8	B_0	0	− 2	+24,5	+ 6,9	+ 7,6	L. O. B. 195.
A. G. C. 6471	30,1	−6 5	4,7	B_1	+ 2	+ 6	+29,0	+10,7	+11,4	L. O. B. 195.
ξ Orionis	35,7	−2 0	2,0	B_0	+ 5	− 7	+18,3	+ 0,6	+ 1,3	L. O. B. 195.
A. G. C. 6616	35,8	−1 11	5,0	B_3	− 8	− 8	+26,1	+ 8,5	+ 9,2	L. O. B. 195.
									+ 6,0 km ± 1 km	

A. J. = Astrophys. Journ. L. O. B. = Lick Observatory Bulletin. Mt. W. C. = Mt. Wilson Contribution.

die sich im Raume parallel zueinander bewegen und unzweifelhaft sowohl miteinander als auch mit dem sie umgebenden Nebel eine Einheit bilden. Das lehrt nicht allein der Augenschein, sondern ist schon öfters das Objekt besonderer Untersuchungen gewesen, die durchweg zu dem Resultat gelangt sind, daß zwischen den B-Sternen im Orionnebel und dem Orionnebel selbst ein organischer Zusammenhang besteht. Als Mitglieder dieser sog. Orion-Nebelgruppe betrachtet Kapteyn[1]) in einer besonderen Untersuchung über die Parallaxe dieser Sterngruppe alle B-Sterne zwischen den Grenzen:

$$1900{,}0 \begin{cases} \text{Rektaszension} & 5^h 13^m \text{ bis } 5^h 40^m \\ \text{Deklination} & -9^0 \text{ bis } +5^0. \end{cases}$$

In der Tabelle I[2]) sind die Sterne dieser Gruppe eingetragen, und zwar in der 1. Kolonne der Name des Sternes, in der 2. und 3. Kolonne die Koordinaten, in der 4. die Helligkeit, in der 5. das Spektrum. Wie man sieht, sind bis auf drei Sterne alle vom B-Typ, also weiße Sterne höchster Oberflächentemperatur, in deren Spektren die Heliumlinien die wesentlichste Rolle spielen. Die drei übrigen Sterne sind vom Spektraltyp Oe_5, d. h. dem Spektrum nach den Heliumsternen nahe verwandt, aber durch das Auftreten heller Linien neben den Absorptionslinien ausgezeichnet. In der 6. und 7. Kolonne folgen die Eigenbewegungen in Rektaszension und Deklination; in der 8. Kolonne die gemessene Linienverschiebung ϱ_b als Dopplereffekt interpretiert, also nach Kilometern gerechnet, alsdann die von der Sonnenbewegung befreite Linienverschiebung ϱ_0 und schließlich in der 10. Kolonne die Differenz: Sternspektrum minus Nebelspektrum, auf die es uns hier besonders ankommt.

Zu der obigen Tabelle sei noch folgendes bemerkt. Die sphärischen Eigenbewegungen der Sterne μ_α und μ_δ sind dem Preliminary-General-Catalog von Boss entnommen. Die von der Bewegung des Sonnensystems befreiten Linienverschiebungen ϱ_0 sind nach der Formel berechnet

$$\varrho_0 = \varrho_b - V \cos \lambda$$

in welcher $V = 20{,}2$ km die Geschwindigkeit des Sonnensystems relativ zum Schwerpunkt des Systems der B-Sterne ist, wie sie aus der 3. Ausgleichung von W. W. Campbell zur Bestimmung des Apex der Sonnenbewegung[1])

1) Astrophys. Journ. **47**, Heft 2, 1918.

2) Die übrigen in der betrachteten Himmelsgegend liegenden Sterne, für welche Messungen der Radialgeschwindigkeiten vorliegen, sind:

	Hell.	Sp	ϱ_b
	m		
e Orionis	4,2	K	−17,8 km
31 Orionis	5,0	K_5	+ 9,6
Φ_2 Orionis	4,4	K	+99,4
α Orionis	0,9	Ma	+21,0

Wie man sieht, nehmen bei diesen Sternen die ϱ_b ganz andere Werte an, als bei den B-Sternen, der Orion-Nebelgruppe. Nur α Orionis, ein ausgesprochener „Gigant" unter den roten Sternen, die auch den Gravitationseffekt deutlich zeigen, scheint dem Werte von ϱ_b nach zu urteilen, zu den Sternen der Orion-Nebelgruppe zu gehören. Eine solche auffallende engere Beziehung zwischen absolut hellen roten Sternen und hellen Heliumsternen zeigt sich mehrfach am Himmel und hat vielleicht eine noch unbekannte tiefere Bedeutung. α Orionis offenbart auch eine deutliche Rotverschiebung gegenüber dem Nebel.

1) Lick. Obs. Bull., Nr. 195.

folgt; λ bedeutet den Winkelabstand des Sternes vom Apex der Sonnenbewegung, für dessen Koordinaten die Werte: $\alpha = 270^0$, $\delta = +30^0$ angenommen wurden.

Die Radialgeschwindigkeit des Orionnebels.

Die Radialgeschwindigkeit des Orionnebels ist verschiedentlich gemessen worden[1]). Keeler fand aus visuellen Messungen $\rho^N = +17{,}7$ km, Wright auf photographischem Wege $+16{,}2$ km, Vogel und Eberhard $+17{,}4$ km, Frost und Adams $+18{,}5$ km. Im Mittel liefern diese Messungen $\rho_N = 17{,}4$ km, einen Wert, der wohl nicht um mehr als 1 km unsicher sein dürfte und der sich auf die hellste Partie des Nebels im sog. Trapez bezieht. Neuerdings haben Buisson, Fabry und Bourget[2]) nach der Interferenzmethode die Radialgeschwindigkeit des Nebels im Orion an verschiedenen Stellen gemessen. Sie erhalten für die Gegend im Trapez $\rho_N = +15{,}8$ km. Die Berücksichtigung dieses Wertes würde das obige Mittel um 0,3 km herabdrücken. Für andere Partien des Nebels kommen wesentlich andere Werte heraus, verursacht durch innere Bewegungen der Nebelmaterie. Doch liegen z. B. die Werte, die kürzlich Frost[3]) veröffentlicht hat und die mit den Messungen von Buisson, Fabry und Bourget gut übereinstimmen, für acht verschiedene Partien des Nebels sämtlich dem Betrage nach unterhalb von 20 km, während die Werte ρ_b für die Sterne fast ohne Ausnahme darüber liegen, durchaus im Sinne einer Rotverschiebung der Sternspektren gegenüber dem Nebelspektrum. Für diejenige Gegend des Nebels, welche die geringsten inneren Bewegungen offenbart, finden Buisson, Fabry und Bourget als Radialgeschwindigkeit $\rho_N = +17{,}6$ km. Man wird darum mit großer Wahrscheinlichkeit als Radialgeschwindigkeit des ganzen Systems von Nebel und Sternen den Wert $\rho_N = +17{,}5$ km zu nehmen haben, der wahre Wert wird vermutlich höchstens kleiner sein. Bringt man die Bewegung des Sonnensystems in Abzug, so resultiert als endgültiger Wert für die gesuchte Radialgeschwindigkeit des Orionsystems der Wert

$$\rho_N = -\mathbf{0{,}7\ km}.$$

Die Rotverschiebung der Sternspektren gegenüber dem Nebelspektrum.

Bildet man die Differenz $\rho_0 - \rho_N$ für jeden Stern, so ist diese, wie die 10. Kolonne in Tabelle I zeigt, bei allen Mitgliedern der Gruppe mit Ausnahme von zweien positiv, d. h. es offenbart sich eine ausgesprochene Rotverschiebung der Sternspektren gegenüber dem Nebelspektrum. Da wir annehmen müssen, daß die Linienverschiebungen im Nebelspektrum durch einen Gravitationseffekt nicht verfälscht sind, da das Licht des Nebels den sehr schwachen Feldern in den Zwischenräumen zwischen den Sternen entspringt, so entspricht die so abgeleitete Rotverschiebung bei den Sternen durchaus ihrem Wesen nach dem Wert K, der zu Anfang und in der ersten Mitteilung statistisch für alle B-Sterne gefunden worden war. Als mittleren Betrag dieser Rotverschiebung findet man: $\boldsymbol{K = +6{,}0\ \mathrm{km} \pm 1\ \mathrm{km}}$, einen etwas größeren Wert als den statistisch gefundenen Wert $K = +4{,}3$ km. Zu diesem Mittelwert für die Orion-Nebelgruppe ist noch folgendes zu bemerken. Wie schon erwähnt wurde, liefern 2 Sterne, nämlich ψ und 36 Orionis, keine Rotverschiebung, sondern im Gegenteil eine Violettverschiebung. Dieses Herausfallen beider Sterne könnte seinen Grund darin haben, daß die bei ihnen beobachteten Radialgeschwindigkeiten ρ_b noch fehlerhaft sind. Da bei den B-Sternen ein sehr hoher Prozentsatz von spektroskopischen Doppelsternen auftritt, anscheinend über 50 Proz., so können die gemessenen Linienverschiebungen noch durch Bahnbewegungen verfälscht sein. Wahrscheinlicher ist aber, daß diese beiden Sterne nicht zur engeren Gruppe der Orion-Nebelgruppe gehören, sondern nur in dieses Gebiet der Sphäre projiziert sind. Dafür spricht folgender Umstand. Wie die 6. und 7. Kolonne lehren, sind die sphärischen Eigenbewegungen der Sterne durchweg sehr klein, in Deklination ausnahmslos kleiner als 0,″01 pro Jahr, also kaum nachweisbar. Die beiden Sterne ψ und 36 Orionis sind die einzigen unter allen 15 Sternen, bei denen $\mu_\delta > 0{,}''01$ ist. Sie gehören also möglicherweise nicht zur engeren Orion-Nebelgruppe; dafür spricht ja auch, daß bei ihnen die beobachteten Radialgeschwindigkeiten merklich von dem Mittel der anderen abweichen. Ich habe sie deshalb aus der Mittelbildung ausgeschlossen. Dasselbe geschah mit dem Stern η-Orionis, der nach der anderen Seite herausfällt. η-Orionis ist ein spektroskopischer Doppelstern von anscheinend außerordentlich großer Masse; an sich könnte also diese viel stärker ausgesprochene Rotverschiebung durchaus reell sein. Das Studium der spektroskopischen Bahn hat für beide Komponenten die Werte geliefert

$$m_1 \sin^3 i = 11{,}2\, m_\odot$$
$$m_2 \sin^3 i = 10{,}6\, m_\odot;$$

1) Siehe W. W. Campbell, „Stellar Motions", 1913, S. 111.

2) Astrophys. Journ. **40**, S. 241.

3) Pop. Astr. **23**, 485, 1915.

hierbei bedeutet m_1 die Masse der einen Komponente, m_2 die der zweiten und $m_\odot$ die der Sonne; i die Neigung der Bahnebene zur Visionslinie, die aus der spektroskopisch gewonnenen Bahn nicht für sich berechnet werden kann, sondern nur in obiger Verbindung auftritt. Aber die Messungen sind bei diesem System noch mit großer Unsicherheit behaftet, da dasselbe möglicherweise nicht nur aus 2, sondern 3 bis 4 Komponenten besteht, und der Wert 18,6 km für die Rotverschiebung ist noch vielleicht um über 10 km unsicher. Schließt man diese drei Systeme aus, so erhält man als mittleren Betrag der Rotverschiebung den Wert $K = + 6{,}0$ km ± 1 km, ohne Ausschluß derselben findet man $K = + 5{,}7$ km.

Dieser Wert für K ist merklich größer als der statistisch gefundene $K = + 4{,}3$ km; doch ist der mittlere Fehler noch sehr groß, so daß diese Differenz wahrscheinlich nur durch die Unsicherheit der Einzelwerte bedingt ist. Es ist aber auch möglich, daß der Gravitationseffekt bei den Sternen der Orion-Nebelgruppe wirklich größer ist als im Mittel für alle *B*-Sterne. Eine Begründung dieser Vermutung werde ich später im Anschluß an Überlegungen zur Eddingtonschen Theorie des Strahlungsgleichgewichts der Sterne geben.

Jedenfalls folgt aus den vorangehenden Überlegungen mit ziemlicher Gewißheit, daß der für alle *B*-Sterne gefundene Wert für die allgemeine Rotverschiebung der Spektrallinien kein Dopplereffekt ist, also nicht die Folge einer allgemeinen Expansion des Systems sein kann. Vielmehr muß er seinen Grund in den besonderen Bedingungen der Lichtemission auf den Oberflächen der Sterne haben, denn wir haben allen Grund anzunehmen, daß der Wert ϱ_N für den Nebel uns den reinen kinematischen Dopplereffekt des Orionsystems liefert. Natürlich kann unser Resultat vorerst nur als ein neuer qualitativer Hinweis für die Existenz einer Gravitationsverschiebung der Spektrallinien bei den *B*-Sternen gelten, da eine anderweitige Bestimmung des Gravitationspotentials an der Oberfläche der Sterne zurzeit noch nicht möglich ist.

Eine Anwendung der gleichen Überlegung auf ein anderes Sternsystem als die Oriongruppe scheitert vorerst noch daran, daß in allen anderen Fällen, die möglicherweise in Frage kämen, die Nebel so schwach leuchten, daß halbwegs genaue Linienverschiebungen aus ihren Spektren nicht abgeleitet werden können. Was jedoch im Zusammenhang mit der hier behandelten Frage interessiert, ist eine unzweifelhaft bestehende organische Beziehung der Heliumsterne zu den am Himmel sichtbaren Nebeln. Sie ist möglicherweise ein Beleg dafür, daß wir es bei diesen Sternen mit besonders großen Massen zu tun haben, wenn wir nämlich gewisse Folgerungen ziehen, die die Eddingtonsche Theorie des Strahlungsgleichgewichts der Sterne liefert. Da diese Überlegungen geeignet sind, den hier vertretenen Standpunkt über das Wesen der Rotverschiebung bei den *B*-Sternen zu stützen und da sie überdies auf einen weiteren dritten Hinweis für die Existenz einer Gravitationsverschiebung bei den Heliumsternen geführt haben, der im nachfolgenden Absatz besprochen werden soll, so möchte ich auf die wesentlichsten Gesichtspunkte dieser Eddingtonschen Theorie vom inneren Aufbau der Sterne und auf die hier besonders interessierenden Folgerungen kurz eingehen.

Einige allgemeine Betrachtungen.

Alle bisherigen Versuche, Klarheit über den inneren Aufbau der Sternmaterie und über das in ihnen herrschende Strahlungsgleichgewicht zu gewinnen, stießen auf die außerordentliche Schwierigkeit[1]), daß man für die Absorptionskoeffizienten der Sternmaterie fast absurd große Werte annehmen mußte, weil sonst ein Energiestrom aus der Oberfläche hervorbrechen müßte, den wir niemals beobachtet haben. Es ist Eddingtons Verdienst, diese Schwierigkeit im wesentlichen behoben zu haben durch den Nachweis, daß in den Grundgleichungen der bisherigen Theorien ein entscheidender Faktor vernachlässigt worden war, nämlich die Bedeutung des Strahlungsdrucks für die Energiebilanz im Innern des Sternes. Seine neue Theorie, die von Anfang an den Strahlungsdruck in Rechnung zieht, scheint sich der Wirklichkeit in den wesentlichen Zügen gut anzupassen und führt zu Folgerungen, die für die hier behandelten Fragen von großer Bedeutung sind.

Nach der Eddingtonschen Theorie ist das Gleichgewicht im Inneren eines als Gaskugel gedachten Sternes von folgenden drei Grundgesetzen beherrscht. In jedem Volumelement halten sich Gasdruck, Strahlungsdruck und Gravitationsdruck das Gleichgewicht; als Gravitationsdruck in jedem Volumelement ist das Gewicht der über ihm ruhenden Massen gemeint. Zweitens, die Zustandsgrößen des Gases erfüllen in jedem Volumen die Zustandsgleichung des idealen Gases bzw. die van der Waalssche Zustandsgleichung. Die dritte Gleichung bringt

1) Eine ausführliche Darstellung der Eddingtonschen Theorie hat kürzlich A. Kohlschütter in den „Naturwissenschaften", 7, Heft 5 und 6 gegeben.



schließlich die Energiebilanz der ausgestrahlten und absorbierten Energie für jedes Volumelement zum Ausdruck. Als Energiequelle wird ausschließlich die Kontraktionsenergie der Sternmaterie angenommen. Diese drei Differentialgleichungen lassen sich nicht streng integrieren. Die bisher abgeleiteten genäherten Lösungen liefern aber Beziehungen, welche die Verhältnisse auf der Sonne und bei Sternen, soweit wir dieselben schon kennen, gut darstellen.

Diese Theorie führt nun unter anderem auf folgende wichtige Beziehung:

$$2{,}91 \cdot 10^{-69} M^2 m^4 \beta^4 = 1 - \beta.$$

In ihr bedeutet M die Masse des Sternes, m das Atomgewicht und β eine Größe, die folgende physikalische Bedeutung hat. $1-\beta$ mißt das Verhältnis vom Strahlungsdruck zum Gravitationsdruck; dieses Verhältnis nähert sich, wie die Gleichung lehrt, immer mehr dem Werte 1, je größer die Gesamtmasse des Sternes ist. Bei sehr großen Massenwerten muß demgemäß der Fall eintreten können, daß der Gravitationsdruck schon fast ausschließlich durch den Strahlungsdruck aufgehoben wird, und jede Zusatzkraft, z. B. das Zentrifugalfeld der Rotation, könnte dahin führen, daß der Zusammenhang der Materie kein stabiler mehr ist. Es wird in einem solchen Zustande zum Verlust von Materie kommen. Nun kann, wie die Eddingtonsche Theorie lehrt, ein Stern im Laufe seiner Entwicklung eine so hohe effektive Temperatur, d. h. Oberflächentemperatur, wie wir sie bei den *O*- und *B*-Sternen beobachten, nur erreichen, wenn diese Masse einen bestimmten Grenzwert übersteigt. Wir haben also einmal einen Hinweis dafür, daß die Massen der Sterne höchster effektiver Temperatur, das sind die *B*- und *O*-Sterne, oberhalb einer bestimmten Grenze liegen müssen, sodann als Folgerung der obigen Gleichung einen Fingerzeig, daß das Auftreten gasförmiger Materie in der Umgebung besonders großer Massen zu erwarten sein wird, wo infolge des hohen Strahlungsdrucks die Materie des Sternes sich nicht mehr in stabilem Gleichgewicht zu halten vermag. Die enge Beziehung der *O*-Sterne, in denen die hellen Nebellinien im Spektrum auftreten, und ebenso der *B*-Sterne zu nebelförmig verteilter Materie am Himmel deutet also hiernach durchaus darauf hin, daß wir es bei diesen Sternen mit besonders großen Massen zu tun haben. Möglicherweise hängt also das Auftreten des ausgedehnten Orionnebels in einer auffallenden Ansammlung heller *B*-Sterne am Himmel mit diesen Verhältnissen zusammen. Diese Auffassung würde zugleich die Einheit von Nebel und Sternen sichern und es auch verständlich machen, daß die Nebelmaterie, wie Buisson, Fabry und Bourget festgestellt haben, eine Temperatur hat, die gleich der der umgebenden Sterne ist. Denn wir müssen annehmen, daß das Ausscheiden der großen Nebelmassen erst erfolgt ist, als die effektive Temperatur der Sterne so hoch war, daß der Strahlungsdruck eine entscheidende Rolle beim Aufbau der Sternmaterie spielte. Die Tatsache, daß die Rotverschiebung der Sternlinien im Orion gegenüber den Nebellinien merklich größer herauskommt als die statistisch abgeleitete Rotverschiebung für alle *B*-Sterne, spricht also möglicherweise dafür, daß wir es im Orion mit besonders großen Sternmassen zu tun haben. Diese Überlegungen im Anschluß an die Eddingtonsche Theorie stützen also die Auffassung, daß die *B*-Sterne besonders große Massen haben und demgemäß eine ausgesprochene Gravitationsverschiebung der Spektrallinien aufweisen müßten; sie weisen ferner darauf hin, daß das Auftreten der gewaltigen Nebelmassen im Orion bei der gleichzeitig auffallend starken Ansammlung heller *B*-Sterne nicht zufälliger Natur ist, sondern ebenfalls ein Symptom dafür ist, daß in dieser Gegend besonders große Sternmassen sich verdichtet haben, die zu dem Nebel in organischer Beziehung stehen, so daß der Anschluß der Sternspektren an das Nebelspektrum, wie das im vorigen Abschnitt geschah, erlaubt ist. Diese Überlegungen haben aber auch eine weitere Hypothese ermöglicht, auf die ich im folgenden Abschnitt eingehen will, und die uns einen dritten Hinweis für die Existenz einer allgemeinen Rotverschiebung der Spektrallinien bei den Heliumsternen liefern wird.

Die Rotverschiebung der Linien von *B*-Sternen gegenüber den ruhenden Kalziumlinien.

Nach den im vorangehenden Abschnitt entwickelten allgemeinen Betrachtungen wird man erwarten müssen, daß Sterne großer Massen und hoher effektiver Temperatur häufig von feinverteilter Materie umgeben sein werden, die sich von der Hauptmasse infolge des hohen Strahlungsdrucks abgelöst hat. Diese Materie braucht nun keineswegs, wie beim Orion, sich so gewaltig auszudehnen. Im Gegenteil bedeutet gerade beim Orion die riesige Ausdehnung des Nebels eine gewisse Schwierigkeit für die Auffassung, daß diese Materie von den Sternen ausgeschieden sei. — Doch ist wohlgemerkt diese Auffassung nicht ausschlaggebend dafür, daß im Orion Nebel und Sterne

ein einheitliches System bilden, worauf es ausschließlich ankommt. — Man wird vielmehr im allgemeinen erwarten, daß sich um die in Frage kommenden Sterne weite Atmosphären legen werden. Diese Atmosphären können so ausgedehnt sein, daß die Absorptionslinien, welche sie im Sternspektrum hervorrufen, einem Gravitationsfeld entspringen, das wesentlich verschieden von dem an der Oberfläche des Sternes selbst ist. Für das Vorhandensein solcher Atmosphären sind nun in der Tat deutliche Anzeichen vorhanden. Unter den *B*-Sternen ist bekanntlich ein außerordentlich hoher Prozentsatz von spektroskopischen Doppelsternen, also von Sternen, deren Spektrallinien periodische Schwankungen um eine Mittellage ausführen. Nun bemerkte Hartmann als erster, daß im Spektrum des *B*-Sternes δ Orionis die Absorptionslinien *K* und *H* des Kalziums bei 3933,82 und 3968,63 Ångström auftreten, aber an den periodischen Schwankungen der übrigen Sternlinien nicht teilnehmen. Seitdem sind bei einer größeren Zahl von Sternen frühen Spektraltyps solche sich anormal verhaltende Kalziumlinien aufgefunden worden, die entweder anscheinend völlig ruhen, oder aber Schwankungen geringerer Amplitude ausführen als die eigentlichen Sternlinien. Bei der hervorragenden Rolle, welche das Kalzium in den äußersten Schichten der Sonnenatmosphäre spielt und auf Grund der im vorangehenden Abschnitt entwickelten Gesichtspunkte liegt es nahe, diese Kalziumlinien als die Anzeichen einer diese Sterne umgebenden weiten Atmosphäre anzusprechen. Es ist zwar öfters die Vermutung geäußert worden, daß diese Linien durch die Absorption des Sternlichts in weiten interstellaren Kalziumwolken zustande kommen und von Evershed[1]) z. B. als Argument dafür der Umstand hervorgehoben worden, daß die Radialgeschwindigkeiten, wie sie aus den ruhenden Kalziumlinien folgen, durchweg sehr klein seien nach Abzug der durch die Sonnenbewegung verursachten Komponenten der Linienverschiebung. Doch ist dieses Argument deshalb nicht beweiskräftig, weil bekanntlich die *B*-Sterne, bei denen diese Linien auftreten, selbst in der Mehrzahl außerordentlich kleine individuelle Radialgeschwindigkeiten haben. Noch mehr spricht aber gegen diese Annahme der Umstand, daß bei verschiedenen Systemen diese beiden Kalziumlinien nicht absolut ruhen, sondern, wenn auch mit geringerer Amplitude, Schwankungen zeigen wie die eigentlichen

1) Observatory 1919.

Sternlinien[1]). Sodann findet die Auffassung, daß diese Linien durch eine weite Kalziumatmosphäre verursacht werden, eine Stütze in der auffälligen Erscheinung[2]), daß sich unter den Heliumsternen zahlreiche Sterne befinden, die von einer direkt sichtbaren Nebelhülle umgeben sind.

Stellt man sich darum auf den Standpunkt, daß die in den Heliumsternen auftretenden Kalziumlinien durch Absorption in einer weiten Sternatmosphäre entstehen, so wird man auf diese Sterne die gleiche Überlegung anwenden dürfen wie auf die Sterne des Orionsystems, d. h. man wird erwarten, daß, falls die Linienverschiebungen bei den Sternen durch einen Gravitationseffekt systematisch verfälscht sind, sich dies in einer Rotverschiebung der Sternlinien gegenüber den ruhenden Kalziumlinien der Atmosphäre äußern wird. Eine solche Erscheinung ist nun in der Tat deutlich ausgeprägt. Doch bedarf es noch einer sorgfältigen Diskussion von neuem und genauem Material, um dieses Resultat zu sichern. Eine solche Untersuchung ist in Vorbereitung. In der Tabelle II sind alle Sterne wiedergegeben, in deren Spektren die Kalziumlinien *H* und *K* gemessen worden sind; die mit ρ_* überschriebene Kolonne enthält die aus den bewegten Sternlinien durch Berechnung der spektroskopischen Bahn gewonnene Schwerpunktsbewegung für jedes System; die mit ρ_K überschriebene Kolonne die aus den Kalziumlinien folgende Radialgeschwindigkeit.

Als Wellenlängen der beiden Kalziumlinien *H* und *K* haben die Beobachter den Wert aus den Rowlandschen Tafeln für die Sonne benutzt; diese stimmen gut mit den Werten überein, welche aus Laboratoriumsversuchen stammen. Und zwar sind diese beiden Wellenlängen nach:

	Kayser und Runge	Exner und Haschek	Rowland für die Sonne
λ_H	3968,63	3968,63	3968,625
λ_K	3933,83	3933,81	3933,825

Wie die Tabelle II in der Kolonne: $\rho_*-\rho_K$ lehrt, scheint eine Rotverschiebung der Sternlinien gegenüber den beiden Kalziumlinien unzweifelhaft vorhanden zu sein. Doch können die hier wiedergegebenen Werte vorerst nur als vorläufige gelten, bis einheitlich diskutiertes weiteres Material die hier benutzten Beobachtungen bestätigt. Unter den 10 Sternen

1) z. B. 9 Camelop. (Astrophys. Journ. 37, 1) und ξ Persei (Journ. Astr. Soc. Kanada 6, 188).

2) Siehe A. M. Clerk, „Nebulous double stars", Observatory 1904, p. 303.

Tabelle II.

*	h	Sp	α_{1900}	δ_{1900}	ϱ_*	ϱ_K	$\varrho_*-\varrho_K$	Autorität	Bemerkungen
	m				km	km	km		
o Persei	3,9	B_1	$3^h\ 38^m$	$+31^0\ 58'$	+18,5	+12,4	+6,1	Allg. II, S. 63.	
ξ „	4,0	Oe_5	52	+35 30	>30	+15,4	>0	L. O. B. IV, S. 21.	Starke Rotverschiebung angedeutet, Kalziumlinien nicht absolut ruhend.
q Camelop.	4,4	B	4 44	+66 10	+6,4	— 2,2	+8,6	L. O. B. IV, A. J. 19, S. 350, A. J. 37, 1.	ϱ_* Mittel aus 79 Platten (siehe A. J. 37, S. 21).
η Orionis	3,4	B_1	5 19	— 2 29	+35,5	—	>0	Low. Bull. 51.	StarkeRotverschiebg. anged.
VV „	5,4	B_2	29	— 1 13	+20,8	+16,7	+4,1	Allg. III, Nr. 21.	—
δ „	2,5	B	27	— 0 22	+23,1	+17,2	+5,9	L. O. B. VI, Allg. III, 21.	$\varrho_* = +15,2$ nach Jordan, Mittel nach Hartmann u. Jordan = + 19,2.
ε „	1,8	B	31	— 1 16	+24,5	+15,6	+8,9	Allg. III, , L. O. B. VI, S. 110.	—
ν Geminorum	4,1	B_5	6 23	+20 17	—	—	>0	A. J. 32, S. 300.	Starke Rotverschiebg. anged.
β Scorpii	2,9	B_1	16 0	—19 32	—9,5	—12,6	+3,1	Allg. II, Nr. 14, Low. Bull., Nr. 54.	Die Werte für ϱ_* u. ϱ_K sind Mittel aus beiden Publikat.
σ Aquilae	5,2	B_8	19 34	+ 5 10	—5,0	—12,6	+7,6	Allg. III, Nr. 22.	
							Mittel: +6,3 km		

Allg. = Alleghany Publication. Low. Bull. = Lowell Bulletin. L. O. B. = Lick Observatory Bulletin.

der Tabelle II befinden sich nun 3 Sterne, die auch zur Orion-Nebelgruppe gehören, so daß die Probe möglich ist, ob wir es in beiden Fällen mit dem gleichen Effekt zu tun haben. Bei η Orionis liegen allerdings noch keine expliziten Messungen der Kalziumlinien vor, doch wird angegeben, daß die aus ihnen resultierende Radialgeschwindigkeit wesentlich kleiner ist, daß also eine Rotverschiebung vorliegt. Für die beiden anderen finden wir:

*	$\varrho_*-\varrho_N$ Stern minus Orionnebel	$\varrho_*-\varrho_K$
δ Orionis	+6,4 km	+5,9 km
ε „	+7,6 „	+8,9 „

Wenn nun auch Einzelwerten vorerst noch kein großes Gewicht zukommt, so ist die Übereinstimmung doch durchaus befriedigend und spricht für die Hypothese, daß wir es in beiden Fällen mit dem gleichen Effekt zu tun haben.

Jedenfalls ist das Ergebnis dieser Überlegungen ein erneuter kräftiger Hinweis, daß die bei den *B*-Sternen gefundene Rotverschiebung *K* kein Dopplereffekt, sondern die von der allgemeinen Relativitätstheorie erwartete Gravitationsverschiebung der Spektrallinien ist. Hier eröffnen sich jedenfalls neue Wege, um diese wichtige Frage auch einmal quantitativ anzugreifen und der Astronomie ein neues Hilfsmittel in die Hand zu geben, über die Massen der Sterne sich ein Bild zu machen.

Über die Massen, Dichten und die Parallaxe der Sterne der Orion-Nebelgruppe.

Wenn auch die bisherigen Resultate vorerst nur eine qualitative Bedeutung haben, weil wir noch nicht über die hinreichenden Kenntnisse verfügen, um über die Massen und Dichten der *B*-Sterne bestimmte Aussagen zu machen, so läßt sich doch die Brauchbarkeit unserer Arbeitshypothese insoweit quantitativ prüfen, als man feststellen kann, ob die Annahme eines Gravitationseffekts von +4 bis +6 km nicht zu absurden Folgerungen für die Massen und Entfernungen der *B*-Sterne hinführt. Da wir ja mit einer für die Astronomie bisher ganz wesensfremden Hypothese arbeiten, ist nicht vorauszusehen, ob sie nicht zu Konsequenzen führt, die ganz und gar unverträglich mit bisher gewonnenen Erkenntnissen sind.

Wie schon in der ersten Mitteilung ausgeführt wurde, hat das Studium der spektroskopischen Doppelsterne unter den *B*-Sternen zu dem Ergebnis geführt, daß die Massen der *B*-Sterne beträchtlich größer als die der Sonne sind. H. Ludendorff kommt in seiner Untersuchung über die Massen dieser Sterne zu Durchschnittswerten von 10—20 Sonnenmassen[1]). Doch liegen dieser Untersuchung nur 9 Systeme von *B*-Sternen zugrunde, so daß man diese Resultate nur mit Vorsicht auf die Allgemeinheit der *B*-Sterne anwenden darf, zumal die Einzelwerte noch sehr unsicher sind. Das gleiche gilt von der Anwendung der Shap-

1) Siehe I. Mitteilung. Diese Zeitschr. 16, 115, 1915.

leyschen Resultate über die durchschnittlichen Dichten der B-Sterne, wie man sie aus solchen Systemen ableiten kann, die spektroskopische Doppelsterne sind und zugleich infolge gegenseitiger Bedeckung beider Komponenten einen Lichtwechsel zeigen. Es findet ein mäßiges Schwanken der Dichte um einen Mittelwert von 0,1 Sonnendichte. Seine Ergebnisse gründen sich auf 12 Systeme, von denen 7 zu Dichten zwischen 0,05—0,2 Sonnendichten, 4 kleiner als 0,05 und 1 größer als 0,2 führen. Diese Angaben über Massen und Dichten haben vorerst nur die Bedeutung von Größenordnungswerten.

Die als Gravitationseffekt gedeutete Rotverschiebung von $+4$ bis 6 km bei den B-Sternen erlaubt nun die Massen zu berechnen, wenn man über die Dichten Annahmen macht. Nennt man Φ_* das Gravitationspotential auf der Sternoberfläche, M_* und d_* seine Masse und mittlere Dichte, entsprechend $\Phi_\odot, M_\odot, d_\odot$ die Werte dieser drei Größen für die Sonne, so gilt

$$\frac{M_*}{M_\odot} = \left(\frac{\Phi_*}{\Phi_\odot}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{d_0}{d_\odot}\right)^{1/2}.$$

Nach dieser Formel sind in Tabelle III die miteinander verträglichen Werte für Masse und Dichte, die zu den Werten $K = +4$ km und $K = +6$ km gehören, gerechnet; die Einheit ist die Sonnenmasse.

Tabelle III.

$\frac{d_*}{M_*}$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$K = +4{,}0$ km	77	54	38	31	27	24
$K = +6{,}0$ km	141	100	71	58	50	45

Da Dichten von 0,1—0,2 Sonnendichten für die B-Sterne am wahrscheinlichsten zu sein scheinen, gelangen wir damit zu Massen von 40—100 Sonnenmassen. Das sind Werte, die wesentlich größer sind, als man bisher annehmen zu müssen glaubte. Doch ist unsere Kenntnis der Massen der Sterne noch nicht ausreichend, um die Unmöglichkeit solcher Massenwerte zu behaupten, wenn auch die Erfahrungen an den spektroskopischen Doppelsternen auf kleinere Massen hinweisen. Daß die so gefundenen Werte durchaus möglich sind, kann man in folgender Weise prüfen. Wenn man bei einem Stern Masse und Dichte kennt, so kennt man seine Oberfläche; aus dieser und der Oberflächentemperatur T kann man, wenn man annimmt, daß der Stern als schwarzer Körper strahlt, seine absolute Helligkeit berechnen, d. h. seine scheinbare Helligkeit in der irgendwie gewählten Entfernung 1. Bezeichnet man mit m_* die absolute bolometrische Helligkeit des Sternes in Größenklassen, $m_\odot$ den entsprechenden Wert für die Sonne, so besteht die Beziehung

$$m_* = m_\odot - 2{,}5 \cdot \log \frac{\left[\left(\frac{M}{d}\right)^{2/3} \cdot T^4\right]_*}{\left[\left(\frac{M}{d}\right)^{2/3} \cdot T^4\right]_\odot}.$$

Das erste Glied in der Klammer ist der Oberfläche des Sternes proportional, das zweite nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz der Strahlung in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur. Wählt man als Einheitsentfernung diejenige, die einer Parallaxe von 1″ entspricht, so wird $m_\odot = -0{,}1$. Rechnet man dann die bolometrische Helligkeit in die visuelle um, so kann man aus der absoluten und scheinbaren Helligkeit des Sternes die Parallaxe ableiten. Diese Rechnung habe ich für die Orion-Nebelgruppe durchgeführt, indem ich T zwischen 13000°—14000° wählte und $\frac{M}{d}$ zwischen 400 bis 1000, wie es aus dem Werte für die Rotverschiebung unter Annahme einer mittleren Dichte von 0,1 Sonnendichte herauskommt. Man erhält dann als Parallaxe der Orion-Nebelgruppe

$$\pi = 0'',003 - 0'',005.$$

Für dieselbe Gruppe fand Kapteyn[1])

$$\pi = 0'',0054.$$

Auch für einzelne Sterne dieser Gruppe liegen Parallaxenbestimmungen vor, so für

δ Orionis: $\pi = 0'',0032$ nach Stebbins[2]),

ζ Orionis: $\pi = 0'',008$ nach Hertzsprung[3]).

Schließlich fand Bergstrand[4]) nach einer anderen Methode als Kapteyn für die Parallaxe der Sterne im Orion

$$\pi = 0'',008.$$

Am sichersten ist der von Kapteyn abgeleitete Betrag. Wie man sieht, steht der aus unserer Hypothese folgende Wert durchaus im Einklang mit den anderweitig bestimmten Parallaxenwerten für die Sterne im Orion. Dies kann als Beleg dafür gelten, daß die Deutung der beobachteten Rotverschiebung bei den B-Sternen nicht zu Widersprüchen gegen sonstige Erfahrungen führt.

Schließlich habe ich noch in folgender Weise die neue Hypothese zu stützen versucht. Ebenso wie die Annahme einer Rotverschie-

1) **Astrophys. Journ. 47, 1918.**
2) **Astrophys. Journ. 42, 1915.**
3) **Astrophys. Journ. 47, 1918, S. 170.**
4) **Nova Acta Ups. 1919.**

bung $K = +4$ bis 6 km paarweise zusammengehörige Werte für Masse und mittlere Dichte miteinander verknüpft, liefert die Eddingtonsche Theorie eine Beziehung, die bei Festlegung der effektiven Temperatur eines Sternes miteinander verträgliche Werte für Masse und Dichte verknüpft. Jede Beziehung $K = \text{const.}$ liefert eine Kurve, deren Punkte zusammengehörige Werte für M und d sind, desgleichen jede Beziehung $T = \text{const.}$ Man könnte nun untersuchen, ob die Kurven $T = 13000^0$ bis 15000^0 einerseits und die Kurven $K = +4$ bis 6 km andererseits sich in Punkten schneiden, deren Koordinaten mögliche Massen und Dichten für die Sterne abgeben. Leider stecken in der Eddingtonschen Theorie noch mehrere frei verfügbare Parameter, so das mittlere Atomgewicht des Sternes, ferner die Konstante der van der Waalsschen Zustandsgleichung, so daß man noch zuviel Willkür besitzt und keine zwingenden Schlüsse ziehen kann. Nimmt man das Atomgewicht gleich 2,8, entsprechend den Ansätzen von Eddington, ferner für die Konstante der van der Waalsschen Zustandsgleichung, welche die maximale Dichte der Materie darstellt, den Wert 1,5 — die mittlere Dichte der Sonne ist 1,38 —, so fallen die Schnittpunkte der Kurven in Gebiete, wo die Dichte zwischen 0,05—0,2 Sonnendichte liegt. Erst eine viel genauere Kenntnis des inneren Aufbaus der Sterne wird es uns aber ermöglichen, auch auf diesem Wege bindende Kriterien für oder gegen die hier vertretene Auffassung von dem Wesen der Rotverschiebung bei den Spektrallinien der B-Sterne abzuleiten.

Wenn also auch die hier abgeleiteten Resultate vorläufig nur qualitative Hinweise für die Existenz der von der allgemeinen Relativitätstheorie geforderten Gravitationsverschiebung bringen, so eröffnen sie doch neue Ausblicke auf Prüfungsmöglichkeiten der Theorie, die vielleicht auch in quantitativer Hinsicht einmal fruchtbar gemacht werden können, wenn die astronomische Erkenntnis in diesen Fragen weiter fortgeschritten ist.

Zusammenfassung.

1. Für die Helium-(B)Sterne und für die absolut hellen K- und M-Sterne, die wir auf Grund unserer bisherigen astronomischen Erfahrung für besonders große Systeme halten müssen, liefert eine statistische Überlegung die Möglichkeit, den mittleren Gravitationseffekt von den Dopplereffekten zu trennen. Es offenbart sich mit ziemlicher Gewißheit eine allgemeine Rotverschiebung ihrer Spektren, wie es nach der allgemeinen Relativitätstheorie zu erwarten ist.
2. Daß die statistisch gefundene Rotverschiebung bei den B-Sternen kein Dopplereffekt ist, sondern in den Emissionsbedingungen auf den Sternoberflächen ihren Grund hat, folgt aus der allgemeinen Rotverschiebung der Sterne der Orion-Nebelgruppe gegenüber dem Spektrum des Nebels.
3. Die enge Beziehung der B- und O-Sterne zu nebelförmiger Materie am Himmel ist vermutlich ein Symptom großer Masse bei diesen Sternen.
4. Faßt man die ruhenden Kalziumlinien in den Spektren von B- und O-Sternen als durch eine weite Kalziumatmosphäre hervorgerufen auf, so läßt sich eine Rotverschiebung der Sternlinien gegenüber den Kalziumlinien als Gravitationseffekt deuten.
5. Die Auffassung, daß die bei den B-Sternen gefundene Rotverschiebung im Betrage von 4—6 km ein Gravitationseffekt sei, führt in ihren quantitativen Folgerungen betreffs Masse und Entfernung der B-Sterne zwar zu überraschend großen Massenwerten, aber nicht zu Widersprüchen mit der sonstigen Erfahrung.

(Eingegangen 30. Juni 1919.)

Über den Dissoziationszustand der Fixsterngase.

Von John Eggert.

In einigen Arbeiten der letzten Jahre[1]) hat A. S. Eddington eine neue Theorie über den inneren Aufbau der Sterne entwickelt. Die früheren Theorien[2]) beruhten auf der Annahme, daß wir bei den Fixsternen, als Gaskugeln betrachtet, einen Gleichgewichtszustand vor uns haben: die nach dem Mittelpunkt des Sternes gerichtete Gravitation wird durch den entgegengesetzt wirkenden Gasdruck aufgehoben. Eddington führt in diese Betrachtung als neues Moment den Strahlungsdruck ein, indem er das von Schwarzschild[3]) für die äußersten

1) A. S. Eddington, On the radiative equilibrium of the stars. Monthly notices of the Royal Astronomical Society. Vol. 77, 16 u. 596, November 1916 und Juni 1917; The Interior of the stars. Scientia. Vol. 23, Januar 1918. Die Arbeiten sind zitiert nach dem Referat von A. Kohlschütter, Der innere Aufbau der Sterne. Die Naturwissenschaften 1919, Heft 5, 6 u. 16.

2) R. Emden, Gaskugeln. Leipzig 1907.

3) Schwarzschild, Göttinger Nachrichten 1906, S. 41.

Oberflächenschichten der Sonne aufgestellte Strahlungsgleichgewicht in sinngemäßer Weise für die Verhältnisse im ganzen Innern des Sternes verallgemeinert. Nach Eddington sind also bei jedem Fixstern einerseits die Gravitation der Gasteilchen und andererseits die Summe von Gasdruck und Strahlungsdruck im Gleichgewicht.

Die Theorie ist imstande, die Tatsache zu erklären, daß die Masse aller Fixsterne in der Größenordnung von 10^{33} bis 10^{34} g liegt. Auch andere Erfahrungstatsachen — Zusammenhänge zwischen Sterndichte, effektiver Temperatur und Helligkeit der Sterne — sind mit den Folgerungen der Eddingtonschen Theorie in Einklang.

Zur Auswertung seiner Differentialgleichungen braucht Eddington das Atomgewicht der Fixsterngase. Seine Annahmen zur Bewertung dieser Größe sind folgende:

1. Alle vorkommenden Gase sind einatomig.
2. Die Elemente sind nach dem Rutherfordschen Atommodell aufgebaut; es kreisen ebensoviel (negative) Elektronen um den Massenkern, als dieser selbst positive Ladungen besitzt.
3. Es gilt das Rutherfordsche Gesetz, wonach die Kernzahl nahe gleich dem halben Atomgewicht ist.
4. Dissoziiert das Atom Elektronen ab, so wirken diese wie ein selbständiges einatomiges Gas, d. h. sie gehorchen dem Avogadroschen Gesetz. Das Atomgewicht dieses Gases ist praktisch gleich Null.

Eddington fordert nun eine sehr weitgehende Atomdissoziation dieser Art. Sobald alle Elektronen vom Kern abgespalten sind, kommt dem entstehenden, aus Kernen und Elektronen zusammengesetzten Gasgemisch nach obigen Annahmen das mittlere Atomgewicht von nahe 2 zu. Diesen Wert hat Eddington seinen Rechnungen zunächst zugrunde gelegt. Bei einer später erfolgten Revision war er genötigt, infolge eines rechnerischen Versehens die Zahl 2,8 anzunehmen.

Die nachfolgenden Zeilen beabsichtigen, die Frage der Atomdissoziation vom thermochemischen Standpunkt zu erörtern, und zwar sollen für unsere Rechnungen diejenigen Zustandsgrößen eingesetzt werden, die sich aus der Eddingtonschen Theorie ergeben. Danach folgt für den Sternmittelpunkt eine Temperatur[1]) von 10^6—10^7 Grad und ein Druck von 10^7 Atm.

Wir gehen von der Nernstschen Formel zur Berechnung von Gasgleichgewichten aus[1]):

$$\lg K = -\frac{U_0}{4{,}571\, T} + \Sigma\nu\, 2{,}5 \lg T + \Sigma\nu C. \quad (1)$$

Es bedeuten:

K die Gleichgewichtskonstante,
U_0 die Wärmetönung des Vorganges beim absoluten Nullpunkt der Temperatur,
T die absolute Temperatur,
$\Sigma\nu$ die Änderung der Molzahlen während der betrachteten chemischen Reaktion,
$\Sigma\nu C$ die Änderung der chemischen Konstanten während der Reaktion.

Da wir es im vorliegenden Falle lediglich mit Reaktionen zwischen einatomigen Gasen zu tun haben[2]), ist diese Beziehung auf die vorliegenden Reaktionen anwendbar, sobald über die folgenden drei Punkte Klarheit besteht:

1. die Annahme eines definierten Dissoziationsvorganges,
2. die Kenntnis der Dissoziationswärme U_0,
3. die chemischen Konstanten aller Reaktionsteilnehmer.

Wir gelangen zu diesen Größen, indem wir unseren Betrachtungen von jetzt ab ein ganz bestimmtes Atom zugrunde legen; und zwar beantworten wir die aufgeworfenen drei Fragen für ein Atom mit der mittleren Kernzahl 26, das auch Eddington für seine Diskussionen oft gebraucht (26 ist die Kernzahl des Eisens). Wir stellen uns vor, daß sich die 26 zu diesem Kern gehörigen Elektronen auf vier Kreise verteilen, von denen der innerste Ring mit 2, die übrigen mit je 8 Elektronen besetzt sind.

Es soll hiermit nicht der Bau des Eisenatoms streng wiedergegeben, sondern an diesem Modell lediglich die Schätzung der erforderlichen Größen vorgenommen werden.

Wollen wir uns also zunächst (Punkt 1) von der Dissoziation selbst ein Bild machen, so ist aus Gründen der Symmetrie weder an eine sukzessive Abspaltung der einzelnen Elektronen zu denken, noch daran, daß sich alle Elektronen auf einmal vom Kern loslösen. Vielmehr wird der thermochemisch wahrscheinlichste Vorgang im Sinne des vorgegebenen Atombaues so erfolgen, daß jeweilig eine Schale von 8 Elektronen nach der anderen abdissoziiert.

---

1) Als „effektive" Temperaturen erhält Eddington Werte von 10^4 Grad, die mit den jeweiligen Messungen oder zuverlässigen Schätzungen an Fixsternen (6000 bis 15000 Grad) in guter Übereinstimmung sind. Unter „effektiver" Temperatur ist der T-Wert verstanden, der sich nach den Strahlungsgesetzen aus der meßbaren vom Stern ausgestrahlten Energie ergibt.

1) Vgl. Nernst, Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes. Halle 1918, Kapitel XI.

2) Nernst, ebenda Kapitel XIII.

Wir befassen uns also vorerst mit der Absprengung der ersten Elektronenwolke und wählen als Dissoziationsvorgang die Reaktion:

$$Fe = Fe^{\mathrm{VIII}} + 8e - U_0 \text{ cal},$$

die die Dissoziation des vorgegebenen Atoms (Fe) in dem achtfach positiv geladenen Trümmer (Fe^{VIII}) und 8 freie Elektronen (e) darstellt.

Wir kommen zu Punkt 2, der Schätzung der Dissoziationswärme U_0. Um die Rechnung zu vereinfachen, denken wir uns vorübergehend die 18 dem Kern am nächsten gelagerten Elektronen, d. h. die ersten drei Ringe, in den Kern verlegt und rechnen in erster Annäherung mit einem Modell, das aus einem achtfach positiv geladenen Kern und einer Schale von 8 Elektronen besteht. Die Gesamtenergie (potentielle und kinetische) eines um einen Kern von der Ladung $E = z \cdot e$ im Abstande r kreisenden Elektrons mit der Ladung e beträgt:

$$W = -\frac{eE}{r} + \frac{eE}{2r} = -\frac{eE}{2r} = -\frac{e^2 \cdot z}{2r};$$

für $z = 8$ ist also:

$$W = -\frac{(4{,}77 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 8}{2r}.$$

Im vorliegenden Falle kreisen gleichzeitig 8 (allgemein p) Elektronen um den Kern, so daß jedes Elektron (infolge der gegenseitigen Abstoßung) nur die Energie:

$$W = -\frac{e^2 \cdot (z - S_p)}{2r}$$

besitzt; für $p = 8$ erhält S_p den Wert 2,8[1]) und wir bekommen:

$$W = -\frac{e^2 \cdot 5{,}2}{2r}.$$

Alle 8 Elektronen haben demgemäß die Energie:

$$W = -8 \cdot \frac{(4{,}77 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 5{,}2}{2r}.$$

Der Abstand r des Elektrons vom Kern beträgt beim Wasserstoffatom, sofern das Elektron in der einquantigen Bahn kreist, nach Bohr $0{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm; für unser Modell verringert sich unter der gleichen Annahme der Radius des Ringes im Verhältnis $1 : (z - S_p) = 1 : 5{,}2$. Diese Annahme der Einquantigkeit ist aber sicher nicht zutreffend. Denn der betrachtete Ring ist (abgesehen von der eben angestellten Vereinfachung) der 4. von innen gezählt. Wir wollen uns in dieser Frage den Ergebnissen anschließen, die Born und Landé[2]) bei ihren Berechnungen der Kristallgitter über die Quantigkeit äußerer Ringe erhalten haben. Hiernach sind mit der Erfahrung nur höchstens zweiquantige Ringe verträglich; die Annahme höherer Quantenzahlen ergibt zu große Werte für die Atomradien usw. Wir fassen bei dem vorliegenden Modell den 4. Ring also ebenfalls als zweiquantig auf und verkleinern die Energie im Verhältnis $1 : 2^2$. Im ganzen bekommen wir W, auf ein Mol ($6{,}2 \cdot 10^{23}$ Atome) bezogen, die Gesamtenergie der Elektronen, nach Division durch das Wärmeäquivalent ($4{,}2 \cdot 10^7$) in cal ausgedrückt:

$$W = -\frac{8 \cdot (4{,}77 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 5{,}2^2 \cdot 6{,}2 \cdot 10^{23}}{2^2 \cdot 2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot 4{,}2 \cdot 10^7} = -1{,}8 \cdot 10^7 \text{ cal}.$$

Diese Zahl, oder vielmehr ihr negativer Wert $+1{,}8 \cdot 10^7$ cal, ist U_0, die Dissoziationswärme beim Nullpunkt. Denn das ist die Energie, die nötig ist, um 8 Elektronen aus der Umgebung des Kerns ins Unendliche zu entfernen. Die kinetische Energie, die die Elektronen beim Abtrennungsvorgang einbüßen, — nach der Nullpunktsdissoziation sind die Reaktionsprodukte in Ruhe — ist mitberücksichtigt. Denn wir haben von vornherein mit der Gesamtenergie gerechnet und die kinetische von der potentiellen abgezogen[1]).

Die chemischen Konstanten berechnen wir nach der Beziehung[2]) von Sackur-Tetrode-Stern:

$$C = -1{,}6 + 1{,}5 \lg M,$$

in der M das Molekulargewicht der Substanz bedeutet. Um $\Sigma \nu C$ zu bilden, greifen wir auf die Reaktionsgleichung zurück, die wir von jetzt ab exotherm formulieren:

$$Fe^{\mathrm{VIII}} + 8e = Fe + U_0 \text{ cal}.$$

Die Gleichung 1 bezieht sich nämlich hinsichtlich der Größen K, U_0 usw. auf diesen Richtungssinn der Reaktion. Fe^{VIII} und Fe besitzen sehr nahe gleiches Atomgewicht; in $\Sigma \nu C$ heben sich daher ihre chemischen Konstanten gegenseitig auf und es bleibt von der Summe allein $8 \cdot C_e$, die achtfache chemische Konstante des Elektrons, übrig. Diese selbst beträgt:

$$C_e = -1{,}6 + 1{,}5 \cdot \lg 5{,}5 \cdot 10^{-4} = -6{,}5.$$

Die Änderung der Molzahlen während der Reaktion ist

$$\Sigma \nu = 9 - 1 = 8.$$

---

1) Vgl. z. B. Debye, diese Zeitschr. **18**, 276, 1917.
2) Verh. d. D. Phys. Ges. **20**, 206, 1918.

1) Herr Dr. Reiche-Berlin hatte die Liebenswürdigkeit, mir für die vorstehende Abschätzung einige wertvolle Winke zu geben.
2) Vgl. Nernst, l. c. S. 152 sowie Stern, Zusammenfassender Bericht usw., Zeitschr. f. Elektr. **25**, 78, 1919.

Bevor wir die gewonnenen Größen in die Gleichung 1 einsetzen, wollen wir uns darüber klar werden, welchen Wert wir für K selbst zu fordern haben. Die Gleichgewichtskonstante K ist auf Partialdrucke der Gleichgewichtsteilnehmer, gemessen in Atm., bezogen. Sie bezeichnet also, gemäß der letzten Formulierung der Reaktion, den Wert des Quotienten:

$$K = \frac{(p_{Fe^{VIII}}) \cdot (p_e)^8}{(p_{Fe})}.$$

Führen wir in üblicher Weise in diesen Ausdruck den Dissoziationsgrad x ein, so geht K über in:

$$K = \frac{x^9}{(1+8x)^8 \cdot (1-x)} P^8,$$

wobei P nunmehr den Gesamtdruck bedeutet. Soll die Dissoziation „vollständig“ sein, so ist x etwa der Wert $x = 0{,}99$ zu erteilen, und dann wird:

$$K = 10^{-5,6} P^8.$$

Wir setzen jetzt alle ermittelten Größen in die Gleichung 1 ein und bekommen:

$$\lg 10^{-5,6} \cdot P^8 = -\frac{1{,}8 \cdot 10^7}{4{,}6 \cdot T} + 8 \cdot 2{,}5 \cdot \lg T + \\ + 8 \cdot (-6{,}5).$$

Wir dividieren durch 8:

$$\lg 10^{-0,7} \cdot P = -\frac{1{,}8 \cdot 10^7}{8 \cdot 4{,}6 \cdot T} + 2{,}5 \lg T - 6{,}5$$

und erhalten als endgültige Gleichung:

$$-0{,}7 + \lg P = -\frac{5 \cdot 10^5}{T} + 2{,}5 \lg T - 6{,}5. \quad (2)$$

Für Drucke von der Größenordnung 1 Atm. ist die linke Seite der Gleichung schwach negativ ($-0{,}7$); für Drucke aber, wie sie Eddington für das Sterninnere berechnet (10^7 Atm.), muß hier, immer die gleiche Dissoziation vorausgesetzt, der Wert $+6{,}3$ auftreten. Die starke Drucksteigerung erschwert also die Dissoziation erheblich, und zwar um so mehr, je mehr Elektronen sich vom Kern abspalten, d. h. je größer $\Sigma\nu$ wird.

Wir gehen jetzt dazu über, die Werte der T-Funktion auf der rechten Seite der Gleichung 2 zu untersuchen. Die nachfolgende Tabelle enthält die Größe von $\lg K$ für wachsende Temperaturen.

T	$\lg K = -\frac{5 \cdot 10^5}{T} + 2{,}5 \lg T - 6{,}5$
10^4	$-50 + 10 - 6{,}5 = -46{,}5$
10^5	$-5 + 12{,}5 - 6{,}5 = +1$
10^6	$-0{,}5 + 15 - 6{,}5 = +8$

Die geforderte Dissoziation der ersten 8 Elektronen tritt also bei einem Druck von 10^7 Atm. zwischen 10^5 und 10^6 Grad ein, denn in diesem Temperaturgebiet erhält $\lg K$ den Wert $+6{,}3$. Bei 10^4 Grad, der effektiven Sterntemperatur, besitzt die Dissoziation noch einen ganz unmerklichen Betrag.

Die Reaktion fällt also in ein Gebiet, das etwa eine Zehnerpotenz tiefer gelegen ist als die von Eddington angegebenen Temperaturen. Wiederholt man die Rechnung für den nächsten Elektronenring, so bleibt bis auf die Größe U_0 in der Rechnung annähernd alles bestehen. U_0 selbst dagegen ist etwa eine Zehnerpotenz größer, so daß der Temperaturbereich für die Abspaltung des zweiten Ringes ebenfalls um eine Zehnerpotenz höher rückt. Nunmehr befinden wir uns in dem von Eddington angegebenen Gebiet; mit der Abtrennung der beiden äußersten Ringe, nämlich des dritten und vierten, dürfte also die obere Grenze für die Dissoziationsmöglichkeit des Atoms unter den angenommenen Bedingungen erreicht sein. — Die von uns gemachte Annahme, daß die Elektronen ringweise abdissoziieren, bedeutet im Grunde keinen Sonderfall, denn sehen wir ganz davon ab, daß sich für diesen Fall die Rechnungen besonders einfach gestalteten und rechnen mit einer sukzessiven Dissoziation der Elektronen, so gelangen wir ungefähr zu dem gleichen Ergebnis, wie wenn wir annehmen würden, daß nur alle Elektronen auf einmal den Kern verlassen können. Wir wollen daher als erwiesen betrachten, daß bei der von Eddington angegebenen Temperatur 18 Elektronen von dem Atom mit der Kernzahl 26 entfernt sind. Eine Korrektion an dieser Tatsache im Hinblick auf die viel niedrigeren Werte von Temperatur und Druck am Rande des Sternes ist überflüssig. Aus dem Strahlungsgleichgewicht folgt nämlich, daß der Gasball als ein isothermes und isobares Gebilde anzusehen ist. Der Abfall der Temperatur und des Druckes erfolgt erst in den äußersten Randzonen, die eine räumliche Ausdehnung von noch nicht 10 Proz. des ganzen Volumens besitzen[1]. — Aus unserer Rechnung läßt sich gleichzeitig das Verhalten anderer Atome übersehen. Ist die Kernzahl kleiner als 26, so bedeutet dies für die Dissoziation, daß unter gleichen Umständen eine weitergehende Abspaltung der Elektronen erfolgen kann, ist die Kernzahl größer, so wird die Dissoziation entsprechend erschwert. Wir dürfen unser Bei-

1) Ich konnte diese Tatsache aus einigen unveröffentlichten Berechnungen des Herrn Dr. Kohlschütter entnehmen, die er auf Grund der Eddingtonschen Formeln ausgeführt und mir in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellt hat.

spiel in erster Annäherung also als Mittel betrachten, denn obwohl die Kernzahl 26 bei weitem nicht die Mitte der möglichen Kernzahlen (1—92) darstellt, spricht für ihre Annahme das stark überwiegende kosmische Vorkommen des Eisens.

Rechnen wir mit der gefundenen Atomdissoziation weiter, so ergibt sich das mittlere Atomgewicht der Gaskugel, indem wir das zugrunde gelegte Kerngewicht 56 auf die Anzahl der durch den Dissoziationsvorgang entstehenden 17 Teilchen (d. h. $2 \cdot 8$ Elektronen plus ein 10fach positiv geladener Trümmer) verteilen; also $56 : 17 = 3,3$. Das ist aber annähernd der Wert, den Eddington seinen Rechnungen zugrunde gelegt hat (2,8). Wir sehen also, daß die (freilich sehr stark extrapolierte) Theorie thermochemischer Vorgänge nicht allein im Einklang mit der Eddingtonschen Annahme steht, sondern sogar eine gewisse Stütze für sie zu sein scheint. — Es darf noch betont werden, daß wir selbst bei den angegebenen Temperaturen nicht mit einem beliebig starken Atomzerfall rechnen dürfen, wie auch der zuerst von Eddington angenommene Wert 2 für das Atomgewicht der Fixsterngase nur als untere Grenze für diese Größen anzusehen war. Immerhin bleibt das Ergebnis überraschend genug; denn zunächst sollte man annehmen, daß die von Eddington geforderten Temperaturen nicht hinreichen, eine so weitgehende Atomdissoziation zu bewirken. Allerdings liegen in der Rechnung noch Unsicherheiten, die in der vorläufigen Lückenhaftigkeit unserer Erkenntnisse über den Atombau begründet sind. Soweit aber hinreichend gesicherte Aussagen für die Beantwortung der aufgeworfenen Frage getan worden sind, führen sie zu den gewonnenen Ergebnissen.

Eine Tatsache mag noch erwähnt werden. Bei den von uns für die Dissoziationswärme U_0 gewonnenen Werten von 10^7—10^8 cal liegt ein Vergleich mit den Wärmemengen nahe, die beim Zerfall radioaktiver Substanzen entstehen. Charakteristisch für diese Vorgänge ist jedoch, daß sie von Energieumwandlungen begleitet werden, die noch wieder in ganz anderen Größenordnungen liegen als die von uns betrachteten Dissoziationen. So erfolgt z. B. der Zerfall von *Ra* bis in *RaC* inklusive pro Grammatom unter Freiwerden von etwa 10^{12} cal. Würden wir diese Größe für U_0 zugrunde legen, so ergäben sich als Temperaturen, die für den Vorgang von Einfluß sind, Werte von etwa 10^{11} Grad[1]). Wir erkennen also angesichts dieser Tatsache, daß wohl Atomdissoziationen bis zu einem gewissen Grade — auch nicht die völlige Abspaltung der Elektronen vom Kern — mit den von Eddington angegebenen Temperaturen verträglich sind, daß aber die Beeinflussung radioaktiver Prozesse, d. h. des Kernzerfalls, durch jene Temperaturen nach unseren Annahmen nicht möglich ist.

Ich darf schließlich Herrn Professor Nernst für sein reges Interesse an den vorstehenden Betrachtungen meinen verbindlichsten Dank aussprechen.

1) Nernst, l. c. S. 183 ist auf anderem Wege zu der Zahl $5 \cdot 10^{10}$ Grad als „charakteristischer Temperatur" für radioaktive Prozesse gelangt.

Zusammenfassung.

Mit Hilfe des Nernstschen Wärmetheorems, der Sackur-Tetrode-Sternschen Beziehung über die Größe der chemischen Konstanten sowie der Bohrschen Atomtheorie wird untersucht, bis zu welchem Grade eine Atomdissoziation in Kern und Elektronen in dem Temperaturgebiet von 10^6 bis 10^7 Grad und bei einem Druck von 10^7 Atm. thermochemisch möglich ist. Die Rechnung ergibt unter der Voraussetzung eines bestimmten Atommodells im Mittel als obere Dissoziationsgrenze die Abspaltung der beiden äußersten Elektronenringe (16 Elektronen); hieraus folgt als mittleres Atomgewicht der Fixsterngase der Wert 3,3, der nahe an dem gelegen ist (2,8), den Eddington willkürlich, d. h. ohne Anstellung thermochemischer Betrachtungen, seiner Theorie über den inneren Aufbau der Sterne zugrunde legt.

(Eingegangen 15. Juli 1919.)

Emergenzwinkel von Erdbebenstrahlen und Poissonsche Konstante in der obersten Erdschicht.

Von C. Mainka.

Es mögen in der Schnittfigur 1 W_1 und W_2 Fronten elastischer Wellen im Erdkörper darstellen, die durch ein Erdbeben in der Entfernung $\triangle_2$ von B_2 ausgelöst sind. B_1 ist eine nahegelegene Erdbebenwarte. In B_2 ist an den Erdbebenstrahl (Wellennormale zu W_2, Trajektorie) N die Tangente T_2 gezogen, die mit der Horizontalen an B_2 den Winkel e bildet. Dieser Winkel wird in der Seismik Emergenzwinkel (Emersionswinkel) genannt.

Jm Jahrgang 1907 dieser Zeitschrift S. 51 ist vom Physiker Schuster darauf hingewiesen worden, daß die Erdteilçhen in der Erdober-

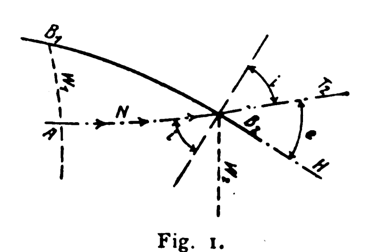


Fig. 1.

fläche (B_2) nicht nur durch die geradenwegs ankommenden Wellen, sondern auch durch die zurückgeworfenen beeinflußt werden[1]). Die Aufzeichnungen der Seismographen in der horizontalen und vertikalen Projektion rühren von der Gesamtbewegung her; der Winkel, der aus den Schaubildern durch Ausmessung der Ausschläge errechnet werden kann, wird als „scheinbarer" Emergenzwinkel e_{app} bezeichnet.

Für die räumliche Festlegung der Gesamtbodenbewegung in B_2 stehen Seismographen zur Verfügung, deren Freiheitsgrade der Bewegung stets senkrecht (ohne daß es m. E. aber unbedingt nötig ist[2])) zueinander sind, und zwar so, daß entsprechend die Projektionen der Gesamtbewegung auf die Richtung des Meridians, des ersten Vertikals und der Zenitlinie in B_2 aufgezeichnet werden. Sind die Beträge der Projektionen der wahren Bewegung in B_2, die zur ersten einleitenden Welle longitudinaler Art gehören bzw. a_N, a_E, a_Z, so ist:

$$\operatorname{tang} e_{app} = \frac{a_z}{\sqrt{a^2_N + a^2_E}}\;^{3)}.$$

Die ersten derartigen Messungen und Berechnungen hat W. Schlüter in Göttingen[4]) angestellt. Er arbeitete bereits 1900 mit einem photographisch schreibenden Seismographen für die Beobachtung des Teiles a_z der Gesamtbewegung, dessen Vergrößerung für sehr schnelle Bewegungen eine 160fache und dessen Eigenperiode bei ausgeschalteter Dämpfung 16 sec (Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Umkehrpunkten auf derselben Seite der Nulllage der Bewegung) war. Auch bei Rußschreibern lassen sich Eigenperioden von solcher Größenordnung erzielen, wovon Verfasser dieses sich im Sommer 1914 überzeugen konnte.

Ist v die Ausbreitungsgeschwindigkeit elastischer Wellen in den obersten Erdschichten, $\mathfrak{V}$ die scheinbare Oberflächengeschwindigkeit, so ist in dem unendlich klein gedachten Dreieck B_1B_2A, aus der Lage der Wellenfront der Wellen gegen die Erdoberfläche hervorgehend, $v = \mathfrak{V} \cdot \cos e$. oder wenn dT die Laufzeit der Welle von A nach B_2 und $d\Delta$ die Entfernung B_1B_2 (im größten Kreis gemessen) ist:

$$\cos e = v \cdot \frac{dT}{d\Delta}\;^{1)}.$$

Der Winkel e kann aus den Laufzeitkurven der betreffenden Wellen errechnet werden (Benndorf, Wiechert[1,2])). Der so aus zeitlichen Größen und den Entfernungen zweier Beobachtungspunkte ermittelte Winkel e heißt der „wahre" Emergenzwinkel.

Wie ersichtlich, ist die Art der Herleitung der beiden Winkelgrößen e_{app} und e verschieden.

Der wahre und der scheinbare Emergenzwinkel lassen sich schließlich durch folgende Formel zueinander in Beziehung setzen (Benndorf, Wiechert):

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\cos e \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1 - \sin e_{app}}}\;^{3)}.$$

V_1 und V_2 sind die Ausbreitungsgeschwindigkeiten longitudinaler bzw. transversaler Wellen in den obersten Erdschichten; $V_1 = 7{,}17$ km sec^{-1}, $V_2 = 4{,}01$ km sec^{-1}.

Benndorf hat eine Beziehung zwischen den Laufzeiten T und zugehörigen Epizentralentfernungen Δ in analytischer Form aufgestellt, sie lautet[1]):

für die 1. Vorläufer: $T_1 = 0{,}4 + 1{,}7\Delta - 0{,}042 \cdot \Delta^2$,
für die 2. Vorläufer: $T_2 = 1{,}3 + 3{,}0\Delta - 0{,}075 \cdot \Delta^2$.

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{dT_1}{d\Delta} = 1{,}7 - 0{,}084\,\Delta; \quad \frac{dT_2}{d\Delta} = 3{,}0 - 0{,}150\,\Delta,$$

wo T_1, T_2 in Min., Δ in Megameter (1 Megam. = 1000 km) anzunehmen ist.

1) Annahme von Anisotropie (Rudzki) macht die Verhältnisse verwickelter.

2) Es muß bekannt sein: der Winkel, den die Richtungen der Bewegungsfreiheiten der Seismographen miteinander bilden, der Winkel, den die Richtung der Bewegungsfreiheit eines Horizontalseismographen mit dem Meridian oder dem ersten Vertikal bildet, die Richtung der Bewegungsfreiheit des Vertikalseismographen mit der Horizontalen. Vgl.: Anhang zu den Veröffentlichungen der Hohenheimer Erdbebenwarte herausgegeben von K. Mack: C. Mainka, Über einige Änderungen am bifilaren Kegelpendel, Stuttgart 1915 und Zeitschr. f. Feinmechanik 23, 1915: C. Mainka, Über Erdbebenwellenmesser.

3) Sind Vergrößerungen und Eigenperioden der drei Seismometer gleich, so ist die Rechnung einfach. H. Benndorf, Über die Bestimmung von Azimut und scheinbarem Emergenzwinkel longitudinaler Erdbebenwellen. Wien 1913.

4) Vgl. Gerlands Beitr. z. Geophysik, Bd. 5.

1) Über die Art der Fortpflanzung der Erdbebenwellen im Erdinnern von H. Benndorf, Teil 1 u. 2. Wien 1906.

2) Wiechert, E., u. L. Geiger, Bestimmung des Weges der Erdbebenwellen im Erdinnern. Diese Zeitschr. 11, 294, 1910 und Berechnung von Weg und Geschwindigkeit der Vorläufer: Zoeppritz und Geiger, Gött. Nachr. 1909.

3) Diese Zeitschr. 13, 83—84, 1912. Einfache Voraussetzungen angenommen.

Diese beiden Ausdrücke in Verbindung mit dem Ausdruck für $\cos e = v \cdot \frac{dT}{d\Delta}$ weisen darauf hin, daß der wahre Emergenzwinkel e von der Entfernung Δ abhängig ist, also auch infolge der obigen Beziehung für $V_1 : V_2$ der scheinbare Emergenzwinkel e_{app}, ebenso der Quotient

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{dT_2}{d\Delta} : \frac{dT_1}{d\Delta}.$$

In der Tabelle I sind nach den Epizentralentfernungen Δ die wahren Emergenzwinkel, wie sie sich nach der Göttinger Laufzeitkurve 1906 und nach den angeführten Benndorfschen Ausdrücken ergeben, zusammengestellt[1]):

Tabelle I.

für Δ in Megam. —	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gött. 1906: e f. longit. W.	37°	49°	57°	63°	65°	65°	66°	67°	69°
Gött. 1906: e f. transv. W.	37	49	59	62	63	64	65	66	67
Benndorf: e f. longit. W.	49	52	54	56	59	62	64	66	68
Benndorf: e f. transv. W.	50	52	54	56	59	62	64	67	69

Aus $V_1 : V_2$ läßt sich nach oben e_{app} berechnen, wenn e gegeben ist.

Mit der Messung und Berechnung von e_{app} hat sich auch 1910—1911 Galitzin in Pulkovo bei St. Petersburg beschäftigt[2]).

In der nachstehenden Tabelle II sind die sich auf Göttingen bzw. Pulkovo beziehenden Epizentralentfernungen Δ in Kilometern, die Schlüterschen Werte für e_{app} (überschrieben: Göttingen), die Galitzinschen Werte für e_{app} (Pulkovo), die zugehörigen nach der Göttinger Laufzeitkurve 1906 berechneten wahren Emergenzwinkel e und die aus diesen errechneten scheinbaren Emergenzwinkel (e_{app}) gegeben.

Die Berechnung der Werte (e_{app}) geschah nach der aus der obigen für $V_1 : V_2$ hervorgehenden Formel: $\sin e_{app} = 1 - 0{,}625 . \cos^2 e$.

Absichtlich sind in der Tabelle II die nicht ausgeglichenen Werte den in der Fußnote angegebenen Arbeiten entnommen. Über die in der Galitzinschen Abhandlung gegebene graphische Ausgleichung könnte z. B. auch eine andere Auffassung herrschen.

Die einfachen Voraussetzungen, die, um überhaupt zu einem Ergebnis zu kommen, angenommen werden müssen, werden sicherlich

Tabelle II.

Δ bezogen auf Gött.	Pulk.	e_{app} für Gött.	Pulk.	(e_{app}) Gött.	e
km	km	°	°	°	°
2000	—	29	—	37	37
2100	—	39	—	38	38
—	2260	—	51	40	41
—	2390	—	50	41	43
2400	—	56	—	41	43
—	2450	—	51	42	44
—	2490	—	43	42	44
—	2530	—	48	42	44
2800	—	59	—	46	48
—	3140	—	46	48	50
—	3840	—	42	53	56
—	5800	—	51	62	65
—	6540	—	51	63	65
—	7470	—	57	63	66
7500	—	64	—	63	66
—	7710	—	60	64	66
—	7770	—	52	64	66
—	7770	—	61	64	66
8000	—	69	—	64	66
—	8270	—	59	64	67
8500	—	73	—	64	67
—	8540	—	68	64	67
9000	—	75	—	65	67
9500	—	78	—	66	68
—	9570	—	68	66	68
11400	—	78	—	69	71
—	13800	—	71	—	—
—	14210	—	74	—	—
14000	—	80	—	—	—
—	14600	—	76	—	—

nicht zutreffen, was vor allem von der Annahme der Isotropie in den obersten Erdschichten gilt. Hierauf hat in mehreren Aufsätzen Rudzki hingewiesen.

Aus der Tabelle II geht hervor, daß e und e_{app} verschiedene Werte haben. Würde $e = e_{app}$ sein, so ergäbe sich für e einmal 90°, dann 36,8°. Nach der obigen Tabelle ist dies nicht anzunehmen; schließlich müßte nach:

$$\cos e = v \cdot \frac{dT}{d\Delta},$$

$\frac{dT}{d\Delta}$ einen konstanten Wert haben, wogegen die bisherigen Laufkurven sprechen.

Für den Fall, daß in Fig. 1: $B_1B_2 = AB_2$, $e = 0$ wird, wird $e_{app} = 22°$. Wenn der Seismograph, der den Betrag a_z aufzeichnen soll (Vertikalseismograph), richtig aufgestellt ist, so liefert er tatsächlich bei jeder Erschütterung, auch künstlichen, eine Aufzeichnung.

Es sei noch bemerkt, daß die Winkelgrößen der Tabelle II für die erste, als longitudinal angenommene Welle (den ersten Einsatz) gelten.

Das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation wird gewöhnlich als Elastizitätszahl bezeichnet; in der Seismik ist sie unter

1) Die neueren Göttinger und andere Laufzeitkurven sind in diesem Aufsatz der Kürze wegen nicht behandelt.

2) Beobachtungen über die Vertikalkomponente der Bodenbewegung von B. Galitzin. St. Petersburg 1911.

dem Namen Poissonsche Konstante bekannt. Einige Seismologen haben die Ansicht, daß diese Größe, die hier mit σ bezeichnet sei, für alle Stoffe den gleichen Wert habe, was nach den Untersuchungen verschiedener Physiker nicht zutrifft. Es sei hier nur kurz auf den Aufsatz: Zug und Druck von F. Auerbach im Handbuch der Physik von Winkelmann hingewiesen.

Dieser Arbeit wurden die σ-Werte folgender Stoffe entnommen und gemittelt, um eine genäherte Angabe für die Elastizitätszahl der obersten Erdschicht zu erhalten: Eisen, Aluminium, Gläser: S. 196, 270, 714, 627, 1450, Flußspat, Baryt, Lithographenstein. Aus dieser Reihe wird $\sigma = 0{,}255$ im Mittel. Den größten Wert hat Aluminium: $\sigma = 0{,}360$ und den kleinsten hat Glas Nr. 1450: $\sigma = 0{,}197$, der Mittelwert beider $\sigma = 0{,}278$. Ist V_{long} die Ausbreitungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen $= 7{,}17\ \text{km sec}^{-1}$, V_{trans} die von transversalen Wellen in den obersten Erdschichten $= 4{,}01\ \text{km sec}^{-1}$, so ist bekanntlich, wenn

$$\gamma = V_{\text{trans}} : V_{\text{long}} \text{ ist, } \sigma = \frac{1 - 2\gamma^2}{2(1-\gamma^2)} = 0{,}258.$$

Die Übereinstimmung kann, wenn die Verschiedenheit der Art der Ermittlung berücksichtigt wird, eine befriedigende genannt werden.

Es erschien von Wert, zwischen Emergenzwinkel und der sog. Poissonschen Konstanten eine Beziehung herzustellen.

Die drei Differentialgleichungen unendlich kleiner Verrückungen u, v, w entsprechend den Achsen der x, y, z in einem rechtwinkligen Koordinatensystem in einem homogenen, isotropen Medium mit den Laméschen Konstanten λ und μ lauten in abgekürzter Schreibweise:

$$\varrho \cdot \frac{\delta^2}{\delta t^2}(u, v, w) = \mu \nabla^2 (u, v, w) + \\ + (\lambda + \mu) \cdot \left(\frac{\delta \Delta}{\delta x}, \frac{\delta \Delta}{\delta y}, \frac{\delta \Delta}{\delta z}\right).$$

Die benutzten Symbole bedeuten:

$$\nabla^2 u = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2}, \text{ ebenso für } v \text{ und } w.$$

$$\Delta = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z}.$$

Mit dem Dehnungsmodul E und dem Modul der Quertraktion σ stehen die Laméschen Konstanten λ und μ in folgender Beziehung:

$$\lambda = \frac{\sigma \cdot E}{(1+\sigma)\cdot(1-2\sigma)}, \ \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

Aus den obigen Differentialgleichungen geht hervor, daß die im Falle eines Erdbebens ausgelösten Schwingungen sich als Dilatations- und Scherungswellen bzw. Longitudinal- und Transversalwellen ausbreiten. Da die Einwirkung äußerer Kräfte, z. B. Schwerkraft, nicht angenommen ist, geschieht die Ausbreitung beider Wellenarten getrennt voneinander, was in Wirklichkeit, auch aus anderen Gründen, kaum eintreten wird (Fehlen der Isotropie: Rudzki).

Es wird schließlich, wenn ϱ die Dichte bedeutet:

$$V_{\text{long}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}, \ V_{\text{trans}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}},$$

$$\frac{V_{\text{long}}}{V_{\text{trans}}} = \sqrt{\frac{2}{1-\tau}}, \text{ wo } \tau = \frac{\sigma}{1-\sigma} \text{ ist.}$$

Es war oben:

$$\frac{V_{\text{long}}}{V_{\text{trans}}} = \sqrt{\frac{2\cos^2 e}{1 - \sin e_{\text{app}}}} = \frac{\cos e}{\sin\left(45^0 - \frac{e_{\text{app}}}{2}\right)}.$$

Somit wird:

$$\frac{1-\sigma}{1-2\sigma} = \frac{1 - \sin^2 e}{1 - \sin e_{\text{app}}} = \frac{1}{1-\tau},$$

oder nach σ aufgelöst:

$$\sigma = \frac{t}{\cos^2 e + t}, \text{ wo } t = \sin e_{\text{app}} - \sin^2 e \text{ ist.}$$

Nach dieser Formel läßt sich, wenn e und e_{app} anderweitig gegeben sind, der Modul der Querkontraktion berechnen. Aus Laboratoriumsuntersuchungen und aus dem Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeiten longitudinaler und transversaler Wellen sind Näherungswerte für σ vorhanden, die in der Nähe von 0,26 liegen. Jedenfalls wird σ von der geologischen Beschaffenheit des Untergrundes der oberen Erdschichten des Beobachtungsortes abhängen. Vielleicht wird auch die Epizentralentfernung Δ insofern mitsprechen, als hierdurch die Intensität der Wellen beeinflußt wird.

Ferner ist auch nicht so ohne weiteres die Verschiedenheit der Art der Aufhängung der Pendelgewichte bei den Horizontal- und Vertikalseismographen als unbedenklich hinzunehmen[1]). Ausschlaggebende Untersuchungen hierüber bestehen nicht.

Nach der oben gegebenen Formel für σ sind unter Benutzung der Werte für e und e_{app} aus der Tabelle II die Elastizitätszahlen σ berechnet worden. Sie sind in der Tabelle III zusammengestellt; für die Mittelbildung sind die eingeklammerten Werte nicht benutzt worden.

---

1) Mainka hat hierauf aufmerksam gemacht, vgl. u. a.: Zeitschr. f. Feinmechanik, Bd. 1909 u. 1915 und Rudzki, Physik der Erde. Leipzig, Tauchnitz 1911.

Tabelle III.

No.		e_{app}	e	$e - e_{app}$	σ
1.	G	29°	37°	+ 8°	0,161
2.	G	39	38	— 1	0,287
3.	P	51	41	— 10	0,378
4.	P	50	43	— 7	0,360
5.	G	56	43	— 13	0,405
6.	P	51	44	— 7	0,363
7.	P	43	44	+ 1	0,279
8.	P	48	44	— 4	0,335
9.	G	59	48	— 11	0,405
10.	P	46	50	+ 4	0,243
11.	P	42	56	+ 14	(— 0,062)
12.	P	51	65	+ 14	(— 0,330)
13.	P	51	65	+ 14	(— 0,326)
14.	P	57	66	+ 9	(0,024)
15.	P	64	66	+ 2	0,280
16.	P	60	66	+ 6	0,159
17.	P	52	66	+ 14	(— 0,039)
18.	P	61	66	+ 5	0,195
19.	G	69	66	— 3	0,374
20.	P	59	67	+ 8	0,060)
21.	G	73	67	— 6	0,416
22.	P	68	67	— 1	0,343
23.	G	75	67	— 8	0,437
24.	G	78	68	— 10	0,458
25.	P	68	68	— 0	0,325
26.	G	78	71	— 7	0,443

Anmerk.: P = Pulkovo; G = Göttingen.

Es ergibt sich im Mittel: $\sigma = 0{,}332 \pm 0{,}020$; die neun Göttinger Werte ergeben:

$$\sigma = 0{,}376 \pm 0{,}032,$$

die siebzehn Pulkovoer Beobachtungen liefern: $\sigma = 0{,}296 \pm 0{,}022$; die mittleren Fehler einer Beobachtung sind bzw.:

$$\pm 0{,}091, \ \pm 0{,}095, \ \pm 0{,}072.$$

Auf diese Weise läßt sich σ für jede Erdbebenwarte ermitteln und mit dem im physikalischen Laboratorium bestimmten Wert vergleichen. Zur genauen Bestimmung von e wird es sich als nötig erweisen, für jede Erdbebenwarte eine Laufzeitkurve aufzustellen[1]). In solchem Falle werden nur die Aufzeichnungen einer Warte, aber verschiedener Beben benutzt[2]).

Besondere Werte für σ: wird $\sin e_{app} = \sin^2 e$, dann ist $\sigma = 0$; wird $e_{app} = 90^0$: so wird $\sigma = 0{,}5$; wird $e = 0$, dann ist $\sigma = 1$.

Alle Kurven für σ in einer graphischen Darstellung schneiden sich im Punkt $e = e_{app}$. In der Nähe dieses Punktes liegen die einzelnen σ-Kurven sehr nahe beieinander.

Die Zusammenstellung der Werte für e in der Tabelle II läßt erkennen, daß der Emergenzwinkel, der wahre wie der scheinbare, von der Epizentralentfernung abhängig ist (Schlüter, Benndorf). Amplitudenbeobachtungen aus Diagrammen, die Epizentralentfernungen entsprechen, die größer als ein Erdquadrant sind, werden sich nach der eben genannten Einschränkung für die Bestimmung von σ nach der gezeigten Methode nicht eignen.

Wird zur Darstellung der σ-Kurven ein rechtwinkliges Achsenkreuz benutzt, ist die Abszisse die Trägerin der Werte $\sin e$ von 0 bis $+1$, die Ordinate die Trägerin der $\sin e_{app}$-Werte von 0 bis $+1$, so stellen die errechneten σ-Werte eine Schar von Parabelbogen dar. Der Parabelbogen, der durch die Werte $\sigma = 0$ gebildet wird, hat die Abszisse als Scheiteltangente; die Werte für $\sigma = 0{,}5$ liegen auf einer zur Abszisse parallelen Geraden, die durch den Punkt $\sin e_{app} = 1$ geht.

Aus der Tabelle II scheint auch hervorzugehen, daß die Werte e, die aus zeitlichen Beobachtungen sich ergeben, sich an Größe nicht bedeutend von den aus Amplitudenmessungen hervorgehenden Werten e_{app} unterscheiden[1]).

Die erwähnte graphische Darstellung (noch angenehmer ist die Anwendung von Logarithmenpapier) erleichtert die Ermittelung der Größen σ sehr, namentlich wenn ein größerer Maßstab benutzt wird; das Gebiet, das für e bzw. e_{app} praktisch in Betracht kommt, liegt zwischen 30 und 70°.

Die wenig befriedigende Übereinstimmung der Beobachtungsergebnisse e_{app} der Tabelle II sowohl untereinander, als auch im Vergleich zu (e_{app}) lassen auch Zweifel entstehen, ob die bisherigen Vertikalseismometerkonstruktionen ganz und gar einwandfrei sind.

Es sind hauptsächlich zwei Gruppen von Bauweisen dieser Instrumente zu unterscheiden: Bei Apparaten der ersten Gruppe sind die Gewichte an Zylinderfedern aufgehängt, so daß die Richtung der Schwerkraft mit der Federachse zusammenfällt und durch den Schwerpunkt des Pendelgewichts geht: der vertikale Teil der Bodenbewegung fällt in diese Richtung und wird registriert. Hierbei ist aber die stillschweigende Voraussetzung, daß ein Hin- und Herschwingen des Gewichtes ausgeschlossen ist, und daß auch die Astasierungsvorrichtung nicht eine Einwirkung des horizontalen Teiles der Bodenbewegung herbeiführt. Eine solche schädliche Einwirkung kann auch durch manche Dämpfungseinrichtung herbeigeführt werden; dieses gilt aber auch für die Apparate der zweiten Gruppe[2]).

1) Oder Benutzung von zwei nahe gelegenen Erdbebenwarten.

2) Vgl. Mainka, Über die Realität von Einsätzen in einem Seismogramm, diese Zeitschr. 16, 241 ff., 1915.

1) Über die Differenz $e - e_{app}$ werden erst zahlreichere Beobachtungen Auskunft geben können.

2) Daher müssen die beweglichen Platten bei einer Einrichtung für Flüssigkeitsdämpfung, nach Mainka in reiner Reibung beweglicher Platten in Flüssigkeit gegen feste bestehend, auch sehr leicht sein, vgl. u. a. C. R. der Int. Seism. Ass., Zermatt 1909.

Das Schema der Vertikalseismometer dieser Gruppe ist in Fig. 2 dargestellt[1]). Der genau

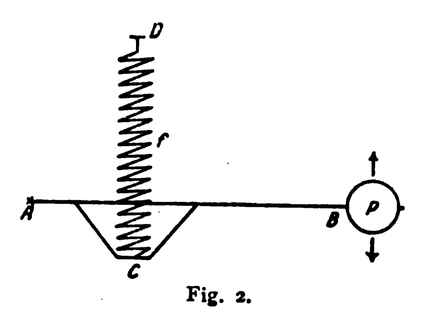


Fig. 2.

horizontale, in A gelenkige Arm AB trägt in B das Pendelgewicht P, dessen Bewegungsmöglichkeit durch die Aufhängung mit Hilfe der Feder f eine auf- und abwärtsgehende ist.

Die Feder f, bisher immer eine Zylinderfeder, ohne daß dieses nötig ist, ist in D gelenkig mit der Erde und in C unterhalb des Armes AB, um die Eigenperiode zu erhöhen, gelenkig mit AB verbunden. Ist der Arm AB horizontal eingestellt, so wirkt nur der vertikale Teil der Gesamtbodenbewegung, im anderen Falle muß die Aufzeichnung von a_z entsprechend verbessert werden. Es wird meist angenommen, daß AB, horizontal eingestellt, auch so bleibt und eine Verlagerung durch Temperatur oder elastische Nachwirkung nicht berücksichtigt werden braucht.

Wird eine Verbesserung wegen Neigung des Armes AB angebracht, so ist die Forderung nach seiner genau horizontalen Lage nicht nötig. Bei dem Vertikalseismometer, das der Mechaniker Masing nach dem Schema der Fig. 2 baut bei dem galvanometrisch-photographische Registrierung nach Galitzin vorgesehen ist, ist an P ein Index angebracht, dessen Stellung an einer mit dem Boden verbundenen Skala abgelesen werden kann. Diese Ablesungen werden wohl hie und da ausgeführt und, wenn notwendig, wird der Arm mit Hilfe von Schrauben in die richtige horizontale Lage wieder hineingebracht. Eine stündliche Ablesung bzw. photographische Aufzeichnung der Indexstellung und deren rechnerische Berücksichtigung für das Diagramm wäre sehr zu wünschen.

Ist die Abweichung von der horizontalen Lage beträchtlich, dann dürfte auch eine einfache Korrektur kaum genügen, infolge der nicht ganz einwandsfreien Beanspruchung der Feder, die durch die beiden Gelenke in D und C in eine gewisse Zwangslage gekommen ist.

1) Prinzip nach Ewing 1883.

Ist η der Winkel, den AB mit der Horizontalen bildet, so ist zu setzen:

$$\operatorname{tang} e_{\text{app}} = \frac{a_z \cdot \sec \eta - h \cdot \operatorname{tang} \eta}{\sqrt{a_N^2 + a_E^2}},$$

wo

$$h = \sqrt{a_N^2 + a_E^2}$$

ist. Eine strenge Prüfung der Aufzeichnungen des Vertikalseismometers ist m. E. wohl nur mit Hilfe des Grunmachschen Erschütterungsmessers für die vertikale Komponente künstlicher Bodenerschütterungen möglich[1]).

Nach den bisherigen Erfahrungen scheinen alle Bodenbewegungen künstlicher oder seismischer Art eine vertikale Komponente aufzuweisen, soweit es sich um kurzperiodische Erschütterungen handelt.

Bei Versuchen mit künstlichen Erschütterungen (Fall-, Sprengversuchen) auf Felsboden einheitlicher Art sollte der Versuch gemacht werden, V_{long} und V_{trans} zu bestimmen, da dann auf dynamischem Weg die elastischen Konstanten verschiedener Gesteinsarten festgestellt werden können.

Nach oben können somit rein seismische Beobachtungen für physikalische Ziele verwertet werden.

Anm. b. d. Korr.: Nach K. Uller, „Elastische Oberflächen-Planwellen", Ann. d. Physik 1918, 56 — eine auch für die Seismik in Frage kommende Arbeit — ist eine Sicherstellung von σ auch auf anderem Weg, als aus den Vorläufern wichtig. S. 494.

1) Derartige Prüfungen fehlen bisher. L. Grunmach, Experimentaluntersuchung zur Messung von Erderschütterungen. Berlin, Simion 1913.

Juni 1919.

(Eingegangen 20. Juli 1919.)

Über die Schaltungsweisen des Audions.

Von D. Coster.

In den letzten Jahren hat das Dreielektrodenrelais, oft Audion genannt, eine vielseitige Anwendung in der drahtlosen Telegraphie gefunden. Zweck der vorliegenden Arbeit ist hauptsächlich, „die generativen Schaltungen" des Audions zu diskutieren, d. h. alle diejenigen Schaltungen, wodurch es möglich ist, mittels einer Gleichstromquelle (Batterie) Wechselstrom einer bestimmten Periode zu erzeugen. Derartige Schaltungsweisen sind in der technischen Literatur in fast verwirrender Fülle publiziert[2]). Es

2) Für eine Übersicht siehe: Armstrong, Jahrb. f. drahtl. Tel. 12, 241, 1918; Eccles, Electrician Juli 1916, S. 573, Aug. 1916, S. 595.



wird versucht anzugeben, welche prinzipiell verschiedenen Schaltungen überhaupt möglich sind[1]).

Durch Simon und seine Schüler ist des Lichtbogenphänomens halber die Frage der Instabilität elektrodynamischer Systeme studiert worden[2]). Eine der Bedingungen für die Entstehung von Wechselströmen in einem Stromkreise, der außer „Wechselwiderständen" nur Gleichstromquellen enthält, ist, daß wenigstens einer der Ohmschen Widerstände „eine fallende Charakteristik" hat. Hierunter wird verstanden, daß in diesem Widerstand (in casu dem Lichtbogen) mit einer Stromvergrößerung eine Spannungserniedrigung zusammengeht und umgekehrt. Für den Wechselstrom an und für sich genommen hat dieser variable Widerstand den Charakter eines negativen Widerstandes; mit anderen Worten die Spannungsvariation an einem solchen Widerstand mit umgekehrtem Zeichen versehen kann man als die elektromotorische Kraft des Wechselstroms betrachten.

Beim Audion hat man respektive mit zwei Strömen: Anodenstrom (i in Fig. 1) und Gitter-

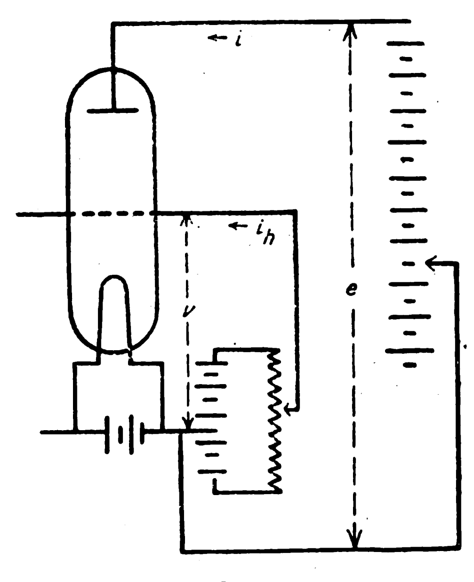


Fig. 1.

strom (i_k) und zwei Spannungen: Anodenspannung (e) und Gitterspannung (v) zu tun. Der Gitterstrom i_k ist meistens klein im Vergleich mit i und wird vielfach, wie auch hier, vernachlässigt. Der Anodestrom ist abhängig von beiden Spannungen, also:

$$i = f(e, v). \qquad (1)$$

Fig. 2 gibt i als Funktion von e, bzw. für

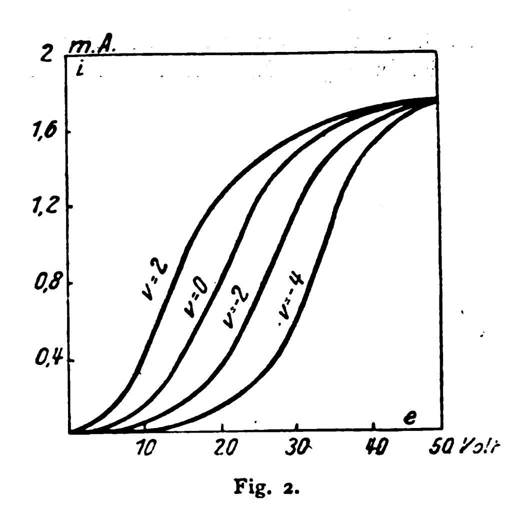


Fig. 2.

verschiedene Werte von v. i als Funktion von v gibt eine ganz analoge Kurve meistens steiler. Fig. 2 gibt nur den allgemeinen Charakter dieser Kurven; die verschiedenen Ausführungsformen des Audions zeigen keine prinzipiellen Unterschiede. Wie aus der Figur ersichtlich, hat das Audion, wenn man i nur als Funktion der Anodespannung e betrachtet, eine steigende Charakteristik und ist also stabil. Nur indem man das Gitter auf geeignete Weise mit dem Anodenkreise koppelt, ist es unter Umständen möglich, Wechselströme bestimmter Periode zu erzeugen.

Es wird angenommen, daß die Spannungen e und v so gewählt worden sind, daß der mittlere Betriebszustand durch einen Punkt ungefähr in der Mitte der Neigung der e- und der v-Kurve charakterisiert wird. Die Kurven werden in der Umgebung der betreffenden Punkte durch gerade Linien approximiert, d. h. die Abhängigkeit zwischen i einerseits und e und v andererseits wird als linear angenommen. Wir fragen nach der Möglichkeit, daß neben der „Gleichstromlösung" i_0, e_0, v_0 die Differentialgleichungen des Systems eine „Wechselstromlösung" i', e', v' zulassen.

Aus

$$i_0 + i' = f(e_0 + e', \; v_0 + v') \text{ [vgl. (1)]}$$

läßt sich folgern:

$$i' = \frac{\partial f}{\partial e} e' + \frac{\partial f}{\partial v} v'. \qquad (2)$$

Schreiben wir

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \frac{1}{r} \text{ und } \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial e}} = \lambda,$$

so ist:

$$-e' = \lambda v' - r i'. \qquad (3)$$

1) Für eine ausführlichere Behandlung dieser Frage siehe meinen Artikel in: Verslagen Kon. Ac. v. Wet. Amsterdam, Febr. 1919.

2) Diese Zeitschr. 3, 282, 1902; 4, 366, 737, 1903.

Wenn wir also für einen Augenblick den Wechselstrom unabhängig von dem Gleichstrom betrachten, so ist das Audion formell aufzufassen als ein Wechselstromgenerator mit einer elektromotorischen Kraft $\lambda v'$ und einem inneren Widerstand r. Die Stromschwankungen i' werden bedingt durch die Spannungschwankungen v' des Gitters. Im trivialen Falle können diese Spannungsschwankungen durch „äußere Kräfte" (z. B. Kopplung mit der Antenne) verursacht werden. Aber im Falle der Selbsterregung geschieht dieses durch geeignete Kopplung des Gitters mit dem Anodeschwingungskreis und das ist gerade der Fall, der uns hier interessiert.

Die Differentialgleichungen eines elektrodynamischen Systems sind von der Form:

$$\Sigma R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \int \frac{i_k dt}{C_k} = \begin{cases} 0 \\ E \cos pt \end{cases}, \quad (4)$$

worin die Summation über einen geschlossenen Stromkreis zu erstrecken ist. Wenn wir uns nur für den Dauerzustand (erzwungene Schwingung) interessieren, können wir unter Benutzung der komplexen Schreibweise (4) ersetzen durch:

$$\Sigma \left\{ R_k + j\left(pL_k - \frac{1}{pC_k} \right) \right\} A_k = \begin{cases} 0 \\ E \end{cases}. \quad (5)$$

Hierin ist A_k die (komplexe) Amplitude des Stromes i_k, j ist $\sqrt{-1}$. Im Falle der Selbsterregung ist E nicht willkürlich, aber eine Funktion der Stromamplituden. Gleichung (5) braucht dann eine Ergänzung von der Form:

$$E = \Sigma B_r A_r. \quad (6)$$

Wenn ein System von Größen A_r zu finden ist, das den Bedingungen (5) und (6) genügt, bei reellem Werte von p, so ist eine freie ungedämpfte Schwingung möglich.

Die Gleichungen (5) sind ganz analog den Kirchhoffschen Gleichungen für Gleichstrom. Also kann man wie bekannt bei Wechselstromproblemen dieselben Kunstgriffe anwenden, wie bei Gleichstromproblemen. So sind z. B. zwei parallel geschaltete Wechselwiderstände z_1 und z_2 zu ersetzen durch einen einzelnen von der Größe

$$\frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}.$$

Wir sind nun imstande, die folgenden Reduktionsregeln festzustellen.

A. Existiert einmal eine generative Schaltung einer bestimmten Frequenz, so kann man daraus andere Schaltungen ableiten, wenn man die Wechselwiderstände durch für die betreffende Frequenz äquivalente Widerstände ersetzt, ohne weiter etwas Prinzipielles in der Schaltung zu ändern.

B. Auch können neue Schaltungen abgeleitet werden, wenn man die auftretenden Widerstände durch ihre konjugiert Komplexen ersetzt. Bei dieser Substitution genügt ein System von konjugiert komplexen A_r den Bedingungen (5) und (6). Im Falle, daß keine wechselseitigen Induktionen auftreten, ist dieses zu erreichen durch die Ersetzung jeder Selbstinduktionsgröße L durch eine Kapazitätsgröße C' und umgekehrt, falls $LC' = L'C = p^2$. Kommen auch wechselseitige Induktionen M vor, so ist dies nicht so einfach zu erreichen, weiter ist darauf zu achten, daß bei dieser Substitution M das Zeichen wechseln muß, was durch Umschaltung der primären oder sekundären Klemmen zu erreichen ist[1]).

Unter Benutzung der Gesetze A und B sind die verschiedenen Schaltungen leicht zu klassifizieren.

Es gibt zwei Arten von Schaltungen:

I. die direkte Schaltung (das Gitter ist unmittelbar mit dem Anodenkreis verbunden),
II. die indirekte Schaltung (das Gitter ist nur mittels welchselseitiger Induktion mit dem Anodenkreis gekoppelt).

I. Direkte Schaltung.

Das allgemeine Schema, aus dem alle anderen vermöge Regel A hervorgehen, gibt Fig. 3.

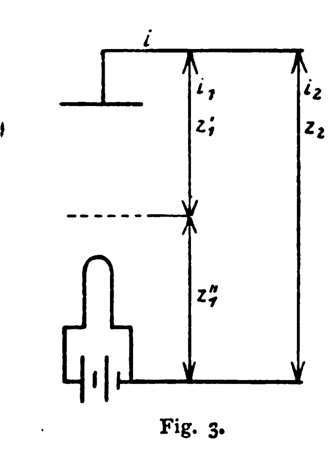


Fig. 3.

$z_1 = z_1' + z_1''$ und z_2 sind Wechselwiderstände r und λ haben dieselbe Bedeutung, wie in (3) Statt (5) und (6), hat man hier beziehungsweise:

$$\left(r + \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} \right) i = \lambda v. \quad (7)$$

---

1) Prof. Elias machte mich gütigst darauf aufmerksam, daß im letzteren Falle eine ganz symmetrische Substitution entstehen würde, falls man die wechselseitige Induktion durch eine „wechselseitige Kapazität" (zwei ineinander geschobene Kondensatoren) ersetzt. Für das Interesse, das er an meiner Arbeit genommen hat, will ich ihm auch hier herzlich danken.

und[1])

$$v = -z_1'' i_1 = -\frac{z_1'' z_2}{z_1 + z_2} i. \qquad (8)$$

Durch Kombination von (7) und (8) erhält man

$$r + \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} + \lambda \frac{z_1'' z_2}{z_1 + z_2} = 0. \qquad (9)$$

Schreibt man $z_1 = x_1 + j y_1$ usw. ($j = \sqrt{-1}$) und setzt den reellen bzw. imaginären Teil von (9) gleich Null, so findet man:

$$\left.\begin{matrix} x_2 \{ x_1' + (1+\lambda) x_1'' \} + r(x_1 + x_2) - \\ - y_2 \{ y_1' + (1+\lambda) y_1'' \} = 0. \end{matrix}\right\} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{matrix} y_2 \{ x_1' + (1+\lambda) x_1'' \} + r(y_1 + y_2) + \\ + x_2 \{ y_1' + (1+\lambda) y_1'' \} = 0. \end{matrix}\right\} \qquad (11)$$

Für reelles p sind x_1, x_2 usw. wesentlich positiv, r und λ sind positive Audionskonstanten; y_1, y_2.. sind entweder positiv (Selbstinduktion), oder negativ (Kapazität). Aus (10) und (11) ist nun zu schließen, daß Schaltung I nur auf zwei prinzipiell verschiedene Weisen auszuführen ist:

Erstens: y_2 und y_1'' negativ; y_1' positiv; während

$$-(y_1'' + y_2) < y_1' < -(1+\lambda) y_1''. \qquad (12)$$

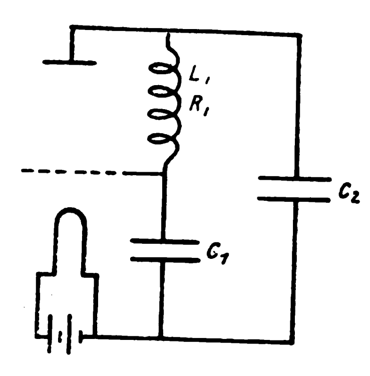


Fig. 4.

Fig. 4 gibt diese Schaltung in einfachster Form. (10) und (11) ergeben hier:

$$p_2 = \frac{1+\lambda}{L_1 C_1 + r R_1 C_1 C_2}. \qquad (13)$$

$$p_2 = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{R}{r C_2}\right). \qquad (14)$$

Durch Elimination von p aus (13) und (14) erhält man die Bedingung für eine ungedämpfte Schwingung.

1) Wir betrachten im folgenden nur Wechselströme und -spannungen. Die Akzente bei diesen Größen [siehe (3)] lassen wir nunmehr weg. Für die Wechselströme haben die Batterien den Charakter Ohmscher Widerstände.

Zweitens: y_2 und y_1'' positiv: y_1' negativ; während

$$y_1'' + y_2 < -y_1' < (1+\lambda) y_1''. \qquad (15)$$

Fig. 5 gibt die einfachste Form dieser Schaltung. Letztere ist durch Substitution B

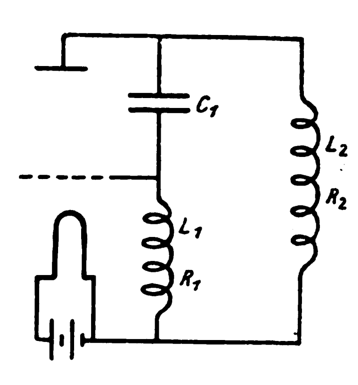


Fig. 5.

aus ersterer abzuleiten. Die Schaltung von Fig. 4 ist vielfach angewendet worden[1]), Schaltungen vom Typus Fig. 5 sind weniger allgemein.

II. Indirekte Schaltung.

Am einfachsten zu diskutieren ist der Fall, daß der Gitterkreis stromlos ist. Den reduzierten Typus gibt Fig. 6.

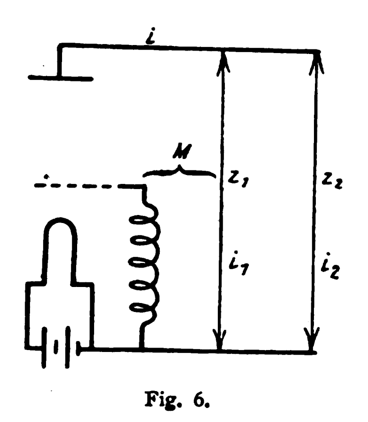


Fig. 6.

Hier ist:

$$\lambda v = \left(r + \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}\right) i. \qquad (16)$$

$$v = -j p M i_1 = -j p M \frac{z_2}{z_1 + z_2} i. \qquad (17)$$

Durch Kombination von (16) und (17):

$$\lambda p M y_2 = r(x_1 + x_2) + x_1 x_1 - y_1 y_2. \qquad (18)$$

$$-\lambda p M x_2 = r(y_1 + y_2) + x_1 y_2 + x_2 y_1. \qquad (19)$$

1) Siehe Vallauri, Jahrb. f. drahtl. Tel. 12, 381, 1918.

Genaue Untersuchung dieser Gleichungen ergibt, daß wieder nur zwei prinzipiell verschiedene Schaltungen möglich sind, welche durch Substitution B auseinander folgen.

1. y_1 pos., y_2 neg., M neg.
2. y_1 neg., y_2 pos., M pos.

Sie sind respektive angegeben durch Fig. 7 und 8. Die Schaltung von Fig. 7 ist vielfach

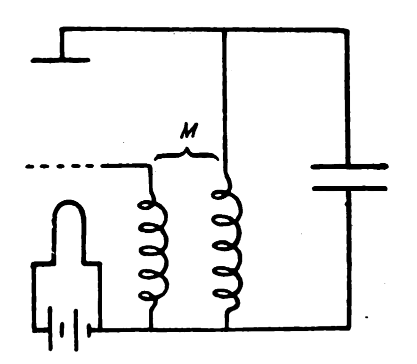


Fig. 7.

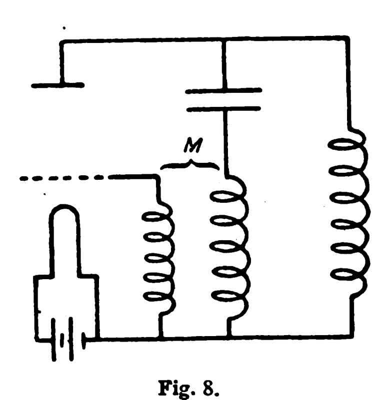


Fig. 8.

angewendet worden und theoretisch diskutiert worden durch Vallauri[1]). Die Schaltung von Fig. 8 wurde meines Wissens noch nicht diskutiert.

Ist der Gitterkreis nicht stromlos, so ist die Willkür so groß, daß es schwer erscheint einige allgemeine Regeln mit Ausnahme der Substitutionsregeln A und B festzustellen. Fig. 9 gibt ein einfaches Beispiel dieser vorkommenden Schaltungen.

Die generativen Schaltungen können auch als ausgezeichnete Verstärkungsschaltungen benutzt werden (Zurückkopplung). Hierüber läßt sich folgendes sagen. Ob eine Schaltung generativ ist, hängt ab von den Wurzeln einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} \ldots . + a_n = 0. \qquad (20)$$

1) Vgl. l. c.

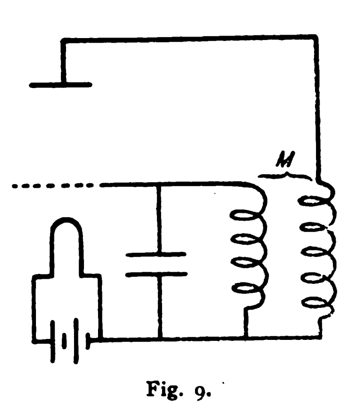


Fig. 9.

Diese Gleichung entsteht aus einer homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^2} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots . + a_n = 0, \qquad (21)$$

wenn man eine Lösung von der Form $x = Ae^{pt}$ versucht. Die A_r sind Funktionen der Wechselwiderstände, x ist ein Strom oder eine Spannung.

Gibt es mindestens eine rein imaginäre Wurzel $p = p_0$, so sind ungedämpfte Eigenschwingungen möglich. Ist das Gitter gekoppelt mit der Antenne, so hat man statt (21) die Gleichung der erzwungenen Schwingung[1]):

$$a_0' \frac{d^n x}{dt^n} + a_1' \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots . + a'_n = E e^{p't}, \qquad (22)$$

hierin ist p' rein imaginär.

Für die Amplitude A' der erzwungenen Schwingung hat man:

$$A' = \frac{E}{a_0' p'_n + \ldots . a'_n}. \qquad (23)$$

Ist nun p' gleich einer imaginären Wurzel p_0 von (20), so kann man, indem man a_0' usw. nur wenig verschieden von a_0 usw. wählt, diese Amplitude willkürlich groß machen. Eine Beschränkung findet man in der Bedingung, daß die Eigenfrequenzen, bestimmt durch:

$$a_0' p'^n + \ldots . a'_n = 0, \qquad (24)$$

genügend gedämpft sind.

In den obigen Betrachtungen ist ein linearer Zusammenhang zwischen Strom und Spannung vorausgesetzt worden. Wie aus den Charakteristiken ersichtlich ist, kann der Strom nicht über einen bestimmten Wert wachsen. Man hat also faktisch nach den Wurzeln mit positiv reellem Bestandteile der Gleichung (20) zu fragen. Eine Untersuchung wie oben gibt nur die Grenze, wo der reelle Teil der Wurzeln p

1) Die A ohne Akzent reservieren wir für den Spezialfall, daß diese Größen so gewählt worden sind, daß (20) eine rein imaginäre Wurzel $p = p_0$ hat.



das Zeichen wechselt. Es kommt mir vor, daß dies in den meisten Fällen genügt.

Nachschrift. Nach Beendigung dieser Abhandlung sehe ich aus einem Referat in den Verh. d. D. Phys. Ges. (Nr. 7/8 dieses Jahres), daß Herr Schottky und ich[1]) unabhängig voneinander gezeigt haben, daß das Audion als ein Wechselstromerreger mit konstantem inneren Widerstand aufzufassen ist. Ob wir auch in anderen Fällen analoge Resultate erreicht haben, wird sich zeigen, wenn Herr Schottky seine Arbeit publiziert hat.

Delft, Juli 1919.

(Eingegangen 19. Juli 1919.)

1) Diese Arbeit wurde im Februar 1919 in der Amsterdamer Akademie angeboten.

BESPRECHUNGEN.

O. Knoblauch u. K. Hencky, Anleitung zu genauen technischen Temperaturmessungen mit Flüssigkeits- und elektrischen Thermometern. 8°. XIII u. 128 S. m. 65 Abbildungen. München u. Berlin, R. Oldenbourg. 1919. M. 8.50, geb. M. 10.— u. 10 Proz. Sort.-Teuerungszuschlag.

Die Verfasser behandeln im wesentlichen die für den Gebrauch von Thermometern wichtige Frage, welche Maßregeln getroffen werden müssen, damit der wärmeempfindliche Teil des Thermometers wirklich die Temperatur annimmt, die vor der Einführung des Thermometers an der zu prüfenden Stelle herrschte.

Entsprechend diesem Hauptinhalt des Buches sind, wie schon aus dem Titel hervorgeht, nur Flüssigkeitsthermometer, Thermoelemente und Widerstandsthermometer behandelt, und zwar hauptsächlich hinsichtlich der Benutzung in Temperaturen zwischen 0° und einigen 100° C; optische und Strahlungs-Pyrometer sind nicht in Betracht gezogen. Die drei ersten Arten von Thermometern sind im II. Teile des Buches auch ausführlich beschrieben und durch meist gute Abbildungen erläutert, wobei auch die Vorrichtungen zu ihrer Ablesung und Prüfung in gewissem Umfange behandelt sind, so daß der Leser die Möglichkeit der jeweils zweckmäßigen Wahl unter den Thermometern hat.

Im I. Teil wird der Leser mit dem Hauptgegenstand des Buches dadurch vertraut gemacht, daß die Gesetze der Wärmeübertragung, die Theorie der Messung und die Berechnung von Oberflächentemperaturen sowie die Meßfehler durch Abstrahlung und die Theorie des Strahlungsschutzes behandelt werden, wobei auch an Zahlenbeispielen die Größenordnung der in Frage kommenden Wirkungen gezeigt wird.

Im III. Teil werden für die im II. Teil behandelten Thermometer für Temperaturen zwischen 0° und einigen 100° C die praktischen Schlußfolgerungen aus den Ergebnissen des I. Teils gezogen. Dabei werden von den Verff. ihre ausgedehnten Erfahrungen aus dem Münchener Laboratorium für Technische Physik benutzt, aber auch andere Konstruktionen und Methoden berücksichtigt. Es sind eine große Menge von Montierungen und Einbauarten der Thermometer, wie sie in der Technik vorkommen, kritisch beschrieben und durch Figuren erläutert.

Vieles von dem, was das Buch enthält, dürfte nicht nur für den Praktiker, der technische Temperaturmessungen anstellen will, wichtig sein, sondern auch den Physiker, der sich nicht speziell mit Thermometrie befaßt hat, vor Fehlern bei der Benutzung von Thermoelementen und dergleichen bewahren. Meißner.

A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik. Zweiter Band. Graphische Statik. 8°. XII u. 406 S. m. 209 Abbildungen. 4. Auflage. Leipzig, B. G. Teubner. 1918. M. 15.—, geb. M. 16.—

Bei dem bekanntesten Lehrbuch der technischen Mechanik, von welcher der zweite Band in neuer Auflage vorliegt, erübrigt sich eine besondere Empfehlung. Es mag hier höchstens auf die große Bedeutung hingewiesen werden, welche die Mechanik für die gesamte Physik besitzt und hervorgehoben werden, daß Föppl in seiner Darstellung sehr ausführlich auf die Grundlagen und den Zusammenhang der Gesetze eingeht, wodurch seine Lehrbücher über den Kreis der Ingenieure hinaus auch für den Naturwissenschaftler von Wert sind. Im vorliegenden 2. Bande werden in sieben Abschnitten folgende Gebiete behandelt: Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte am materiellen Punkte und in der Ebene. Das Seileck. Die Kräfte im Raume. Das ebene Fachwerk. Das Fachwerk im Raume. Die elastische Formänderung des Fachwerkes und das statisch unbestimmte Fachwerk. Theorie der Gewölbe und der durchlaufenden Träger.

Betz.

F. Poske und R. v. Hanstein, Der naturwissenschaftliche Unterricht an den höheren Schulen. — Schriften des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. II. Folge. Heft 5. gr. 8°. 33 S. Leipzig, B. G. Teubner. 1918. Geh. M. 1.40.

Zweifellos überwiegt im gegenwärtigen Betrieb der höheren Schulen Deutschlands immer noch viel zu sehr der fremdsprachliche Unterricht, zum Schaden der „exakten" Fächer. Dieses Übermaß bekämpft die vorliegende Denkschrift, die aus der Arbeit des „Damnu" hervorgegangen und von zwei berufenen, in der Reformbewegung besonders tätigen Schulmännern verfaßt ist, durch Entwicklung einer Reihe schwerwiegender Gründe, die auf dem Wesen naturwissenschaftlicher Betätigung beruhen. Von den beiden Verfassern ist uns Poske als Physiker, v. Hanstein als Biologe bekannt. Die entsprechenden Abschnitte der Denkschrift sind vorwiegend oder überhaupt von dem einen und anderen bearbeitet worden, ohne daß dies äußerlich hervortritt. Nachdem im ersten Abschnitt die allgemeine Bedeutung der Naturwissenschaften im Kulturleben der Gegenwart und ihre augenblickliche Stellung an den höheren Schulen gekennzeichnet wor-

den sind, werden im zweiten der physikalische, im dritten der chemische, mineralogische und geologische, im vierten der gesamte biologische Unterricht nach ihrer Eigenart behandelt. Die Forderungen sind: Vermehrte Stundenzahl auf Kosten der philologischen Fächer, ohne daß eine Verkleinerung des Gesamtzieles höherer Schulbildung einzutreten braucht, Ausnutzung des so gewonnenen Raumes für Angliederung bisher stiefmütterlich oder gar nicht behandelter Gebiete, wie Mineralogie, Geologie und für die Einrichtung eines wenn auch bescheidenen Maßes praktischer Übungen (auch in den Oberklassen der Gymnasien!), die den Schüler zum geschickten Umgang mit den Naturgegenständen und -erscheinungen selbst zwingen, zu genauer Beobachtung, zielsicherem Handeln (im Versuch) und induktiven Überlegungen erziehen, seine Handfertigkeit üben und ihm die Freude eigener Entdeckung und selbständiger Arbeit verschaffen sollen. Uns interessieren hier besonders die Ausführungen über den physikalischen Schulunterricht. An der Hand des lehrreichen Vorbildes der Entdeckungsgeschichte physikalischer Forschung wird die einseitig deduktive und allzu stark von mathematischen Interessen überwucherte Behandlung, wie sie vielfach noch besteht, mit Recht zurückgewiesen. Die Mathematik soll nicht Selbstzweck, sondern Hilfsmittel physikalischer Erkenntnis sein. In den Schlußbemerkungen wird auf die trotz spezifischer Unterschiede, namentlich in der Methodik, bestehende Einheit der Naturwissenschaften, die den Schülern nahegebracht werden soll, hingewiesen, und die Rückwirkung der neuen Forderungen auf die Aus- und Weiterbildung künftiger Lehrer des Fachgebietes erörtert. M. Winkelmann.

H. Hartenstein, Dr. K. Sumpfs Schulphysik. Methodisches Lehr- und Übungsbuch für höhere Schulen in zwei Lehrstufen. 10. verbesserte Aufl. I. Lehrstufe. 8. VII u. 174 S. mit 340 Abb. u. 1 Spektraltafel. 1918. Geb. M. 2.40; II. Lehrstufe. 8. VIII u. 322 S. mit 422 Abb. u. 1 Spektraltafel. 1919. Hildesheim u. Leipzig, A. Lax. Geb. M. 4.80.

Die beiden bis jetzt in einem Bande vereinigten Lehrstufen der bekannten Schulphysik von Sumpf sind jetzt auch äußerlich getrennt. Dadurch waren Änderungen in der Stoffverteilung nötig, die aber den Charakter des bewährten Buches nicht geändert haben. Trotz vieler Verbesserungen findet sich in der Neubearbeitung noch manches, was methodisch veraltet und sachlich unhaltbar ist. Die I. Lehrstufe beginnt immer noch mit einer allgemeinen Einleitung, in der neben den Aggregatzuständen Porosität, Moleküle und Atome und sogar das Beharrungsvermögen behandelt wird, in der Mechanik werden die Fallgesetze deduktiv aus einer falschen und für die Schüler ganz unverständlichen Definition der Geschwindigkeit abgeleitet, in der Optik die Anomalien des Auges mit der „deutlichen Sehweite" falsch dargestellt und in der Elektrizität die Spannung und das Volt recht unklar eingeführt. Auch die Oberstufe enthält noch manche Irrtümer, z. B. die Erklärung der Ablenkung des Windes durch die Erdrotation, die Angabe, daß ein Fernrohr bei der Abbildung von Flächen die Lichtstärke vermehre. Die Vermehrung der geschichtlichen Angaben ist eine wesentliche Verbesserung. Götting.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Hamburg Dr. Fritz Gross für Physik.

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Münster Dr. Heinrich Konen zum ord. Professor für theoretische Physik ebendaselbst, der ord. Professor an der Universität Czernowitz Dr. Josef Geitler zum Honorardozenten für Physik mit Lehrauftrag für Schwachstromtechnik an der Technischen Hochschule Graz, der Professor der Chemie an der Universität London Dr A. W. Crossley zum Forschungsdirektor bei der Research Association der Britischen Baumwollindustrie, der Privatdozent an der Universität Lund Dr Manne Siegbahn zum ord. Professor der Physik an derselben Hochschule (an Stelle des in den Ruhestand getretenen Professors Johannes Robert Rydberg).

Verliehen: Den Privatdozenten für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Danzig Dr. Waldemar Grix und Dipl.-Ing. Heinrich Roth der Titel a. o. Professor.

Ehrung: Dem Leiter des Telegraphen-Versuchsamts und Privatdozenten für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Berlin Professor Dr. K. W. Wagner von der Technischen Hochschule Stockholm die alle 5 Jahre zur Verteilung gelangende goldene Cedergren-Medaille.

Gestorben: Der ord. Professor der Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich Dr. Adolf Hurwitz, der Vorsitzende des Aufsichtsrats der Siemens & Halske A.-G. und der Siemens-Schuckert-Werke in Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Wilhelm v. Siemens (nicht Werner v. Siemens, vgl. S. 504), der ord. Professor für Mechanik an der Technischen Hochschule Helsingfors Dr. Rurik Malstroem, der ord. Professor der Physik an der Technischen Hochschule Stockholm Pehr Konstantin af Bjerkén, der Leiter des astronomischen Observatoriums am Collegio Romano Professor Elia Millosevich, der ord. Professor für Chemie, Mineralogie und Geographie am Lyzeum in Regensburg Dr. Ludwig Kalvoda.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1919/20.

Technische Hochschule Prag.

Tuma: Experimentalphysik, 5 und 3; Physikalisches Praktikum, 6. — **Niethammer:** Enzyklopädie der Elektrotechnik, 3; Elektromaschinenbau, 3; Elektrische Beleuchtung und Heizung, $1^1/_2$; Elektrische Anlagen, 2; Elektrotechnische Konstruktionsübungen, II, 6. — **Siegel:** Grundzüge der Elektrotechnik, 3; Elektrotechnische Meßkunde, 2; Elektrotechnisches Praktikum I, 4. — **Breitfeld:** Berechnung der Wechselstromfernleitungen, 2. —

N. N.: Anorganische Chemie, 4; Analytische Chemie, anorganisch-qualitativ, 2; Übungen im anorganisch-chemischen und analytischen Laboratorium I und II, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen für Geübtere, tägl. außer Sonnabend. — **Wenzel.** Organische Chemie, Spezielle Chemie der aromatischen Verbindungen, 2, Analytische Methoden der organischen Chemie, 1; Ausgewählte Kapitel aus der organischen Chemie, 2; Übungen im organisch-chemischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen, für Vorgeschrittene, tägl. — **Storch:** Chemie der Metalle und technischen Metallgewinnung: II. und III. Gruppe des periodischen Systems, 2; Die wissenschaftlichen Grundlagen

der Maßanalyse, 1; Physikalische Chemie I: Chemische Statik und Dynamik, 2, IV: Elektrochemie, 3; Kleines physikalisch-chemisches Praktikum, zugleich Physikalische Methoden der Untersuchung von Nahrungsmitteln, I, Übungen, 3; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen, 15. — **Ditz**: Chemische Technologie anorganischer Stoffe I: Chemische Großindustrie, 6; Übungen im anorganisch-technologischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **Georgievics**: Chemische Technologie organischer Stoffe I, 5; Übungen im organisch-technologischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **Gintl**: Enzyklopädie der technischen Chemie, 2; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel und Untersuchung von Rohstoffen und Gebrauchsgegenständen, 3, Übungen, 8; Methoden der quantitativen Mineralanalyse, 2; Praktische Metallographie, 2, Übungen, 1 Nachmittag. — **Außerwinkler**: Photographie, 1, Übungen, 4, Photographisches Laboratorium, 4. — **Krasser**: Agrikulturchemie, 3; Technische Mykologie, 2; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen für Vorgeschrittene, tägl. — **Sigmund**: Biochemie der Alkaloide, Glukoside und Gerbstoffe, 1; Ausgewählte Kapitel der Chemie für Kulturingenieure, 2. —

Carda: Mathematik, I, 6, Übungen, 2: Elemente der höheren Mathematik, 6, Übungen, 1; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2; Ausgewählte Kapitel der Differential- und Integralrechnung, 2; Ausgewählte Kapitel der Differential- und Integralrechnung, Funktionen einer komplexen Variabeln. — **Weitzenböck**: Mathematik II, 6, Übungen, 2, für Handelslehrkandidaten, 3; Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, 2. — **Rosmanith**: Versicherungsmathematik I, 4, IIa, 2, IIb, 2; Politische Arithmetik, 2. — **Mack**: Darstellende Geometrie, 4; Konstruktive Übungen, 6; Geometrie der Lage, 3. — **Grünwald**: Ausgewählte Abschnitte aus der Bewegungslehre starrer Körper, 2. — **Pöschel**: Allgemeine Mechanik, 3, Übungen, 1, Graphische Übungen, 2; Flugtechnik, 3. — **Geßner**: Enzyklopädie der Mechanik, 3. — **Haerpfer**: Elemente der niederen Geodäsie, 2, Übungen, 2; Theorie der Kartenprojektionen, 1. — **Adamczik**: Niedere Geodäsie, $4^1/_2$, Übungen, 2; Höhere Geodäsie, 3, Übungen, 2; Geodätisches Rechnen I, 2, II, 2. — **Funk**: Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, 2. — **Pöschl**: Kolloquium über neuere Arbeiten aus der technischen Mechanik (mit Körner und Funk), 2. — **Stransky**: Einführung in die höhere Mathematik, 2. —

Universität Rostock.

Heydweiller: Experimentalphysik: Optik, Magnetismus, Elektrizität, 5; Physikalische Übungen für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 4; Wissenschaftliche Arbeiten, tägl.; Physikalisches Seminar (mit Weber), 1. — **Cohn**: Theorie des Lichts, 3; Grundlagen der Elastizitätslehre, 1. — **Weber**: Analytische Mechanik, 4; Elektrizität und Magnetismus, mit besonderer Berücksichtigung der Potentialtheorie, 2; Vektoranalysis, 1; Physikalische Übungen für Mediziner, 4; Wissenschaftlich-physikalische Arbeiten, tägl. —

N. N.: Spezielle anorganische Chemie, 2; Pharmazeutische Chemie, 2; Chemische Gleichgewichts- und Geschwindigkeitslehre, 2; Großes chemisches Praktikum: Analytische und anorganisch-präparative Arbeiten, tägl. außer Sonnabend. — Leitung wissenschaftlicher Arbeiten, tägl.; Kleines chemisches Praktikum, halbtägig; Übungen für Mediziner, mit Einführungsvorlesung (mit Stoermer), 3, für Nahrungsmittelchemiker (mit Klosmann), halbtägig. — **Stoermer**: Organische Chemie, 5; Chemie der Riechstoffe, 1; Analytische Chemie, 2; Übungen in der organischen Abteilung: a) Großes chemisches Praktikum, tägl., b) Leitung wissenschaftlicher Arbeiten, tägl.; Übungen in gerichtlich-chemischen Analysen, 7. — **Kümmell**: Chemische Verwandtschaftslehre: Chemische Statik und Kinetik, Thermochemie, 2. —

Staude: Algebra, 4; Theorie der Kurven und Flächen, 4; Mathematisches Seminar, 2. —

Technische Hochschule Stuttgart.

N. N.: Experimentalmechanik einschließlich Akustik, 2; Physikalische Messungen, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3, für Fortgeschrittene; Handfertigkeits-Praktikum und Anleitung zu Demonstrationen, 3; Physikalisches Kolloquium, 2; Theoretische Physik, 3; Meteorologie, ausgewählte Kapitel, 1. — **Glocker**: Ausgewählte Kapitel aus der neueren Physik, 2. — **Veesenmeyer**: Grundlagen der Elektrotechnik: Konstruktionen und Anlagen (mit Heidenreich), 3, Seminar, 1, Übungen, 3; Dynamobau I, 1, II, 1; Elektrotechnische Maschinenkonstruktionen I (mit Heidenreich), 4, II, 4; Elektrische Betriebe I, 1, II, 1; Projektieren elektrischer Anlagen (mit Heidenreich), I, 4, II, 4. — **Emde**: Beschreibung des elektromagnetischen Feldes, 2, Übungen, 1; Wechselstromtechnik I, 2, Übungen (mit Liebert), 8, II, 2, Übungen (mit Liebert), 4. — **Herrmann**: Elektrische Meßinstrumente und Meßmethoden I, 1, Übungen (mit Streich), 8, II, 1, Übungen (mit Streich), 4; Schwachstromtechnik I, 2, Übungen (mit Streich), 4; Übungen in drahtloser Telegraphie, 4; Grundzüge der Elektrotechnik, 2. —

Gutbier: Anorganische Experimentalchemie, 5; Übungen im Laboratorium für anorganische Chemie und anorganisch-chemische Technologie (mit Schmidt); Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der anorganischen Chemie und anorganisch-chemischen Technologie (mit Schmidt). — **Küster**: Chemie natürlicher organischer Stoffe II, 1; Technische Chemie II: Organisch-chemische Großindustrie, 2; Pharmazeutische Chemie, anorganischer Teil, 2; Chemie der Nahrungsmittel, Genußmittel und Gebrauchsgegenstände, 2; Übungen im Laboratorium für organische Chemie, organisch-chemische Technologie und Pharmazie (mit Bauer), Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiet der organischen Chemie, organisch-chemischen Technologie, Pharmazie und Nahrungsmittelchemie (mit Bauer). — **Grube**: Physikalische Chemie I, 2; Elektrochemie, 2; Übungen im Laboratorium für physikalische Chemie und Elektrochemie; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiet der physikalischen Chemie und Elektrochemie. — **Kauffmann**: Chemische Technologie für Maschinen- und Bauingenieure: Brenn- und Leuchtstoffe, 1; Farbenchemie, 2; Radioaktivität und Elektronik, 1; Chemie der Benzolderivate, 2. — **Schmidt**: Analytische Chemie, 3; Chemisches Seminar, 2. — **Bauer**: Spezielle organische Chemie, 2; Analyse organischer Handelsprodukte, 1. —

Kutta: Höhere Mathematik II, 5, Übungen, 3, III, 4, Übungen, 2, IV, 1, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 2. — **Haller**: Ebene und sphärische Trigonometrie, 2, Übungen, 2 und 1. — **Kommerell**: Niedere Analysis, 4; Elemente der Differential- und Integralrechnung, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der analytischen Geometrie des Raumes, 3. — **Mehmke**: Mathematisches Seminar, 1; Darstellende Geometrie (mit Reichert), 3, Übungen, 4; Graphisches Rechnen (mit Reichert), 1, Übungen, 2; Vektorenrechnung (mit Reichert), 3, Übungen, 1; Schatten- und Beleuchtungskonstruktionen (mit Reichert), 1, Übungen, 2; Perspektive (mit Reichert), 1, Übungen, 2. — **Kriemler**: Technische Mechanik, 4, Übungen, 2; Graphische Dynamik, 1; Die Theorie des Schiffes, 1. — **v. Hammer**: Ausarbeitung der geodätischen Aufnahmen, 2; Praktische Geometrie I: Vermessungskunde) 3, Übungen, 6; Geodätische Übungen für Geodäten (mit Heer), 4; Ausgleichungsrechnung: Methode der kleinsten Quadrate, 2; Kartenprojektionen für kartographische und geodätische Zwecke, 1, Übungen, 1; Photogrammetrie, mit Übungen, 2 und 1. —

Technische Hochschule Wien.

Mache: Physik, 6; Ausgewählte Kapitel der Physik, 2; Optik, 2. — **Flamm**: Physik, 5. — **Aigner**: Submarine Akustik in Theorie und Praxis, 2. — **Reithoffer**:

Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2; Elektrische Schwingungen und Wellen, 2; Elektotechnik, Praktische Übungen I, 4. — **Primavesi**: Dynamobau, $5^1/_2$, Konstruktionsübungen, 6. — **R. Moser**: Kommutatormotoren für Ein- und Mehrphasen-Wechselstrom, 2. — **N. N.**: Elektrotechnik: Praktische Übungen II, 4. — **Hochenegg**: Elektrische Arbeitsübertragung, 3; Bau und Betrieb elektrischer Anlagen, 2, Übungen, 4. — **Jüllig**: Elektrische Telegraphie und Eisenbahn-Signalwesen, 2. — **Zelisko**: Die Telegraphentechnik, 1. —

Bamberger: Allgemeine Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 6, Übungen, tägl. — **Böck**: Allgemeine Experimentalchemie II: Organische Chemie, 4; Chemie der synthetischen organischen Arzneimittel, 2. — **Vortmann**: Analytische Chemie, 4, Übungen, tägl. außer Sonnabend, für Vorgeschrittene, tägl. — **L. Moser**: Qualitative chemische Analyse, 2. — **Ulzer**: Technische Analyse organischer Stoffe, 2. — **Weißenberger**: Kolloidchemie, 1; Angewandte Chemie für Betriebsingenieure, 1. — **Praetorius**: Physikalisch-chemisches Messen und Rechnen, 1. — **Klimont**: Chemie der hydroaromatischen Verbindungen und Terpene, 2. — **Eder**: Photochemie und angewandte Photographie, 1; Photographisches Praktikum, 4. — **Abel**: Physikalische Chemie: Die Grundlehren der theoretischen Chemie und Elektrochemie B, 2; Physikalisch-chemisches Praktikum, 4; Konversatorium für neuere Probleme der theoretischen Chemie und Elektrochemie, 2. — **Jüptner**: Chemische Technologie anorganischer Stoffe, 5, Übungen, tägl. außer Sonnabend; Technische Feuerungen, 5. — **Paweck**: Technische Elektrochemie, 4; Ausgewählte Kapitel der technischen Elektrochemie, 2. — **Strache**: Beleuchtungsindustrie und Technologie der Heizgase, 2, Übungen, 4. — **Suida**: Chemische Technologie organischer Stoffe, 5, Übungen, tägl. außer Sonnabend. — **Oettinger**: Fette, Öle und Wachse, $1^1/_2$; Übungen in der Technischen Mikroskopie, 2. — **Ruß**: Die Bindung des atmosphärischen Stickstoffes, 1. — **Nußbaum**: Wichtigere Gebiete der elektochemischen Technologie: I, Elektrolyse der Alkalichloride, 1, III, Elektrische Öfen, 1. — **Dolch**: Grundlagen der Kohlenvergasung, 1. —

Zsigmondy: Mathematik I, 4, Übungen, 1. — **Rothe**: Mathematik I, 5; Elemente der Arithmetik und der Mengenlehre, 2. — **N. N.**: Mathematik II, 4, Übungen, 1; Elemente der höheren Mathematik, 4; Enzyklopädie der Mathematik, 3; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3. — **Reich**: Algebra, 2. — **Tauber**: Versicherungsmathematik I, 4, II, 2. — **Förster**: Politische Arithmetik, 2. — **Blaschke**: Einführung in die mathematische Statistik, 3; Mathematik der öffentlichen Versicherung, 3. — **Müller**: Darstellende Geometrie, 5, Konstruktionsübungen, 6; Die Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie, 2, Konstruktionsübungen, 2; Seminar für darstellende Geometrie, 2. — **Schmid**: Darstellende Geometrie, 4, Konstruktionsübungen, 6; Projektive Geometrie I, 3, Konstruktionsübungen, 2. — **Wieghardt**: Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper, 6, Übungen, $1^1/_2$. — **Jung**: Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper, 5, Übungen, 2. — **Kirsch**: Mechanik II: Elastizitäts- und Festigkeitslehre, 5, Übungen, 2. — **Girtler**: Enzyklopädie der Mechanik, $4^1/_2$; Theorie und Anwendung des Kreisels, nach Vereinbarung. — **Fillunger**: Analytische Mechanik des elastischen festen Körpers, $1^1/_2$. — **Lechner**: Analytische Mechanik mit seminaristischen Übungen, 2. — **Wolf**: Einführung in die Elastizitätstheorie, $1^1/_2$. — **N. N.**: Elemente der niederen Geodäsie, 4. — **Dolezal**: Niedere Geodäsie, 6 und $7^1/_2$, Übungen, 3; Ausgewählte Kapitel der Niederen Geodäsie, $1^1/_2$; Geodätisches Seminar, 2; Photographische Meßkunst, $1^1/_2$, Übungen, 2. — **Dokulil**: Übungen zur Niederen Geodäsie II, 3 und 5; Geodätisches Zeichnen: Situationszeichnen, 4; Technik des Katasterwesens, 2, Übungen, $2^1/_2$; Technische Terrainlehre, 2. — **Schumann**: Höhere Geodäsie I, 2; Ausgewählte Kapitel aus höherer Geodäsie, 1; Übungen im Beobachten und Rechnen, 3. —

Universität Würzburg.

Wien: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, Magnetismus, Elektrostatik, 5; Praktische Übungen, 4 und 8; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Harms**: Theoretische Physik: Atomistik, Elektronentheorie, Quantentheorie, Relativitätstheorie, 4, Übungen, 2; Vektoranalysis, 1. — **Rau**: Neuere Ergebnisse der Spektralforschung, 2. —

Dimroth: Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 5; Chemisches Kolloquium (mit Emmert, v. Halban, Skraup), 14 tägig, 2; Anorganisch-chemisches Praktikum (mit Emmert und Skraup), tägl. außer Sonnabend; Organisch-chemisches Praktikum, tägl.; Anleitung zu selbständigen Arbeiten (mit Emmert, v. Halban und Skraup), tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner und Zahnärzte (mit Emmert, Skraup), 4. — **Pauly**: Benzolchemie I, 2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Emmert**: Analytische Chemie, 3; Repetitorium der Grundbegriffe der Chemie, 1. — **v. Halban**: Grundzüge der physikalischen Chemie, 2, Übungen, 1; Moleküle und Atome, 1; Physikalisch-chemischer Einführungskurs, 4. — **Skraup**: Komplexverbindungen, 2; Chemie der Eiweißstoffe und Enzyme, 1. — **Hieber**: Metalle, 2. — **Heiduschka**: Chemische Technologie II, 4; Grundlage der Warenkunde des Welthandels II, 2; Pharmazeutische Präparatenkunde I: Anorganische und galenische Präparate, 3; Nahrungsmittelchemie II, 2; Gerichtliche Chemie I: Toxikologische Chemie, 2; Harnanalyse, mit Übungen, 2; Chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich technisch-chemischer, gerichtlich-chemischer und nahrungsmittel-chemischer Arbeiten, tägl.; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich der Übungen in den für den Apotheker wichtigen Sterilisationsverfahren, tägl. —

Rost: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, 4; Politische Arithmetik, insbesondere Theorie der Lebensversicherung, 4, Übungen (mit Göpfert), 2 *g*; Sphärische Astronomie, mit Demonstrationen auf der Sternwarte, 4; Einführung in die analytische Geometrie der Ebene (mit Göpfert), 4 *g*; Kombinatorik und Determinantentheorie (mit Göpfert), 2 *g*; Übungen aus der Differential- und Integralrechnung für Fortgeschrittene (mit Göpfert), 2 *g*. — **v. Weber**: Differentialrechnung, 4, Übungen, 1 *g*; Analytische Mechanik I, 4, Übungen, 2 *g*. — **Hilb**: Elementare Reihenlehre, 4; Algebra, 4, Übungen, 1 *g*. —

Universität Zürich.

Meyer: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 4; Ausgewählte Kapitel der Physik, 1; Repetitorium der Physik, 1 *g*; Physikalisches Praktikum für Anfänger, $3^1/_2$, für Vorgerücktere, halbtägig, Ausführung selbständiger wissenschaftlicher Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Greinacher**: Ionenlehre der Gase, mit Experimenten, 1; Radiologisches Praktikum, $3^1/_2$. — **Ratnowsky**: Elektromagnetische Theorie des Lichtes, 4, Übungen, 1; Über den inneren Bau der Atome, 1. — **Einstein**: Spezielle Kapitel der theoretischen Physik, 24 im ganzen. — **Wolfke**: Thermodynamik, 2. — **Tank**: Schwingungsprobleme der Mechanik und Elektrodynamik, 1. — **Meißner**: Bau und Gesetze der Linien- und Bandenspektren, 1; Interferenz-Spektroskopie, mit Demonstrationen, 1. — **Epstein**: Elektronentheorie, 3, Übungen, 1 *g*. —

N. N.: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemisch-analytisches Praktikum, tägl.; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere: Präparative Arbeiten, Ausführung selbständiger Arbeiten, tägl., für Naturwissenschaftler, halbtägig. — **Abeljanz**: Qualitative chemische Analyse, 2; Anleitung zu chemischen Arbeiten, 1; Chemisches Kolloquium, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Mediziner, Veterinäre und Naturwissenschaftler, 3 Tage, für Lehramtskandidaten, 6; Übungen im Untersuchen von Nahrungs- und Genußmitteln, 4. — **Karrer**: Aromatische

Chemie I, 3; Chemie heterozyklischer Verbindungen, 1. — **Dubsky**: Geschichte der Chemie im 19. Jahrhundert, 1; Riechstoffe: Chemische Konstitution und Geruch, 1. — **Lifschitz**: Physikalische Chemie I: Einführung, 2; Einführung in die Photochemie, 2; Neuere Theorien der organischen Chemie, 1. — **Jantsch**: Chemische Technologie I, 2; Ausgewählte Kapitel aus der anorganischen Chemie, 2. — **Agthe**: Bestimmung der Atomgruppen in organischen Verbindungen, 1. —

Fueter: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 4, Übungen, 1: Funktionentheorie, 4, Seminar über Funktionentheorie und Himmelsmechanik (mit Speiser), 1. — **Speiser**: Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen, 1; Differentialgleichungen der Himmelsmechanik, 4; Übungen zur Variationsrechnung, 1. — **Gonseth**: Angewandte Mathematik, inkl. Übungen, 4. — **Wolfer**: Einleitung in die Astronomie, 3, Übungen, 2; Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, 2. —

Technische Hochschule Zürich.

Schweitzer: Physik I, 3, Repetitorium, 1; Optik, 2; Experimentalphysik II, 4, Repetitorium, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit N. N.), 4 und 8. — **N. N.**: Physik, 4, Repetitorium, 1; Wissenschaftliche Arbeiten im physikalischen Institut, 8, 12, 24. — **Wolfke**: Thermodynamik, 2; Mathematisch-physikalisches Seminar (mit Weyl), 2; Über den inneren Bau der Atome, mit Experimenten, 1. — **Piccard**: Ausgewählte Kapitel aus der Technik physikalischer Präzisionsmessungen, 2*g*. — **Brentano**: Optik, 2*g*. — **Dällenbach**: Grundbegriffe der Theorie des elektromagnetischen Feldes, 2. — **Früh**: Meteorologie und Klimatologie, 2. — **Barbieri**: Photographie I, 2*g*; Photographisches Praktikum, 2. — **Kuhlmann**: Theoretische Elektrotechnik II, 4, Übungen, 2, IV, 4: Elektrotechnisches Laboratorium Ia, 8, IIb, 4 und 8; Elektrotechnische Konstruktionsübungen: Wechselstrom, 6. — **Tobler**: Elektrische Signalapparate für Eisenbahnen, 2; Schwachstromtechnik I, 1. — **Farny**: Elektrische Maschinen I: Gleichstrom, 3*g*; Repetitorium, 1; Wechselstrom-Kommutatormotoren, 2*g*. — **Wyßling**: Elektrische Anlagen I, 3, Übungen, 3. — **Wirz**: Apparate- und Maschinenprüfungen elekrotechnischer Betriebe, 1. —

Winterstein: Anorganische Chemie, 4, Repetitorium, 1; Chemie der Alkaloide und ihre Wirkungen, 1; Agrikulturchemisches Praktikum, 3 u. 16, für Vorgerücktere, tägl.; Anleitung zu den Übungen, 1.; Physiologisch-chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Baur**: Physikalische Chemie II, 2, Repetitorium, 1; Allgemeine Elektrochemie, 2, Repetitorium, 1; Physikalisch-chemisches Praktikum, 8; Elektrochemisches Praktikum, 4, für Elektrochemiker, 8; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Laboratorium für Vorgerücktere, tägl. — **Boßhard**: Anorganische chemische Technologie I: Wasser, Salze, Säure, 4, Repetitorium, 1; Chemische Technologie der Wärme und der Brennstoffe, 2, Repetitorium, 1; Metallurgie, 2, Repetitorium, 1; Technisch-chemisches Praktikum, 16 und 24, für Vorgerücktere, tägl. — **Fierz**: Organische Technologie I: Gespinstfasern, Bleicherei, Färberei, 3, Repetitorium, 1, II: Fette, Öle, Natürliche Kohlenwasserstoffe, 1, Repetitorium, 1; Technisch-chemisches Praktikum, 16 und 24; Chemisches Laboratorium für Vorgerücktere, tägl.; Farbenchemisches Praktikum, tägl. — **Misslin**: Technologie der Azofarbstoffe, 1*g*; Technologie der wichtigsten organischen Zwischenprodukte, 1*g*. — **Ott**: Die Leucht- und Heizgasindustrie, 1*g*. — **Ruzicka**: Chemie der Terpene und heterozyklischen Verbindungen, 2. — **Staudinger**: Anorganische Chemie, 5, Repetitorium, 1; Organische Chemie, spezieller Teil I, 2, Repetitorium, 1; Chemisches Praktikum, 24, 10 und 16, für Vorgerücktere, tägl.; Seminaristische Übungen (mit Schröter), 1. — **Treadwell**: Analytische Chemie I: Einführung in die qualitative und quantitative Analyse, 2, Repetitorium, 1; Chemie, 2, Repetitorium, 1; Analytisches Praktikum, 20, 16 u. 10, für Vorgerücktere, tägl.; Chemisches Praktikum, 24. — **Wiegner**: Agrikulturchemie I: Bodenkunde und allgemeine Düngerlehre, 3; Landwirtschaftlich-chemische Technologie: Zucker- und Spiritusfabrikation, 2; Chemie der Milch und Milchprodukte, 1; Anleitung zu den Übungen im agrikulturchemischen Laboratorium, 1; Agrikulturchemisches Praktikum, 8 und 16, für Vorgerücktere, tägl.; Kolloidchemie, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Fütterungslehre, 2. — **Zschokke**: Militärsprengtechnik, eingeschlossen Spreng- und Triebmittel, 2. —

N. N: Algebraische Gleichungen, 4; Mathematisches Seminar, 2. — **Amberg**: Mathematische Probleme der Sozialversicherung, 1*g*. — **Baeschlin**: Vermessungskunde II, 4, Repetitorium, 1; Ausgewählte Kapitel aus der Vermessungskunde, 3, Repetitorium, 1, Übungen, 2; Geodätisches Praktikum, 2; Höhere Geodäsie, 3, Repetitorium, 1. — **Beyel**: Rechenschieber mit Übungen, 1; Darstellende Geometrie, 2; Axonometrie und Perspektive, 2. — **Fehr**: Katasterwesen, 1*g*. — **Franel**: Höhere Mathematik, I, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2, III, 3, Übungen, 1. — **Gonseth**: Variationsrechnung, 1; Gleichungen mit partiellen Abteilungen, 2. — **Großmann**: Darstellende Geometrie, 4, Repetitorium, 1, Übungen, 4; Ebene algebraische Kurven, 2. — **Hirsch**: Höhere Mathematik I, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2, III, 3, Übungen, 1. — **Kienast**: Elastizitätstheorie, 2. — **Kollros**: Beschreibende Geometrie, 4, Repetitorium, 1, Übungen, 4; Mathematik, 3, Übungen, 1. — **Kraft**: Die Grundkräfte der Welt, 1; Geometrische Analysis, 3; Analytische Mechanik, 3. — **Meißner**: Mechanik II, 4, Repetitorium, 1, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der technischen Elastizitätslehre, 2. — **Polya**: Einführung in die Analysis reeller Größen I, 2*g*; Analytische Mechanik, 2. — **Rudio**: Höhere Mathematik, 5, Übungen, 2. — **Weyl**: Analytische Geometrie, 2, Übungen, 1; Differentialgleichungen, 4; Mathematisches Kolloquium (mit Polya), 1. — **Wolfer**: Einleitung in die Astronomie, 3, Übungen, 2; Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, 2. —

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Für den Anzeigenteil verantwortlich S. Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

